Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Ιωαννης-Παναγιωτης Μπουντουριδης

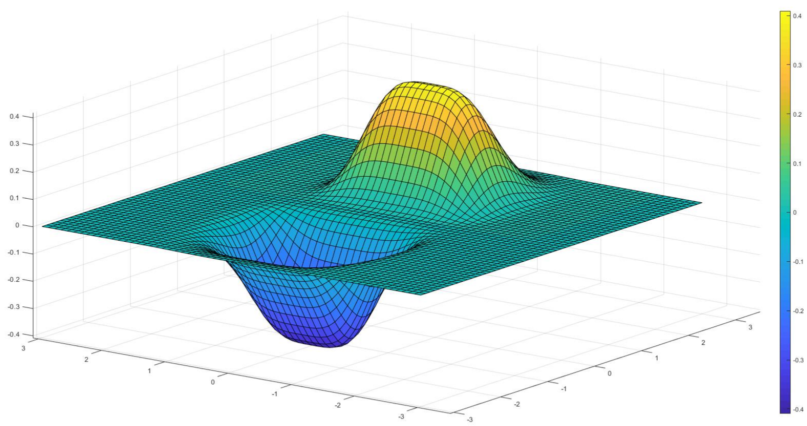
ΑΕΜ: 8872

work 2

Θέμα 1

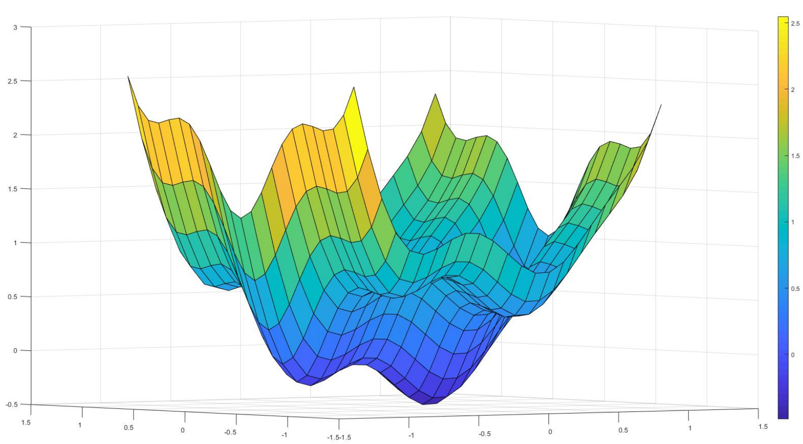
Γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x,y) = x^3 \cdot e^{-x^2-y^4}$$



Γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x,y) = x^4 + y^2 - 0.2sin(2\pi x) - 0.3cos(2\pi y)$$



ο κώδικας των γραφικών παραστάσεων υπάρχει στο αρχείο ***plot_functions.m***

Θέμα 2

Ζητούμενα

Στο πρώτο θέμα μας ζητείται να υλοποιήσουμε και να εφαρμόσουμε τη μέθοδο μέγιστης καθόδου (steepest descent) για να ελαχιστοποιήσουμε τις συναρτήσεις f και g παίρνοντας τα αρχικά σημεία i) (0,0), ii) (-1,-1), iii) (1,1).
Το βήμα γ_κ θα επιλεγεί:

- σταθερό της επιλογής μας
- μεταβλητό τέτοιο ώστε σε κάθε επανάληψη να ελαχιστοποιείται η $f(x_k + g_k \cdot d_k)$
- βάσει του κανόνα Armijo

Περιγραφή αλγορίθμου

Θεωρούμε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης μιας συνάρτησης τουλάχιστον δυο φορές παραγωγίσιμης f, στην ιδέα της επαναληπτικής διαδικασίας η οποία έχει ως εξής: Ξεκινάμε από το σημείο x_0 και παράγουμε διαδοχικά τα διανύσματα $x_1, x_2, ..$ ώστε

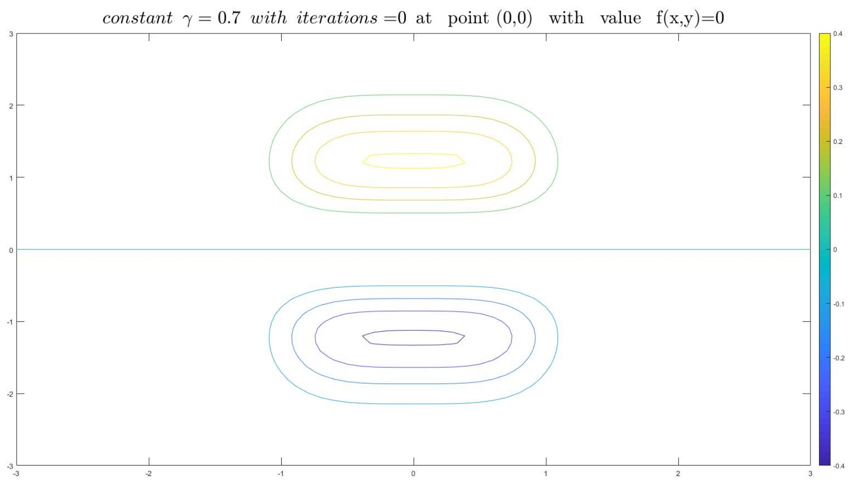
$$f(x_{k+1}) < f(x_k) \ \ k = 0, 1, 2, ...$$

Ο αλγόριθμος υλοποιεί την ιδέα της επαναληπτικής καθόδου που μας οδηγεί σε ολοένα και βελτιωμένες τιμές της f, προς την ελαχιστοποίηση της.

Σταθερό γάμμα

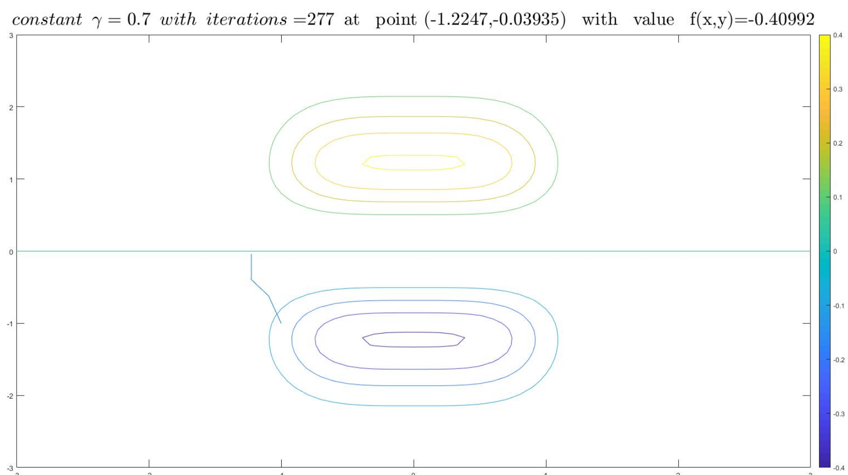
Θέτουμε ένα σταθερό $\boxed{\gamma_f = 0.7}$ της επιλογής μας για την συνάρτηση f και ένα σταθερό $\boxed{\gamma_g = 0.1}$ της επιλογής μας για την συνάρτηση g. Εντός του αλγορίθμου κάνουμε τους απαραίτητους ελέγχους για να δούμε αν η επιλογή μας αυτή θα συγκλίνει σε κάποιο αποτέλεσμα. Όταν η τιμή του γ είναι πολύ μικρή τότε τα βήματα των επαναλήψεων για την εύρεση ελαχίστου αυξάνουν σημαντικά. Απο την άλλη η επιλογή ενος μεγάλου γ για το σύστημα προκαλεί αστάθεια καθώς με μεγάλο βήμα ο αλγόριθμος αδυνατεί να βρει τον ελάχιστο. Επίσης για την ακρίβεια e, δηλαδή πόσο κοντά θα είμαστε στο ελάχιστο επιλέξαμε αρκούντος μικρή τιμή $\boxed{e = 10^{-4}}$
Πιο αναλυτικά, στο ελάχιστο η παράγωγος είναι μηδέν οπότε για να προσεγγίσουμε το ελάχιστο και να βρισκόμαστε κοντά του πρέπει η παράγωγος να είναι πολύ μικρή-σχεδόν μηδέν. Οπότε ξεκινώντας για γάμα 0.7 έχουμε τις εξής γραφικές για την μέθοδο μέγιστης καθόδου.

Αρχικό σημείο (0,0) για την συνάρτηση f



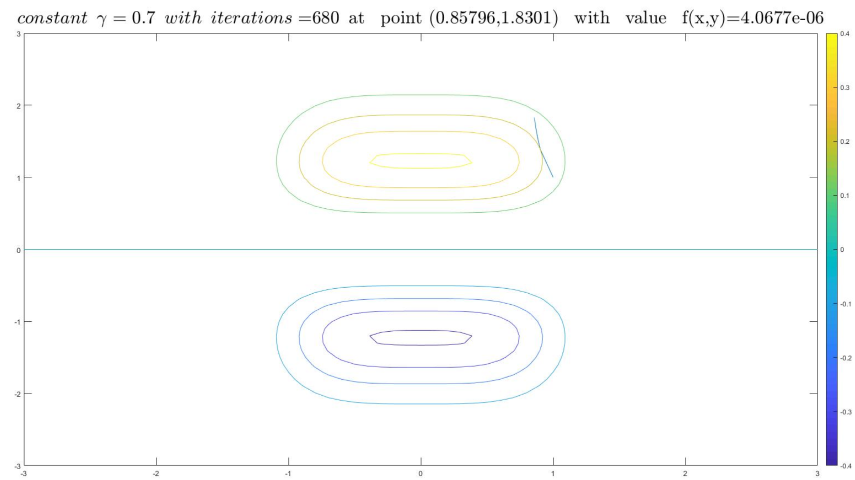
Για αρχικό σημείο (0,0) η παράγωγος της f είναι μηδέν οπότε ο αλγόριθμος τερματίζεται πρόωρα και συνεπώς εγκλωβιζόμαστε στο σημείο f(x,y)=0.

Αρχικό σημείο (-1,-1) για την συνάρτηση f



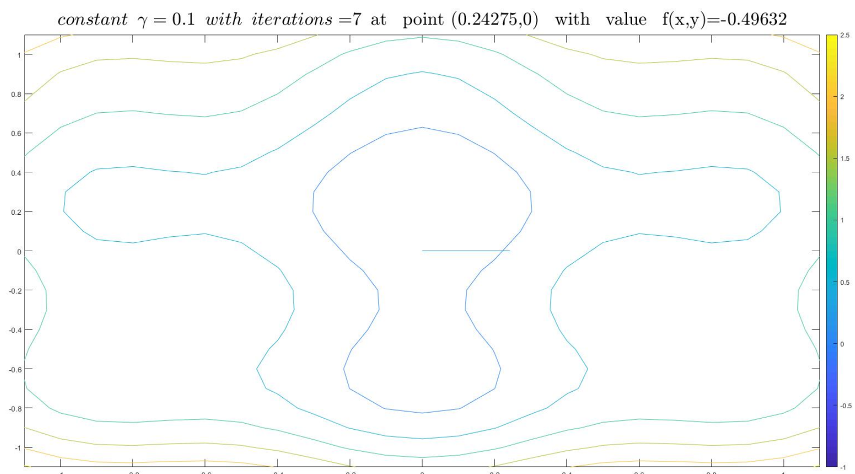
Για αρχικό σημείο (-1,-1) μετά απο 277 επαναλήψεις καταλήγουμε σε τοπικό ελάχιστο (-1.22,-0.03) για δοσμένη ακρίβεια e=10^{-4} με τιμή f(x,y)=-0.409.

Αρχικό σημείο (1,1) για την συνάρτηση f



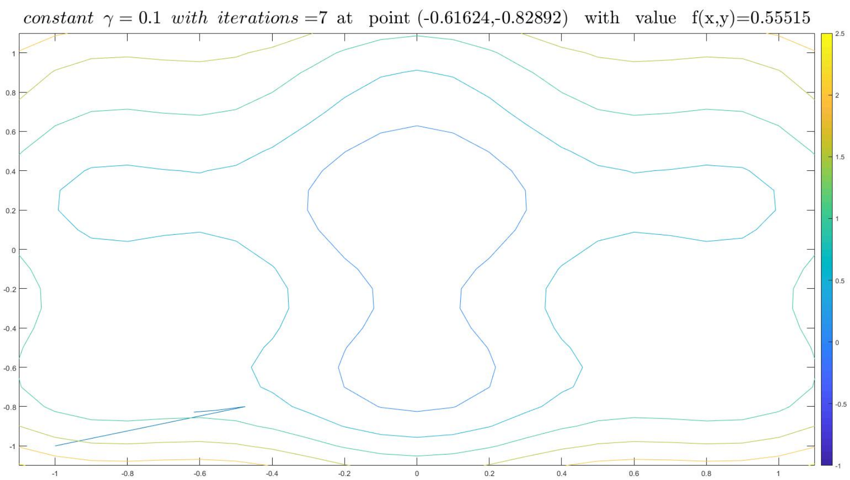
Για αρχικό σημείο (1,1) μετά απο 680 επαναλήψεις καταλήγουμε σε τοπικό ελάχιστο (0.85,1.83) για δοσμένη ακρίβεια e=10^{-4} με τιμή f(x,y)=$4{\cdot}10^{-6}$.

Αρχικό σημείο (0,0) για την συνάρτηση g



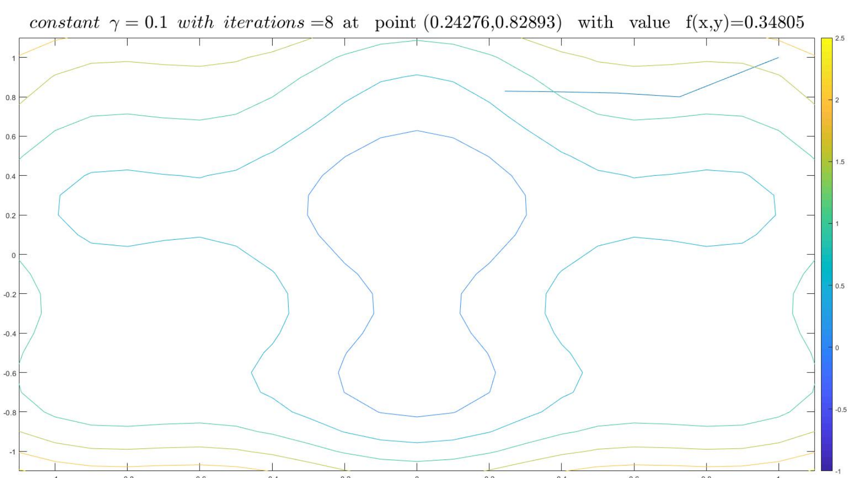
Για αρχικό σημείο (0,0) μετά απο 7 επαναλήψεις καταλήγουμε σε τοπικό ελάχιστο (0.24275,0) για δοσμένη ακρίβεια e=10^{-4} με τιμή g(x,y)=-0.496

Αρχικό σημείο (-1,-1) για την συνάρτηση g



Για αρχικό σημείο (-1,-1) μετά απο 7 επαναλήψεις καταλήγουμε σε τοπικό ελάχιστο (-0.61,-0.82) για δοσμένη ακρίβεια e=10^{-4} με τιμή g(x,y)=0.55

Αρχικό σημείο (1,1) για την συνάρτηση g



Για αρχικό σημείο (1,1) μετά απο 8 επαναλήψεις καταλήγουμε σε τοπικό ελάχιστο (-0.61,-0.82) για δοσμένη ακρίβεια e=10^{-4} με τιμή g(x,y)=0.34

Ελαχιστοποίηση $f(x_k + g_k \cdot d_k)$