Computergrafik SoSe 2012
Übung 6

Max Michels, Sebastian Kürten

24 Aufgabe 24

Die Augkoordinaten werden mit der folgenden Matrix in normalisierte Gerätekoordinaten transformiert:

$$M_{NDC} = \begin{pmatrix} \frac{2n_{nah}}{u_{rechts}-u_{links}} & 0 & \frac{u_{rechts}+u_{links}}{u_{rechts}-u_{links}} & 0 \\ 0 & \frac{2n_{nah}}{v_{oben}-v_{unten}} & \frac{v_{oben}+v_{unten}}{v_{oben}-v_{unten}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{n_{nah}+n_{fern}}{n_{fern}-n_{nah}} & -\frac{2n_{nah}n_{fern}}{n_{fern}-n_{nah}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ein beliebiger Vektor in homogenen Augkoordinaten, bei dem uns die u- und v-Komponente nicht interessieren, wird also folgendermaßen abgebildet:

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ n \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto A_{NDC} \cdot \begin{pmatrix} * \\ * \\ n \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * \\ * \\ -n\frac{n_{nah}+n_{fern}}{n_{fern}-n_{nah}} - \frac{2n_{nah}n_{fern}}{n_{fern}-n_{nah}} \\ -n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * \\ * \\ \frac{n_{nah}+n_{fern}}{n_{fern}-n_{nah}} + \frac{2n_{nah}n_{fern}}{(n_{fern}-n_{nah})n} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also gilt für die z-Koordinate in NDC:

$$z = \frac{n_{nah}+n_{fern}}{n_{fern}-n_{nah}} + \frac{2n_{nah}n_{fern}}{(n_{fern}-n_{nah})n}$$

Teil a

Es gilt $n_{nah} = 1m$ und $n_{fern} = 2m$, also:

$$z = 3 + \frac{4m}{n}$$

Setzen wir $n_1 = -n_{nah}$ ein, so erhalten wird (wie erwartet, weil so wurde M_{NDC} definiert) für z_1 den Wert -1.

Wenn wir $n_2 = -(n_{nah} + \epsilon)$ einsetzen:

$$z_2 = 3 + \frac{4m}{-(n_{nah} + \epsilon)} = 3 + \frac{4m}{-(1m + \epsilon)}$$

Wir wissen, dass für ein $\epsilon > 0$: $z_2 < z_1$ ist und wollen nun, dass der Abstand zwischen z_1 und z_2 eine bestimmte Mindestgröße δ hat, also, da $z_1 < 0$:

$$z_2 - z_1 \geq \delta$$

$$\Leftrightarrow 4 + \frac{4m}{-(1m + \epsilon)} \geq \delta$$

da $-(1m + \epsilon) < 0$:

$$\Leftrightarrow -(1m + \epsilon)4 + 4m \leq -(1m + \epsilon)\delta$$

$$\Leftrightarrow -4\epsilon \leq -\delta m - \delta\epsilon \Leftrightarrow (4 - \delta)\epsilon \geq \delta m$$

$$\Leftrightarrow \epsilon \geq \frac{\delta m}{4 - \delta}$$

Wenn wir 15 Bits für die Nachkommastellen zur Verfügung haben, so ist der Wert, denn wir mit dem kleinstwertigen Bit darstellen können 2^{-15}. Also ist in diesem Fall $\delta = 2^{-15}$. Damit ist:

$$\Leftrightarrow \epsilon \geq \frac{2^{-15}}{4 - 2^{-15}} m = 7.63 \mu m$$

Für 31 Bits ist $\delta = 2^{-31}$ und:

$$\Leftrightarrow \epsilon \geq \frac{2^{-31}}{4 - 2^{-31}} m = 116 pm$$

Die zwei Objekte müssen also mindestens einen Abstand von $7,63\mu m$ bzw. $116pm$ haben, damit man sie im Tiefenpuffer unterscheiden kann.

Teil b

Da $n_1 = n_{fern}$ ist, muss $z_1 = 1$ sein.

$$z_2 = 3 + \frac{4m}{-(n_{fern} - \epsilon)} = 3 - \frac{4m}{2m - \epsilon}$$

Da diesmal $z_1 > z_2$ ist, wissen wir dass $z_1 - z_2 \geq \delta$ gilt.

Eingesetzt und umgeformt ergiebt sich hier:

$$\epsilon \geq \frac{2\delta}{2 - \delta} m$$

Für $\delta = 2^{-15}$ bzw. $\delta = 2^{-31}$ erhalten wir $\epsilon \geq 30,5\mu m$ bzw. $\epsilon \geq 466pm$.

Teil c

Es gilt $n_{nah} = 1m$ und $n_{fern} = 100m$, also:

$$z = \frac{101}{99} + \frac{200m}{99n}$$

Wieder: $z_1 = -1$, sowie:

$$z_2 = \frac{101}{99} + \frac{200m}{99(-(n_{nah} + \epsilon))}$$

$$= \frac{101}{99} + \frac{200m}{99(-(1m + \epsilon))}$$

$$= \frac{101}{99} + \frac{200m}{-99m - 99\epsilon}$$

Es gilt wieder:

$$z_2 - z_1 \geq \delta$$

woraus sich herleiten lässt:

$$\epsilon \geq \frac{99\delta}{200 - 99\delta} m$$

Für $\delta = 2^{-15}$ bzw. $\delta = 2^{-31}$ erhalten wir $\epsilon \geq 15,1\mu m$ bzw. $\epsilon \geq 231pm$.

Teil d

$$z_2 = \frac{101}{99} + \frac{200m}{99(-(n_{fern} - \epsilon))}$$

Es ergibt sich analog:

$$\epsilon \geq \frac{9900\delta}{2 + 99\delta} m$$

Für $\delta = 2^{-15}$ bzw. $\delta = 2^{-31}$ erhalten wir $\epsilon \geq 15,1cm$ bzw. $\epsilon \geq 2,31\mu m$.

25 Aufgabe 25

siehe Email