Computergrafik SoSe 2012
Übung 3

Max Michels, Sebastian Kürten

16 Aufgabe 16

16.1 Weltkoordinaten → Augkoordinaten

Die Kamera steht im Punkt $\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ und blickt in Richtung auf den Punkt $\vec{q} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Umrechnung in Augkoordinaten wie in Aufgabe 12:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{26} \\ 4/\sqrt{26} \\ -1/\sqrt{26} \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -3/5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3/5\sqrt{26} \\ 4/5\sqrt{26} \\ 5/\sqrt{26} \end{pmatrix}$$

$$M_{AW} = \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 & 0 & 37/5 \\ -3/(5\sqrt{26}) & 4/(5\sqrt{26}) & 5/\sqrt{26} & -91/(5\sqrt{26}) \\ -3/\sqrt{26} & 4/\sqrt{26} & -1/\sqrt{26} & -13/\sqrt{26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16.2 Objektkoordinaten → Weltkoordinaten

Wir gehen davon aus, dass der Würfel um seine eigene Achse rotiert wird, nicht um die Z-Achse in Weltkoordinaten.

Die Objektkoordinaten des Würfels lassen sich demnach in Weltkoordinaten umrechnen, indem sie an ihrer Position in Objektkoorinaten im Ursprung gedreht werden und anschließend um $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ verschoben werden.

Drehmatrix in homogenen Koordinaten:

$$A_r = \begin{pmatrix} cos(60°) & -sin(60°) & 0 & 0 \\ sin(60°) & cos(60°) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -sin(60°) & 0 & 0 \\ sin(60°) & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verschiebung in homogenen Koordinaten:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Drehung + Verschiebung in einem:

$$A_{rt} = A_t \cdot A_r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.5 & -sin(60°) & 0 & 0 \\ sin(60°) & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -sin(60°) & 0 & 7 \\ sin(60°) & \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16.3 Weltkoordinaten → Augkoordinaten

Die Weltkoordinaten werden mit M_{AW} in Augkoordinaten umgerechnet. Die Matrix, welche Objektkoordinaten des Würfels in Augkoordinaten umrechnet ist:

$$A_{AW} = M_{AW} \cdot A_{rt}$$

$$= \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 & 0 & 37/5 \\ -3/(5\sqrt{26}) & 4/(5\sqrt{26}) & 5/\sqrt{26} & -91/(5\sqrt{26}) \\ -3/\sqrt{26} & 4/\sqrt{26} & -1/\sqrt{26} & -13/\sqrt{26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -sin(60°) & 0 & 7 \\ sin(60°) & \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2+3sin(60°)}{5} & \frac{8sin(60°)-3}{10} & 0 & 0 \\ \frac{-3+8sin(60°)}{10\sqrt{26}} & \frac{3sin(60°)+2}{5\sqrt{26}} & \frac{5}{\sqrt{26}} & 0 \\ \frac{-3+8sin(60°)}{2\sqrt{26}} & \frac{3sin(60°)+2}{\sqrt{26}} & \frac{-1}{\sqrt{26}} & -\sqrt{26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16.4 Augkoordinaten → Normalisierte Gerätekoordinaten

Der horizontale Öffnungswinkel der Kamera ist 30° und die Kamera ist 6 Einheiten von der Projektionsfläche entfernt. Die Verbindungslinie von der Kamera zum Hauptpunkt und u_{rechts} spannen ein rechtwinkliges Dreieck mit einem Winkel von 15° bei der Kamera auf, sodass sich u_{rechts} bestimmen lässt:

$$u_{rechts} = 6 \cdot tan 15° \approx 1.61$$

Damit ist auch u_{links} bestimmt als $u_{links} = -u_{rechts} = -6 \cdot tan 15°$

Durch die Auflösung des Bildschirms ist das Verhältnis zwischen Breite und Höhe der Leinwand bestimmt als 3 zu 2 und damit auch das Verhältnis von u_{rechts} zu v_{oben}. Es gilt

$$v_{oben} = \frac{2}{3} u_{rechts} = 4 \cdot tan 15°$$

und

$$v_{unten} = -v_{oben} = -4 \cdot tan 15°$$

Wir können jetzt also die Matrix zur Umrechnung von Augkoordinaten in Gerätekoordinaten angeben:

$$M_{NDC} = \begin{pmatrix} \frac{2n_{nah}}{u_{rechts}-u_{links}} & 0 & \frac{u_{rechts}+u_{links}}{u_{rechts}-u_{links}} & 0 \\ 0 & \frac{2n_{nah}}{v_{oben}-v_{unten}} & \frac{v_{oben}+v_{unten}}{v_{oben}-v_{unten}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{n_{nah}+n_{fern}}{n_{fern}-n_{nah}} & -\frac{2n_{nah}n_{fern}}{n_{fern}-n_{nah}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tan(15°)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2\tan(15°)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{7} & -\frac{120}{7} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

16.5 Objektkoordinaten → Normalisierte Gerätekoordinaten

Durch Hintereinanderausführung von A_{AW} und M_{NDC} können wir Objektkoordinaten in Normalisierte Gerätekoordinaten überführen. Wir erhalten eine Gesamtmatrix für diese Operation:

$$A_{NDC} = M_{NDC} \cdot A_{AW}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\tan(15°)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2\tan(15°)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{7} & -\frac{120}{7} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2+3sin(60°)}{5} & \frac{8sin(60°)-3}{10} & 0 & 0 \\ \frac{-3+8sin(60°)}{10\sqrt{26}} & \frac{3sin(60°)+2}{5\sqrt{26}} & \frac{5}{\sqrt{26}} & 0 \\ \frac{-3+8sin(60°)}{2\sqrt{26}} & \frac{3sin(60°)+2}{\sqrt{26}} & \frac{-1}{\sqrt{26}} & -\sqrt{26} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2+3sin(60°)}{5\tan(15°)} & \frac{8sin(60°)-3}{10\tan(15°)} & 0 & 0 \\ \frac{-9+24sin(60°)}{20\sqrt{26}\tan(15°)} & \frac{9sin(60°)+6}{10\sqrt{26}\tan(15°)} & \frac{15}{2\sqrt{26}\tan(15°)} & 0 \\ \frac{39-104sin(60°)}{14\sqrt{26}} & \frac{-39sin(60°)-26}{7\sqrt{26}} & \frac{13}{7\sqrt{26}} & \frac{13\sqrt{26}-120}{7} \\ \frac{3-8sin(60°)}{2\sqrt{26}} & \frac{-3sin(60°)-2}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} & \sqrt{26} \end{pmatrix}$$

16.6 Berechnung der Gerätekoordinaten des Würfels

Der Würfel hat in Objektkoordinaten die Koordinaten

$$b_i = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die jeweilige Gerätekoordinate ist:

$$c_i = A_{NDC} \cdot b_i$$

$$c_1 = A_{NDC} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-7+14\sin(60°)}{10\tan(15°)} \\ \frac{42\sin(60°)+153}{20\sqrt{26}\tan(15°)} \\ \frac{689-240\sqrt{26}-26\sin(60°)}{14\sqrt{26}} \\ \frac{53-14\sin(60°)}{2\sqrt{26}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.477 \\ 0.267 \\ -1.947 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_2 = A_{NDC} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-7+14\sin(60^\circ)}{10\tan(15^\circ)} \\ \frac{42\sin(60^\circ)-147}{20\sqrt{26}\tan(15^\circ)} \\ \frac{637-240\sqrt{26}-26\sin(60^\circ)}{14\sqrt{26}} \\ \frac{49-14\sin(60^\circ)}{2\sqrt{26}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.529 \\ -1.12 \\ -2.36 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_3 = A_{NDC} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1-2\sin(60^\circ)}{10\tan(15^\circ)} \\ \frac{129+6\sin(60^\circ)}{20\sqrt{26}\tan(15^\circ)} \\ \frac{793-240\sqrt{26}-182\sin(60^\circ)}{14\sqrt{26}} \\ \frac{61-2\sin(60^\circ)}{2\sqrt{26}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.175 \\ 0.845 \\ -5.293 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_4 = A_{NDC} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1-2\sin(60^\circ)}{10\tan(15^\circ)} \\ \frac{-171+6\sin(60^\circ)}{20\sqrt{26}\tan(15^\circ)} \\ \frac{741-240\sqrt{26}-182\sin(60^\circ)}{14\sqrt{26}} \\ \frac{57-2\sin(60^\circ)}{2\sqrt{26}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.188 \\ -1.12 \\ -6.17 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_5 = A_{NDC} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2\sin(60^\circ)}{10\tan(15^\circ)} \\ \frac{171-6\sin(60^\circ)}{20\sqrt{26}\tan(15^\circ)} \\ \frac{610+240\sqrt{26}+182\sin(60^\circ)}{14\sqrt{26}} \\ \frac{47+2\sin(60^\circ)}{2\sqrt{26}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.213 \\ 1.270 \\ 21.787 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_6 = A_{NDC} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+2\sin(60^\circ)}{10\tan(15^\circ)} \\ \frac{129-6\sin(60^\circ)}{20\sqrt{26}\tan(15^\circ)} \\ \frac{558+240\sqrt{26}+182\sin(60^\circ)}{14\sqrt{26}} \\ \frac{43+2\sin(60^\circ)}{2\sqrt{26}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.232 \\ 1.033 \\ 23.115 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_7 = A_{NDC} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7-14\sin(60^\circ)}{10\tan(15^\circ)} \\ \frac{147-42\sin(60^\circ)}{20\sqrt{26}\tan(15^\circ)} \\ \frac{715-240\sqrt{26}+26\sin(60^\circ)}{14\sqrt{26}} \\ \frac{55+14\sin(60^\circ)}{2\sqrt{26}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.291 \\ 0.615 \\ -3.86 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_8 = A_{NDC} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7-14\sin(60^\circ)}{10\tan(15^\circ)} \\ \frac{-153-42\sin(60^\circ)}{20\sqrt{26}\tan(15^\circ)} \\ \frac{663-240\sqrt{26}+26\sin(60^\circ)}{14\sqrt{26}} \\ \frac{51+14\sin(60^\circ)}{2\sqrt{26}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0.309 \\ -1.119 \\ -4.546 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diesen Berechnungen zufolge liegen alle Punkte des Würfels außerhalb des Sichtbarkeitsstumpfs.