

TP1 - Copules et simulation

Le TP est à rendre sur Teide sous la forme d'un fichier Rmarkdown `NomTrinome.Rmd`. Merci de vous assurer que le fichier compile (en un temps raisonnable).

Reprenons l'exercice 1 du TD1. Considérons un couple de variable aléatoire X, Y de fonction de répartition

$$F(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y}}, x, y \in \mathbb{R}.$$

On note C la copule, i.e. la fonction de répartition $(U, V) = (F_1(X), F_2(Y))$.

1. Donner un algorithme de simulation de cette copule.
2. Ecrire le code R correspondant. Simuler un échantillon de taille $n = 1000$.
3. Que fait le code suivant?

```
> mecdf <- function(xy)
+ {
+   f <- function(x, y)
+   {
+     mean(xy[, 1] <= x & xy[, 2] <= y)
+   }
+   Vectorize(f, c("x", "y"))
+ }
```

4. Ecrire une fonction R codant la fonction copule C .
5. Vérifier numériquement C à l'aide de votre fonction et de `mecdf` fournissent un résultat similaire sur la grille suivante du carré unité.

```
> cbind(1/1:10, 1/2:11)
```

6. Sur une base de points aléatoires de taille $m = 100$ du carré unité, calculer l'écart absolu moyen entre les fonctions de répartition jointe.
7. Calculer numériquement les coefficients de dépendance λ_U, λ_L à l'aide `fitLambda` du package `copula`. Comparer avec la valeur théorique
8. Implémenter l'algorithme de simulation suivant. Pour $d = 2$, comparer la fonction de répartition jointe avec C .
 - (a) simuler E de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$
 - (b) simuler un échantillon iid $(X_i)_i$ de loi exponentielle $\mathcal{E}(E)$ pour $i = 1$ à d .
 - (c) calculer $U_i = 1/(1 + X_i)$ pour $i = 1$ à d .
 - (d) retourner (U_1, \dots, U_d)
9. En utilisant la copule empirique `empCopula` du package `copula` sur un échantillon de taille $n = 1000$, tracer le graphique de niveaux `contourplot2` et un graphique 3D `plot` pour la densité et la fonction de répartition empiriques.
10. Par un des algorithmes déjà testés, écrire une fonction qui renvoie des réalisations du couple (X, Y) . Tester la fonction.