

## 2η Εργαστηριακή Άσκηση

### Ελαχιστοποίηση συναρτήσεων πολλών μεταβλητών χωρίς περιορισμούς

Στην εργασία αυτή θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης μιας δοσμένης συνάρτησης πολλών μεταβλητών  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  χωρίς περιορισμούς. Οι αλγόριθμοι που θα χρησιμοποιήσουμε βασίζονται στην ιδέα της επαναληπτικής καθόδου, βάσει της οποίας ξεκινάμε από κάποιο αρχικό σημείο  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  και παράγουμε διαδοχικά τα διανύσματα  $x_1, x_2, \dots$  έτσι ώστε  $f(x_{k+1}) < f(x_k), k=0,1,2,\dots$ . Οι αλγόριθμοι αναζήτησης που θα μελετήσουμε είναι:

- Μέθοδος μέγιστης καθόδου (Steepest descent)
- Μέθοδος Newton
- Μέθοδος Levenberg-Marquardt
- Μέθοδος συζυγών κλίσεων
- Μέθοδος σχεδόν Newton

Οι αντικειμενικές συναρτήσεις που θα μελετήσουμε είναι οι

$$f(x, y) = x^3 e^{-x^2 - y^4},$$
$$g(x, y) = x^4 + y^2 - 0.2 \sin(2\pi x) - 0.3 \cos(2\pi y).$$

**Θέμα 1** Σχεδιάστε τις συναρτήσεις  $f, g$ , για να πάρετε μια γενική εικόνα της μορφής τους

**Θέμα 2** Ελαχιστοποιείστε την  $f$  με την μέθοδο μέγιστης καθόδου, χρησιμοποιώντας ως αρχικά σημεία  $(x_0, y_0)$  τα i)  $(0,0)$ , ii)  $(-1,-1)$ , iii)  $(1,1)$ . Το βήμα  $\gamma_k$  θα επιλεγεί: α) σταθερό (της επιλογής σας), β) τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την  $f(x_k + \gamma_k d_k)$ , και γ) βάσει του κανόνα *Armijo*. Σχολιάστε τις διαφορές στα αποτελέσματα, σε περίπτωση που προκαλούνται, λόγω της επιλογής του αρχικού σημείου  $(x_0, y_0)$  του αλγορίθμου, καθώς επίσης και λόγω της επιλογής του βήματος  $\gamma_k$ . Οδηγούμαστε πάντα σε σωστό αποτέλεσμα; Αν όχι αιτιολογήστε της απάντησή σας.

**Θέμα 3** Επαναλάβετε τα ερωτήματα του Θέματος 2 για την  $f$  με την μέθοδο *Newton*.

**Θέμα 4** Επαναλάβετε τα ερωτήματα του Θέματος 2 για την  $f$  με την μέθοδο *Levenberg-Marquardt*.

**Θέμα 5** Ελαχιστοποιείστε την  $g$  με την μέθοδο συζυγών κλίσεων, χρησιμοποιώντας ως αρχικά σημεία  $(x_0, y_0)$  τα i)  $(0,0)$ , ii)  $(-0.6, -0.6)$ , iii)  $(1,1)$ . Το βήμα  $\gamma_k$  θα επιλεγεί τέτοιο ώστε να ελαχιστοποιεί την  $f(x_k + \gamma_k d_k)$ . Σχολιάστε τις διαφορές στα αποτελέσματα, σε περίπτωση που προκαλούνται, λόγω της επιλογής του αρχικού σημείου  $(x_0, y_0)$  του αλγορίθμου. Οδηγούμαστε πάντα σε σωστό αποτέλεσμα; Αν όχι αιτιολογήστε της απάντησή σας.

**Θέμα 6** Επαναλάβετε τα ερωτήματα του Θέματος 5 για την  $g$  με την μέθοδο σχεδόν *Newton*.

**Σημείωση:** Για τα Θέματα 2-6, καταγράψτε όλες τις παρατηρήσεις σας (σύγκλιση και σύγκριση των μεθόδων, αριθμός επαναλήψεων, γραφική παράσταση της σύγκλισης της αντικειμενικής συνάρτησης ως προς  $k$  και σχολιάστε τυχόν αποκλίσεις από τις επιθυμητές τιμές λόγω εγκλωβισμού του αλγορίθμου σε κάποιο τοπικό ακρότατο (ελάχιστο ή μέγιστο). Παρατηρήστε την εξάρτηση του αποτελέσματος από την τιμή εκκίνησης  $(x_0, y_0)$  του αλγορίθμου, καθώς επίσης και από την επιλογή του βήματος  $\gamma_k$ .

**Παραδοτέα:** Αρχεία κώδικα σε Matlab (m-files) και αρχείο αναφοράς (pdf).