$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_k||x[n-k]| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_k|^{1/2} |x[n-k]| |\psi_k|^{1/2}.$$

Si on applique l'inegalité de Cauchy Schwarz.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_k| |x[m-k]| \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_k||x[n-k]|^2\right)^{1/2} \left(\sum |\psi_k|\right)^{1/2}.$$

$$\leqslant \|\psi\|_\infty^{1/2} \|x\|_2 \|\psi\|_1^{1/2} \quad (\text{on note } \|\psi\|_\infty \leq \|\psi\|_1)$$

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_k| |x[n-k]|\right)^2 \leq \|\psi\|_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_k||x[n-k]|^2$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_k| |x[n-k]|\right)^2 \leq \|\psi\|_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\psi_k| \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x[n-k]|^2$$

$$\leqslant \|\psi\|_1^2 \|x\|_2^2.$$

Donc: $y = \psi * x$ est bien defini et $y = T[x]$

1) Le système est lineaire : trivial.

2) Le système est invariant : trivial

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi_k x[n-m-k] = y[n-m]$$

3) Le systeme est causal ssi $\psi_k = 0$, $k<0$.

Si $\sum|\alpha_k|<\infty$ $\sum|\beta_k|<\infty$ $\gamma_n = (\alpha*\beta)_n$

Si $\{\alpha_k, k\in\mathbb{Z}\} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et $\{\beta_k, k\in\mathbb{Z}\} \in \ell^1(\mathbb{Z})$,

$\mathbb{X} = \ell^2(\mathbb{Z})$ $F_\alpha(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k B_k x$ $F_\alpha(x)[n] = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k x[n-k]$

$$F_\alpha \circ F_\beta(x) = F_\beta \circ F_\alpha(x) = F_{\alpha*\beta}(x) = F_{\beta*\alpha}(x)$$

where $\alpha*\beta_n = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k \beta_{n-k}$