Computergrafik SoSe 2012
Übung 1

Max Michels, Sebastian Kürten

1 Aufgabe 1

1.1 Teil a

1.1.1 Aufgabenstellung

Bestimmen Sie eine Rotation

$$R : \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix},$$

die die zwei Punkte (mit kartesischen Koordinaten) (0,0) und (3,4) auf die Punkte (2,1) und (2,6) abbildet.

1.1.2 Lösung

Es muss gelten: $R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $R \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$
weil die Rotationsmatrix diese Gestalt hat:

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & m_{13} \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

gilt auch:

$$m_{11} = cos(\alpha), m_{12} = -sin(\alpha), m_{21} = sin(\alpha), m_{22} = cos(\alpha) \tag{2}$$

Darus ergibt sich:

$$m_{13} = 2 \tag{3}$$

$$m_{23} = 1 \tag{4}$$

$$3m_{11} + 4m_{12} + m_{13} = 2 \Leftrightarrow 3m_{11} + 4m_{12} = 0 \tag{5}$$

$$3m_{21} + 4m_{22} + m_{23} = 6 \Leftrightarrow 3m_{21} + 4m_{22} = 5 \tag{6}$$

Aus (2) und (5) bzw. (2) und (6) folgen:

$$3cos(\alpha) - 4sin(\alpha) = 0 \tag{7}$$

$$3sin(\alpha) + 4cos(\alpha) = 5 \tag{8}$$

Aus (7) und (8) lässt sich ableiten:

$$cos(\alpha) = \frac{4}{5} \tag{9}$$

$$sin(\alpha) = \frac{3}{5} \tag{10}$$

Damit ist die Rotationsmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 2 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.2 Teil b

1.2.1 Aufgabenstellung

Bestimmen Sie den Punkt z der Ebene mit $z = R(z)$ (den Fixpunkt; den Punkt um den gedreht wird).

1.2.2 Lösung

Der Fixpunkt bleibt durch die Rotation unverändert, es gilt: $A\vec{x} = \vec{x}$, d.h.

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 2 \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} \tag{11}$$

Daraus folgt:

$$\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 2w = x \Leftrightarrow -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}y + 2w = 0 \tag{12}$$

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + w = y \Leftrightarrow \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y + w = 0 \tag{13}$$

Wenn wir $w = 1$ setzen, folgt:

$$x = -\frac{1}{2} \tag{14}$$

$$y = \frac{7}{2} \tag{15}$$

Daher ist $z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}^T$

1.3 Teil c

1.3.1 Aufgabenstellung

Um welchen Winkel wird die Ebene dabei gedreht?

1.3.2 Lösung

Aus (1) bzw. (9) ergibt sich: $cos(\alpha) = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = arccos(\frac{4}{5}) \approx 0.644 \approx 36.9°$

3 Aufgabe 3

3.1 Aufgabenstellung

Schreiben Sie die Transformationsmatrix M, die der Nacheinanderausführung der folgenden Transformationen (in dieser Reihenfolge) entspricht: [...]

3.2 Lösung

3.2.1 Teil a

Eine Translation um den Vektor (2,1).

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

3.2.2 Teil b

Eine Rotation um den Ursprung um 90° nach links.

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

3.2.3 Teil c

Eine Streckung der x-Achse um den Faktor 2. (Die y-Achse bleibt unverändert.)

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}$$

3.2.4 Teil d

Eine Rotation um den Ursprung um 90° nach links.

$$M_4 = M_1 \tag{19}$$

3.2.5 Gesamtergebnis

Hintereinanderausführung aller vier Operationen:

$$\vec{x} \mapsto M_4 M_3 M_2 M_1 \vec{x} \tag{20}$$

$$\vec{x} \mapsto M \vec{x} \tag{21}$$

wobei $M = M_4 M_3 M_2 M_1$

$$M = M_4 M_3 M_2 M_1 \tag{22}$$

$$M = M_4 M_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$M = M_4 M_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$M = M_4 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$M = M_4 \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{28}$$

4 Aufgabe 4

4.1 Teil a

$$A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

Die Abbildung beschreibt die Spiegelung an der y-Achse.

4.2 Teil b

Sei R eine Rotation um 90° nach links um den Ursprung. Bestimmen Sie die Matrix M die der folgenden Verknüpfung der drei Abbildungen entspricht:

$$R, A, R^{-1}.$$

Die Matrix für die Rotation um 90° ist folgende:

$$\begin{pmatrix} cos(90°) & -sin(90°) \\ sin(90°) & cos(90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Matrix für die Rotation um -90° ist folgende:

$$\begin{pmatrix} cos(-90°) & -sin(-90°) \\ sin(-90°) & cos(-90°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

M ist die Hintereinanderausführung von $M_R, M_A, M_{R^{-1}}$, also:

$$M = M_{R^{-1}} M_A M_R$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.3 Teil c

Die Fixpunkte sind die Punkte auf der Geraden $y = 0$.

4.4 Teil d

M beschreibt eine Spiegelung an der x-Achse.

6 Aufgabe 6

6.1 Teil a

Berechnen Sie den Schnittpunkt P der beiden Geraden

$$3x + 4y = 5$$

$$4x + 5y = -6$$

in homogenen Koordinaten.

$$3x + 4y = 5$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1 = 0$$

$$4x + 5y = -6$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}y + 1 = 0$$

Die Geraden werden beschrieben durch die Vektoren $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt berechnet sich durch das Kreuzprodukt:

$$P = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -49 \\ 38 \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.2 Teil b

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g durch P und den Punkt $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

$$g = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -49 \\ 38 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -226 \\ -297 \\ 212 \end{pmatrix}$$

6.3 Teil c

Schneiden Sie g mit der Ferngeraden.

Die Ferngerade ist die Gerade $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Schnitt von g mit der Ferngeraden:

$$g = \begin{pmatrix} -226 \\ -297 \\ 212 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -297 \\ 226 \\ 0 \end{pmatrix}$$

7 Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Transformationsmatrix für eine Rotation um die Gerade durch den Ursprung in Richtung des Vektors

$$u = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

um einen Winkel von 30° gegen den Uhrzeigersinn, wenn man vom Ursprung aus in Richtung von u schaut.

7.1 Teil 1

Drehe den Vektor u in die yz-Ebene (um die z-Achse)

Der Winkel α zwischen $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und der y-Achse ist von -z aus gesehen $\alpha = arctan(\sqrt{5^2 + 2^2}) = arctan(\sqrt{29})$.

Wir drehen aber von +z aus gegen den Uhrzeigersinn, also um $\alpha' = 2\pi - arctan(\sqrt{29})$.

$$sin(\alpha) = \frac{5}{\sqrt{29}}$$
$$sin(\alpha') = -\frac{5}{\sqrt{29}}$$
$$cos(\alpha) = cos(\alpha') = \frac{2}{\sqrt{29}}$$

Die Rotationsmatrix M_1 ist daher:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{29} & 5/\sqrt{29} & 0 \\ -5/\sqrt{29} & 2/\sqrt{29} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Vektor wird durch die Rotation abgebildet auf:

$$v = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{29} & 5/\sqrt{29} & 0 \\ -5/\sqrt{29} & 2/\sqrt{29} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{29} \\ 3 \end{pmatrix}$$

7.2 Teil 2

Drehe den Vektor v weiter in die z-Achse (um die x-Achse).

Der Winkel zwischen v und der z-Achse ist von -x aus gesehen $\beta = arctan(\frac{\sqrt{29}}{3})$. Wir drehen also von +x aus gesehen um $\beta' = 2\pi - \beta$.

$$sin(\beta) = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{38}}$$
$$sin(\beta') = -\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{38}}$$
$$cos(\beta) = cos(\beta') = \frac{3}{\sqrt{38}}$$

Die Rotationsmatrix M_2 ist daher:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{38} & \sqrt{29}/\sqrt{38} \\ 0 & -\sqrt{29}/\sqrt{38} & 3/\sqrt{38} \end{pmatrix}$$

Der Vektor wird durch die Rotation abgebildet auf:

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{38} & \sqrt{29}/\sqrt{38} \\ 0 & -\sqrt{29}/\sqrt{38} & 3/\sqrt{38} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{29} \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{38} \end{pmatrix}$$

7.3 Teil 3

Drehen um die z-Achse: $\gamma = 30°$ vom Ursprung aus gesehen gegen der Uhrzeigersinn. D.h. wir drehen um $\gamma' = -30° = 330°$ von +z aus gesehen.

$$sin(\gamma) = \frac{1}{2}$$
$$sin(\gamma') = -\frac{1}{2}$$
$$cos(\gamma) = cos(\gamma') = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Die Rotationsmatrix M_3 ist daher:

$$M_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7.4 Teil 4

Um die Transformationen aus den Teilen 1 und 2 rückwärts auszuführen werden die Matrizen M_1^{-1} und M_2^{-1} benötigt:

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{29} & -5/\sqrt{29} & 0 \\ 5/\sqrt{29} & 2/\sqrt{29} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{38} & -\sqrt{29}/\sqrt{38} \\ 0 & \sqrt{29}/\sqrt{38} & 3/\sqrt{38} \end{pmatrix}$$

7.5 Gesamtergebnis

Die gesuchte Transformationsmatrix M ist gegeben durch die folgende Verkettung von Transformationen:

$$M = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3 M_2 M_1$$

$$M = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/\sqrt{38} & \sqrt{29}/\sqrt{38} \\ 0 & -\sqrt{29}/\sqrt{38} & 3/\sqrt{38} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{29} & 5/\sqrt{29} & 0 \\ -5/\sqrt{29} & 2/\sqrt{29} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3 \begin{pmatrix} 2/\sqrt{29} & 5/\sqrt{29} & 0 \\ -15\sqrt{29 \cdot 38} & 6/\sqrt{29 \cdot 38} & \sqrt{29}/\sqrt{38} \\ 5/\sqrt{38} & -2/\sqrt{38} & 3/\sqrt{38} \end{pmatrix}$$

$$M = M_1^{-1} M_2^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{29} & 5/\sqrt{29} & 0 \\ -15\sqrt{29 \cdot 38} & 6/\sqrt{29 \cdot 38} & \sqrt{29}/\sqrt{38} \\ 5/\sqrt{38} & -2/\sqrt{38} & 3/\sqrt{38} \end{pmatrix}$$

...

$$M \approx \begin{pmatrix} 0.95417 & -0.27859 & -0.10934 \\ 0.20808 & 0.88013 & -0.42671 \\ 0.21511 & 0.38440 & 0.89776 \end{pmatrix}$$

$Mu = u$ durch Octave bestätigt.

8 Aufgabe 8

- Teil1:
  - Berechnen von $sin(\alpha)$ und $cos(\alpha)$ aus den Einträgen der Vektoren mit dem Satz von Pythagoras: je 2 Multiplikationen, eine Addition, eine Wurzel, eine Division.
  - Berechnen von v: 9 Multiplikationen und 6 Additionen
- Teil2: analog zu Teil1. Also weitere 13 Multiplikationen, 8 Additionen, 2 Wurzeln, 2 Divisionen
- Teil3: in Abhängigkeit vom Rotationswinkel M_3 bestimmen: 1 Mal Sinus, 1 Mal Cosinus
- Teil4: M_1^{-1} und M_2^{-1} lassen sich durch je zwei Vorzeichenwechsel aus M_1 bzw. M_2 bestimmen. Zählen hier pro Matrix 4 Additionen für die nicht-trivialen Einträge, also insgesamt 8 Additionen.

Zusammengefasst lässt sich für diese Teile sagen:

- Additionen: 24
- Multiplikationen: 26
- Divisionen: 4
- Wurzeln: 4
- Sinus / Cosinus: 1

Dann müssen noch 5 Matrixmultiplikationen durchgeführt werden, um die endgültige Transformationsmatrix zu bestimmen. Jede Matrix hat die Dimension 3×3. Jede Matrixmultiplikation benötigt $9 \cdot 3$ Multiplikationen und $9 \cdot 2$ Additionen. Das ergibt bei 5 Matrixmultiplikationen also 135 Multiplikationen und 90 Additionen. Insgesamt dominiert dieser letzte Schritt die Gesamtanzahl von Operationen, jedoch treten bei den Teilen 1 bis 4 noch andere Operationen als Addition und Multiplikation auf.