

Lista 0 - retificação de imagens

Isabelle Rodrigues Vaz de Melo

PEE-UFRJ

23 de julho de 2023

1 Questão 1

A imagem a ser retificada pode ser vista na figura 1.

Neste plano com ladrilhos, podemos perceber que retas paralelas no chão se interceptam. O primeiro método é justamente realizado traçando dois segmentos fisicamente paralelos e encontrar seu ponto de interseção. A figura 2 mostra os segmentos escolhidos.

Para cada reta, foram escolhidos dois pontos - um inicial e um final, tornando possível o cálculo da forma $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ através do produto vetorial dos pares de pontos \vec{p}_1 e \vec{p}_2 :

$$\vec{l} = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \quad (1)$$

É importante lembrar que ao capturar os pontos, as coordenadas possuem a forma (x, y) . Dado que estamos trabalhando no espaço projetivo, foi feita a homogenização destes para o formato $(x, y, 1)$. Para as quatro retas - dado que $\vec{l}^{(1)} \parallel \vec{l}^{(2)}$ e $\vec{m}^{(1)} \parallel \vec{m}^{(2)}$ -, é possível obter seus pontos de interseção também através do produto cruzado:

$$\vec{v}^{(1)} = \vec{l}^{(1)} \times \vec{l}^{(2)} \quad (2)$$

$$\vec{v}^{(2)} = \vec{m}^{(1)} \times \vec{m}^{(2)} \quad (3)$$

Que são os respectivos pontos de fuga, também homogenizados. As coordenadas (x, y) encontradas foram aproximadamente de $\vec{v}^{(1)} = (1.8e + 03, -5.4e + 02)$ e $\vec{v}^{(2)} = (-522.9 - 330.7)$. Como eles pertencem à linha no infinito, podemos encontrar \vec{l} por:

$$\vec{l} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \quad (4)$$

Por conveniência, utilizei $\vec{l} = l_3(l_1/l_3, l_2/l_3, 1)$. Nesta imagem, a linha no infinito não é equivalente ao ponto $\vec{l}^\infty = (0, 0, 1)^T$ do espaço Euclidiano, existindo uma transformação que faz esse



Figura 1: Figura original.

mapeamento:

$$H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Ou seja:

$$H_1^{-T} \vec{l} = (0, 0, 1)^T \quad (6)$$

Com isto, podemos concluir que a imagem com retificação afim será dada pela aplicação da matriz H_1 na imagem da câmera X_C :

$$X_A = H_1 X_C \quad (7)$$

Essa operação remove as distorções projetivas e as linhas paralelas no mundo real passam a ficar paralelas em X_A . A figura 3 mostra na cor roxa os pontos de interseção, bem como a linha no infinito encontrada.

Após a aplicação da matriz na imagem, obteve-se a imagem com retificação afim, como se pode ver na figura 4. Podemos perceber que a imagem está livre de distorções projetivas, mas ainda possui distorções afim, visto que a transformação projetiva que mapeia \vec{l} para \vec{l}^∞ é dada por:

$$H = H_A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Na questão 3, em retificação métrica, veremos que podemos usar esse resultado para remover distorções afim da imagem.

Agora, as retas traçadas estão devidamente paralelas, mas veja que retas fisicamente perpendiculares não estão ortogonais na imagem.

2 Questão 2

Começo a questão 2 dizendo que não consegui resolvê-la por inteiro, mas deixarei explícitos os passos que segui para que possa ser auxiliada no ponto em que errei.

Primeiro, capturei três pontos colineares $\mathbf{a}'_1, \mathbf{b}'_1, \mathbf{c}'_1$ com coordenadas (x, y) . Foram calculadas as distâncias $d(\mathbf{a}'_1, \mathbf{b}'_1) = a'$ e $d(\mathbf{b}'_1, \mathbf{c}'_1) = b'$. Fazemos isto pois sabemos que os ladrilhos são uniformes, então sua correspondência no mundo real de pontos $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1$ é com as distâncias $d(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = a$ e $d(\mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1) = b$.

Neste caso, escolhi pontos semelhantes aos da figura no livro, que pode ser encontrado na figura 5. Ou seja, a primeira linha apontando para a direita tem distância no mundo real de 2 unidades de ladrilhos, e depois mais 2 unidades.

A forma de coordenadas homogêneas para os pontos físicos se dá por $(0, 1)^T, (a, 1)^T, (a+b, 1)^T$. É possível perceber que a' e b' diferem apenas de a e b por um fator de escala por conta do plano projetivo.

Para isso, montei um sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & a' & a' + b' \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} 0 & a & a + b \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

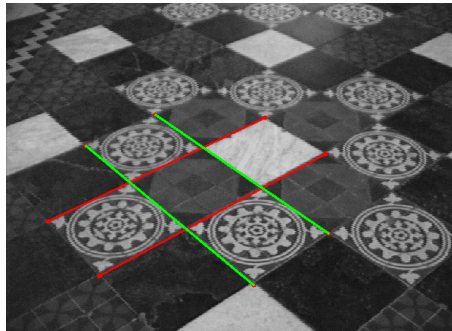


Figura 2: Figura com dois pares de retas fisicamente paralelas escolhidas.

E para encontrar a solução, considere que este sistema $X' = HX$ poderia ser resolvido por mínimos quadrados.

Os pontos selecionados foram: (125, 358), (334, 244), (490, 156) e o H_1 resultante foi:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1.0e + 02 & 9.8 \\ -4.9e - 17 & 1.0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Encontrado H por mínimos quadrados, fiz uma verificação para checar se o produto HX realmente levava em X' . O que encontrei foi que as entradas da matrix 2x3 de HX não eram exatamente iguais à X' , mas tinham valores próximos. Por exemplo, o X' de acordo com minhas coordenadas era de :

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 238.1 & 417.2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Já o produto HX encontrado foi de:

$$HX = \begin{bmatrix} 9.8 & 218.4 & 427.0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Com certa diferença numérica, mas ainda é relativamente significativo para não produzir o resultado que almejamos.

Em seguida, apliquei a matriz H no ponto do infinito $(1, 0)^T$ e encontrei o primeiro ponto de escape \vec{v}_1 . Fiz o mesmo procedimento para uma reta concorrente com outros três pontos colineares. Escrevi os pontos de fuga em coordenadas homogêneas do tipo $(x, y, 1)$, e para encontrar a reta do infinito apenas fiz o produto cruzado:

$$\vec{l} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \quad (13)$$

Construo a matriz dada pela equação 5, e aplico na imagem. Os pontos no infinito resultantes não saíram perto das linhas que deveriam gerá-los, por isso mostrarei aqui apenas o resultado final da aplicação da matriz na imagem. É possível perceber que a imagem resultante (figura 7) não saiu nada como o esperado. Imagino que isso tenha acontecido devido a algum erro na resolução do sistema de equações de mapeamento das coordenadas homogêneas. A imagem resultante deveria ser uma semelhante à da questão 1 com retificação afim.

3 Questão 3

Nas questões 1 e 2, foi realizado o procedimento de remoção das distorções projetivas. É possível perceber que após a retificação afim, as linhas - que na imagem da câmera não eram paralelas, mas no mundo real sim - tornaram-se paralelas.

A transformação projetiva é uma composição de uma similaridade, transformação afim, e distorção projetiva:

$$H = H_S H_A H_P \quad (14)$$

Ao corrigir os efeitos de projeção, a imagem ainda assim apresenta distorções afim. A figura 3 mostra que segmentos que seriam perpendiculares no mundo real, apresentam ângulos diferentes de $\pi/2$. Para que esses efeitos sejam revertidos é realizada uma retificação métrica. O objetivo é encontrar a matriz de transformação afim para realizar a transformação inversa na imagem a fim de remover estas distorções.

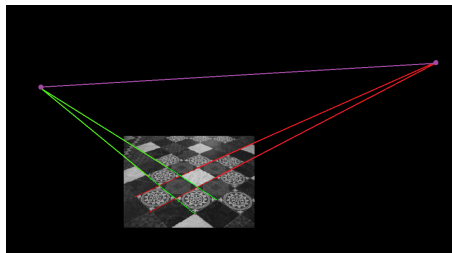


Figura 3: Figura com pontos de fuga e linha no infinito.

Foi escolhido o método "two-step", em que primeiro se realiza o mapeamento dos pontos da linha no infinito para $(0, 0, 1)^T$ - removendo distorções projetivas (já feita nas questões 1 e 2), e depois se faz a remoção da distorção afim.

Considere que a imagem retificada afim é dada por X_A tal que:

$$X_A = H_A X_S \quad (15)$$

Em que H_A é a matriz de transformação afim, e X_S a imagem do mundo real. Para realizar a retificação, queremos encontrar:

$$X_S = H_A^{-1} X_A \quad (16)$$

Note que X_A foi obtida já nos enunciados anteriores, então aqui usei como exemplo a figura 4. A forma geral de H_A é dada por:

$$H_A = \begin{bmatrix} A & \vec{t} \\ \vec{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Em que \vec{t} representa uma translação arbitrária, e A a matriz de coeficientes afim. Utilizo um par de linhas fisicamente ortogonais, \vec{l} e \vec{m} que em suas versões transformadas (afim) são representadas por \vec{l}' e \vec{m}' - formando X_A .

A transformação para linhas é dada por:

$$\vec{l}' = H_A^{-T} \vec{l} \quad (18)$$

Podemos usar o princípio para ortogonalidade para escrever o produto interno entre os pontos das linhas do tipo $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)^T$:

$$(l_1/l_3, l_2/l_3)(m_1/m_3, m_2/m_3)^T = 0 \quad (19)$$

Levando em:

$$l_1 m_1 + l_2 m_2 = \vec{l}'^T C_\infty^* \vec{m} \quad (20)$$

Para C_∞^* definido como a cônica dual degenerada em função dos pontos circulares:

$$C_\infty^* = IJ^T + JI^T \quad (21)$$

Pontos estes invariantes sob transformação de similaridade. Ou seja, essa é a forma da cônica usada para retificar imagens. Podemos abrir os termos de pontos circulares e escrever a matriz da cônica:

$$C_\infty^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

Desta forma, como uma transformação da cônica é escrita em função de H_A :

$$C_\infty^{*'} = H_A C_\infty^* H_A^T \quad (23)$$

Podemos escrever a relação (15) da seguinte maneira:

$$\vec{l}'^T C_\infty^* \vec{m} = \vec{l}'^T H_A H_A^{-1} C_\infty^{*'} H_A^{-T} H_A^T \vec{m}' = \vec{l}'^T C_\infty^{*'} \vec{m}' = 0 \quad (24)$$

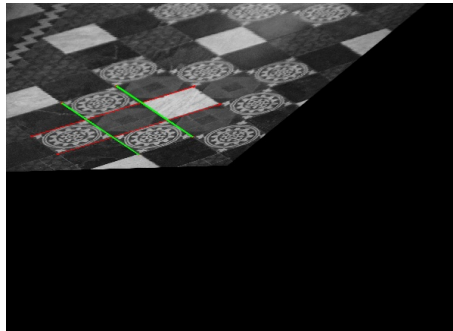


Figura 4: Retificação afim da figura 1.

Que representa a forma invariante da transformação com a cônica dual. Podemos representar a equação anterior em termos da matriz A e a matriz C_∞^* :

$$\vec{l}^T C_\infty^* \vec{m}' = \vec{l}^T H_A C_\infty^* H_A^T \vec{m} = \vec{l}^T \begin{bmatrix} AA^T & \vec{0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{m}' \quad (25)$$

Nos levando a um simples sistema de equações. Queremos descobrir A . Se chamarmos $S = AA^T$, temos que S - sendo simétrico - pode ser definido como:

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & 1 \end{bmatrix} \quad (26)$$

O fator de 1 é apenas um fator de escala. Por fim, o sistema de equações pode ser reduzido à:

$$(l'_1 m'_1, l'_1 m'_2 + l'_2 m'_1) \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{pmatrix} = -l'_2 m'_2 \quad (27)$$

Perceba que para resolver o sistema acima, como há dois fatores a serem determinados (s_{11} e s_{12}), serão necessários dois pares de retas ortogonais.

Tracei pelo OpenCV estes dois pares: para cada segmento encontrei dois pontos, tornei as coordenadas homogêneas na forma $(x, y, 1)$, e calculei o produto vetorial entre cada par de pontos para obter as coordenadas dos segmentos - assim como foi feito nas questões anteriores. Com estas coordenadas, resolvi automaticamente o sistema de equações pelo Python, e montei a matriz S . No fim, bastou realizar uma decomposição SVD em S e construir A a partir disso:

$$S = UDU^T \quad (28)$$

$$A = U\sqrt{D}U^T \quad (29)$$

Levando em:

$$X_S = \begin{bmatrix} A & \vec{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} X_A \quad (30)$$

O resultado final pode ser visto na figura 8. O método two-step foi escolhido para aproveitar o procedimento de retificação afim da questão 1. Usa-se diretamente a imagem transformada da questão 1, e nela se escolhe os pontos ortogonais, sendo mais prática pelo desenvolvimento da lista, e um método mais robusto. Ambos one-step e two-step usam a definição de cônica dual pelos pontos circulares para chegar na retificação.

Podemos ver que os segmentos perpendiculares no mundo real, agora são perpendiculares na imagem (as linhas grossas vermelhas e verde), assim como as paralelas permanecem paralelas.

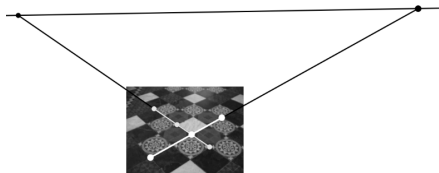


Figura 5: Figura do livro que usei como referência para capturar os pontos.

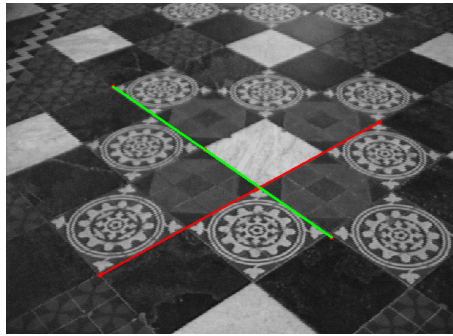


Figura 6: Pontos colineares escolhidos.

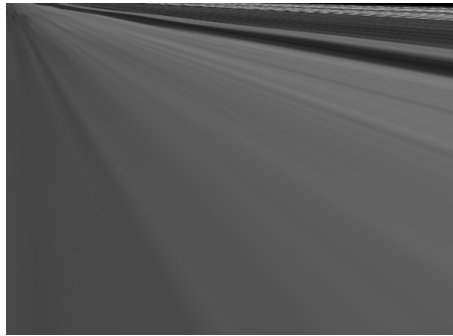


Figura 7: Resultado da aplicação da matriz de transformação na imagem.

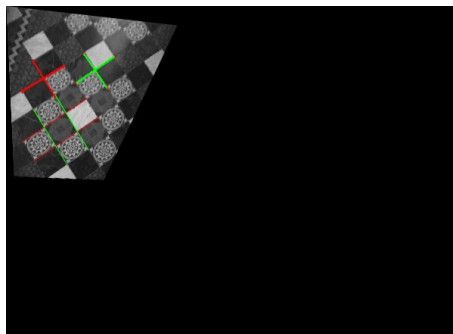


Figura 8: Retificação métrica da imagem original.