Tesis de licenciatura

Manuel Panichelli

26 de octubre de 2024

Dos tipos de reglas

- **Introducción**: Cómo demuestro?
- **Eliminación**: Cómo lo uso para demostrar?

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\mathrm{E}\bot \qquad\qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\,\mathrm{I}\top$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\,\mathrm{LEM} \qquad\qquad \frac{}{\Gamma, h : A \vdash h : A}\,\mathrm{Ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,\mathrm{I}\wedge$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\,\mathrm{E}\wedge_1 \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\,\mathrm{E}\wedge_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\mathrm{I}\vee_1 \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\,\mathrm{I}\vee_2$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,\mathrm{E}\vee$$

E$\vee$ nos deja inferir una conclusión a partir de una disyunción dando sub demostraciones que muestran como la conclusión se puede deducir asumiendo cualquiera de los elementos.

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\,\mathrm{I}{\to}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\,\mathrm{E}{\to}\ \text{(modus ponens)}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,\mathrm{I}\neg \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\,\mathrm{E}\neg$$

(TODO: Validar las justificaciones coloquiales de acá)

Las reglas de $\forall$ y $\exists$ se pueden ver como extensiones a las de $\wedge$ y $\vee$.

Un $\forall$ se puede pensar como una conjunción con un elemento por cada uno dl dominio sobre el cual se cuantifica.

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad x \notin fv(\Gamma)}{\Gamma \vdash \forall x.A}\,\mathrm{I}\forall \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A\{x := t\}}\,\mathrm{E}\forall$$

- E$\forall$: Para usar un $\forall x.A$ para demostrar (eliminar) instancio el x en cualquier *término* t, ya que es válido para todos.

- I$\forall$: Para demostrar (introducir) un $\forall x.A$, quiero ver que sin importar el valor que tome x yo puedo demostrar A. Pero para eso en mi contexto Γ no tengo que tenerlo ligado a nada, sino no lo estaría demostrando en general

$$\frac{\Gamma \vdash A\{x := t\}}{\Gamma \vdash \exists x.A} \text{ I}\exists$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists x.A \qquad \Gamma, A \vdash B \qquad x \notin fv(\Gamma, B)}{\Gamma \vdash B} \text{ E}\exists$$

- I$\exists$: Para demostrar un $\exists$, alcanza con instanciar la variable en un término t que sea válido.

- E$\exists$: Para usar un $\exists$ para demostrar, es parecido a E$\vee$. Como tenemos que ver que vale para cualquier x, podemos concluir B tomando como hipótesis A con x sin instanciar.