Поисковые методы

Многомерный поиск

Пусть задана целевая функция, обладающая единственным минимумом. Пользуясь результатами первой лабораторной работы, посвящённой одномерному поиску, надо найти минимум функции трёх переменных тремя алгоритмами: координатный спуск, наискорейший спуск, метод Ньютона. Поиск минимума начинается с некоторой начальной точки X^0 и осуществляется по следующему правилу:

$$X^{k+1} = X^k + \alpha_k P^k ,$$

где

$P^k = \mathbf{e}^{k \bmod n}$ (координатный спуск, $\mathbf{e}^i$ - i-й орт),

$P^k = -\nabla f\left(X^k\right)$ (наискорейший спуск),

$P^k = -\left[\nabla f^2\left(X^k\right)\right]^{-1} \cdot \nabla f\left(X^k\right)$ (метод Ньютона, ∇f^2 – матрица Гессе),

В методе Ньютона шаг α_k выбирать не надо, его нужно взять просто равным единице.

В остальных методах шаг выбирается путём минимизации по направлению:

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha} f\left(X^k + \alpha P^k\right).$$

Именно тут и понадобится ранее реализованный одномерный поиск.

Целевые функции

Чтобы сравнить полученное решение с аналитическим, будем задавать функции в виде смещённых функций, у которых минимум находится просто. Например, можно задать целевую функцию в виде

$$f\left(x, y, z\right) = x'^2 + 2y'^2 + 3z^2, \quad \left(x^0, y^0\right) = \left(3, 7\right), \; \alpha = \pi/3,$$

где (x', y') – система координат в плоскости xz, повёрнутая на угол α и центр которой смещён в точку (x^0, y^0):

$$\begin{cases} x' = \left(x - x^0\right)\cos\alpha + \left(y - y^0\right)\sin\alpha, \\ x' = \left(y - y^0\right)\cos\alpha - \left(x - x^0\right)\sin\alpha. \end{cases}$$

Очевидно, что у рассматриваемой функции минимум достигается в точке $x' = y' = z = 0$. Переходя к координатам (x, y), получим: $x = x^0 = 3$, $y = y^0 = 7$, $z = 0$.

Варианты заданий:

1. $f(x,y,z)=2x'^2+3y'^2+z^4,\quad (x^0,y^0)=(5,2),\ \alpha=\pi/6.$

2. $f(x,y,z)=x'^2+\cosh y'+\cosh(z-1),\quad (x^0,y^0)=(-1,-2),\ \alpha=\pi/4.$

3. $f(x,y,z)=3x^2+\cosh(2y')+\exp(z'^2),\quad (y^0,z^0)=(3,2),\ \alpha=\pi/8.$

4. $f(x,y,z)=\cosh(3x)-\dfrac{10}{1+y'^2}+\cosh z',\quad (y^0,z^0)=(1,-4),\ \alpha=\pi/3.$

5. $f(x,y,z)=\sinh(x'^2)+2y^2-\dfrac{3}{2+z'^2},\quad (x^0,z^0)=(1,2),\ \alpha=0.$

6. $f(x,y,z)=\dfrac{-5}{3+x'^2}+\dfrac{-1}{1+y^2}+\sinh^2 z',\quad (x^0,z^0)=(1,2),\ \alpha=\pi/6.$

7. $f(x,y,z)=\dfrac{-2}{1+\cosh^2 x'}+\cosh y'+2(z-2)^2,\quad (x^0,y^0)=(3,1),\ \alpha=\pi/4.$

8. $f(x,y,z)=x'^2+y'^4+(z-3)^2,\quad (x^0,y^0)=(3,1),\ \alpha=\pi/6.$

9. $f(x,y,z)=\dfrac{-1}{5+x^4}+\tanh(2y'^2)+\sinh^2 z',\quad (y^0,z^0)=(1,-1),\ \alpha=\pi/4.$

10. $f(x,y,z)=2x^4+2y'^4+z'^2,\quad (y^0,z^0)=(1,4),\ \alpha=0.$

11. $f(x,y,z)=x'^4+\cosh(y-1)+z'^2,\quad (x^0,z^0)=(0,3),\ \alpha=\pi/3.$

12. $f(x,y,z)=x'^2+\cosh y+z'^4,\quad (x^0,z^0)=(1,1),\ \alpha=0.$

13. $f(x,y,z)=\exp(x'^2)+\exp(y'^2)+\exp(z^2),\quad (x^0,y^0)=(3,3),\ \alpha=0.$

14. $f(x,y,z)=\cosh x+\cosh y'+\cosh(2z'),\quad (y^0,z^0)=(2,2),\ \alpha=\pi/6.$

15. $f(x,y,z)=x^2+\dfrac{1}{1+x^2}+y'^2+\dfrac{1}{2+y'^2}+z'^2+\dfrac{1}{3+z'^2},\quad (y^0,z^0)=(2,2),\ \alpha=\pi/6.$

16. $f(x,y,z)=x'^2+\dfrac{1}{8+x'^2}+\cosh y'+(z-3)^4,\quad (x^0,y^0)=(1,4),\ \alpha=\pi/4.$