PPA

Un asistente de demostración para lógica de primer orden con extracción de testigos usando la traducción de Friedman

Manuel Panichelli

Deparatamento de Computación, FCEyN, UBA

Diciembre 2024

Introducción

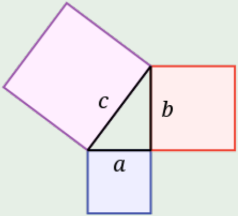
Repaso de lógica

- **Teorema**: Afirmación que puede ser *demostrada*.
- **Axiomas**: Afirmaciones que son siempre válidas (sin demostración).
- **Demostración** de un teorema:
  - *Argumento* que establece que el teorema es cierto
  - Usa *reglas de inferencia* a partir de *axiomas* y otros teoremas probados anteriormente.

Ejemplo de teorema

Ejemplo (Teorema de Pitágoras)

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



- **Sistema**: Geometría euclidiana
- **Axioma**: Se puede dibujar una línea recta entre dos puntos

Asistentes de demostración

- Los **asistentes de demostración** son herramientas que facilitan la escritura y el chequeo de demostraciones por computadora.
- Usos:
  - Formalización de teoremas matemáticos.
  - Verificación de programas.

[1] Terence Tao - Machine Assisted Proof

Asistentes de demostración

- Los **asistentes de demostración** son herramientas que facilitan la escritura y el chequeo de demostraciones por computadora.
- Usos:
  - Formalización de teoremas matemáticos.
  - Verificación de programas.
- Ventajas:[1]
  - Facilitan la colaboración a gran escala (mediante la confianza en el asistente).

[1] Terence Tao - Machine Assisted Proof

Asistentes de demostración

- Los **asistentes de demostración** son herramientas que facilitan la escritura y el chequeo de demostraciones por computadora.
- Usos:
  - Formalización de teoremas matemáticos.
  - Verificación de programas.
- Ventajas:[1]
  - Facilitan la colaboración a gran escala (mediante la confianza en el asistente).
  - Habilitan generación automática de demostraciones con IA. Por ej. un *LLM* (como *ChatGPT*) suele devolver alucinaciones, que pueden ser filtradas automáticamente con un asistente.

[1] Terence Tao - Machine Assisted Proof

Asistentes de demostración

Constructivos

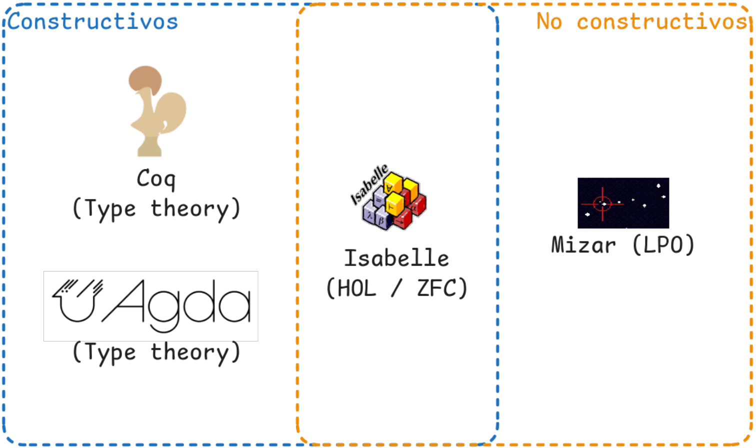
No constructivos

Coq
(Type theory)

Agda
(Type theory)

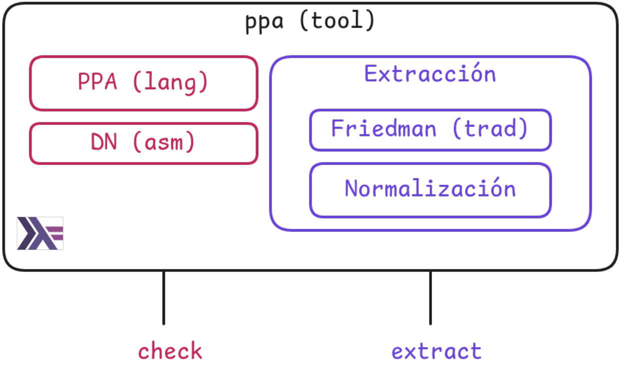
Isabelle
(HOL / ZFC)

Mizar (LPO)



Extracción de testigos: De una demo de $\exists x.p(x)$, encontrar t tq $p(t)$.
Lógica constructiva = sencillo, no constructiva = complicado.

PPA



Diseñamos e implementamos en Haskell ppa (*Pani's Proof Assistant*). Dos partes:

- El lenguaje **PPA** para escribir demostraciones.
- Mecanismo de **extracción de testigos** de demostraciones no constructivas (aporte principal).

Representación de demostraciones

¿Cómo representamos las demostraciones? Ejemplo:

- Tenemos dos axiomas
  1. Los alumnos que faltan a los exámenes, los reprueban.
  2. Si se reprueba un final, se recursa la materia.
- A partir de ellos, podríamos demostrar que si un alumno falta a un final, entonces recursa la materia.

Representación de demostraciones

¿Cómo representamos las demostraciones? Ejemplo:

- Tenemos dos axiomas
  1. Los alumnos que faltan a los exámenes, los reprueban.
  2. Si se reprueba un final, se recursa la materia.
- A partir de ellos, podríamos demostrar que si un alumno falta a un final, entonces recursa la materia.

Teorema

Si un alumno falta al final de una materia, entonces la recursa

Demostración.

- Asumo que falta. Quiero ver que recursa.
- Por (1), sabemos que si falta, entonces reprueba. Por lo tanto reprobó.
- Por (2), sabemos que si reprueba, entonces recursa. Por lo tanto recursó.

$\square$

Sistemas deductivos

- **Problema**: Poco precisa. No se puede representar rigurosamente.
- Usamos el *sistema deductivo* de **deducción natural**
- Sistema lógico formal usado para escribir demostraciones.
  - **Lenguaje formal**: lógica de primer orden.
  - **Reglas de inferencia**: Por ejemplo,
    - *modus ponens*: si es cierto $A \to B$ y A, se puede concluir B
    - *modus tollens*: si es cierto $A \to B$ y $\neg B$, se puede concluir $\neg A$

Lógica de primer orden

Definición (Términos)

Los términos están dados por la gramática:

$$
\begin{aligned}
t ::= \; & x && \text{(variables)} \\
\mid \; & f(t_1, \ldots, t_n) && \text{(funciones)}
\end{aligned}
$$

Definición (Fórmulas)

Las fórmulas están dadas por la gramática:

$$
\begin{aligned}
A, B ::= \; & p(t_1, \ldots, t_n) && \text{(predicados)} \\
\mid \; & \bot \mid \top && \text{(falso o \textit{bottom} y verdadero o \textit{top})} \\
\mid \; & A \wedge B \mid A \vee B && \text{(conjunción y disyunción)} \\
\mid \; & A \to B \mid \neg A && \text{(implicación y negación)} \\
\mid \; & \forall x.A \mid \exists x.A && \text{(cuantificador universal y existencial)}
\end{aligned}
$$

Deducción natural (DN)

Reglas de inferencia

Definiciones

Γ es un **contexto de demostración** y $\vdash$ la **relación de derivabilidad**.

Definición (Reglas de inferencia)

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \mathrm{I}{\to} \qquad\qquad \frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \mathrm{Ax}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ \mathrm{E}{\to} \quad (\textit{modus ponens})$$

Dos tipos para cada conectivo y cuantificador, dada una fórmula formada con un conectivo:

- **Introducción**: ¿Cómo la demuestro?
- **Eliminación**: ¿Cómo la uso para demostrar otra?

Ejemplo de demostración en DN

Ejemplo (Teorema en DN)

Notamos:

- $F \equiv \mathrm{falta}(\mathit{juan}, \mathrm{final}(\mathit{logica}))$
- $X \equiv \mathrm{reprueba}(\mathit{juan}, \mathrm{final}(\mathit{logica}))$
- $R \equiv \mathrm{recursa}(\mathit{juan}, \mathit{logica})$

Axiomas $F \to X$ y $X \to R$. Afirmamos $F \to R$.

Ejemplo de demostración en DN

Ejemplo (Teorema en DN)

Notamos:

- $F \equiv \mathrm{falta}(\mathit{juan}, \mathrm{final}(\mathit{logica}))$
- $X \equiv \mathrm{reprueba}(\mathit{juan}, \mathrm{final}(\mathit{logica}))$
- $R \equiv \mathrm{recursa}(\mathit{juan}, \mathit{logica})$

Axiomas $F \to X$ y $X \to R$. Afirmamos $F \to R$.

Ejemplo (Demostración en DN)

$$\frac{\Gamma = (F \to X), (X \to R), F \vdash R}{(F \to X), (X \to R) \vdash F \to R} \; \mathrm{I}{\to}$$

Ejemplo de demostración en DN

Ejemplo (Teorema en DN)

Notamos:

- $F \equiv \mathrm{falta}(\mathit{juan}, \mathrm{final}(\mathit{logica}))$
- $X \equiv \mathrm{reprueba}(\mathit{juan}, \mathrm{final}(\mathit{logica}))$
- $R \equiv \mathrm{recursa}(\mathit{juan}, \mathit{logica})$

Axiomas $F \to X$ y $X \to R$. Afirmamos $F \to R$.

Ejemplo (Demostración en DN)

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma = (F \to X), (X \to R), F \vdash R}\;\mathrm{E}{\to}}{(F \to X), (X \to R) \vdash F \to R}\;\mathrm{I}{\to}$$

Ejemplo de demostración en DN

Ejemplo (Teorema en DN)

Notamos:

- $F \equiv \text{falta}(juan, \text{final}(logica))$
- $X \equiv \text{reprueba}(juan, \text{final}(logica))$
- $R \equiv \text{recursa}(juan, logica)$

Axiomas $F \to X$ y $X \to R$. Afirmamos $F \to R$.

Ejemplo (Demostración en DN)

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash X \to R \qquad\qquad\qquad\qquad \Gamma \vdash X}{\Gamma = (F \to X), (X \to R), F \vdash R}\,\mathsf{E}{\to}}{(F \to X), (X \to R) \vdash F \to R}\,\mathsf{I}{\to}$$

Ejemplo de demostración en DN

Ejemplo (Teorema en DN)

Notamos:

- $F \equiv \text{falta}(\mathit{juan}, \text{final}(\mathit{logica}))$
- $X \equiv \text{reprueba}(\mathit{juan}, \text{final}(\mathit{logica}))$
- $R \equiv \text{recursa}(\mathit{juan}, \mathit{logica})$

Axiomas $F \to X$ y $X \to R$. Afirmamos $F \to R$.

Ejemplo (Demostración en DN)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash X \to R}\,\mathsf{Ax} \qquad \Gamma \vdash X}{\Gamma = (F \to X), (X \to R), F \vdash R}\,\mathsf{E}{\to}}{(F \to X), (X \to R) \vdash F \to R}\,\mathsf{I}{\to}$$

Ejemplo de demostración en DN

Ejemplo (Teorema en DN)

Notamos:

- $F \equiv \mathrm{falta}(\mathit{juan}, \mathrm{final}(\mathit{logica}))$
- $X \equiv \mathrm{reprueba}(\mathit{juan}, \mathrm{final}(\mathit{logica}))$
- $R \equiv \mathrm{recursa}(\mathit{juan}, \mathit{logica})$

Axiomas $F \to X$ y $X \to R$. Afirmamos $F \to R$.

Ejemplo (Demostración en DN)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash X \to R}\,\mathrm{Ax} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (F \to X) \wedge (X \to R)}\,\mathrm{Ax}}{\Gamma \vdash F \to X}\,\mathrm{E}\wedge_1 \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash F}\,\mathrm{Ax}}{\Gamma \vdash X}\,\mathrm{E}\!\to}{\Gamma = (F \to X), (X \to R), F \vdash R}\,\mathrm{E}\!\to}{(F \to X), (X \to R) \vdash F \to R}\,\mathrm{I}\!\to$$

Reglas de inferencia

Otras reglas de inferencia

- I$\neg$, E$\neg$, I$\wedge$
- I$\vee_1$, I$\vee_2$, E$\vee$
- I$\forall$, E$\forall$, I$\exists$, E$\exists$
- E$\bot$, I$\top$, LEM

Reglas de inferencia

Otras reglas de inferencia

- $\mathsf{I}\neg$, $\mathsf{E}\neg$, $\mathsf{I}\wedge$
- $\mathsf{I}\vee_1$, $\mathsf{I}\vee_2$, $\mathsf{E}\vee$
- $\mathsf{I}\forall$, $\mathsf{E}\forall$, $\mathsf{I}\exists$, $\mathsf{E}\exists$
- $\mathsf{E}\bot$, $\mathsf{I}\top$, LEM

Mencionamos *modus tollens* pero no aparece

- Queremos un sistema lógico **minimal**: no agregamos las reglas **admisibles**, derivables a partir de las existentes.
- Se implementan como funciones o *macros*.

Reglas de inferencia

Otras reglas de inferencia

- I$\neg$, E$\neg$, I$\wedge$
- I$\vee_1$, I$\vee_2$, E$\vee$
- I$\forall$, E$\forall$, I$\exists$, E$\exists$
- E$\bot$, I$\top$, LEM

Mencionamos *modus tollens* pero no aparece

- Queremos un sistema lógico **minimal**: no agregamos las reglas **admisibles**, derivables a partir de las existentes.
- Se implementan como funciones o *macros*.

Alfa equivalencia

- Podemos usar $\exists x.p(x)$ y $\exists y.p(y)$ de forma intercambiable.
- Son α-equivalentes (renombrando variables ligadas de forma apropiada, son iguales).

Sustitución

Eliminación de universal

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A\{x := t\}}\ \mathsf{E}\forall$$

Sustitución

Eliminación de universal

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A\{x := t\}} \; \mathsf{E}\forall$$

Definición (Sustitución)

Notamos como $A\{x := t\}$ a la sustitución de todas las ocurrencias libres de la variable x por el término t en la fórmula A.

Sustitución

Eliminación de universal

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A\{x := t\}} \; E\forall$$

Definición (Sustitución)

Notamos como $A\{x := t\}$ a la sustitución de todas las ocurrencias libres de la variable x por el término t en la fórmula A.

Capturas

Evitamos automáticamente la **captura de variables** (renombrando a fórmula α-equivalente tq no ocurra)

$$(\forall y.p(\boldsymbol{x}, y))\{x := y\} \neq \forall y.p(y, y) \qquad \text{(capturada)}$$
$$(\forall y.p(\boldsymbol{x}, y))\{x := y\} = \forall z.p(\boldsymbol{y}, z) \qquad \text{(renombrada)}$$

PPA

Mizar $\rightsquigarrow$ Isar (Isabelle) $\rightsquigarrow$ *Mathematical Vernacular*[2]

Forma *natural* de representar demostraciones matemáticas. Ideas:

[2] De Freek Wiedijk

Mizar $\rightsquigarrow$ Isar (Isabelle) $\rightsquigarrow$ *Mathematical Vernacular*[2]

Forma *natural* de representar demostraciones matemáticas. Ideas:

- **Deducción natural en estilo de *Fitch***. Notación equivalente, demostraciones como listas de fórmulas en lugar de árboles.

[2] De Freek Wiedijk

Mizar $\rightsquigarrow$ Isar (Isabelle) $\rightsquigarrow$ *Mathematical Vernacular*[2]

Forma *natural* de representar demostraciones matemáticas. Ideas:

- **Deducción natural en estilo de *Fitch***. Notación equivalente, demostraciones como listas de fórmulas en lugar de árboles.
- **Reglas de inferencia *declarativas***: Afirmar

$$A_1, \ldots, A_n \vdash A$$

sin tener que demostrarlo a mano (automático).

[2] De Freek Wiedijk

Mizar $\rightsquigarrow$ Isar (Isabelle) $\rightsquigarrow$ *Mathematical Vernacular*[2]

Forma *natural* de representar demostraciones matemáticas. Ideas:

- **Deducción natural en estilo de *Fitch***. Notación equivalente, demostraciones como listas de fórmulas en lugar de árboles.
- **Reglas de inferencia *declarativas***: Afirmar

$$A_1, \ldots, A_n \vdash A$$

  sin tener que demostrarlo a mano (automático).
- **Sintaxis similar a un lenguaje de programación** en lugar al lenguaje natural.

[2] De Freek Wiedijk

PPA

Lenguaje PPA, inspirado en el *Mathematical Vernacular*. Demostraciones son listas de **comandos** que reducen sucesivamente la *tesis* (fórmula a demostrar) hasta agotarla.

Ejemplo demostración

```
axiom "ax1": forall A . forall E .
    falta(A, E) -> reprueba(A, E)
axiom "ax2": forall A . forall M .
    reprueba(A, final(M)) -> recursa(A, M)
```

PPA

Lenguaje PPA, inspirado en el *Mathematical Vernacular*. Demostraciones son listas de **comandos** que reducen sucesivamente la *tesis* (fórmula a demostrar) hasta agotarla.

Ejemplo demostración

```
axiom "ax1": forall A . forall E .
    falta(A, E) -> reprueba(A, E)
axiom "ax2": forall A . forall M .
    reprueba(A, final(M)) -> recursa(A, M)

theorem "falta_entonces_recursa": forall A . forall M .
    falta(A, final(M)) -> recursa(A, M)
proof
```

PPA

Lenguaje PPA, inspirado en el *Mathematical Vernacular*. Demostraciones son listas de **comandos** que reducen sucesivamente la *tesis* (fórmula a demostrar) hasta agotarla.

Ejemplo demostración

```
axiom "ax1": forall A . forall E .
   falta(A, E) -> reprueba(A, E)
axiom "ax2": forall A . forall M .
   reprueba(A, final(M)) -> recursa(A, M)

theorem "falta_entonces_recursa": forall A . forall M .
   falta(A, final(M)) -> recursa(A, M)
proof
   let A
   let M
```

PPA

Lenguaje PPA, inspirado en el *Mathematical Vernacular*. Demostraciones son listas de **comandos** que reducen sucesivamente la *tesis* (fórmula a demostrar) hasta agotarla.

Ejemplo demostración

```
axiom "ax1": forall A . forall E .
    falta(A, E) -> reprueba(A, E)
axiom "ax2": forall A . forall M .
    reprueba(A, final(M)) -> recursa(A, M)

theorem "falta_entonces_recursa": forall A . forall M .
    falta(A, final(M)) -> recursa(A, M)
proof
    let A
    let M
    suppose "falta": falta(A, final(M))
```

PPA

Lenguaje PPA, inspirado en el *Mathematical Vernacular*. Demostraciones son listas de **comandos** que reducen sucesivamente la *tesis* (fórmula a demostrar) hasta agotarla.

Ejemplo demostración

```
axiom "ax1": forall A . forall E .
   falta(A, E) -> reprueba(A, E)
axiom "ax2": forall A . forall M .
   reprueba(A, final(M)) -> recursa(A, M)

theorem "falta_entonces_recursa": forall A . forall M .
   falta(A, final(M)) -> recursa(A, M)
proof
   let A
   let M
   suppose "falta": falta(A, final(M))
   have "reprueba": reprueba(A, final(M)) by "ax1", "falta"
```

PPA

Lenguaje PPA, inspirado en el *Mathematical Vernacular*. Demostraciones son listas de **comandos** que reducen sucesivamente la *tesis* (fórmula a demostrar) hasta agotarla.

Ejemplo demostración

```
axiom "ax1": forall A . forall E .
    falta(A, E) -> reprueba(A, E)
axiom "ax2": forall A . forall M .
    reprueba(A, final(M)) -> recursa(A, M)

theorem "falta_entonces_recursa": forall A . forall M .
    falta(A, final(M)) -> recursa(A, M)
proof
    let A
    let M
    suppose "falta": falta(A, final(M))
    have "reprueba": reprueba(A, final(M)) by "ax1", "falta"
    thus recursa(A, M) by "ax2", "reprueba"
end
```

Comandos y reglas de inferencia

Regla	Comando
LEM	**`cases`**
Ax	**`by`**
$\mathrm{I}\exists$	**`take`**
$\mathrm{E}\exists$	**`consider`**
$\mathrm{I}\forall$	**`let`**
$\mathrm{E}\forall$	**`by`**
$\mathrm{I}\vee_1$	**`by`**
$\mathrm{I}\vee_2$	**`by`**
$\mathrm{E}\vee$	**`cases`**

Regla	Comando
$\mathrm{I}\wedge$	**`by`**
$\mathrm{E}\wedge_1$	**`by`**
$\mathrm{E}\wedge_2$	**`by`**
$\mathrm{I}\rightarrow$	**`suppose`**
$\mathrm{E}\rightarrow$	**`by`**
$\mathrm{I}\neg$	**`suppose`**
$\mathrm{E}\neg$	**`by`**
$\mathrm{I}\top$	**`by`**
$\mathrm{E}\bot$	**`by`**

Comandos y reglas de inferencia

Regla	Comando
LEM	**cases**
Ax	**by**
$I\exists$	**take**
$E\exists$	**consider**
$I\forall$	**let**
$E\forall$	**by**
$I\vee_1$	**by**
$I\vee_2$	**by**
$E\vee$	**cases**

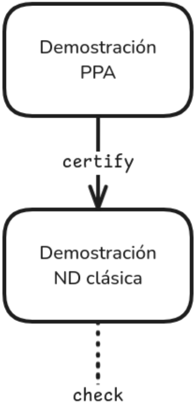
Regla	Comando
$I\wedge$	**by**
$E\wedge_1$	**by**
$E\wedge_2$	**by**
$I\rightarrow$	**suppose**
$E\rightarrow$	**by**
$I\neg$	**suppose**
$E\neg$	**by**
$I\top$	**by**
$E\bot$	**by**

Adicionales:

- **equivalently**: Reduce la tesis a una fórmula equivalente.
- **claim**: Análogo a **have** pero con una sub-demostración.

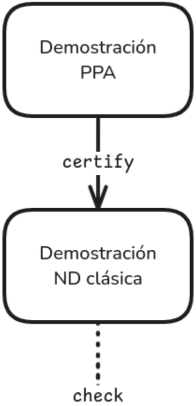
Certificados

- Las demostraciones de PPA se **certifican** generando una demostración de deducción natural.
- Evita confiar en la implementación del asistente.



Certificados

- Las demostraciones de PPA se **certifican** generando una demostración de deducción natural.
- Evita confiar en la implementación del asistente.
- Cumple con el **Criterio de de Bruijn** (sus demostraciones pueden ser chequeadas por un programa independiente)



Certificado de demostraciones

El procedimiento de certificado de una demostración es recursivo:

```
theorem t:
    p(v) -> exists X . p(X)
proof
    suppose "h": p(v)
    take X := v
    thus p(v) by "h"
end
```

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{h : p(v) \vdash p(v)}\,\mathsf{Ax}_h}{h : p(v) \vdash \exists x.p(X)}\,\mathsf{I}\exists}{\vdash p(v) \to \exists x.p(X)}\,\mathsf{I}{\to}_h$$

Figura: Ejemplo de certificado generado para un programa

by - El mecanismo principal de demostración

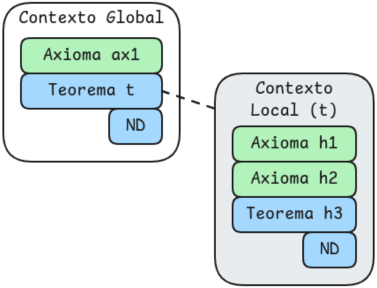
```
thus <form> by <h1>, ..., <hn>
have <name>: <form> by <h1>, ..., <hn>
```

- Si puede, demuestra **automáticamente** que la fórmula es consecuencia lógica de la justificación.
- Por debajo usa un *solver* completo para lógica proposicional pero *heurístico* para primer orden.

by - El mecanismo principal de demostración

```
thus <form> by <h1>, ..., <hn>
have <name>: <form> by <h1>, ..., <hn>
```

- Si puede, demuestra **automáticamente** que la fórmula es consecuencia lógica de la justificación.
- Por debajo usa un *solver* completo para lógica proposicional pero *heurístico* para primer orden.
- Toma las hipótesis del **contexto** local o global: fórmulas asumidas o demostradas.



Certificado del by

Teniendo $\Gamma = \{h_1 : B_1, \ldots, h_n : B_n\}$, para **thus** `A` **by** `h1, ..., hn`:

1. Buscamos las hipótesis en el contexto. Queremos demostrar

$$\Gamma \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$$

Certificado del by

Teniendo $\Gamma = \{h_1 : B_1, \ldots, h_n : B_n\}$, para **`thus`** `A` **`by`** `h1, ..., hn`:

1. Buscamos las hipótesis en el contexto. Queremos demostrar

$$\Gamma \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \rightarrow A$$

2. **Razonamos por el absurdo**: Asumiendo la negación buscamos una contradicción

$$\Gamma, \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \rightarrow A) \vdash \bot$$

Certificado del by

Teniendo $\Gamma = \{h_1 : B_1, \ldots, h_n : B_n\}$, para **`thus`** `A` **`by`** `h1, ..., hn`:

1. Buscamos las hipótesis en el contexto. Queremos demostrar

$$\Gamma \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$$

2. **Razonamos por el absurdo**: Asumiendo la negación buscamos una contradicción

$$\Gamma, \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A) \vdash \bot$$

3. Convertimos la negación a forma normal disyuntiva (**DNF**)

$$\Gamma, (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n) \vee \ldots \vee (b_1 \wedge \ldots \wedge b_m) \vdash \bot$$

Certificado del by

Teniendo $\Gamma = \{h_1 : B_1, \ldots, h_n : B_n\}$, para **`thus`** `A` **`by`** `h1, ..., hn`:

1. Buscamos las hipótesis en el contexto. Queremos demostrar

$$\Gamma \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$$

2. **Razonamos por el absurdo**: Asumiendo la negación buscamos una contradicción

$$\Gamma, \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A) \vdash \bot$$

3. Convertimos la negación a forma normal disyuntiva (**DNF**)

$$\Gamma, (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n) \vee \ldots \vee (b_1 \wedge \ldots \wedge b_m) \vdash \bot$$

4. Buscamos una **contradicción** refutando cada cláusula individualmente. Será refutable si

Certificado del by

Teniendo $\Gamma = \{h_1 : B_1, \ldots, h_n : B_n\}$, para **`thus`** `A` **`by`** `h1, ..., hn`:

1. Buscamos las hipótesis en el contexto. Queremos demostrar

$$\Gamma \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$$

2. **Razonamos por el absurdo**: Asumiendo la negación buscamos una contradicción

$$\Gamma, \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A) \vdash \perp$$

3. Convertimos la negación a forma normal disyuntiva (**DNF**)

$$\Gamma, (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n) \vee \ldots \vee (b_1 \wedge \ldots \wedge b_m) \vdash \perp$$

4. Buscamos una **contradicción** refutando cada cláusula individualmente. Será refutable si
   - Contiene $\perp$ o dos fórmulas opuestas $(a, \neg a)$,

Certificado del by

Teniendo $\Gamma = \{h_1 : B_1, \ldots, h_n : B_n\}$, para `thus A by h1, ..., hn`:

1. Buscamos las hipótesis en el contexto. Queremos demostrar
$$\Gamma \vdash B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A$$
2. **Razonamos por el absurdo**: Asumiendo la negación buscamos una contradicción
$$\Gamma, \neg(B_1 \wedge \ldots \wedge B_n \to A) \vdash \bot$$
3. Convertimos la negación a forma normal disyuntiva (**DNF**)
$$\Gamma, (a_1 \wedge \ldots \wedge a_n) \vee \ldots \vee (b_1 \wedge \ldots \wedge b_m) \vdash \bot$$
4. Buscamos una **contradicción** refutando cada cláusula individualmente. Será refutable si
    - Contiene $\bot$ o dos fórmulas opuestas $(a, \neg a)$,
    - Eliminando universales **consecutivos** y reiniciando el proceso, se consigue una refutación $(\neg p(k,t), \forall x. \forall y. p(x,y))$

Ejemplo sin cuantificadores (1/4)

By sin cuantificadores

```
axiom ax1: a -> b
axiom ax2: a
theorem t: b
proof
   thus b by ax1, ax2
end
```

Ejemplo sin cuantificadores (1/4)

By sin cuantificadores

```
axiom ax1: a -> b
axiom ax2: a
theorem t: b
proof
   thus b by ax1, ax2
end
```

1. Para certificar `thus b by ax1, ax2` hay que generar una demostración para la implicación

$$\Gamma \vdash \big((a \to b) \land a\big) \to b$$

Ejemplo sin cuantificadores (2/4)

2. Negamos la fórmula y buscamos una contradicción.

$$\Gamma, \neg[((a \to b) \wedge a) \to b] \vdash \bot$$

Definición (Eliminación de doble negación)

$$\dfrac{}{\neg\neg A \vdash A}\, \mathsf{E}\neg\neg \quad \equiv \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\, \mathsf{LEM}$$

Definición (Introducción de negación)

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\, \mathsf{I}\neg$$

Ejemplo sin cuantificadores (2/3)

3. La convertimos a DNF

$$
\begin{array}{ll}
\neg\big[\big((a \to b) \wedge a\big) \to b\big] & \\
\equiv \neg\big[\neg\big((a \to b) \wedge a\big) \vee b\big] & (A \to B \equiv \neg A \vee B) \\
\equiv \neg\neg\big((a \to b) \wedge a\big) \wedge \neg b & (\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B) \\
\equiv \big((a \to b) \wedge a\big) \wedge \neg b & (\neg\neg A \equiv A) \\
\equiv (\neg a \vee b) \wedge a \wedge \neg b & (A \to B \equiv \neg A \vee B) \\
\equiv (\neg a \vee b) \wedge a \wedge \neg b & ((A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \\
\equiv (\neg a \wedge a \wedge \neg b) \vee & \\
\quad (b \wedge a \wedge \neg b) &
\end{array}
$$

Conversión a DNF - Reglas admisibles

Reglas admisibles para conversión a DNF

Pasos base

$$\neg\neg a \dashv\vdash a$$
$$\neg\bot \dashv\vdash \top$$
$$\neg\top \dashv\vdash \bot$$
$$a \to b \dashv\vdash \neg a \vee b$$
$$\neg(a \vee b) \dashv\vdash \neg a \wedge \neg b$$
$$\neg(a \wedge b) \dashv\vdash \neg a \vee \neg b$$
$$(a \vee b) \wedge c \dashv\vdash (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$
$$c \wedge (a \vee b) \dashv\vdash (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$$
$$a \vee (b \vee c) \dashv\vdash (a \vee b) \vee c$$
$$a \wedge (b \wedge c) \dashv\vdash (a \wedge b) \wedge c$$

Pasos recursivos de congruencia
(con $A \dashv\vdash A'$, $B \dashv\vdash B'$)

$$A \wedge B \dashv\vdash A' \wedge B$$
$$A \wedge B \dashv\vdash A \wedge B'$$
$$A \vee B \dashv\vdash A' \vee B$$
$$A \vee B \dashv\vdash A \vee B'$$
$$\neg A \dashv\vdash \neg A'$$

¡30 demostraciones!

Ejemplo sin cuantificadores (3/3)

4. Refutamos cada cláusula

$$(\neg a \land a \land \neg b) \lor (b \land a \land \neg b) \vdash \bot$$

□

Definición (Reglas de inferencia)

$$\frac{\Gamma \vdash A \lor B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ \mathrm{E}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\ \mathrm{E}\neg$$

Ejemplo con cuantificadores (1/2)

By con cuantificadores

```
axiom ax1: forall X . p(X) -> q(X)
axiom ax2: p(k)
theorem t: q(k)
proof
   thus q(k) by ax1, ax2
end
```

Ejemplo con cuantificadores (1/2)

By con cuantificadores

```
axiom ax1: forall X . p(X) -> q(X)
axiom ax2: p(k)
theorem t: q(k)
proof
   thus q(k) by ax1, ax2
end
```

1. Para certificar **thus** `q(k)` **by** `ax1, ax2` hay que generar una demostración para la implicación

$$\Big((\forall x.(p(x) \rightarrow q(x))) \land p(k)\Big) \rightarrow q(k)$$

Ejemplo con cuantificadores (1/2)

By con cuantificadores

```
axiom ax1: forall X . p(X) -> q(X)
axiom ax2: p(k)
theorem t: q(k)
proof
   thus q(k) by ax1, ax2
end
```

1. Para certificar **thus** `q(k)` **by** `ax1, ax2` hay que generar una demostración para la implicación

$$\Big((\forall x.(p(x) \to q(x))) \land p(k) \Big) \to q(k)$$

2. Negamos la fórmula

$$\neg \left[\Big((\forall x.(p(x) \to q(x))) \land p(k) \Big) \to q(k) \right]$$

Ejemplo con cuantificadores (2/2)

3. La convertimos a DNF ($\forall$ es opaco)

$$\neg \left[\Big((\forall x.(p(x) \to q(x))) \wedge p(k) \Big) \to q(k) \right]$$
$$\equiv \big(\forall x.(p(x) \to q(x))\big) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

Ejemplo con cuantificadores (2/2)

3. La convertimos a DNF ($\forall$ es opaco)

$$\neg\left[\Big((\forall x.(p(x) \to q(x))) \wedge p(k)\Big) \to q(k)\right]$$
$$\equiv (\forall x.(p(x) \to q(x))) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

4. Eliminamos $\forall x.(p(x) \to q(x))$ (E$\forall$). Reemplazamos x por una meta-variable fresca u.

$$(p(\mathrm{u}) \to q(\mathrm{u})) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

Ejemplo con cuantificadores (2/2)

3. La convertimos a DNF ($\forall$ es opaco)

$$\neg\left[\Big((\forall x.(p(x) \to q(x))) \land p(k)\Big) \to q(k)\right]$$
$$\equiv (\forall x.(p(x) \to q(x))) \land p(k) \land \neg q(k)$$

4. Eliminamos $\forall x.(p(x) \to q(x))$ (E$\forall$). Reemplazamos x por una meta-variable fresca u.

$$(p(\mathrm{u}) \to q(\mathrm{u})) \land p(k) \land \neg q(k)$$

5. Convertimos a DNF

$$(p(\mathrm{u}) \to q(\mathrm{u})) \land p(k) \land \neg q(k) \equiv (\neg p(\mathrm{u}) \land p(k) \land \neg q(k)) \lor (q(\mathrm{u}) \land p(k) \land \neg q(k))$$

Ejemplo con cuantificadores (2/2)

3. La convertimos a DNF ($\forall$ es opaco)

$$\neg\left[\Big((\forall x.(p(x) \to q(x))) \wedge p(k)\Big) \to q(k)\right]$$
$$\equiv (\forall x.(p(x) \to q(x))) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

4. Eliminamos $\forall x.(p(x) \to q(x))$ (E$\forall$). Reemplazamos x por una meta-variable fresca u.

$$(p(\mathrm{u}) \to q(\mathrm{u})) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

5. Convertimos a DNF

$$(p(\mathrm{u}) \to q(\mathrm{u})) \wedge p(k) \wedge \neg q(k) \equiv (\neg p(\mathrm{u}) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)) \vee (q(\mathrm{u}) \wedge p(k) \wedge \neg q(k))$$

6. Refutamos cada cláusula (con unificación).

Ejemplo con cuantificadores (2/2)

3. La convertimos a DNF ($\forall$ es opaco)

$$\neg\left[\left((\forall x.(p(x) \to q(x))) \wedge p(k)\right) \to q(k)\right]$$
$$\equiv (\forall x.(p(x) \to q(x))) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

4. Eliminamos $\forall x.(p(x) \to q(x))$ (E$\forall$). Reemplazamos x por una meta-variable fresca u.

$$(p(\mathrm{u}) \to q(\mathrm{u})) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

5. Convertimos a DNF

$$(p(\mathrm{u}) \to q(\mathrm{u})) \wedge p(k) \wedge \neg q(k) \equiv (\neg p(\mathrm{u}) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)) \vee (q(\mathrm{u}) \wedge p(k) \wedge \neg q(k))$$

6. Refutamos cada cláusula (con unificación).
   - $\neg p(\mathrm{u}) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$ tenemos $p(\mathrm{u}) \doteq p(k)$ con $\{\mathrm{u} := k\}$

Ejemplo con cuantificadores (2/2)

3. La convertimos a DNF ($\forall$ es opaco)

$$\neg\left[\left((\forall x.(p(x) \to q(x))) \wedge p(k)\right) \to q(k)\right]$$
$$\equiv (\forall x.(p(x) \to q(x))) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

4. Eliminamos $\forall x.(p(x) \to q(x))$ (E$\forall$). Reemplazamos x por una meta-variable fresca u.

$$(p(\mathrm{u}) \to q(\mathrm{u})) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

5. Convertimos a DNF

$$(p(\mathrm{u}) \to q(\mathrm{u})) \wedge p(k) \wedge \neg q(k) \equiv (\neg p(\mathrm{u}) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)) \vee (q(\mathrm{u}) \wedge p(k) \wedge \neg q(k))$$

6. Refutamos cada cláusula (con unificación).
   - $\neg p(\mathrm{u}) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$ tenemos $p(\mathrm{u}) \doteq p(k)$ con $\{\mathrm{u} := k\}$
   - $q(\mathrm{u}) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$ tenemos $q(\mathrm{u}) \doteq q(k)$ con $\{\mathrm{u} := k\}$

Alcance y limitaciones del by

- **Completo** para lógica proposicional y **heurístico** para primer orden.
- Esto es aceptable, la validez de LPO es indecidible (Teorema de Church).
- ¿Por qué heurístico? Elimina los $\forall$ consecutivos de a lo sumo una hipótesis (Pero le falta aún más)

Alcance y limitaciones del by

- **Completo** para lógica proposicional y **heurístico** para primer orden.
- Esto es aceptable, la validez de LPO es indecidible (Teorema de Church).
- ¿Por qué heurístico? Elimina los $\forall$ consecutivos de a lo sumo una hipótesis (Pero le falta aún más)

Ejemplo de falla en eliminación

```
axiom ax1: forall X . p(X) -> q(X)
axiom ax2: forall X . p(X)
theorem t: q(a)
proof
   thus q(a) by ax1, ax2
end
```

Descarga de conjunciones

Si la tesis es una conjunción, se puede probar un subconjunto de ella y se reduce el resto.

Problema:

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ \mathrm{I}\wedge$$

Descarga

```
axiom "a": a
axiom "b": b
axiom "c": c
axiom "d": d
axiom "e": e
theorem "and discharge":
    (a & b) & ((c & d) & e)
proof
    thus a & e by "a", "e"
    thus d by "d"
    thus b & c by "b", "c"
end
```

Descarga de conjunciones

Si la tesis es una conjunción, se puede probar un subconjunto de ella y se reduce el resto.

Descarga

```
axiom "a": a
axiom "b": b
axiom "c": c
axiom "d": d
axiom "e": e
theorem "and discharge":
    (a & b) & ((c & d) & e)
proof
    thus a & e by "a", "e"
    thus d by "d"
    thus b & c by "b", "c"
end
```

- Reordena la conjunción (tratando como conjunto).

$$(a \wedge e) \wedge (b \wedge c \wedge d)$$

Descarga de conjunciones

Si la tesis es una conjunción, se puede probar un subconjunto de ella y se reduce el resto.

Descarga

```
axiom "a": a
axiom "b": b
axiom "c": c
axiom "d": d
axiom "e": e
theorem "and discharge":
    (a & b) & ((c & d) & e)
proof
    thus a & e by "a", "e"
    thus d by "d"
    thus b & c by "b", "c"
end
```

- Reordena la conjunción (tratando como conjunto).

$$(a \land e) \land (b \land c \land d)$$

- Demuestra la equivalencia con **`equivalently`** (por abajo, mismo solver que el by)

$$(a \land e) \land (b \land c \land d)$$
$$\to (a \land b) \land ((c \land d) \land e)$$

Descarga de conjunciones

Si la tesis es una conjunción, se puede probar un subconjunto de ella y se reduce el resto.

Descarga

```
axiom "a": a
axiom "b": b
axiom "c": c
axiom "d": d
axiom "e": e
theorem "and discharge":
    (a & b) & ((c & d) & e)
proof
    thus a & e by "a", "e"
    thus d by "d"
    thus b & c by "b", "c"
end
```

- Reordena la conjunción (tratando como conjunto).

$$(a \wedge e) \wedge (b \wedge c \wedge d)$$

- Demuestra la equivalencia con **equivalently** (por abajo, mismo solver que el by)

$$(a \wedge e) \wedge (b \wedge c \wedge d)$$
$$\rightarrow (a \wedge b) \wedge ((c \wedge d) \wedge e)$$

- **by** es completo para proposicional $\Rightarrow$ resuelve asociatividad, conmutatividad e idempotencia (repetidos)

Extracción de testigos

Extracción simple

Extracción simple

```
axiom ax: es_bajo(juan)
theorem t: exists Alguien . es_bajo(Alguien)
proof
    take Alguien := juan
    thus es_bajo(juan) by ax
end
```

Extracción indirecta con instanciación

```
axiom padre_es_padre: forall A. es_padre(A, padre(A))
theorem todos_tienen_padre: forall Q. exists P. es_padre(Q, P)
proof
   let Q
   take P := padre(Q)
   thus es_padre(Q, padre(Q)) by "padre_es_padre"
end
```

Extracción indirecta con instanciación

```
axiom padre_es_padre: forall A. es_padre(A, padre(A))
theorem todos_tienen_padre: forall Q. exists P. es_padre(Q, P)
proof
   let Q
   take P := padre(Q)
   thus es_padre(Q, padre(Q)) by "padre_es_padre"
end

axiom def_abuelo: forall P. forall Q. forall R.
   (es_padre(P, Q) & es_padre(Q, R)) <-> es_abuelo(P, R)
theorem todos_tienen_abuelo: forall A. exists B. es_abuelo(A, B)
```

Extracción indirecta con instanciación

```
axiom padre_es_padre: forall A. es_padre(A, padre(A))
theorem todos_tienen_padre: forall Q. exists P. es_padre(Q, P)
proof
   let Q
   take P := padre(Q)
   thus es_padre(Q, padre(Q)) by "padre_es_padre"
end

axiom def_abuelo: forall P. forall Q. forall R.
   (es_padre(P, Q) & es_padre(Q, R)) <-> es_abuelo(P, R)
theorem todos_tienen_abuelo: forall A. exists B. es_abuelo(A, B)
proof
   let A
   consider X st "h1": es_padre(A, X) by "todos_tienen_padre"
   consider Y st "h2": es_padre(X, Y) by "todos_tienen_padre"
   take B := Y
   thus es_abuelo(A, Y) by "h1", "h2", "def_abuelo"
end
```

Extracción indirecta

Para extraer de

```
theorem todos_tienen_abuelo: forall A. exists B. es_abuelo(A, B)
```

Usando ppa,

```
$ ppa extract parientes.ppa \
    --theorem todos_tienen_abuelo \
    --terms nacho
Running program... OK!
Translating... OK!
Checking translated... OK!
Extracted witness: padre(padre(nacho))
of formula: es_abuelo(nacho, padre(padre(nacho)))
```

Extracción por el absurdo

```
axiom juanEsBajo: bajo(juan)

theorem noTodoElMundoEsAlto: ~forall X. ~bajo(X)
proof
    suppose "todosSonAltos": forall X. ~bajo(X)
    thus false by "juanEsBajo", "todosSonAltos"
end

theorem hayAlguienBajo: exists X. bajo(X)
```

Extracción por el absurdo

Extracción por el absurdo

```
axiom juanEsBajo: bajo(juan)

theorem noTodoElMundoEsAlto: ~forall X. ~bajo(X)
proof
    suppose "todosSonAltos": forall X. ~bajo(X)
    thus false by "juanEsBajo", "todosSonAltos"
end

theorem hayAlguienBajo: exists X. bajo(X)
```

- En general $\neg\forall x.\neg\varphi \equiv \exists x.\varphi$.
- Sin **take** (I$\exists$) explícito, igual podemos extraer el testigo a partir del **theorem** `hayAlguienBajo`: `juan`.

Extracción por el absurdo

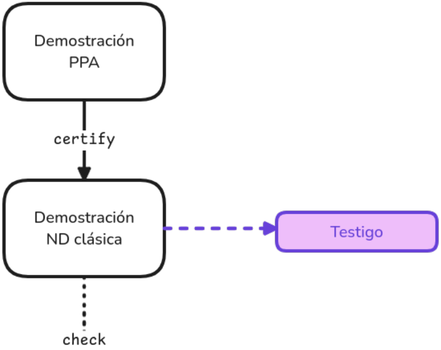
```
axiom juanEsBajo: bajo(juan)

theorem noTodoElMundoEsAlto: ~forall X. ~bajo(X)
proof
   suppose "todosSonAltos": forall X. ~bajo(X)
   thus false by "juanEsBajo", "todosSonAltos"
end

theorem hayAlguienBajo: exists X. bajo(X)
```

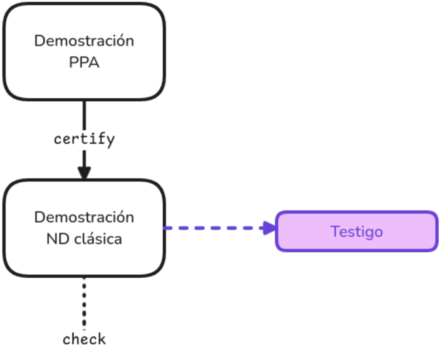
- En general $\neg\forall x.\neg\varphi \equiv \exists x.\varphi$.
- Sin **take** (I$\exists$) explícito, igual podemos extraer el testigo a partir del **theorem** `hayAlguienBajo`: `juan`.
- La implementación no es tan directa como buscar un I$\exists$ en el árbol de la demostración.

Lógica clásica



- Buscamos un mecanismo general que nos permita extraer testigos a partir de demostraciones en **deducción natural clásica**

Lógica clásica



- Buscamos un mecanismo general que nos permita extraer testigos a partir de demostraciones en **deducción natural clásica**
- Pero la lógica clásica **no es constructiva**, por LEM:

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ \mathrm{LEM}$$

Demostración no constructiva

Ejemplo (Fórmula sin demostración constructiva)

Sea C algo indecidible (tipo $\mathtt{HALT}$), queremos ver que vale

$$\exists y.(y = 1 \land C) \lor (y = 0 \land \neg C)$$

Demostración no constructiva

Ejemplo (Fórmula sin demostración constructiva)

Sea C algo indecidible (tipo HALT), queremos ver que vale

$$\exists y.(y = 1 \wedge C) \vee (y = 0 \wedge \neg C)$$

podemos demostrarlo razonando por casos con LEM de $C \vee \neg C$

- Supongamos que vale C. Tomo $y = 1$.
- Supongamos que vale $\neg C$. Tomo $y = 0$. $\square$

Demostración no constructiva

Ejemplo (Fórmula sin demostración constructiva)

Sea C algo indecidible (tipo HALT), queremos ver que vale

$$\exists y.(y = 1 \land C) \lor (y = 0 \land \neg C)$$

podemos demostrarlo razonando por casos con LEM de $C \lor \neg C$

- Supongamos que vale C. Tomo $y = 1$.
- Supongamos que vale $\neg C$. Tomo $y = 0$. $\square$

¡No nos dice explícitamente si $y = 1$ o $y = 0$! No es *constructiva*.

Demostración no constructiva

Ejemplo (Fórmula sin demostración constructiva)

Sea C algo indecidible (tipo HALT), queremos ver que vale

$$\exists y.(y = 1 \land C) \lor (y = 0 \land \neg C)$$

podemos demostrarlo razonando por casos con LEM de $C \lor \neg C$

- Supongamos que vale C. Tomo $y = 1$.
- Supongamos que vale $\neg C$. Tomo $y = 0$. $\square$

¡No nos dice explícitamente si $y = 1$ o $y = 0$! No es *constructiva*.

¿Entonces por qué lógica clásica?

- Permite razonar por el absurdo, con E$\neg\neg$ $\equiv$ LEM.
- Existen fórmulas que admiten *solo demostraciones no constructivas* (i.e. clásicas) Ejemplo: $\neg(A \land B) \to \neg A \lor B$ solo es válido en lógica clásica.

lógica intuicionista = lógica clásica − LEM

Características:

[3] Ni principios de razonamiento equivalentes, como E¬¬

Lógica intuicionista

lógica intuicionista = lógica clásica − LEM

Características:

- No tiene LEM[3], entonces siempre es constructiva.

[3] Ni principios de razonamiento equivalentes, como E¬¬

lógica intuicionista = lógica clásica − LEM

Características:

- No tiene LEM[3], entonces siempre es constructiva.
- Siempre permite hacer extracción de testigos: proceso de normalización con *forma normal* buena, una demostración de un $\exists$ debería comenzar con I$\exists$ y de ahí sacás el testigo.

$$\frac{\Gamma \vdash A\{x := t\}}{\Gamma \vdash \exists x.A}\ \mathrm{I}\exists$$

[3] Ni principios de razonamiento equivalentes, como E$\neg\neg$

Lógica intuicionista

lógica intuicionista = lógica clásica − LEM

Características:

- No tiene LEM[3], entonces siempre es constructiva.
- Siempre permite hacer extracción de testigos: proceso de normalización con *forma normal* buena, una demostración de un $\exists$ debería comenzar con I$\exists$ y de ahí sacás el testigo.

$$\frac{\Gamma \vdash A\{x := t\}}{\Gamma \vdash \exists x.A}\ \mathrm{I}\exists$$

Isomorfismo Curry-Howard

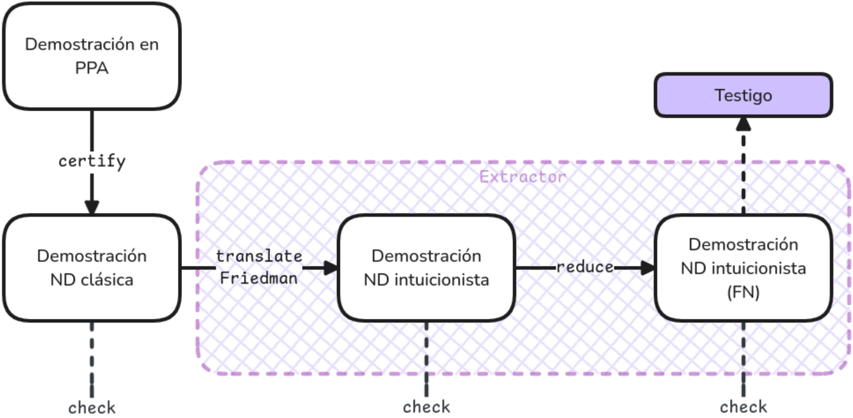
Demostraciones en DN $\leftrightarrow$ Términos de λ-cálculo.

Normalización $\leftrightarrow$ Semántica (Reducciones)

Puede ser más intuitivo pensarlo en cálculos.

[3] Ni principios de razonamiento equivalentes, como E$\neg\neg$

Estrategia de extracción indirecta



Normalización

Normalización o reducción

Motivación: evitar *"desvíos superfluos"*.

Ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathsf{Ax}}{\vdash A \to A}\,\mathsf{I}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,\mathsf{Ax}}{\vdash B \to B}\,\mathsf{I}{\to}}{\vdash (A \to A) \land (B \to B)}\,\mathsf{I}{\land}}{\vdash A \to A}\,\mathsf{E}{\land}_1 \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathsf{Ax}}{\vdash A \to A}\,\mathsf{I}{\to}$$

Normalización o reducción

Motivación: evitar *"desvíos superfluos"*.

Ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathrm{Ax}}{\vdash A \to A}\,\mathrm{I}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,\mathrm{Ax}}{\vdash B \to B}\,\mathrm{I}{\to}}{\vdash (A \to A) \wedge (B \to B)}\,\mathrm{I}\wedge}{\vdash A \to A}\,\mathrm{E}\wedge_1 \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathrm{Ax}}{\vdash A \to A}\,\mathrm{I}{\to}$$

Definición (Reducción de conjunción)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1\\ \Gamma \vdash A_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2\\ \Gamma \vdash A_2\end{matrix}}{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2}\,\mathrm{I}\wedge}{\Gamma \vdash A_i}\,\mathrm{E}\wedge_i \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\Pi_i\\ \Gamma \vdash A_i\end{matrix}$$

Normalización o reducción

Motivación: evitar *"desvíos superfluos"*.

Ejemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathsf{Ax}}{\vdash A \to A}\,\mathsf{I}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{}{B \vdash B}\,\mathsf{Ax}}{\vdash B \to B}\,\mathsf{I}{\to}}{\vdash (A \to A) \wedge (B \to B)}\,\mathsf{I}\wedge}{\vdash A \to A}\,\mathsf{E}\wedge_1 \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\dfrac{}{A \vdash A}\,\mathsf{Ax}}{\vdash A \to A}\,\mathsf{I}{\to}$$

Definición (Reducción de conjunción)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ \Gamma \vdash A_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\Pi_2 \\ \Gamma \vdash A_2\end{matrix}}{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2}\,\mathsf{I}\wedge}{\Gamma \vdash A_i}\,\mathsf{E}\wedge_i \quad \rightsquigarrow \quad \begin{matrix}\Pi_i \\ \Gamma \vdash A_i\end{matrix}$$

Idea: Simplificarlos sucesivamente hasta que no haya más y esté en **forma normal**.

Normalización de implicación

Definición (Normalización de implicación)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_B \\ \Gamma, h : A \vdash B\end{array}}{\Gamma \vdash A \to B}\ \mathsf{I}{\to}_h \qquad \begin{array}{c}\Pi_A \\ \Gamma \vdash A\end{array}}{\Gamma \vdash B}\ \mathsf{E}{\to} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{c}\Pi_B \\ \Gamma \vdash B\end{array}$$

- Primer idea: $\Pi_B \triangleright \Gamma \vdash B$

Normalización de implicación

Definición (Normalización de implicación)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_B\\ \Gamma, h : A \vdash B\end{array}}{\Gamma \vdash A \to B}\,\mathrm{I}{\to}_h \qquad \begin{array}{c}\Pi_A\\ \Gamma \vdash A\end{array}}{\Gamma \vdash B}\,\mathrm{E}{\to} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c}\Pi_B\{h := \Pi_A\}\\ \Gamma \vdash B\end{array}$$

- Primer idea: $\cancel{\Pi_B \triangleright \Gamma \vdash B}$
- Π_B requiere $h : A$, agregada por $\mathrm{I}{\to}_h$
- Correcto: usar Π_B, pero *sustituyendo* todas las ocurrencias de la hipótesis h por la demostración Π_A (sin capturas).

Definición (Normalización de implicación)

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi_B\\ \Gamma, h : A \vdash B\end{array}}{\Gamma \vdash A \to B}\,\mathrm{I}{\to}_h \qquad \begin{array}{c}\Pi_A\\ \Gamma \vdash A\end{array}}{\Gamma \vdash B}\,\mathrm{E}{\to} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c}\Pi_B\{h := \Pi_A\}\\ \Gamma \vdash B\end{array}$$

- Primer idea: $\cancel{\Pi_B \triangleright \Gamma \vdash B}$
- Π_B requiere $h : A$, agregada por $\mathrm{I}{\to}_h$
- Correcto: usar Π_B, pero *sustituyendo* todas las ocurrencias de la hipótesis h por la demostración Π_A (sin capturas).

Definición (Otras reglas)

Además, hay reglas para

- $\mathrm{E}\exists$ con $\mathrm{I}\exists$, $\mathrm{E}\forall$ con $\mathrm{I}\forall$.
- $\mathrm{E}\neg$ con $\mathrm{I}\neg$, $\mathrm{E}\vee$ con $\mathrm{I}\vee$.

Algoritmo de reducción

- **Algoritmo**: Reducir sucesivamente hasta que sea irreducible
- **Estrategias de reducción**: en un paso o muchos pasos
- *Gross-Knuth*: reduce en muchos pasos todos los sub-términos posibles al mismo tiempo.

En un solo paso,

$$\begin{array}{ccc} \Pi_A & & \Pi_B \\ & \vdots & \\ & \Pi & \end{array}$$

- **Algoritmo**: Reducir sucesivamente hasta que sea irreducible
- **Estrategias de reducción**: en un paso o muchos pasos
- *Gross-Knuth*: reduce en muchos pasos todos los sub-términos posibles al mismo tiempo.

En un solo paso,

$$
\begin{array}{c}
\Pi_A \qquad \Pi_B \\
\vdots \\
\Pi
\end{array}
\quad
\overset{\rightsquigarrow}{\begin{pmatrix} \Pi_A \overset{*}{\rightsquigarrow} \Pi_A^* \\ \Pi_B \overset{*}{\rightsquigarrow} \Pi_B^* \end{pmatrix}}
\quad
\begin{array}{c}
\color{red}{\Pi_A^*} \qquad \color{red}{\Pi_B^*} \\
\vdots \\
\Pi
\end{array}
$$

Traducción de Friedman

Traducción de doble negación

- Queremos *embeber* lógica clásica a intuicionista (no son equivalentes)
- Traducción de **doble negación**: método general.
- **Intuición**: "agregar una doble negación a todo"
- En clásica son equivalentes (E$\neg\neg \equiv$ LEM) pero en intuicionista es más débil.

Traducción de doble negación

- Queremos *embeber* lógica clásica a intuicionista (no son equivalentes)
- Traducción de **doble negación**: método general.
- **Intuición**: "agregar una doble negación a todo"
- En clásica son equivalentes (E$\neg\neg \equiv$ LEM) pero en intuicionista es más débil.

Teorema

$$\begin{array}{c} \Pi \\ \Gamma \vdash_{\boldsymbol{C}} A \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{c} \Pi^N \\ \Gamma^N \vdash_{\boldsymbol{I}} A^N \end{array}$$

Traducción de doble negación

- Queremos *embeber* lógica clásica a intuicionista (no son equivalentes)
- Traducción de **doble negación**: método general.
- **Intuición**: "agregar una doble negación a todo"
- En clásica son equivalentes ($E\neg\neg \equiv$ LEM) pero en intuicionista es más débil.

Teorema

$$\frac{\Pi}{\Gamma \vdash_C A} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Pi^N}{\Gamma^N \vdash_I {\color{red}A^N}}$$

Problema: Necesitamos la misma fórmula

$$(\exists x.A)^{\mathrm{N}} = \neg\forall x.\neg\neg\neg A$$

El truco de Friedman

Teorema (Traducción de Friedman)

*Sea φ una fórmula **conjuntiva** y todas las fórmulas de Γ sean **F-fórmulas**. Si tenemos*

$$\Pi \triangleright \Gamma \vdash_C \forall y_1 \ldots \forall y_n . \exists x . \varphi(x, y_1, \ldots, y_n),$$

Podemos generar una nueva demostración Σ tal que

$$\Sigma \triangleright \Gamma \vdash_I \forall y_1 \ldots \forall y_n . \exists x . \varphi(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Se demuestra en **deducción natural** (para reducir).

Traducción de doble negación relativizada

Definición (Negación relativizada)

Podemos ver a $\neg A \equiv A \to \bot$. Definimos $\neg_R A \equiv A \to R$

Definición (Traducción de doble negación relativizada)

$$
\begin{aligned}
\bot^{\neg\neg} &= R \\
A^{\neg\neg} &= \neg_R \neg_R A \quad \text{con } A \text{ atómica} \\
(\neg A)^{\neg\neg} &= \neg_R A^{\neg\neg} \\
(A \wedge B)^{\neg\neg} &= A^{\neg\neg} \wedge B^{\neg\neg} \\
(A \vee B)^{\neg\neg} &= \neg_R(\neg_R A^{\neg\neg} \wedge \neg_R B^{\neg\neg}) \\
(A \to B)^{\neg\neg} &= A^{\neg\neg} \to B^{\neg\neg} \\
(\forall x.A)^{\neg\neg} &= \forall x.A^{\neg\neg} \\
(\exists x.A)^{\neg\neg} &= \neg_R \forall x.\neg_R A^{\neg\neg}
\end{aligned}
$$

Funcionamiento de traducción de Friedman

Partiendo de

$$\Pi \rhd \Gamma \vdash_C \psi$$

Queremos demostrar la misma fórmula, manteniendo el contexto, en intuicionista. Pasos:

Funcionamiento de traducción de Friedman

Partiendo de

$$\Pi \rhd \Gamma \vdash_C \psi$$

Queremos demostrar la misma fórmula, manteniendo el contexto, en intuicionista. Pasos:

1. Aplicar traducción de doble negación relativizada (recursivamente a fórmula y demostración) tomando "$R = \psi$".

$$\Pi^{\neg\neg} \rhd \Gamma^{\neg\neg} \vdash_I \psi^{\neg\neg}.$$

Funcionamiento de traducción de Friedman

Partiendo de

$$\Pi \triangleright \Gamma \vdash_C \psi$$

Queremos demostrar la misma fórmula, manteniendo el contexto, en intuicionista. Pasos:

1. Aplicar traducción de doble negación relativizada (recursivamente a fórmula y demostración) tomando "$R = \psi$".

$$\Pi^{\neg\neg} \triangleright \Gamma^{\neg\neg} \vdash_I \psi^{\neg\neg}.$$

2. Usarla para demostrar la fórmula original.
   Restricción: ψ debe ser Π_2 con φ **conjuntiva**.

$$\Sigma \triangleright \Gamma^{\neg\neg} \vdash_I \forall y_1 \ldots \forall y_n . \exists x . \varphi(x, y_1, \ldots, y_n).$$

Funcionamiento de traducción de Friedman

Partiendo de

$$\Pi \triangleright \Gamma \vdash_C \psi$$

Queremos demostrar la misma fórmula, manteniendo el contexto, en intuicionista. Pasos:

1. Aplicar traducción de doble negación relativizada (recursivamente a fórmula y demostración) tomando "$R = \psi$".

$$\Pi^{\neg\neg} \triangleright \Gamma^{\neg\neg} \vdash_I \psi^{\neg\neg}.$$

2. Usarla para demostrar la fórmula original.
   Restricción: ψ debe ser Π_2 con φ **conjuntiva**.

$$\Sigma \triangleright \Gamma^{\neg\neg} \vdash_I \forall y_1 \ldots \forall y_n . \exists x . \varphi(x, y_1, \ldots, y_n).$$

3. Mantener el contexto ()
   Restricción: Axiomas (Γ) deben ser **F-fórmulas**.

$$\Sigma \triangleright \Gamma \vdash_I \forall y_1 \ldots \forall y_n . \exists x . \varphi(x, y_1, \ldots, y_n). \quad \square$$

Tipos de fórmulas

Definición (Gramática de fórmulas)

$$
\begin{array}{rl}
\text{(atómicas)} & A ::= \bot \mid \top \mid p(t_1, \dots, t_n) \\
\text{(F-fórmulas)} & F ::= A \\
& \quad \mid F \wedge F \mid F \vee F \\
& \quad \mid \forall x.F \mid \exists x.F \\
& \quad \mid C \to F \mid \neg C \\
\text{(conjuntivas)} & C ::= A \mid C \wedge C
\end{array}
$$

Lema

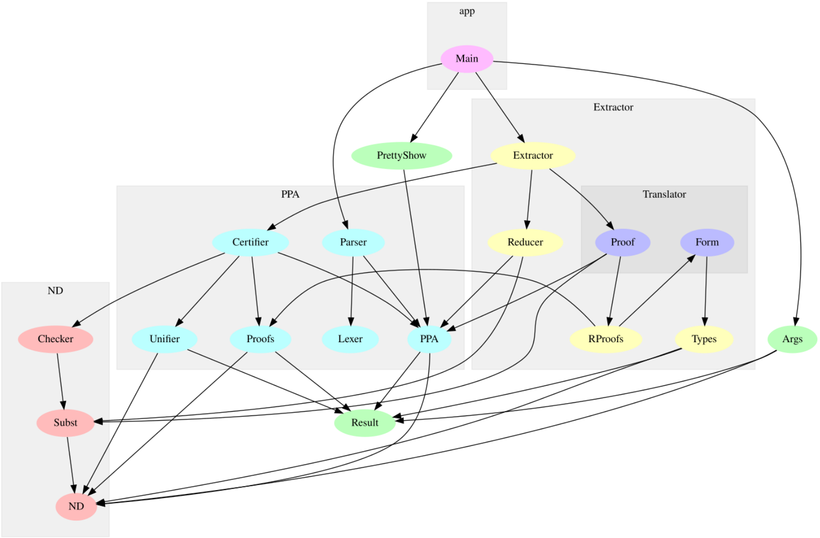
Sea F una F-fórmula. Vale $F \vdash_I F^{\neg\neg}$.

Lema

Sea C una fórmula conjuntiva. Vale $\neg_R C \vdash_I \neg_R C^{\neg\neg}$.

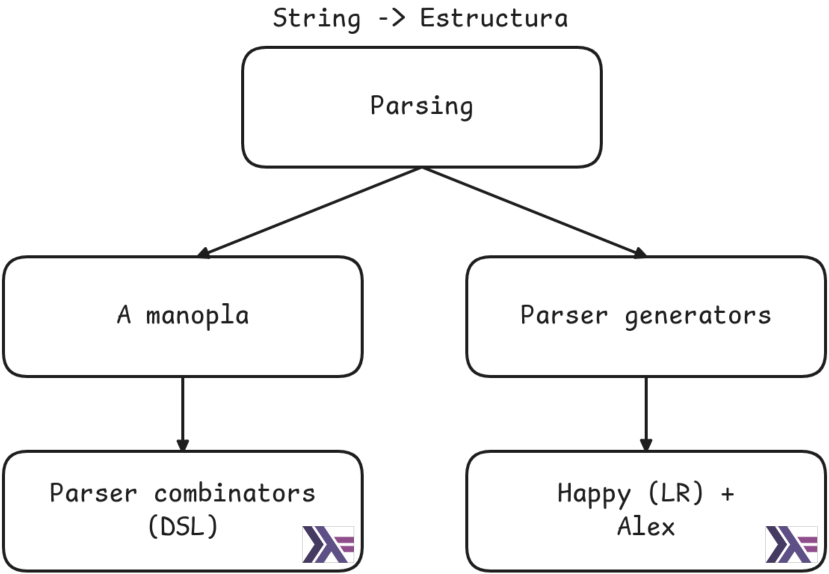
Detalles de implementación

La herramienta ppa



Haskell, 19 módulos con 330 tests

Parser y lexer



Conclusiones

Conclusiones - PPA

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.

Conclusiones - PPA

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.

Conclusiones - PPA

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
  Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.

Conclusiones - PPA

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
  Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.
- Otras mejoras

Conclusiones - PPA

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
  Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.
- Otras mejoras
  - Permitir importar archivos, implementar biblioteca estándar.

Conclusiones - PPA

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
  Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.
- Otras mejoras
  - Permitir importar archivos, implementar biblioteca estándar.
  - Extender PPA con tipos (usando LPO *many-sorted* con géneros).

Conclusiones - PPA

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
  Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.
- Otras mejoras
  - Permitir importar archivos, implementar biblioteca estándar.
  - Extender PPA con tipos (usando LPO *many-sorted* con géneros).
  - Modelar de forma nativa inducción (segundo orden) e igualdad.

Conclusiones - PPA

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
  Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.
- Otras mejoras
  - Permitir importar archivos, implementar biblioteca estándar.
  - Extender PPA con tipos (usando LPO *many-sorted* con géneros).
  - Modelar de forma nativa inducción (segundo orden) e igualdad.
  - Mejorar reporte de errores (**muy** bajo nivel).

Conclusiones - Extracción de testigos

Implementamos un mecanismo de **extracción de testigos**: composición de traducción de Friedman y reducción de ND intuicionista.

Conclusiones - Extracción de testigos

Implementamos un mecanismo de **extracción de testigos**: composición de traducción de Friedman y reducción de ND intuicionista.

Traducción

- **Extensión**: A más de un $\exists$.
- **Limitación**: Refinar la definición de fórmulas conjuntivas y explorar aparente vínculo con *fórmulas de Harrop*.

Conclusiones - Extracción de testigos

Implementamos un mecanismo de **extracción de testigos**: composición de traducción de Friedman y reducción de ND intuicionista.

Traducción

- **Extensión**: A más de un $\exists$.
- **Limitación**: Refinar la definición de fórmulas conjuntivas y explorar aparente vínculo con *fórmulas de Harrop*.

Reducción

- Solo contempla introducciones y eliminaciones del mismo conectivo.

Conclusiones - Extracción de testigos

Implementamos un mecanismo de **extracción de testigos**: composición de traducción de Friedman y reducción de ND intuicionista.

Traducción

- **Extensión**: A más de un $\exists$.
- **Limitación**: Refinar la definición de fórmulas conjuntivas y explorar aparente vínculo con *fórmulas de Harrop*.

Reducción

- Solo contempla introducciones y eliminaciones del mismo conectivo.
- **Incompleta**: no contempla *reducciones permutativas* (mezclando introducciones y eliminaciones de conectivos distintos).
  - Hay algunas demostraciones que no se van a poder reducir a una forma normal útil. Ej: **cases** ($E\vee$).
  - *Mejora*: Implementarlas.

Conclusiones - Extracción de testigos

Implementamos un mecanismo de **extracción de testigos**: composición de traducción de Friedman y reducción de ND intuicionista.

Traducción

- **Extensión**: A más de un $\exists$.
- **Limitación**: Refinar la definición de fórmulas conjuntivas y explorar aparente vínculo con *fórmulas de Harrop*.

Reducción

- Solo contempla introducciones y eliminaciones del mismo conectivo.
- **Incompleta**: no contempla *reducciones permutativas* (mezclando introducciones y eliminaciones de conectivos distintos).
  - Hay algunas demostraciones que no se van a poder reducir a una forma normal útil. Ej: **cases** (E$\vee$).
  - *Mejora*: Implementarlas.
- **Ineficiente**: en cada paso reinicia la búsqueda de todos los focos de evaluación.
  - *Mejora*: Usar una *máquina abstracta*.

Fin

¡Gracias!

github.com/mnPanic/tesis