

PPA

Un asistente de demostración para lógica de primer orden con extracción de testigos usando la traducción de Friedman

Manuel Panichelli

Departamento de Computación, FCEyN, UBA

Diciembre 2024

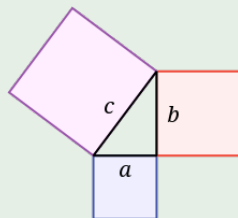
Introducción

Definiciones (Conceptos centrales)

- **Teorema:** Afirmación que puede ser *demostrada*.
- **Axioma:** Afirmación que es *siempre válida* (sin demostración).
- **Demostración:**
 - *Argumento* que establece que un teorema es cierto.
 - Usa *reglas de inferencia* a partir de *axiomas* y otros teoremas probados anteriormente.
 - Enmarcada en un *sistema deductivo*.

Ejemplo (Teorema de Pitágoras)

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



- **Sistema:** Geometría euclidiana.
- **Axioma:** Se puede dibujar una línea recta entre dos puntos.

- Los **asistentes de demostración** son herramientas que facilitan la escritura y el chequeo de demostraciones por computadora.
- Usos:
 - Formalización de teoremas matemáticos.
 - Verificación de programas.

¹Terence Tao - Machine Assisted Proof

- Los **asistentes de demostración** son herramientas que facilitan la escritura y el chequeo de demostraciones por computadora.
- Usos:
 - Formalización de teoremas matemáticos.
 - Verificación de programas.
- Ventajas:¹
 - Facilitan la colaboración a gran escala (mediante la confianza en el asistente).

¹Terence Tao - Machine Assisted Proof

- Los **asistentes de demostración** son herramientas que facilitan la escritura y el chequeo de demostraciones por computadora.
- Usos:
 - Formalización de teoremas matemáticos.
 - Verificación de programas.
- Ventajas:¹
 - Facilitan la colaboración a gran escala (mediante la confianza en el asistente).
 - Habilitan generación automática de demostraciones con IA. Por ej. un *LLM* (como *ChatGPT*) suele devolver alucinaciones, que pueden ser filtradas automáticamente con un asistente.

¹Terence Tao - Machine Assisted Proof

Constructivos



Coq
(Type theory)

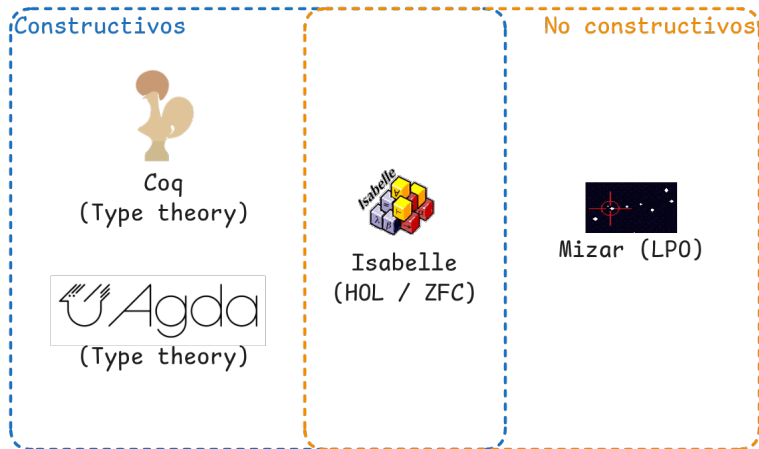


Isabelle
(HOL / ZFC)

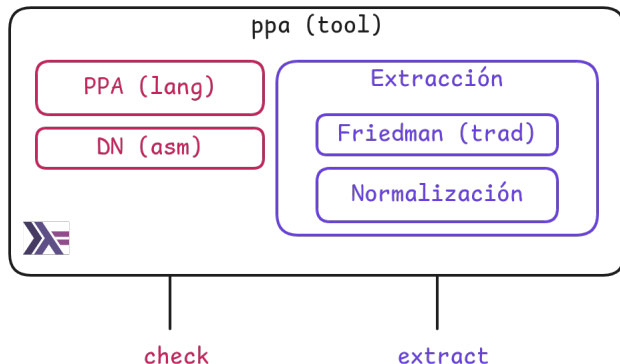
No constructivos



Mizar (LPO)



Extracción de testigos: De una demo de $\exists x.p(x)$, encontrar t tq $p(t)$.
Lógica constructiva = sencillo, no constructiva = complicado.



Diseñamos e implementamos en Haskell **ppa** (*Pani's Proof Assistant*). Dos partes:

- El lenguaje **PPA** para escribir demostraciones.
- Mecanismo de **extracción de testigos** de demostraciones no constructivas (**aporte principal**).

Definición (Axiomas)

- 1 Los alumnos que faltan a los exámenes, los reprueban.
- 2 Si se reprueba un final, se recursa la materia.

Ejemplo representación de demostraciones

Definición (Axiomas)

- 1 Los alumnos que faltan a los exámenes, los reprueban.
- 2 Si se reprueba un final, se recursa la materia.

Teorema

Si un alumno falta al final de una materia, entonces la recursa

Demostración.

- Asumo que falta. Quiero ver que recursa.
- Por (1), sabemos que si falta, entonces reprueba. Por lo tanto reprobó.
- Por (2), sabemos que si reprueba, entonces recursa. Por lo tanto recursó.



Ejemplo representación de demostraciones

Definición (Axiomas)

- 1 Los alumnos que faltan a los exámenes, los reprueban.
- 2 Si se reprueba un final, se recursa la materia.

Teorema

Si un alumno falta al final de una materia, entonces la recursa

Demostración.

- Asumo que falta. Quiero ver que recursa.
- Por (1), sabemos que si falta, entonces reprueba. Por lo tanto reprobó.
- Por (2), sabemos que si reprueba, entonces recursa. Por lo tanto recursó.



Problema: Es poco precisa. No se puede representar formalmente.

Deducción natural (DN)

Definición (Términos)

Los términos están dados por la gramática:

$$\begin{array}{ll} t ::= x & \text{(variables)} \\ \quad | f(t_1, \dots, t_n) & \text{(funciones)} \end{array}$$

Definición (Fórmulas)

Las fórmulas están dadas por la gramática:

$$\begin{array}{ll} A, B ::= p(t_1, \dots, t_n) & \text{(predicados)} \\ \quad | \perp \mid \top & \text{(falso o } bottom \text{ y verdadero o } top) \\ \quad | A \wedge B \mid A \vee B & \text{(conjunción y disyunción)} \\ \quad | A \rightarrow B \mid \neg A & \text{(implicación y negación)} \\ \quad | \forall x.A \mid \exists x.A & \text{(cuantificador universal y existencial)} \end{array}$$

Reglas de inferencia

Dos tipos para cada conectivo y cuantificador, dada una fórmula formada con un conectivo:

- **Introducción:** ¿Cómo la demuestro?
- **Eliminación:** ¿Cómo la uso para demostrar otra?

Definición (Reglas de inferencia)

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \text{I} \rightarrow \qquad \frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{Ax}$$
$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \text{E} \rightarrow \quad (\textit{modus ponens})$$

Definiciones

Γ es un contexto de demostración y \vdash la relación de derivabilidad.

Ejemplo (Teorema en DN)

Notamos:

- $F \equiv \text{falta}(\textit{juan}, \text{final}(\textit{logica}))$
- $X \equiv \text{reprueba}(\textit{juan}, \text{final}(\textit{logica}))$
- $R \equiv \text{recursa}(\textit{juan}, \textit{logica})$

Axiomas $F \rightarrow X$ y $X \rightarrow R$. Afirmamos $F \rightarrow R$.

Ejemplo de demostración en DN

Ejemplo (Teorema en DN)

Notamos:

- $F \equiv \text{falta}(\text{juan}, \text{final}(\text{logica}))$
- $X \equiv \text{reprueba}(\text{juan}, \text{final}(\text{logica}))$
- $R \equiv \text{recurso}(\text{juan}, \text{logica})$

Axiomas $F \rightarrow X$ y $X \rightarrow R$. Afirmamos $F \rightarrow R$.

Ejemplo (Demostración en DN)

$$\frac{\Gamma = (F \rightarrow X), (X \rightarrow R), F \vdash R}{(F \rightarrow X), (X \rightarrow R) \vdash F \rightarrow R} \mapsto$$

Ejemplo de demostración en DN

Ejemplo (Teorema en DN)

Notamos:

- $F \equiv \text{falta}(\text{juan}, \text{final}(\text{logica}))$
- $X \equiv \text{reprueba}(\text{juan}, \text{final}(\text{logica}))$
- $R \equiv \text{recursa}(\text{juan}, \text{logica})$

Axiomas $F \rightarrow X$ y $X \rightarrow R$. Afirmamos $F \rightarrow R$.

Ejemplo (Demostración en DN)

$$\frac{\frac{\Gamma = (F \rightarrow X), (X \rightarrow R), F \vdash R}{(F \rightarrow X), (X \rightarrow R) \vdash F \rightarrow R} \text{I} \rightarrow}{\vdash (F \rightarrow X), (X \rightarrow R), F \vdash R} \text{E} \rightarrow$$

Ejemplo de demostración en DN

Ejemplo (Teorema en DN)

Notamos:

- $F \equiv \text{falta}(\text{juan}, \text{final}(\text{logica}))$
- $X \equiv \text{reprueba}(\text{juan}, \text{final}(\text{logica}))$
- $R \equiv \text{recursa}(\text{juan}, \text{logica})$

Axiomas $F \rightarrow X$ y $X \rightarrow R$. Afirmamos $F \rightarrow R$.

Ejemplo (Demostración en DN)

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash X \rightarrow R}{\Gamma = (F \rightarrow X), (X \rightarrow R), F \vdash R} \quad \frac{\Gamma \vdash X}{\Gamma \vdash R} E \rightarrow}{(F \rightarrow X), (X \rightarrow R) \vdash F \rightarrow R} I \rightarrow$$

Ejemplo de demostración en DN

Ejemplo (Teorema en DN)

Notamos:

- $F \equiv \text{falta}(\text{juan}, \text{final}(\text{logica}))$
- $X \equiv \text{reprueba}(\text{juan}, \text{final}(\text{logica}))$
- $R \equiv \text{recurso}(\text{juan}, \text{logica})$

Axiomas $F \rightarrow X$ y $X \rightarrow R$. Afirmamos $F \rightarrow R$.

Ejemplo (Demostración en DN)

$$\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash X \rightarrow R} \text{ Ax} \quad \Gamma \vdash X}{\Gamma = (F \rightarrow X), (X \rightarrow R), F \vdash R} E \rightarrow}{(F \rightarrow X), (X \rightarrow R) \vdash F \rightarrow R} I \rightarrow$$

Ejemplo de demostración en DN

Ejemplo (Teorema en DN)

Notamos:

- $F \equiv \text{falta}(\text{juan}, \text{final}(\text{logica}))$
- $X \equiv \text{reprueba}(\text{juan}, \text{final}(\text{logica}))$
- $R \equiv \text{recursa}(\text{juan}, \text{logica})$

Axiomas $F \rightarrow X$ y $X \rightarrow R$. Afirmamos $F \rightarrow R$.

Ejemplo (Demostración en DN)

$$\frac{\frac{\frac{}{\Gamma \vdash X \rightarrow R} \text{Ax}}{\Gamma = (F \rightarrow X), (X \rightarrow R), F \vdash R} \text{E} \rightarrow \quad \frac{\frac{\frac{}{\Gamma \vdash F \rightarrow X} \text{Ax}}{\Gamma \vdash X} \text{E} \rightarrow \quad \frac{}{\Gamma \vdash F} \text{Ax}}{\frac{(F \rightarrow X), (X \rightarrow R) \vdash F \rightarrow R}{} \text{I} \rightarrow} \text{E} \rightarrow$$

Otras reglas de inferencia

- $I\neg$, $E\neg$, $I\wedge$
- IV_1 , IV_2 , EV
- $I\forall$, $E\forall$, $I\exists$, $E\exists$
- $E\perp$, IT , LEM

Otras reglas de inferencia

- $I\neg$, $E\neg$, $I\wedge$
- IV_1 , IV_2 , EV
- $I\forall$, $E\forall$, $I\exists$, $E\exists$
- $E\perp$, IT , LEM

No tenemos regla por ej. para *modus tollens*: $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow \neg A$

- Queremos un sistema lógico **minimal**: no agregamos las reglas **admisibles**, derivables a partir de las existentes.
- Se implementan como funciones o *macros*.

Reglas de inferencia

Otras reglas de inferencia

- $I\neg$, $E\neg$, $I\wedge$
- $I\vee_1$, $I\vee_2$, $E\vee$
- $I\forall$, $E\forall$, $I\exists$, $E\exists$
- $E\perp$, IT , LEM

No tenemos regla por ej. para *modus tollens*: $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow \neg A$

- Queremos un sistema lógico **minimal**: no agregamos las reglas **admisibles**, derivables a partir de las existentes.
- Se implementan como funciones o *macros*.

Alfa equivalencia

- Podemos usar $\exists x.p(x)$ y $\exists y.p(y)$ de forma intercambiable.
- Son α -equivalentes (renombrando variables ligadas de forma apropiada, son iguales).

Eliminación de universal

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A\{x := t\}} \text{E}\forall$$

Eliminación de universal

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A\{x := t\}} \text{E}\forall$$

Definición (Sustitución)

$A\{x := t\}$ sustituir todas las ocurrencias libres de la variable x por el término t en la fórmula A .

Eliminación de universal

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A\{x := t\}} \text{E}\forall$$

Definición (Sustitución)

$A\{x := t\}$ sustituir todas las ocurrencias libres de la variable x por el término t en la fórmula A .

Capturas

Evitamos automáticamente la **captura de variables** (renombrando a fórmula α -equivalente tq no ocurra)

$$(\forall y.p(\mathbf{x}, y))\{x := y\} \neq \forall y.p(\textcolor{red}{y}, y) \quad (\text{capturada})$$

$$(\forall y.p(\mathbf{x}, y))\{x := y\} = \forall \textcolor{red}{z}.p(\mathbf{y}, \textcolor{red}{z}) \quad (\text{renombrada})$$

PPA

Mizar \rightsquigarrow Isar (Isabelle) \rightsquigarrow *Mathematical Vernacular*²

Forma *natural* de representar demostraciones matemáticas. Ideas:

²De Freek Wiedijk

Mizar \rightsquigarrow Isar (Isabelle) \rightsquigarrow *Mathematical Vernacular*²

Forma *natural* de representar demostraciones matemáticas. Ideas:

- **Deducción natural en estilo de *Fitch***. Notación equivalente, demostraciones como listas de fórmulas en lugar de árboles.

²De Freek Wiedijk

Mizar \rightsquigarrow Isar (Isabelle) \rightsquigarrow *Mathematical Vernacular*²

Forma *natural* de representar demostraciones matemáticas. Ideas:

- **Deducción natural en estilo de *Fitch***. Notación equivalente, demostraciones como listas de fórmulas en lugar de árboles.
- **Reglas de inferencia *declarativas***: Afirmar

$$A_1, \dots, A_n \vdash A$$

sin tener que demostrarlo a mano (automático).

²De Freek Wiedijk

Mizar \rightsquigarrow Isar (Isabelle) \rightsquigarrow *Mathematical Vernacular*²

Forma *natural* de representar demostraciones matemáticas. Ideas:

- **Deducción natural en estilo de *Fitch***. Notación equivalente, demostraciones como listas de fórmulas en lugar de árboles.
- **Reglas de inferencia *declarativas***: Afirmar

$$A_1, \dots, A_n \vdash A$$

sin tener que demostrarlo a mano (automático).

- **Sintaxis similar a un lenguaje de programación** en lugar al lenguaje natural.

²De Freek Wiedijk

Lenguaje PPA, inspirado en el *Mathematical Vernacular*. Demostraciones son listas de **comandos** que reducen sucesivamente la *tesis* (fórmula a demostrar) hasta agotarla.

Ejemplo demostración

```
1  axiom "ax1": forall A . forall E .  
2      falta(A, E) -> reprueba(A, E)  
3  axiom "ax2": forall A . forall M .  
4      reprueba(A, final(M)) -> recursa(A, M)
```

Lenguaje PPA, inspirado en el *Mathematical Vernacular*. Demostraciones son listas de **comandos** que reducen sucesivamente la *tesis* (fórmula a demostrar) hasta agotarla.

Ejemplo demostración

```
1 axiom "ax1": forall A . forall E .  
2   falta(A, E) -> reprueba(A, E)  
3 axiom "ax2": forall A . forall M .  
4   reprueba(A, final(M)) -> recursa(A, M)  
5  
6 theorem "falta_entonces_recura": forall A . forall M .  
7   falta(A, final(M)) -> recursa(A, M)  
8 proof
```

Lenguaje PPA, inspirado en el *Mathematical Vernacular*. Demostraciones son listas de **comandos** que reducen sucesivamente la *tesis* (fórmula a demostrar) hasta agotarla.

Ejemplo demostración

```
1  axiom "ax1": forall A . forall E .
2      falta(A, E) -> reprueba(A, E)
3  axiom "ax2": forall A . forall M .
4      reprueba(A, final(M)) -> recursa(A, M)
5
6  theorem "falta_entonces_recura": forall A . forall M .
7      falta(A, final(M)) -> recursa(A, M)
8  proof
9      let A
10     let M
```

Lenguaje PPA, inspirado en el *Mathematical Vernacular*. Demostraciones son listas de **comandos** que reducen sucesivamente la *tesis* (fórmula a demostrar) hasta agotarla.

Ejemplo demostración

```

1  axiom "ax1": forall A . forall E .
2      falta(A, E) -> reprueba(A, E)
3  axiom "ax2": forall A . forall M .
4      reprueba(A, final(M)) -> recursa(A, M)
5
6  theorem "falta_entonces_recura": forall A . forall M .
7      falta(A, final(M)) -> recursa(A, M)
8  proof
9      let A
10     let M
11     suppose "falta": falta(A, final(M))

```

Lenguaje PPA, inspirado en el *Mathematical Vernacular*. Demostraciones son listas de **comandos** que reducen sucesivamente la *tesis* (fórmula a demostrar) hasta agotarla.

Ejemplo demostración

```

1  axiom "ax1": forall A . forall E .
2      falta(A, E) -> reprueba(A, E)
3  axiom "ax2": forall A . forall M .
4      reprueba(A, final(M)) -> recursa(A, M)
5
6  theorem "falta_entonces_recura": forall A . forall M .
7      falta(A, final(M)) -> recursa(A, M)
8  proof
9      let A
10     let M
11     suppose "falta": falta(A, final(M))
12     have "reprueba": reprueba(A, final(M)) by "ax1", "falta"

```

Lenguaje PPA, inspirado en el *Mathematical Vernacular*. Demostraciones son listas de **comandos** que reducen sucesivamente la *tesis* (fórmula a demostrar) hasta agotarla.

Ejemplo demostración

```

1  axiom "ax1": forall A . forall E .
2      falta(A, E) -> reprueba(A, E)
3  axiom "ax2": forall A . forall M .
4      reprueba(A, final(M)) -> recursa(A, M)
5
6  theorem "falta_entonces_recura": forall A . forall M .
7      falta(A, final(M)) -> recursa(A, M)
8  proof
9      let A
10     let M
11     suppose "falta": falta(A, final(M))
12     have "reprueba": reprueba(A, final(M)) by "ax1", "falta"
13     thus recursa(A, M) by "ax2", "reprueba"
14 end

```

Comandos y reglas de inferencia

Regla	Comando
LEM	cases
Ax	by
$I\exists$	take
$E\exists$	consider
$I\forall$	let
$E\forall$	by
$I\vee_1$	by
$I\vee_2$	by
$E\vee$	cases

Regla	Comando
$I\wedge$	by
$E\wedge_1$	by
$E\wedge_2$	by
$I\rightarrow$	suppose
$E\rightarrow$	by
$I\neg$	suppose
$E\neg$	by
$I\top$	by
$E\perp$	by

Comandos y reglas de inferencia

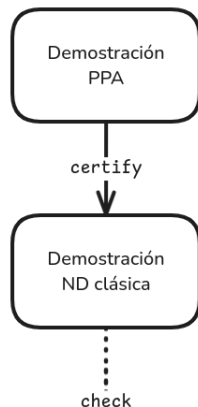
Regla	Comando
LEM	cases
Ax	by
$I\exists$	take
$E\exists$	consider
$I\forall$	let
$E\forall$	by
$I\vee_1$	by
$I\vee_2$	by
$E\vee$	cases

Regla	Comando
$I\wedge$	by
$E\wedge_1$	by
$E\wedge_2$	by
$I\rightarrow$	suppose
$E\rightarrow$	by
$I\neg$	suppose
$E\neg$	by
$I\top$	by
$E\perp$	by

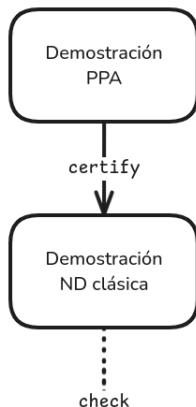
Adicionales:

- **equivalently**: Reduce la tesis a una fórmula equivalente.
- **claim**: Análogo a **have** pero con una sub-demostración.

- Las demostraciones de PPA se **certifican** generando una demostración de deducción natural.
- Evita confiar en la implementación del asistente.



- Las demostraciones de PPA se **certifican** generando una demostración de deducción natural.
- Evita confiar en la implementación del asistente.
- Cumple con el **Criterio de de Bruijn** (sus demostraciones pueden ser chequeadas por un programa independiente)



El procedimiento de certificado de una demostración es recursivo:

```
1 theorem t:  
2   p(v) -> exists X . p(X)  
3 proof  
4   suppose "h": p(v)  
5   take X := v  
6   thus p(v) by "h"  
7 end
```

$$\frac{\frac{\overline{h : p(v) \vdash p(v)} \text{ } \textcolor{red}{Ax_h}}{h : p(v) \vdash \exists x.p(X)} \text{ } \exists}{\vdash p(v) \rightarrow \exists x.p(X)} \text{ } \mapsto_h$$

Figura: Ejemplo de certificado generado para un programa

by - El mecanismo principal de demostración

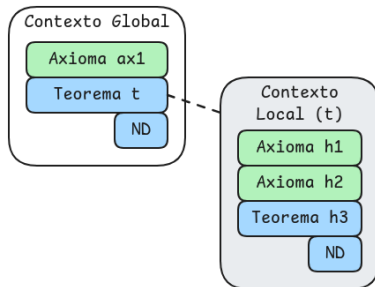
```
thus <form> by <h1>, ..., <hn>  
have <name>: <form> by <h1>, ..., <hn>
```

- Si puede, demuestra **automáticamente** que la fórmula es consecuencia lógica de la justificación.
- Por debajo usa un *solver heurístico* para primer orden.

by - El mecanismo principal de demostración

```
thus <form> by <h1>, ..., <hn>  
have <name>: <form> by <h1>, ..., <hn>
```

- Si puede, demuestra **automáticamente** que la fórmula es consecuencia lógica de la justificación.
- Por debajo usa un *solver heurístico* para primer orden.
- Toma las hipótesis del **contexto** local o global: fórmulas asumidas o demostradas.



Ejemplo sin cuantificadores (1/4)

By sin cuantificadores

```
1 axiom ax1: a -> b
2 axiom ax2: a
3 theorem t: b
4 proof
5   thus b by ax1, ax2
6 end
```

Ejemplo sin cuantificadores (1/4)

By sin cuantificadores

```
1 axiom ax1: a -> b
2 axiom ax2: a
3 theorem t: b
4 proof
5   thus b by ax1, ax2
6 end
```

- ❶ Para certificar **thus** b **by** ax1, ax2 hay que generar una demostración para la implicación

$$\Gamma \vdash ((a \rightarrow b) \wedge a) \rightarrow b$$

Ejemplo sin cuantificadores (2/4)

- ② **Razonamos por el absurdo:** Negamos la fórmula y buscamos una contradicción.

$$\Gamma, \neg[(a \rightarrow b) \wedge a \rightarrow b] \vdash \perp$$

Ejemplo sin cuantificadores (2/4)

- ② **Razonamos por el absurdo:** Negamos la fórmula y buscamos una contradicción.

$$\Gamma, \neg[((a \rightarrow b) \wedge a) \rightarrow b] \vdash \perp$$

Definición (Eliminación de doble negación)

$$\frac{\overline{\overline{\neg\neg A \vdash A}}}{\neg\neg A \vdash A} E_{\neg\neg} \quad \equiv \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash A \vee \neg A}}{\Gamma \vdash A \vee \neg A} \text{LEM}$$

Definición (Introducción de negación)

$$\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} I_{\neg}$$

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg\neg A} I_{\neg}$$

Ejemplo sin cuantificadores (2/3)

3 La convertimos a **DNF** (*Forma Normal Disyuntiva*)

$$\begin{aligned} & \neg[((a \rightarrow b) \wedge a) \rightarrow b] \\ & \equiv \neg[\neg((a \rightarrow b) \wedge a) \vee b] && (A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B) \\ & \equiv \neg\neg((a \rightarrow b) \wedge a) \wedge \neg b && (\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B) \\ & \equiv ((a \rightarrow b) \wedge a) \wedge \neg b && (\neg\neg A \equiv A) \\ & \equiv (\neg a \vee b) \wedge a \wedge \neg b && (A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B) \\ & \equiv (\neg a \vee b) \wedge a \wedge \neg b && ((A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \\ & \equiv (\neg a \wedge a \wedge \neg b) \vee \\ & \quad (b \wedge a \wedge \neg b) \end{aligned}$$

Conversión a DNF - Reglas admisibles

Reglas admisibles para conversión a DNF

Pasos base

$$\neg\neg a \dashv\vdash a$$

$$\neg\perp \dashv\vdash \top$$

$$\neg\top \dashv\vdash \perp$$

$$a \rightarrow b \dashv\vdash \neg a \vee b$$

$$\neg(a \vee b) \dashv\vdash \neg a \wedge \neg b$$

$$\neg(a \wedge b) \dashv\vdash \neg a \vee \neg b$$

$$(a \vee b) \wedge c \dashv\vdash (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

$$c \wedge (a \vee b) \dashv\vdash (c \wedge a) \vee (c \wedge b)$$

$$a \vee (b \vee c) \dashv\vdash (a \vee b) \vee c$$

$$a \wedge (b \wedge c) \dashv\vdash (a \wedge b) \wedge c$$

Pasos recursivos de congruencia

(con $A \dashv\vdash A'$, $B \dashv\vdash B'$)

$$A \wedge B \dashv\vdash A' \wedge B$$

$$A \wedge B \dashv\vdash A \wedge B'$$

$$A \vee B \dashv\vdash A' \vee B$$

$$A \vee B \dashv\vdash A \vee B'$$

$$\neg A \dashv\vdash \neg A'$$

¡30 demostraciones!

Ejemplo sin cuantificadores (3/3)

- 4 Demostramos una **contradicción** refutando cada cláusula

$$(\neg a \wedge a \wedge \neg b) \vee (b \wedge a \wedge \neg b) \vdash \perp$$



Definición (Reglas de inferencia)

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C} \text{E}\vee$$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg A \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \perp} \text{E}\neg$$

Ejemplo con cuantificadores

- ① Supongamos que tenemos que resolver siguiente implicación

$$\begin{aligned} & \left((\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \right) \rightarrow q(k) \\ & \equiv \neg \left[\left((\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \right) \rightarrow q(k) \right] \end{aligned}$$

Ejemplo con cuantificadores

- ❶ Supongamos que tenemos que resolver siguiente implicación

$$\begin{aligned} & \left((\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \right) \rightarrow q(k) \\ & \equiv \neg \left[\left((\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \right) \rightarrow q(k) \right] \end{aligned}$$

- ❷ Convertimos a DNF (\forall es *opaco*)

$$(\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

Ejemplo con cuantificadores

- ❶ Supongamos que tenemos que resolver siguiente implicación

$$\begin{aligned} & \left((\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \right) \rightarrow q(k) \\ & \equiv \neg \left[\left((\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \right) \rightarrow q(k) \right] \end{aligned}$$

- ❷ Convertimos a DNF (\forall es *opaco*)

$$(\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

- ❸ No es refutable. $\exists \forall$ con $x := u$ una **meta-variable** fresca.

$$(p(u) \rightarrow q(u)) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

Ejemplo con cuantificadores

- ❶ Supongamos que tenemos que resolver siguiente implicación

$$\begin{aligned} & \left((\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \right) \rightarrow q(k) \\ & \equiv \neg \left[\left((\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \right) \rightarrow q(k) \right] \end{aligned}$$

- ❷ Convertimos a DNF (\forall es *opaco*)

$$(\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

- ❸ No es refutable. $\exists \forall$ con $x := u$ una **meta-variable** fresca.

$$(p(u) \rightarrow q(u)) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

- ❹ Re-convertimos a DNF

$$(\neg p(u) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)) \vee (q(u) \wedge p(k) \wedge \neg q(k))$$

Ejemplo con cuantificadores

- ❶ Supongamos que tenemos que resolver siguiente implicación

$$\begin{aligned} & \left((\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \right) \rightarrow q(k) \\ & \equiv \neg \left[\left((\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \right) \rightarrow q(k) \right] \end{aligned}$$

- ❷ Convertimos a DNF (\forall es *opaco*)

$$(\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

- ❸ No es refutable. $\exists \forall$ con $x := u$ una **meta-variable** fresca.

$$(p(u) \rightarrow q(u)) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

- ❹ Re-convertimos a DNF

$$(\neg p(u) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)) \vee (q(u) \wedge p(k) \wedge \neg q(k))$$

- ❺ Refutamos cada cláusula (**unificando**).

Ejemplo con cuantificadores

- ❶ Supongamos que tenemos que resolver siguiente implicación

$$\begin{aligned} & \left((\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \right) \rightarrow q(k) \\ & \equiv \neg \left[\left((\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \right) \rightarrow q(k) \right] \end{aligned}$$

- ❷ Convertimos a DNF (\forall es *opaco*)

$$(\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

- ❸ No es refutable. $\exists \forall$ con $x := u$ una **meta-variable** fresca.

$$(p(u) \rightarrow q(u)) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

- ❹ Re-convertimos a DNF

$$(\neg p(u) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)) \vee (q(u) \wedge p(k) \wedge \neg q(k))$$

- ❺ Refutamos cada cláusula (**unificando**).

- $\neg p(u) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$ tenemos $p(u) \doteq p(k)$ con $\{u := k\}$

Ejemplo con cuantificadores

- ❶ Supongamos que tenemos que resolver siguiente implicación

$$\begin{aligned} & \left((\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \right) \rightarrow q(k) \\ & \equiv \neg \left[\left((\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \right) \rightarrow q(k) \right] \end{aligned}$$

- ❷ Convertimos a DNF (\forall es *opaco*)

$$(\forall x. (p(x) \rightarrow q(x))) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

- ❸ No es refutable. $\exists \forall$ con $x := u$ una **meta-variable** fresca.

$$(p(u) \rightarrow q(u)) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$$

- ❹ Re-convertimos a DNF

$$(\neg p(u) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)) \vee (q(u) \wedge p(k) \wedge \neg q(k))$$

- ❺ Refutamos cada cláusula (**unificando**).

- $\neg p(u) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$ tenemos $p(u) \doteq p(k)$ con $\{u := k\}$
- $q(u) \wedge p(k) \wedge \neg q(k)$ tenemos $q(u) \doteq q(k)$ con $\{u := k\}$

Teniendo $\Gamma = \{h_1 : B_1, \dots, h_n : B_n\}$, para **thus** A **by** h_1, \dots, h_n :

- ① Buscamos las hipótesis en el contexto
- ② **Razonamos por el absurdo**: Asumiendo la negación buscamos una contradicción.
- ③ Convertimos la fórmula a **DNF**.
- ④ Buscamos una **contradicción** refutando cada cláusula individualmente. Será refutable si
 - Contiene \perp o dos fórmulas opuestas $(a, \neg a)$,
 - Eliminando universales **consecutivos** y reiniciando el proceso, se consigue una refutación $(\neg p(k, t), \forall x. \forall y. p(x, y))$

Alcance y limitaciones del by

- **Completo** para lógica proposicional y **heurístico** para primer orden.
- Esto es aceptable, la validez de LPO es indecidible (Teorema de Church).
- ¿Por qué heurístico? Elimina los \forall consecutivos de a lo sumo una hipótesis (Pero le falta aún más)

- **Completo** para lógica proposicional y **heurístico** para primer orden.
- Esto es aceptable, la validez de LPO es indecidible (Teorema de Church).
- ¿Por qué heurístico? Elimina los \forall consecutivos de a lo sumo una hipótesis (Pero le falta aún más)

Ejemplo de falla en eliminación

```
1  axiom ax1: forall X . p(X) -> q(X)
2  axiom ax2: forall X . p(X)
3  theorem t: q(a)
4  proof
5      thus q(a) by ax1, ax2
6  end
```

Descarga de conjunciones

Si la tesis es una conjunción, se puede probar un subconjunto de ella y se reduce el resto.

Problema:

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \text{I}\wedge$$

Descarga

```
1  axiom "a": a
2  axiom "b": b
3  axiom "c": c
4  axiom "d": d
5  axiom "e": e
6  theorem "and discharge":
7      (a & b) & ((c & d) & e)
8  proof
9      thus a & e by "a", "e"
10     thus d by "d"
11     thus b & c by "b", "c"
12 end
```


Descarga de conjunciones

Si la tesis es una conjunción, se puede probar un subconjunto de ella y se reduce el resto.

- Reordena la conjunción (tratando como conjunto).

Descarga

$$(a \wedge e) \wedge (b \wedge c \wedge d)$$

```
1  axiom "a": a
2  axiom "b": b
3  axiom "c": c
4  axiom "d": d
5  axiom "e": e
6  theorem "and discharge":
7      (a & b) & ((c & d) & e)
8  proof
9      thus a & e by "a", "e"
10     thus d by "d"
11     thus b & c by "b", "c"
12 end
```

Descarga de conjunciones

Si la tesis es una conjunción, se puede probar un subconjunto de ella y se reduce el resto.

Descarga

```
1 axiom "a": a
2 axiom "b": b
3 axiom "c": c
4 axiom "d": d
5 axiom "e": e
6 theorem "and discharge":
7   (a & b) & ((c & d) & e)
8 proof
9   thus a & e by "a", "e"
10  thus d by "d"
11  thus b & c by "b", "c"
12 end
```

- Reordena la conjunción (tratando como conjunto).

$$(a \wedge e) \wedge (b \wedge c \wedge d)$$

- Demuestra la equivalencia con **equivalently** (por abajo, mismo solver que el by)

$$(a \wedge e) \wedge (b \wedge c \wedge d) \\ \rightarrow (a \wedge b) \wedge ((c \wedge d) \wedge e)$$

Descarga de conjunciones

Si la tesis es una conjunción, se puede probar un subconjunto de ella y se reduce el resto.

Descarga

```
1 axiom "a": a
2 axiom "b": b
3 axiom "c": c
4 axiom "d": d
5 axiom "e": e
6 theorem "and discharge":
7   (a & b) & ((c & d) & e)
8 proof
9   thus a & e by "a", "e"
10  thus d by "d"
11  thus b & c by "b", "c"
12 end
```

- Reordena la conjunción (tratando como conjunto).

$$(a \wedge e) \wedge (b \wedge c \wedge d)$$

- Demuestra la equivalencia con **equivalently** (por abajo, mismo solver que el by)

$$(a \wedge e) \wedge (b \wedge c \wedge d) \\ \rightarrow (a \wedge b) \wedge ((c \wedge d) \wedge e)$$

- **by** es completo para proposicional \Rightarrow resuelve asociatividad, conmutatividad e idempotencia (repetidos)

Extracción de testigos

Extracción simple

```
1 axiom ax: es_bajo(juan)
2 theorem t: exists Alguien . es_bajo(Alguien)
3 proof
4   take Alguien := juan
5   thus es_bajo(juan) by "ax"
6 end
```

Extracción indirecta con instanciación

```
1 axiom padre_es_padre: forall A. es_padre(A, padre(A))
2 theorem todos_tienen_padre: forall Q. exists P. es_padre(Q, P)
3 proof
4   let Q
5   take P := padre(Q)
6   thus es_padre(Q, padre(Q)) by "padre_es_padre"
7 end
```

Extracción indirecta con instanciación

```
1  axiom padre_es_padre: forall A. es_padre(A, padre(A))
2  theorem todos_tienen_padre: forall Q. exists P. es_padre(Q, P)
3  proof
4      let Q
5      take P := padre(Q)
6      thus es_padre(Q, padre(Q)) by "padre_es_padre"
7  end
8
9  axiom def_abuelo: forall P. forall Q. forall R.
10     (es_padre(P, Q) & es_padre(Q, R)) <=> es_abuelo(P, R)
11 theorem todos_tienen_abuelo: forall A. exists B. es_abuelo(A, B)
```

Extracción indirecta con instanciación

```
1  axiom padre_es_padre: forall A. es_padre(A, padre(A))
2  theorem todos_tienen_padre: forall Q. exists P. es_padre(Q, P)
3  proof
4      let Q
5      take P := padre(Q)
6      thus es_padre(Q, padre(Q)) by "padre_es_padre"
7  end
8
9  axiom def_abuelo: forall P. forall Q. forall R.
10     (es_padre(P, Q) & es_padre(Q, R)) <-> es_abuelo(P, R)
11  theorem todos_tienen_abuelo: forall A. exists B. es_abuelo(A, B)
12  proof
13      let A
14      consider X st "h1": es_padre(A, X) by "todos_tienen_padre"
15      consider Y st "h2": es_padre(X, Y) by "todos_tienen_padre"
16      take B := Y
17      thus es_abuelo(A, Y) by "h1", "h2", "def_abuelo"
18  end
```


Extracción indirecta

Para extraer de

```
theorem todos_tienen_abuelo: forall A. exists B. es_abuelo(A, B)
```

Usando ppa,

```
$ ppa extract parientes.ppa \  
  --theorem todos_tienen_abuelo \  
  --terms nacho
```

Running program... OK!

Translating... OK!

Checking translated... OK!

Extracted witness: padre(padre(nacho))

of formula: es_abuelo(nacho, padre(padre(nacho)))

Extracción por el absurdo

Extracción por el absurdo

```
1 axiom juanEsBajo: bajo(juan)
2
3 theorem noTodoElMundoEsAlto: ~forall X. ~bajo(X)
4 proof
5   suppose "todosSonAltos": forall X. ~bajo(X)
6   thus false by "juanEsBajo", "todosSonAltos"
7 end
8
9 theorem hayAlguienBajo: exists X. bajo(X)
```

Extracción por el absurdo

Extracción por el absurdo

```
1 axiom juanEsBajo: bajo(juan)
2
3 theorem noTodoElMundoEsAlto: ~forall X. ~bajo(X)
4 proof
5   suppose "todosSonAltos": forall X. ~bajo(X)
6   thus false by "juanEsBajo", "todosSonAltos"
7 end
8
9 theorem hayAlguienBajo: exists X. bajo(X)
```

- En general $\neg\forall x.\neg\varphi \equiv \exists x.\varphi$.
- Sin **take** (\exists) explícito, igual podemos extraer el testigo a partir del **theorem** hayAlguienBajo: juan.

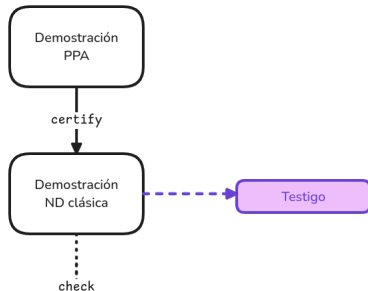
Extracción por el absurdo

Extracción por el absurdo

```
1 axiom juanEsBajo: bajo(juan)
2
3 theorem noTodoElMundoEsAlto: ~forall X. ~bajo(X)
4 proof
5   suppose "todosSonAltos": forall X. ~bajo(X)
6   thus false by "juanEsBajo", "todosSonAltos"
7 end
8
9 theorem hayAlguienBajo: exists X. bajo(X)
```

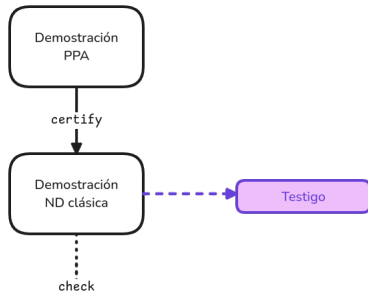
- En general $\neg\forall x.\neg\varphi \equiv \exists x.\varphi$.
- Sin **take** (\exists) explícito, igual podemos extraer el testigo a partir del **theorem** hayAlguienBajo: juan.
- La implementación no es tan directa como buscar un \exists en el árbol de la demostración.

- Buscamos un mecanismo general que nos permita extraer testigos a partir de demostraciones en **deducción natural clásica**



- Buscamos un mecanismo general que nos permita extraer testigos a partir de demostraciones en **deducción natural clásica**
- Pero la lógica clásica **no es constructiva**, por LEM:

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A} \text{LEM}$$



Ejemplo (Fórmula sin demostración constructiva)

Sea C algo indecidible (tipo HALT), queremos ver que vale

$$\exists y. (y = 1 \wedge C) \vee (y = 0 \wedge \neg C)$$

Ejemplo (Fórmula sin demostración constructiva)

Sea C algo indecidible (tipo HALT), queremos ver que vale

$$\exists y. (y = 1 \wedge C) \vee (y = 0 \wedge \neg C)$$

podemos demostrarlo razonando por casos con LEM de $C \vee \neg C$

- Supongamos que vale C . Tomo $y = 1$.
- Supongamos que vale $\neg C$. Tomo $y = 0$.



Ejemplo (Fórmula sin demostración constructiva)

Sea C algo indecidible (tipo HALT), queremos ver que vale

$$\exists y. (y = 1 \wedge C) \vee (y = 0 \wedge \neg C)$$

podemos demostrarlo razonando por casos con LEM de $C \vee \neg C$

- Supongamos que vale C . Tomo $y = 1$.
- Supongamos que vale $\neg C$. Tomo $y = 0$.



¡No nos dice explícitamente si $y = 1$ o $y = 0$! No es *constructiva*.

Ejemplo (Fórmula sin demostración constructiva)

Sea C algo indecidible (tipo HALT), queremos ver que vale

$$\exists y. (y = 1 \wedge C) \vee (y = 0 \wedge \neg C)$$

podemos demostrarlo razonando por casos con LEM de $C \vee \neg C$

- Supongamos que vale C . Tomo $y = 1$.
- Supongamos que vale $\neg C$. Tomo $y = 0$.



¡No nos dice explícitamente si $y = 1$ o $y = 0$! No es *constructiva*.

¿Entonces por qué lógica clásica?

- Permite razonar por el absurdo, con $E_{\neg\neg} \equiv \text{LEM}$.
- Existen fórmulas que admiten *solo demostraciones no constructivas* (i.e. clásicas) Ejemplo: $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee B$ solo es válido en lógica clásica.

lógica intuicionista = lógica clásica – LEM

Características:

³Ni principios de razonamiento equivalentes, como $E_{\neg\neg}$

lógica intuicionista = lógica clásica – LEM

Características:

- No tiene LEM³, entonces siempre es constructiva.

³Ni principios de razonamiento equivalentes, como $E_{\neg\neg}$

lógica intuicionista = lógica clásica – LEM

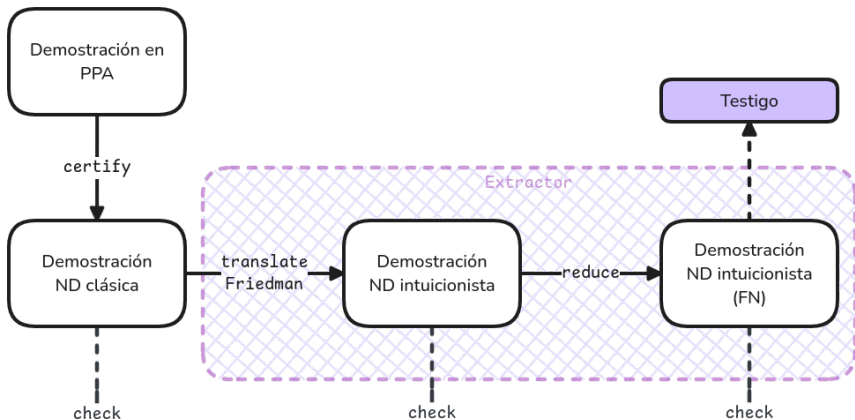
Características:

- No tiene LEM³, entonces siempre es constructiva.
- Siempre permite hacer extracción de testigos: proceso de normalización con *forma normal* buena, una demostración de un \exists debería comenzar con $I\exists$ y de ahí sacás el testigo.

$$\frac{\Gamma \vdash A\{x := t\}}{\Gamma \vdash \exists x.A} I\exists$$

³Ni principios de razonamiento equivalentes, como $E\neg\neg$

Estrategia de extracción indirecta



Normalización

Motivación: evitar “desvíos superfluos”.

Ejemplo

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash A} \text{Ax}_{h_1}}{\Gamma = h_1 : A, h_2 : B \vdash A \wedge B} \text{I}\wedge}{h_1 : A, h_2 : B \vdash A} \text{E}\wedge_1}{h_1 : A, h_2 : B \vdash A} \text{E}\wedge_1$$

Motivación: evitar “desvíos superfluos”.

Ejemplo

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Gamma \vdash A}^{Ax_{h_1}}}{\Gamma = h_1 : A, h_2 : B \vdash A \wedge B} \quad \frac{\overline{\Gamma \vdash B}^{Ax_{h_2}}}{\Gamma = h_1 : A, h_2 : B \vdash A \wedge B}}{h_1 : A, h_2 : B \vdash A} \begin{matrix} I\wedge \\ E\wedge_1 \end{matrix} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{}{h_1 : A, h_2 : B \vdash A}^{Ax_{h_1}}$$

Motivación: evitar “desvíos superfluos”.

Ejemplo

$$\frac{\frac{\frac{}{\Gamma \vdash A} Ax_{h_1}}{\Gamma = h_1 : A, h_2 : B \vdash A \wedge B} I\wedge}{h_1 : A, h_2 : B \vdash A} E\wedge_1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{}{h_1 : A, h_2 : B \vdash A} Ax_{h_1}$$

Definición (Reducción de conjunción)

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\Gamma \vdash A_1} \quad \frac{\Pi_2}{\Gamma \vdash A_2}}{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2} I\wedge}{\Gamma \vdash A_i} E\wedge_i \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Pi_i}{\Gamma \vdash A_i}$$

Normalización o reducción

Motivación: evitar “desvíos superfluos”.

Ejemplo

$$\frac{\frac{\frac{}{\Gamma \vdash A} \text{Ax}_{h_1} \quad \frac{}{\Gamma \vdash B} \text{Ax}_{h_2}}{\Gamma = h_1 : A, h_2 : B \vdash A \wedge B} \text{I}\wedge}{h_1 : A, h_2 : B \vdash A} \text{E}\wedge_1 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{}{h_1 : A, h_2 : B \vdash A} \text{Ax}_{h_1}$$

Definición (Reducción de conjunción)

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_1}{\Gamma \vdash A_1} \quad \frac{\Pi_2}{\Gamma \vdash A_2}}{\Gamma \vdash A_1 \wedge A_2} \text{I}\wedge}{\Gamma \vdash A_i} \text{E}\wedge_i \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Pi_i}{\Gamma \vdash A_i}$$

Idea: Simplificarlos sucesivamente hasta que no haya más y esté en **forma normal**.

Definición (Normalización de implicación)

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_B}{\Gamma, h : A \vdash B}}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \mid \rightarrow_h \quad \frac{\Pi_A}{\Gamma \vdash A} \text{E} \rightarrow}{\Gamma \vdash B} \rightsquigarrow \frac{\Pi_B}{\Gamma \vdash B}$$

- Primer idea: $\Pi_B \triangleright \Gamma \vdash B$

Definición (Normalización de implicación)

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_B}{\Gamma, h : A \vdash B} \text{I} \rightarrow_h}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad \frac{\Pi_A}{\Gamma \vdash A} \text{E} \rightarrow}{\Gamma \vdash B} \rightsquigarrow \frac{\Pi_B \{h := \Pi_A\}}{\Gamma \vdash B}$$

- Primer idea: ~~$\Pi_B \triangleright \Gamma \vdash B$~~
- Π_B requiere $h : A$, agregada por $\text{I} \rightarrow_h$
- Correcto: usar Π_B , pero *sustituyendo* todas las ocurrencias de la hipótesis h por la demostración Π_A (sin capturas).

Normalización de implicación

Definición (Normalización de implicación)

$$\frac{\frac{\frac{\Pi_B}{\Gamma, h : A \vdash B} \quad \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B} \quad \frac{\Pi_A}{\Gamma \vdash A} \quad E \rightarrow}{\Gamma \vdash B} \rightsquigarrow \frac{\Pi_B \{h := \Pi_A\}}{\Gamma \vdash B}$$

- Primer idea: ~~$\Pi_B \triangleright \Gamma \vdash B$~~
- Π_B requiere $h : A$, agregada por $I \rightarrow_h$
- Correcto: usar Π_B , pero *sustituyendo* todas las ocurrencias de la hipótesis h por la demostración Π_A (sin capturas).

Definición (Otras reglas)

Además, hay reglas para simplificar

- $E\exists$ con $I\exists$, $E\forall$ con $I\forall$.
- $E\neg$ con $I\neg$, $E\vee$ con $I\vee$.

Algoritmo de reducción

- **Algoritmo:** Reducir sucesivamente hasta que sea irreducible.
- **Estrategias de reducción:** en un paso o muchos pasos.
- *Gross-Knuth*: reduce en muchos pasos todos los sub-términos posibles al mismo tiempo.

En un solo paso,

$$\begin{array}{c} \Pi_A \quad \Pi_B \\ \vdots \\ \Pi \end{array}$$

Algoritmo de reducción

- **Algoritmo:** Reducir sucesivamente hasta que sea irreducible.
- **Estrategias de reducción:** en un paso o muchos pasos.
- *Gross-Knuth*: reduce en muchos pasos todos los sub-términos posibles al mismo tiempo.

En un solo paso,

$$\begin{array}{ccccc} \Pi_A & & \Pi_B & & \Pi_A^* & & \Pi_B^* \\ & & \vdots & & & & \\ & & \Pi & \begin{pmatrix} \Pi_A & \rightsquigarrow^* & \Pi_A^* \\ \Pi_B & \rightsquigarrow^* & \Pi_B^* \end{pmatrix} & & \Pi & \\ & & & & & & \vdots \end{array}$$

Traducción de Friedman

Traducción de doble negación

- Queremos *embeber* lógica clásica a intuicionista (no son equivalentes)
- Traducción de **doble negación**: método general.
- **Intuición**: “agregar una doble negación a todo”.
- En clásica son equivalentes ($E_{\neg\neg} \equiv \text{LEM}$) pero en intuicionista es más débil.

Traducción de doble negación

- Queremos *embeber* lógica clásica a intuicionista (no son equivalentes)
- Traducción de **doble negación**: método general.
- **Intuición**: “agregar una doble negación a todo”.
- En clásica son equivalentes ($E_{\neg\neg} \equiv \text{LEM}$) pero en intuicionista es más débil.

Teorema

$$\begin{array}{ccc} \Pi & & \Pi^N \\ \Gamma \vdash_c A & \rightsquigarrow & \Gamma^N \vdash_I A^N \end{array}$$

Traducción de doble negación

- Queremos *embeber* lógica clásica a intuicionista (no son equivalentes)
- Traducción de **doble negación**: método general.
- **Intuición**: “agregar una doble negación a todo”.
- En clásica son equivalentes ($E_{\neg\neg} \equiv \text{LEM}$) pero en intuicionista es más débil.

Teorema

$$\frac{\Pi}{\Gamma \vdash_c A} \rightsquigarrow \frac{\Pi^N}{\Gamma^N \vdash_I A^N}$$

Problema: Necesitamos la misma fórmula

$$(\exists x.A)^N = \neg \forall x. \neg \neg A$$

Teorema (Traducción de Friedman)

Sea φ una fórmula **conjuntiva** y todas las fórmulas de Γ sean **F-fórmulas**.
Si tenemos

$$\Pi \triangleright \Gamma \vdash_{\mathcal{C}} \forall y_1 \dots \forall y_n. \exists x. \varphi(x, y_1, \dots, y_n),$$

Podemos generar una nueva demostración Σ tal que

$$\Sigma \triangleright \Gamma \vdash_I \forall y_1 \dots \forall y_n. \exists x. \varphi(x, y_1, \dots, y_n).$$

Se demuestra en **deducción natural** (para reducir).

Traducción de doble negación relativizada

Definición (Negación relativizada)

Podemos ver a $\neg A \equiv A \rightarrow \perp$. Definimos $\neg_R A \equiv A \rightarrow R$

Definición (Traducción de doble negación relativizada)

$$\perp^{\neg\neg} = R$$

$$A^{\neg\neg} = \neg_R \neg_R A \quad \text{con } A \text{ atómica}$$

$$(\neg A)^{\neg\neg} = \neg_R A^{\neg\neg}$$

$$(A \wedge B)^{\neg\neg} = A^{\neg\neg} \wedge B^{\neg\neg}$$

$$(A \vee B)^{\neg\neg} = \neg_R (\neg_R A^{\neg\neg} \wedge \neg_R B^{\neg\neg})$$

$$(A \rightarrow B)^{\neg\neg} = A^{\neg\neg} \rightarrow B^{\neg\neg}$$

$$(\forall x. A)^{\neg\neg} = \forall x. A^{\neg\neg}$$

$$(\exists x. A)^{\neg\neg} = \neg_R \forall x. \neg_R A^{\neg\neg}$$

Funcionamiento de traducción de Friedman

Partiendo de

$$\Pi \triangleright \Gamma \vdash_C \psi$$

Queremos demostrar la misma fórmula en intuicionista. Pasos:

Funcionamiento de traducción de Friedman

Partiendo de

$$\Pi \triangleright \Gamma \vdash_C \psi$$

Queremos demostrar la misma fórmula en intuicionista. Pasos:

- 1 Aplicar traducción de doble negación relativizada (recursivamente a fórmula y demostración) tomando " $R = \psi$ ".

$$\Pi^{\neg\neg} \triangleright \Gamma^{\neg\neg} \vdash_I \psi^{\neg\neg}.$$

Funcionamiento de traducción de Friedman

Partiendo de

$$\Pi \triangleright \Gamma \vdash_C \psi$$

Queremos demostrar la misma fórmula en intuicionista. Pasos:

- 1 Aplicar traducción de doble negación relativizada (recursivamente a fórmula y demostración) tomando " $R = \psi$ ".

$$\Pi^{\neg\neg} \triangleright \Gamma^{\neg\neg} \vdash_I \psi^{\neg\neg}.$$

- 2 Usarla para demostrar la fórmula original.

Restricción: ψ debe ser Π_2 con φ **conjuntiva**.

$$\Sigma \triangleright \Gamma^{\neg\neg} \vdash_I \forall y_1 \dots \forall y_n. \exists x. \varphi(x, y_1, \dots, y_n).$$

Funcionamiento de traducción de Friedman

Partiendo de

$$\Pi \triangleright \Gamma \vdash_C \psi$$

Queremos demostrar la misma fórmula en intuicionista. Pasos:

- 1 Aplicar traducción de doble negación relativizada (recursivamente a fórmula y demostración) tomando " $R = \psi$ ".

$$\Pi^{\neg\neg} \triangleright \Gamma^{\neg\neg} \vdash_I \psi^{\neg\neg}.$$

- 2 Usarla para demostrar la fórmula original.

Restricción: ψ debe ser Π_2 con φ **conjuntiva**.

$$\Sigma \triangleright \Gamma^{\neg\neg} \vdash_I \forall y_1 \dots \forall y_n. \exists x. \varphi(x, y_1, \dots, y_n).$$

- 3 Mantener el contexto (reemplazando Ax por $A \vdash_I A^{\neg\neg}$)

Restricción: Axiomas (Γ) deben ser **F-fórmulas**.

$$\Sigma \triangleright \Gamma \vdash_I \forall y_1 \dots \forall y_n. \exists x. \varphi(x, y_1, \dots, y_n). \quad \square$$

Tipos de fórmulas

Definición (Gramática de fórmulas)

(atómicas) $A ::= \perp \mid \top \mid p(t_1, \dots, t_n)$

(F-fórmulas) $F ::= A$

$\mid F \wedge F \mid F \vee F$

$\mid \forall x.F \mid \exists x.F$

$\mid C \rightarrow F \mid \neg C$

(conjuntivas) $C ::= A \mid C \wedge C$

Lema

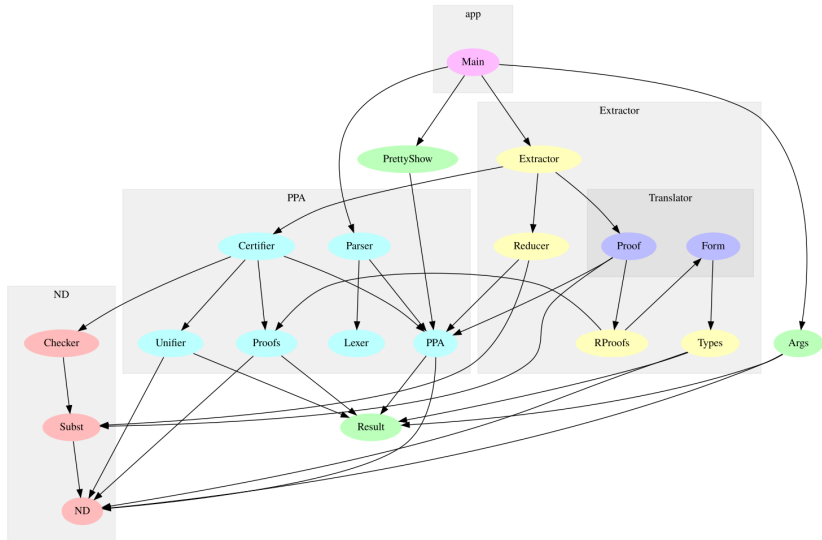
Sea F una F-fórmula. Vale $F \vdash_I F^{\neg\neg}$.

Lema

Sea C una fórmula conjuntiva. Vale $\neg_R C \vdash_I \neg_R C^{\neg\neg}$.

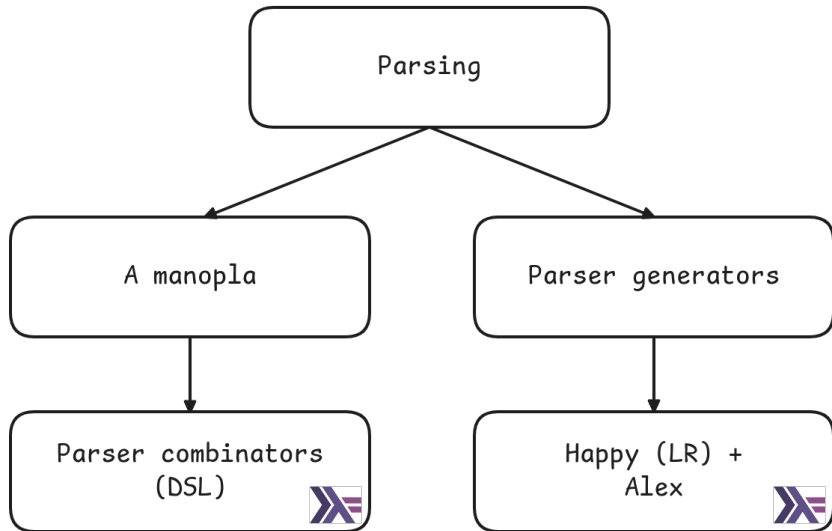
Detalles de implementación

La herramienta ppa



Haskell, 19 módulos con 330 tests

String -> Estructura



Conclusiones

Conclusiones - PPA

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.

Conclusiones - PPA

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.

Conclusiones - PPA

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.
- Desafíos

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.
- Desafíos
 - Cantidad de demostraciones a escribir.

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.
- Desafíos
 - Cantidad de demostraciones a escribir.
 - Demostraciones generadas automáticamente difíciles de *debuggear*.

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.
- Desafíos
 - Cantidad de demostraciones a escribir.
 - Demostraciones generadas automáticamente difíciles de *debuggear*.
- Otras mejoras

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.
- Desafíos
 - Cantidad de demostraciones a escribir.
 - Demostraciones generadas automáticamente difíciles de *debuggear*.
- Otras mejoras
 - Permitir importar archivos, implementar biblioteca estándar.

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.
- Desafíos
 - Cantidad de demostraciones a escribir.
 - Demostraciones generadas automáticamente difíciles de *debuggear*.
- Otras mejoras
 - Permitir importar archivos, implementar biblioteca estándar.
 - Extender PPA con tipos (usando LPO *many-sorted* con géneros).

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.
- Desafíos
 - Cantidad de demostraciones a escribir.
 - Demostraciones generadas automáticamente difíciles de *debuggear*.
- Otras mejoras
 - Permitir importar archivos, implementar biblioteca estándar.
 - Extender PPA con tipos (usando LPO *many-sorted* con géneros).
 - Modelar de forma nativa inducción (segundo orden) e igualdad.

- Diseñamos e implementamos ppa: un asistente de demostración, junto con el lenguaje PPA.
- Los programas se **certifican** generando demostraciones en *deducción natural*.
- Mecanismo heurístico de demostración automática: **by**.
Extensión: Hacerlo recursivo permitiendo eliminar los universales de más de una hipótesis.
- Desafíos
 - Cantidad de demostraciones a escribir.
 - Demostraciones generadas automáticamente difíciles de *debuggear*.
- Otras mejoras
 - Permitir importar archivos, implementar biblioteca estándar.
 - Extender PPA con tipos (usando LPO *many-sorted* con géneros).
 - Modelar de forma nativa inducción (segundo orden) e igualdad.
 - Mejorar reporte de errores (**muy** bajo nivel).

Conclusiones - Extracción de testigos

Implementamos un mecanismo de **extracción de testigos**: composición de traducción de Friedman y reducción de ND intuicionista.

Desafío: Problemas aparecieron en la integración de las 3 partes.

Conclusiones - Extracción de testigos

Implementamos un mecanismo de **extracción de testigos**: composición de traducción de Friedman y reducción de ND intuicionista.

Desafío: Problemas aparecieron en la integración de las 3 partes.

Traducción

- **Extensión:** A más de un \exists .
- **Limitación:** Refinar la definición de fórmulas conjuntivas y explorar aparente vínculo con *fórmulas de Harrop*.

Conclusiones - Extracción de testigos

Implementamos un mecanismo de **extracción de testigos**: composición de traducción de Friedman y reducción de ND intuicionista.

Desafío: Problemas aparecieron en la integración de las 3 partes.

Traducción

- **Extensión:** A más de un \exists .
- **Limitación:** Refinar la definición de fórmulas conjuntivas y explorar aparente vínculo con *fórmulas de Harrop*.

Reducción

- Solo contempla introducciones y eliminaciones del mismo conectivo.

Conclusiones - Extracción de testigos

Implementamos un mecanismo de **extracción de testigos**: composición de traducción de Friedman y reducción de ND intuicionista.

Desafío: Problemas aparecieron en la integración de las 3 partes.

Traducción

- **Extensión:** A más de un \exists .
- **Limitación:** Refinar la definición de fórmulas conjuntivas y explorar aparente vínculo con *fórmulas de Harrop*.

Reducción

- Solo contempla introducciones y eliminaciones del mismo conectivo.
- **Incompleta:** no contempla *reducciones permutativas* (mezclando introducciones y eliminaciones de conectivos distintos).
 - Hay algunas demostraciones que no se van a poder reducir a una forma normal útil. Ej: **cases** (EV).
 - *Mejora:* Implementarlas.

Conclusiones - Extracción de testigos

Implementamos un mecanismo de **extracción de testigos**: composición de traducción de Friedman y reducción de ND intuicionista.

Desafío: Problemas aparecieron en la integración de las 3 partes.

Traducción

- **Extensión:** A más de un \exists .
- **Limitación:** Refinar la definición de fórmulas conjuntivas y explorar aparente vínculo con *fórmulas de Harrop*.

Reducción

- Solo contempla introducciones y eliminaciones del mismo conectivo.
- **Incompleta:** no contempla *reducciones permutativas* (mezclando introducciones y eliminaciones de conectivos distintos).
 - Hay algunas demostraciones que no se van a poder reducir a una forma normal útil. Ej: **cases** (EV).
 - *Mejora:* Implementarlas.
- **Ineficiente:** en cada paso reinicia la búsqueda de todos los focos de evaluación. *Mejora:* Usar una *máquina abstracta*.

¡Gracias!



github.com/mnPanic/tesis