

VISÃO COMPUTACIONAL

Lista 1 - projeções e homografias

Isabelle Rodrigues Vaz de Melo

30 de julho de 2023

1 Projeções

Para esta questão, teremos dois mapeamentos - um para cada par de conjunto de pontos 2D-3D. Podemos visualizar os pontos no espaço 3D para entender suas distribuições através da figura 1 e figura 2. O objetivo é encontrar uma matriz de projeção \mathbf{P} que mapeia os pontos dos espaços projetivos 3D para 2D de tal forma que:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}\mathbf{X} \quad (1)$$

Podemos simplificar o sistema de equações (1) para um sistema do tipo $\mathbf{A}\mathbf{p} = 0$, em que \mathbf{p} é o vetor coluna contendo as entradas da matriz \mathbf{P} , permitindo que seja feito o uso de decomposição SVD para encontrar a solução do espaço-nulo.

Sabendo que \mathbf{p} contém os elementos da matriz de projeção, podemos construir \mathbf{A} utilizando a representação das equações das coordenadas x_i e y_i em termos de X_i , Y_i , Z_i :

$$x_i = p_{11}X_i + p_{12}Y_i + p_{13}Z_i + p_{14} \quad (2)$$

$$y_i = p_{21}X_i + p_{22}Y_i + p_{23}Z_i + p_{24} \quad (3)$$

$$1 = p_{31}X_i + p_{32}Y_i + p_{33}Z_i + p_{34} \quad (4)$$

Multiplicamos a equação (4) por x_i :

$$x_i = p_{31}x_iX_i + p_{32}x_iY_i + p_{33}x_iZ_i + p_{34}x_i \quad (5)$$

E também por y_i :

$$y_i = p_{31}y_iX_i + p_{32}y_iY_i + p_{33}y_iZ_i + p_{34}y_i \quad (6)$$

Com isso, se pode igualar (5) e (2), e (6) com (3):

$$p_{11}X_i + p_{12}Y_i + p_{13}Z_i + p_{14} - p_{31}x_iX_i - p_{32}x_iY_i - p_{33}x_iZ_i - p_{34}x_i = 0 \quad (7)$$

$$p_{21}X_i + p_{22}Y_i + p_{23}Z_i + p_{24} - p_{31}y_iX_i - p_{32}y_iY_i - p_{33}y_iZ_i - p_{34}y_i = 0 \quad (8)$$

Podemos isolar os coeficientes na matriz \mathbf{p} e escrever a matriz \mathbf{A} genérica para N pares de pontos, levando-se em conta que \mathbf{A} terá $2N$ linhas pois há 2 linhas de sistema para cada par, e 12 colunas pelo número total de coeficientes:

$$\mathbf{A} = \left\{ \begin{array}{ccccccccccccc} X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1X_1 & -x_1Y_1 & -x_1Z_1 & -x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_1 & Y_1 & Z_1 & 1 & -y_1X_1 & -y_1Y_1 & -y_1Z_1 & -y_1 \\ \dots & & & & & & & & & & & & \\ X_n & Y_n & Z_n & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_nX_n & -x_nY_n & -x_nZ_n & -x_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_n & Y_n & Z_n & 1 & -y_nX_n & -y_nY_n & -y_nZ_n & -y_n \end{array} \right\} \quad (9)$$

Com isso, se resolve o sistema por SVD para cada um dos casos e se encontra \mathbf{P} . Para verificar se a projeção foi calculada corretamente, aplicamos a matriz \mathbf{P} aos conjuntos de pontos 3D (ou seja, encontra-se a projeção dos pontos), normalizamos este resultado e geramos os erros através da distância Euclidiana dos pontos 2D dos pontos projetados encontrados. Os resultados encontram-se nas figuras 3 e 4.

Todos os pontos projetados possuem um match com os pontos reais no espaço 2D, levando a entender que \mathbf{P} foi sim calculada de maneira correta.

Na segunda etapa da questão, foi recalculado \mathbf{P} , mas desta vez foi adicionado ruído branco aos pontos 3D de tal forma que o desvio σ da distribuição é dado por:

$$\sigma = 0.05 \max_{3D} \quad (10)$$

Onde \max_{3D} representa o valor máximo absoluto das coordenadas dos pontos 3D. Os pontos com ruído branco no espaço 3D podem ser visualizados nas figuras 5 e 6.

Já as figuras mostrando os erros dados pelas projeções podem ser vistos nas figuras 7 e 8.

Neste caso, pode-se ver que agora há um pequeno desvio dos pontos estimados para os pontos reais. Isto se dá porquê foi adicionado ruído (em uma ordem pequena com relação ao valor máximo absoluto das coordenadas) aos pontos.

Para a última etapa, encontramos \mathbf{P} no caso de substituir 20% dos pontos 3D por valores aleatórios na faixa $[-\max_{3D}, +\max_{3D}]$. Os pontos no espaço 3D com esse ruído aleatório podem ser visualizados nas figuras 9 e 10.

Já os resultados de erro de projeção podemos ver nas figuras 11 e 12.

Percebe-se que agora há um fator de aleatoriedade mais significativo - ou seja, desvios maiores - apesar de no segundo caso os pontos ainda conseguirem se manter em maioria aglomerados.

2 Homografias

As imagens com seus respectivos pontos podem ser vistas nas figuras 13 e 14. São duas imagens da mesma paisagem, mas com uma pequena mudança de perspectiva. Os pontos de localização são marcados em uma imagem e mapeados para a outra, permitindo-nos assim encontrar a relação de correspondência para diferentes perspectivas.

Devemos lembrar que a transformação que mapeia a imagem 13 na imagem 14 é diferente da transformação que mapeia a 14 na 13. O objetivo é encontrar ambas transformações.

Para isso, fazemos um procedimento semelhante ao da questão 1. O sistema matricial de transformação que leva $x_i^{(2)}$ e $y_i^{(2)}$ em $x_i^{(1)}$ e $y_i^{(1)}$ é dado por:

$$\begin{bmatrix} x_i^{(1)} \\ y_i^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^{(2)} \\ y_i^{(2)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

De forma análoga à (2),(3) e (4), fazemos:

$$x_i^{(1)} = h_{11}x_i^{(2)} + h_{12}y_i^{(2)} + h_{13} \quad (12)$$

$$y_i^{(1)} = h_{21}x_i^{(2)} + h_{22}y_i^{(2)} + h_{23} \quad (13)$$

$$1 = h_{31}x_i^{(2)} + h_{32}y_i^{(2)} + h_{33} \quad (14)$$

Para escrever o sistema na forma $\mathbf{A}\mathbf{h} = 0$. A matriz \mathbf{A} fica então:

$$A = \begin{bmatrix} x_1^{(2)} & y_1^{(2)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_1^{(2)}x_1^{(1)} & -y_1^{(2)}x_1^{(1)} & -x_1^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & x_1^{(2)} & y_1^{(2)} & 1 & -y_1^{(2)}x_1^{(1)} & -y_1^{(2)}y_1^{(1)} & -y_1^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ x_n^{(2)} & y_n^{(2)} & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_n^{(2)}x_n^{(1)} & -y_n^{(2)}x_n^{(1)} & -x_n^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & x_n^{(2)} & y_n^{(2)} & 1 & -y_n^{(2)}x_n^{(1)} & -y_n^{(2)}y_n^{(1)} & -y_n^{(1)} \end{bmatrix} \quad (15)$$

É feita decomposição SVD e encontrada H .

Encontrada esta homografia,, aplicamos ela à imagem como um todo para ver a transformação. Em teoria, a imagem transformada deve se assemelhar à imagem "irmã".

As imagens com H_{21} e H_{12} podem ser vistas respectivamente nas figuras 15 e 16.

Como podemos ver, as transformações parecem corretas pois na imagem 15 a correção feita na primeira figura do castelo levou a um resultado que se assemelha à segunda figura. O mesmo pode ser dito para a imagem 16. Veja na imagem 16 que a primeira figura está um pouco para cima e para direita com relação à segunda, e na transformação ocorre essa correção - a imagem apresenta-se um pouco mais para baixo e deslocada.

3 Correção de perspectiva

A questão informa as distâncias horizontais e verticais entre os quadros. Isso permite escrever os pontos de coordenadas (x, y) levando em conta a seguinte configuração da figura 17.

Perceba que eu somei as distâncias das larguras na imagem e mantive a altura selecionando 4 pontos não-colineares. Assim, os pontos selecionados nas 3 imagens estão respectivamente presentes nas figuras 18, 19 e 20.

Tendo as coordenadas destes 4 pontos e as coordenadas de referência, podemos aplicar à imagem uma matriz de homografia que faz o mapeamento da imagem com essa diferença de perspectiva para a imagem que seria a referência, como mostra a figura 17. Para isso, usei a mesma função de homografia que construí para a questão 2, encontrei H de cada cenário (para 3 imagens dos quadros) e apliquei a transformação em cada imagem. Os resultados podem ser vistos nas imagens 21, 22 e 23.

Pode-se perceber que os resultados mostram de fato uma correção na perspectiva, como era esperado.

Por fim, se faz um teste com uma imagem que foi tirada por mim. Nesse caso, tirei uma foto dos quadros aqui de casa. Por acaso, eles também estão em sequência de 3 quadros, sendo parecido com a foto do exercício. Fiz as medidas de base e altura, tal que a base engloba a distância do primeiro quadro até o último, e a altura de um único quadro, formando 4 pontos não colineares. O sistema de coordenadas foi igual ao da figura 17, mas com valores diferentes.

Para base encontrei 264 cm e altura 80cm. Os pontos ficaram então: $(0, 0), (0, 80), (264, 80), (264, 0)$.

A figura 24 mostra a foto original com os pontos marcados e ao lado a correção de perspectiva aplicada com o meu método computacional `findHomography`.

4 Informações extras

Os códigos em Python da lista encontram-se na subpasta `codes` da pasta mãe `lista1`. Os códigos da primeira questão, em ordem, são: `projectionmatrix.py`, `whitenoise.py` e `randomnoise.py`. Para a segunda questão temos `homography.py`. Para a última questão temos `perspectivecorrection.py` e `myimage.py`.

3D_1.npy

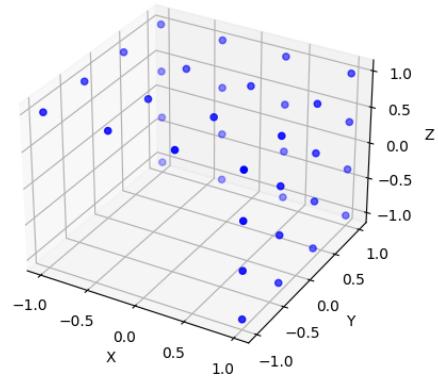


Figura 1: Figura com pontos 3D1.npy.

3D_2.npy

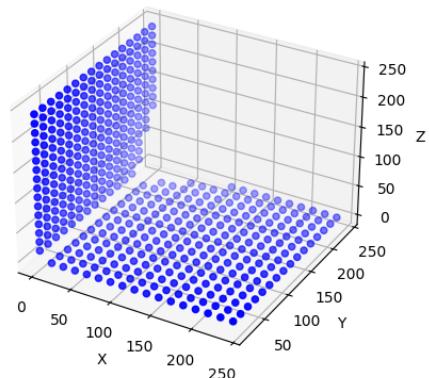


Figura 2: Figura com pontos 3D2.npy.

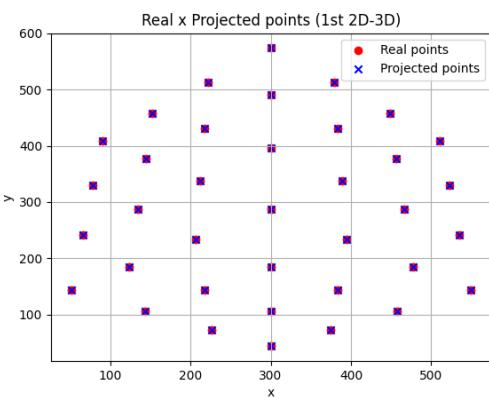


Figura 3: Erros de projeção no plano 2D - 3D1.npy.

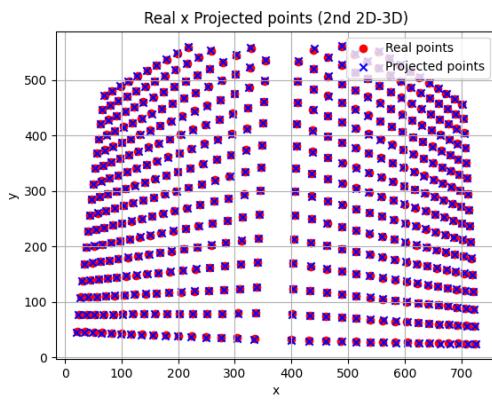


Figura 4: Erros de projeção no plano 2D - 3D2.npy.

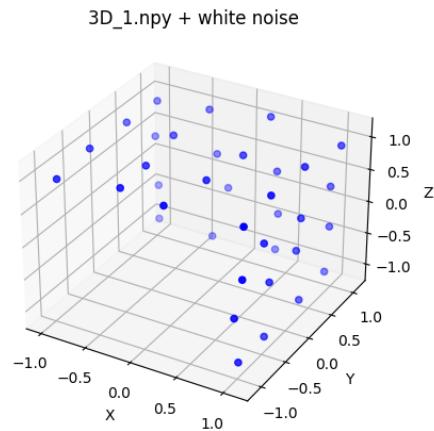


Figura 5: Figura com pontos 3D1.npy + ruído branco.

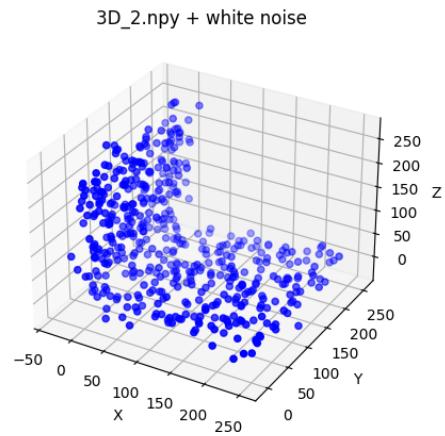


Figura 6: Figura com pontos 3D2.npy + ruído branco.

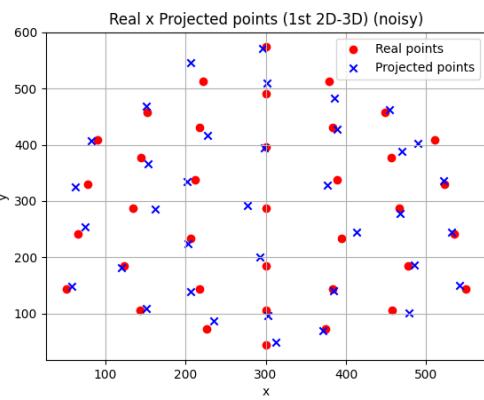


Figura 7: Erros de projeção no plano 2D - 3D1.npy + ruído branco.

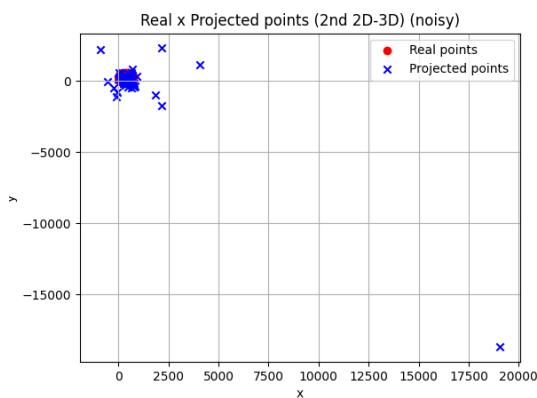


Figura 8: Erros de projeção no plano 2D - 3D2.npy + ruído branco.

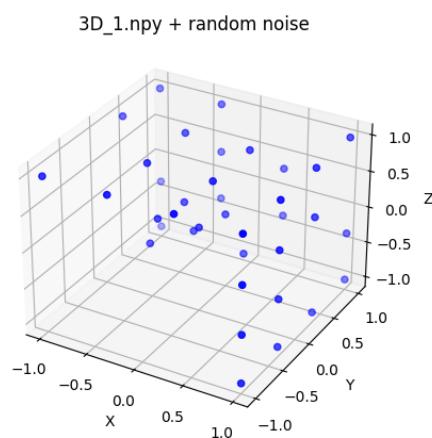


Figura 9: Figura com pontos 3D1.npy + ruído aleatório.

3D_2.npy + random noise

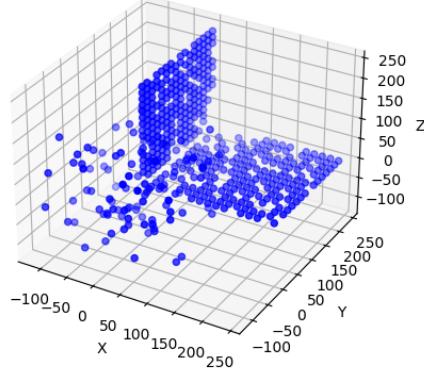


Figura 10: Figura com pontos 3D2.npy + ruído aleatório.

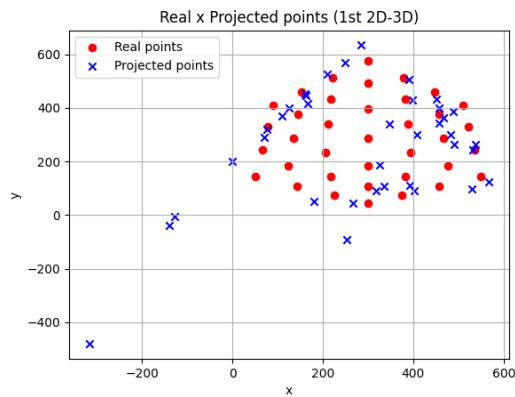


Figura 11: Erros de projeção no plano 2D - 3D1.npy + ruído aleatório.

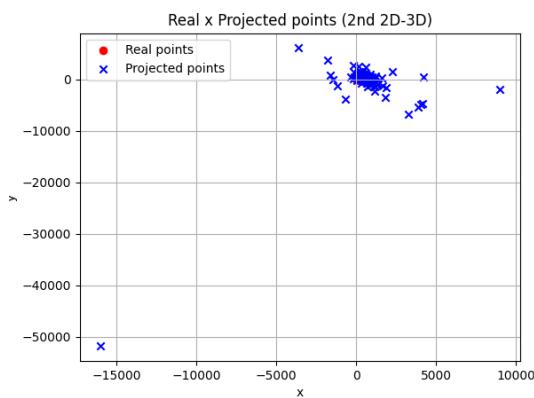


Figura 12: Erros de projeção no plano 2D - 3D2.npy + ruído aleatório.



Figura 13: Imagem 1 com pontos.



Figura 14: Imagem 2 com pontos.



Figura 15: Transformação H_{21} .



Figura 16: Transformação H_{12} .

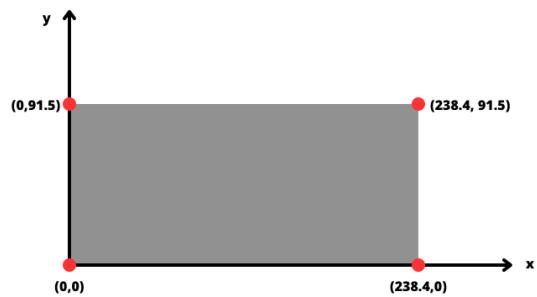


Figura 17: Sistema de coordenadas e pontos para a imagem do quadro.



Figura 18: Pontos no quadro 1.



Figura 19: Pontos no quadro 2.



Figura 20: Pontos no quadro 3.

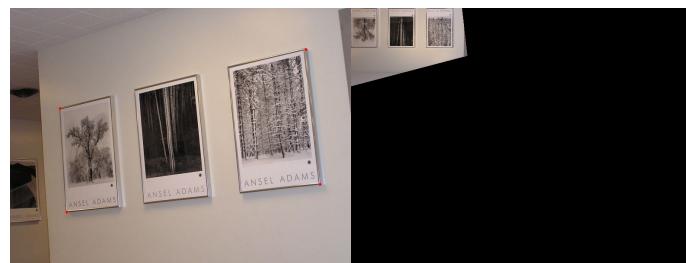


Figura 21: Imagem original 1 e correção.

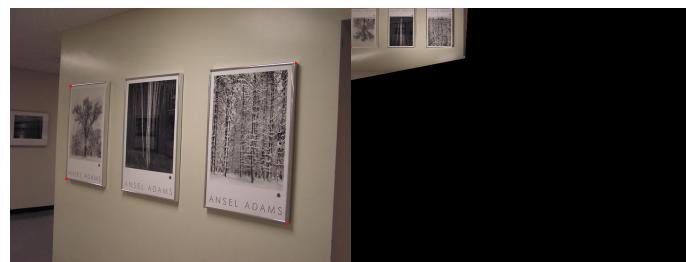


Figura 22: Imagem original 2 e correção.

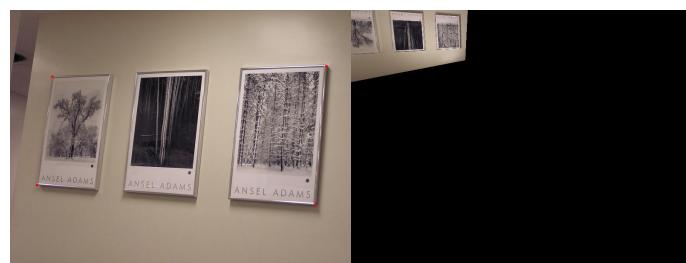


Figura 23: Imagem original 3 e correção.



Figura 24: Cena da sala da minha casa e correção de perspectiva.