

Τεχνικές Βελτιστοποίησης

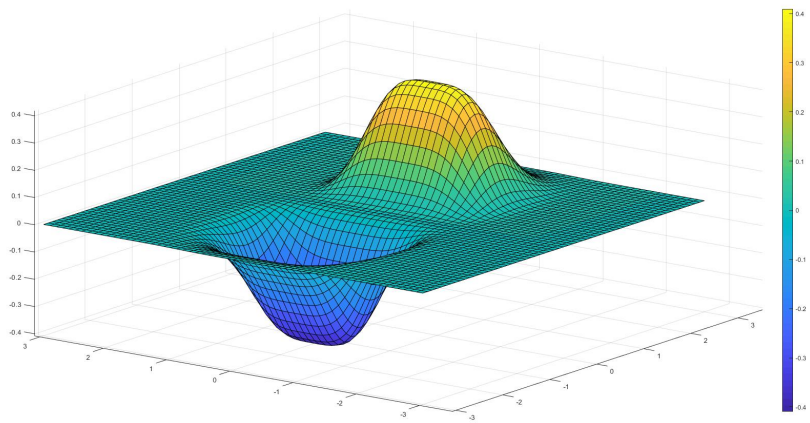
ΙΩΑΝΝΗΣ-ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΜΠΟΥΝΤΟΥΡΙΔΗΣ

ΑΕΜ: 8872

Θέμα 1

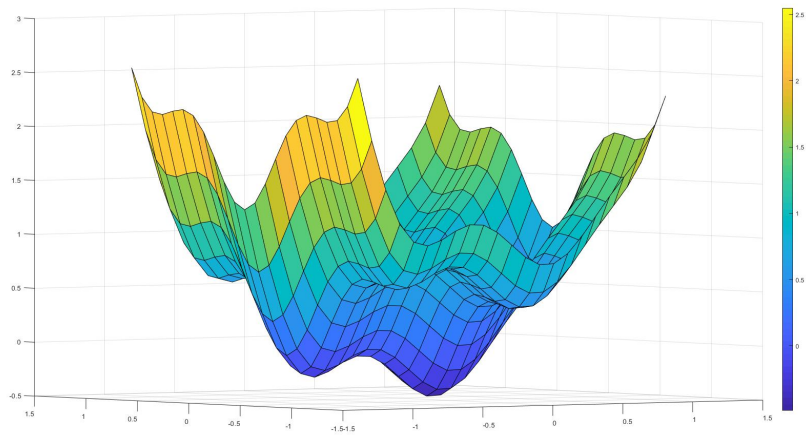
Γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x, y) = x^3 \cdot e^{-x^2 - y^4}$$



Γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x, y) = x^4 + y^2 - 0.2\sin(2\pi x) - 0.3\cos(2\pi y)$$



ο κώδικας των γραφικών παραστάσεων υπάρχει στο αρχείο *plot_functions.m*

Θέμα 2

Ζητούμενα

Στο πρώτο θέμα μας ζητείται να υλοποιήσουμε και να εφαρμόσουμε τη μέθοδο μέγιστης καθόδου (steepest descent) για να ελαχιστοποιήσουμε τις συναρτήσεις f και g παίρνοντας τα αρχικά σημεία i) $(0,0)$, ii) $(-1,-1)$, iii) $(1,1)$.

Το βήμα γ_k θα επιλεγεί:

- σταθερό της επιλογής μας
- μεταβλητό τέτοιο ώστε σε κάθε επανάληψη να ελαχιστοποιείται η $f(x_k + g_k \cdot d_k)$
- βάσει του κανόνα Armijo

Περιγραφή αλγορίθμου

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης τουλάχιστον δυο φορές παραγωγίσιμης f , στην ιδέα της επαναληπτικής διαδικασίας η οποία έχει ως εξής: Ξεκινάμε από το σημείο x_0 και παράγουμε διαδοχικά τα διανύσματα x_1, x_2, \dots ώστε

$$f(x_{k+1}) < f(x_k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

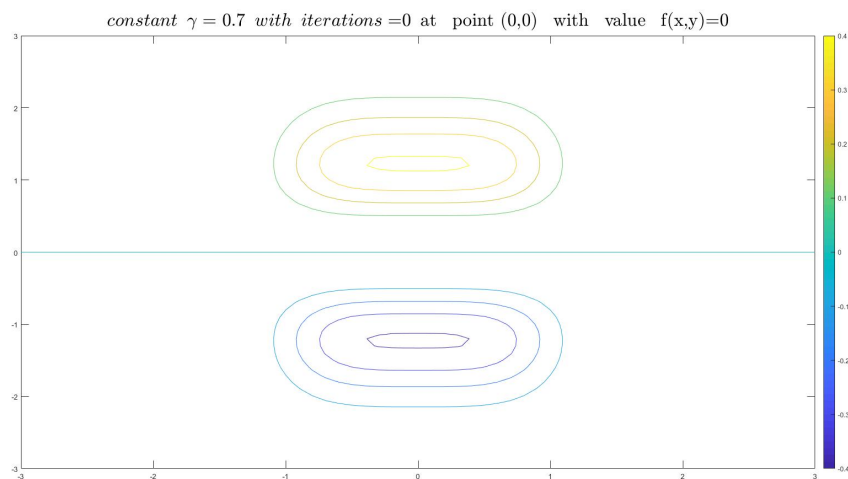
Ο αλγόριθμος υλοποιεί την ιδέα της επαναληπτικής καθόδου που μας οδηγεί σε ολοένα και βελτιωμένες τιμές της f , προς την ελαχιστοποίηση της.

Σταθερό γάμμα

Θέτουμε ένα σταθερό $\gamma = 0.7$ της επιλογής μας για την συνάρτηση f και εντός του αλγορίθμου κάνουμε τους απαραίτητους ελέγχους για να δούμε αν η επιλογή μας αυτή θα συγκλίνει σε κάποιο αποτέλεσμα. Όταν η τιμή του γ είναι πολύ μικρή τότε τα βήματα των επαναλήψεων για την εύρεση ελαχίστου αυξάνουν σημαντικά. Απο την άλλη η επιλογή ενός μεγάλου γ για το σύστημα προκαλεί αστάθεια καθώς με μεγάλο βήμα ο αλγόριθμος αδυνατεί να βρει τον ελάχιστο. Επίσης για την ακρίβεια ϵ , δηλαδή πόσο κοντά θα είμαστε στο ελάχιστο επιλέξαμε ακριβώς μικρή τιμή $\epsilon = 10^{-4}$

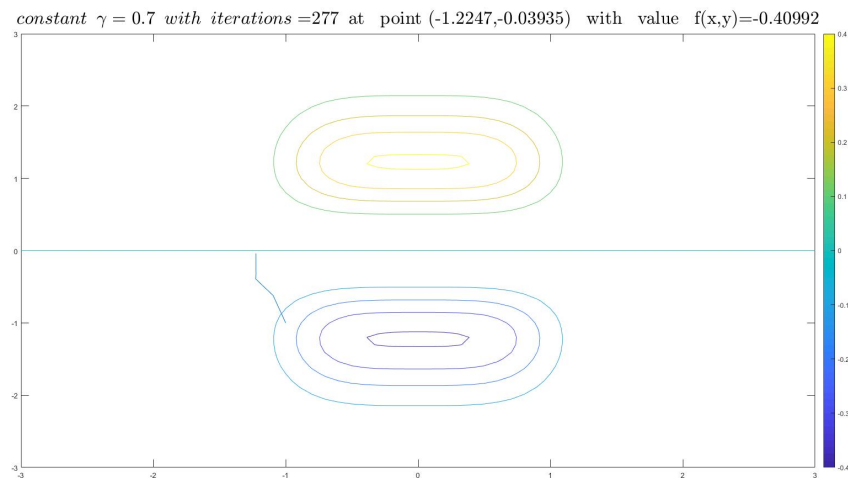
Πιο αναλυτικά, στο ελάχιστο η παράγωγος είναι μηδέν οπότε για να προσεγγίσουμε το ελάχιστο και να βρισκόμαστε κοντά του πρέπει η παράγωγος να είναι πολύ μικρή-σχεδόν μηδέν. Οπότε ξεκινώντας για γάμμα 0.7 έχουμε τις εξής γραφικές για την μέθοδο μέγιστης καθόδου.

Αρχικό σημείο (0,0) για την συνάρτηση f



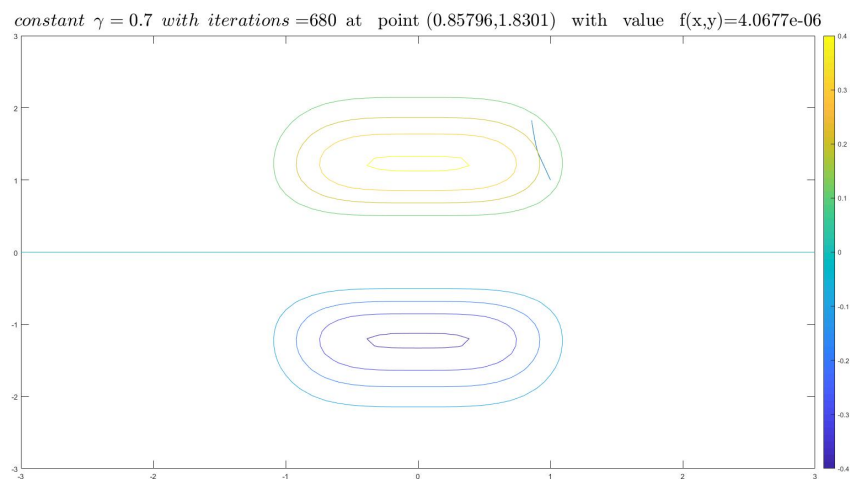
Για αρχικό σημείο (0,0) η παράγωγος της f είναι μηδέν οπότε ο αλγόριθμος τερματίζεται πρόωρα και συνεπώς εγκλωβιζόμαστε στο σημείο $f(x,y)=0$.

Αρχικό σημείο (-1,-1) για την συνάρτηση f



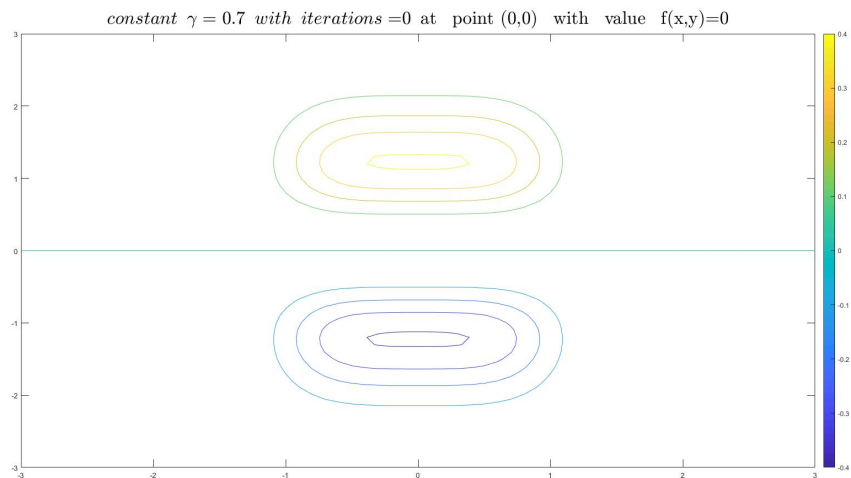
Για αρχικό σημείο (-1,-1) μετά απο 277 επαναλήψεις καταλήγουμε σε τοπικό ελάχιστο (-1.22,-0.03) για δοσμένη ακρίβεια $\epsilon=10^{-4}$ με τιμή $f(x,y)=-0.409$.

Αρχικό σημείο (1,1) για την συνάρτηση f



Για αρχικό σημείο (1,1) μετά απο 680 επαναλήψεις καταλήγουμε σε τοπικό ελάχιστο (0.85,1.83) για δοσμένη ακρίβεια $e=10^{-4}$ με τιμή $f(x,y)=4 \cdot 10^{-6}$.

Αρχικό σημείο (0,0) για την συνάρτηση g



Για αρχικό σημείο (0,0) μετά απο 680 επαναλήψεις καταλήγουμε σε τοπικό ελάχιστο (0.85,1.83) για δοσμένη ακρίβεια $e=10^{-4}$ με τιμή $f(x,y)=4 \cdot 10^{-6}$.

Ελαχιστοποίηση $f(x_k + g_k \cdot d_k)$