Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Villamosmérnöki és Informatikai Kar
Hálózati Rendszerek és Szolgáltatások Tanszék

Matematikai statisztika

Tételsor kidolgozás

Készítette
Papp Dorottya

2017. június 6.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Paraméterbecslések

1.1. Alapfogalmak

A matematikai statisztika alapmodellje:

- $\mathcal{K}$ a véletlen kísérlet
- Ω a lehetséges kimenetelek halmaza
- $\mathcal{A}$ a megfigyelhető események halmaza
- $\mathcal{P}$ a lehetéges valószínűségi mértékek halmaza

Az elemzésünk célja, hogy P-ből kiválasszuk a tényleges valószínűséget, de legalábbis egy jó helyettesítő egyedet.

Statisztikai minta: Az X valószínűségi változóval azonos eloszlású, egymással teljesen független X_1, X_2, ..., X_n valószínűségi változók együttesét statisztikai mintának nevezzük. Egy mintavételkor tulajdonképpen megfigyeljük a $\mathcal{K}$ véletlen kísérletet, azaz megállpítjuk, hogy melyik $\omega \in \Omega$ lehetséges kimenet realizálódott. Az $X_1(\omega) = x_1 ..., X_n(\omega) = x_n$ szám n-est nevezzük a minta realizációjának.

Statisztika: Legyen t_n egy n-változós valós függvény. A statisztikai minta $t_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ függvényét nevezzük statisztikának. A statisztika egy valószínűségi változó, aminek eloszlásfüggvényét a minta eloszlásfüggvényéből lehet kiszámolni. A $T_n = t_n(x_1, x_2, ..., x_n)$ szám a statisztika számolt értéke.

Paraméter: Tegyük fel, hogy a minta eloszlásfüggvényének képletét egy ϑ paraméter konkretizálja, pl. normális eloszlás várható értéke, szórása; binomiális eloszlás paraméterei (n és k). Ha ismerjük a paraméter értékét, pontosan meg tudjuk adni az eloszlásfüggvényt $\rightarrow$ cél: adott statisztikai minta segítségével a ϑ paraméter becslése egy alkalmas statisztikával.

1.2. A matematikai statisztika alaptétele (Glivenkó-Cantelli)

Empirikus eloszlásfüggvény:

$$F_{emp}(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq X_1^* \\ \frac{k}{n} & \text{ha } X_k^* < x \leq X_{k+1}^* \text{, ahol } X_i^* \text{ a rendezett minta } i\text{-dik eleme} \\ 1 & \text{ha } x > X_n^* \end{cases}$$

Glivenkó-Cantelli tétel: $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_{emp}(x) - F(x)| = 0) = 1$, vagyis az empirikus eloszlásfüggvény 1 valószínűséggel, egyenletesen konvergál az eloszlásfüggvényhez. (E miatt a tétel miatt van egyáltalán értelme beszélni a matematikai statisztikáról.)

1.3. A jó becslések tulajdonságai

Torzítatlanság: $\mathbf{E}T_n = \vartheta$, vagyis a becslő statisztika pont a becsülendő paraméterérték körül fogja felvenni az értékeit. Indok: egy valószínűségi változó az összes szám körül épp a várható érték körül ingadozik a legkisebb mértékben

- Aszimptotikus torzítatlanság: a torzítatlansági feltétel csak $n \to \infty$ esetében igaz

Konzisztencia: $\forall\epsilon > 0$-ra $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|T_n - \vartheta| > \epsilon) = 0$, vagyis garancia van arra, hogy a minta elemszám növekedtével növekszik a becslés pontosságának valószínűsége

- Erős konzisztencia: torzítatlan becslés, ahol az elemszám növekedtével a szórásnégyzet (variancia, $\mathbf{D}^2T_n$) 0-hoz tart. Az erősen konzisztenc statisztikai becslések egyben konzisztensek is

Hatásosság: torzítatlan becslés, melynek varianciája minden más torzítatlan becslés varianciájánál kisebb. Logika: két torzítatlan becslés közül a kisebb szórásnégyzetű a jobb, hiszen kisebb mértékben ingadozik a paraméter körül, vagyis kevesebb megfigyeléssel is jó becslés kapható. Hatásos becslésből egyetlen egy létezik csak, ezt érdemes megkeresni egy adott paraméter-becslési problémához

- A Cramer-Rao egyenlőtlenség elvi alsó korlátot ad a torzítatlan becslések szórásnégyzeteire. Ha egy statisztikára belátjuk, hogy a szórásnégyzete éppen az alsó korláttal egyenlő, akkor az biztosan a hatásos becslés

Elégségesség: a mintának t_n-re vonatkozó együttes feltétel sűrűségfüggvénye nem tartalmazza a ϑ paramétert, vagyis a becslés egymaga képes helyettesíteni a mintát, a paraméterre vonatkozóan minden információt magába sűrít

- Rao-Blackwell-Kolmogorov tétel: ha létezik hatásos (legjobb torzítatlan) becslés, akkor elég azt az elégséges becslés függvényei között keresni:
  $\exists h() : \mathbf{E}_\vartheta(h(T_n)) = g(\vartheta), \sigma^2_\vartheta(h(T_n)) \leq \sigma^2_\vartheta(t_n)$, és $h(T_n) = \mathbf{E}_\vartheta(t_n|T_n)$, ahol T_n a statisztika számított értéke, g a függvény tetszőleges torzítatlan becslése

- Az elégségességet a Neymann-Fisher faktorizációs tétellel lehet ellenőrizni:
  A T_n statisztika a ϑ paraméternek akkor és csak akkor elégséges becslése, ha $\exists k$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, hogy $\forall(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ és $\forall\vartheta$-ra
  $L_\vartheta(x_1, ..., x_n) = k(x_1, ...x_n) \cdot g(T_n(x1, ..., x_n), \vartheta)$, ahol $L_\vartheta(x_1, ..., x_n)$ a minta együttes sűrűségfüggvénye

2. fejezet

Becslési módszerek

2.1. Maximum likelihood becslés

A módszer alapgondolata, hogy ha egy kísérletnél több esemény is bekövetkezhet, akkor legtöbbször a legnagyobb valószínűségű esetményt fogjuk megfigyelni. Következtetésképp, azért kaptuk azt a mintát, amit, mert ennek a bekövetkezésnek volt a legnagyobb a valószínűsége. Tehát, az összes lehetséges ϑ paraméter közül vegyük azt, amelynél a kapott realizáció bekövetkezése a maximális! Képletesen: a paraméter maximum likelhood becslése az a $t_n(X_1, X_2, ..., X_n)$ statisztika, melyre $L(x, t_n(\mathbf{x})) = \max_\vartheta L(\mathbf{x}, \vartheta)$ [1].

A maximum meghatározásához $L(\mathbf{x}, \vartheta)$ ϑ szerinti első deriváltjának zérushelyeit keressük. A zérushelyek közül az a maximum, ahol a $L(\mathbf{x}, \vartheta)$ ϑ szerinti második deriváltja negatív. Megjegyzés: ha $L(\mathbf{x}, \vartheta)$ deriválása túl nehéz, érdemes a logaritmusát venni (log-likehood függvény, $l(\mathbf{x}, \vartheta)$) és azzal számolni. Mivel a logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ezért nem torzítja a zérushelyeket. (Többparaméteres esetben paraméterenként vizsgáljuk az első deriváltakat és a Hesse-mátrix alapján döntünk a maximum helyről. Maximum esetén a mátrix diagonális és az első diagonál elem negatív.)

Cramer-Dugue-tétel: Tegyük fel, hogy t_n a ϑ paraméter maximum-likelihood becslése. Legyen a minta sűrűségfüggvénye $f_\vartheta(x)$, $\vartheta \in (a, b)$, ami kielégíti az alábbi feltételeket:

- létezik $ln\big(f_\vartheta(x)\big)$ első 3 deriváltja,
- létezik $H_1(x), H_2(x), H_3(x)$, amelyek az indexnek megfelelő deriváltak abszolút értékeinek felső becslései, $H_1(x)$ és $H_2(x)$ teljes számegyenesen vett integráltjai léteznek, $H_3(x) \cdot f_\vartheta(x)$ teljes számegyenesen vett integrálja felülről korlátos és
- $0 < I_1(\vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} \big(\frac{\partial ln f_\vartheta(x)}{\partial \vartheta}\big)^2 \cdot f_\vartheta(x) dx < \infty$

Ekkor t_n a ϑ paraméter konzisztens becslése és aszimptotikusan normális eloszlású. (Pluszban: ha létezik elégséges statisztika, akkor éppen azt adja meg, bár ez a tulajdonság nem tartozik a tételhez.)

2.2. A momentumok módszere

Legyen adott a valószínűségi mértékek egy tere és az $X_1, X_2, ..., X_n$ statisztikai minta. Tegyük fel, hogy létezik az első k momentum ($m_j = \mathbf{E}_\vartheta X_i^j$), és $\exists g_j^{-1}(m_1, m_2, ..., m_k) =$

[1] $L(\mathbf{x}, \vartheta)$ a likelihood-függvény ($\sum_{i=1}^n P_\vartheta(X_i = x_i)$ diszkrét esetben és $\prod_{i=1}^n f_\vartheta(x_i)$ folytonos esetben.

ϑ_j. Tekintsük az $\hat{m}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^j$ empirikus momentum statisztikákat. Ekkor az $m_j = g_j^{-1}(\hat{m}_1, ..., \hat{m}_k)$ statisztikák a ϑ_j paraméterek momentumos becslései.

2.3. Normális eloszlásból származtatott eloszlások

Név	Sűrűségfüggvény	Származtatása
χ^2-eloszlás	$\frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \cdot e^{-x/2} \cdot x^{(n/2)-1}$ $x > 0$ $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt$	standard normális, független változók négyzetösszege χ^2_n-eloszlást követ
Student-eloszlás	$\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(1/2)\Gamma(n/2)} \cdot 1/\sqrt{n} \cdot \left(\frac{1}{1+x^2/n}\right)^{\frac{n+1}{2}}$ $x \in \mathbb{R}$	standard normális, független valószínűségi változók esetén $\frac{Y}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n}}}$ t_n-eloszlást követ
Fisher-eloszlás	$\frac{\Gamma(\frac{n+k}{2})}{\Gamma(n)\Gamma(k)} \cdot x^{(k/2)-1} \cdot \left(k + nx\right)^{-\frac{k+n}{2}}$ $x > 0$	$X \in \chi^2_n$, $Y \in \chi^2_k$ és független X-től, akkor $\frac{X/n}{Y/k}$ $F_{n,k}$-eloszlást követ

Lukács-tétel: Legyenek $X_1, X_2, ...X_n \in N(m, D)$ teljesen függetlenek. Ekkor

- az átlag $N(m, \frac{D}{\sqrt{n}})$ eloszlást követ
- $\frac{ns_n^2}{D^2} \in \chi^2_{n-1}$
- az átlag és s_n^2 függetlenek

2.4. Konfidencia intervallumok

Eddig az ismeretlen paramétervektort a minta egy függvényével, azaz egyetlen statisztikával próbáltuk meg közelíteni. Konkrét realizációnál tehát, a paramétertér egy pontját egy másik ponttal becsüljük (*pontbecslés*).

Folytonos eloszlásoknál azonban annak valószínősége, hogy a valószínőségi változó az értékkészletének éppen egy tetszőlegesen kiválasztott pontját fogja felvenni, nulla. Tehát folytonos esetben nulla annak valószínősége, hogy éppen a paramétert találtuk el a becsléssel. Az intervallumbecsléseknél a mintából készített tartományokat definiálunk, amely tartományok nagy valószínőséggel lefedik a kérdéses paraméterpontot.

Legyen adott a valószínűségi mértékek egy tere és az $X_1, X_2, ..., X_n$ statisztikai minta. Legyen $0 < \epsilon < 1$ rögzített. A ϑ paraméterhez megadhatunk egy legalább $1 - \epsilon$ szignifikanciaszintű konfidencia-intervallumot, ha $t_1(X_1, X_2, ..., X_n)$ és $t_2(X_1, X_2, ..., X_n)$ olyan statisztikák, hogy: $\mathbf{P}_\vartheta(t_1(X_1, X_2, ..., X_n) \leq \vartheta \leq t_2(X_1, X_2, ..., X_n)) \geq 1 - \epsilon$ mindig igaz.

3. fejezet

Statisztikai hipotézisvizsgálat

3.1. Hipotézisek, próbastatisztika, kritikus tartomány

Adott a $\mathcal{K}$ véletlen kísérlet, az Ω eseménytér, a lehetséges valószínűségek halmaza $\mathcal{P}$ és a felette értelmezett $\mathbf{P}$ Kolmogorov-féle valószínűségi mező. Tegyük fel, hogy $\mathcal{P}$ két diszjunkt halmazra bontható: $\mathcal{P}_0$ és $\mathcal{P}_1$. Statisztikai próbát akarunk kidolgozni annak eldöntésére, hogy $H_0 : \mathbf{P} \in \mathcal{P}_0$ *nullhipotézis* igaz-e. Ha úgy kell döntenünk, hogy a null hipotézis nem igaz, akkor automatikusan a $H_1 : \mathbf{P} \in \mathcal{P}_1$ *alternatív hipotézist* fogjuk elfogadni. A döntéshez szignifikancia szintet rendelünk, amivel jellemezzük, hogy mennyire erős a döntésünk.

Kritikus érték: $\forall \epsilon \in (0,1)$ számhoz megadhatók $K_1(\epsilon) < K_2(\epsilon)$ kritikus értékek úgy, hogy $\mathbf{P}_\nu(K_1(\epsilon) < T_n < K_2(\epsilon)) \geq 1 - \epsilon$, $\nu \in \Theta_0$.

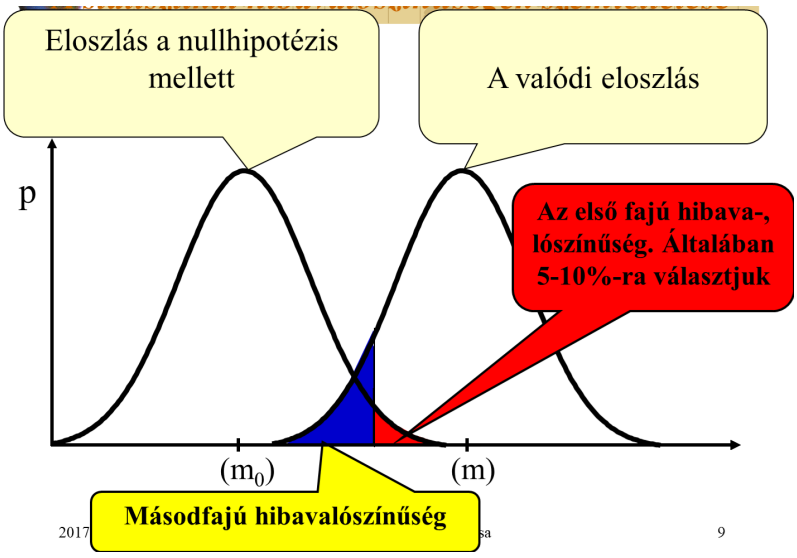
Elfogadási tartomány: $\mathcal{X}_e = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : K_1(\epsilon) < T_n < K_2(\epsilon)\}$. Ha $\underline{x} \in \mathcal{X}_e$, akkor a H_0 hipotézist elfogadjuk a ϵ szignifikancia-szinten ($\underline{x}$ a mintarealizáció).

Kritikus tartomány: $\mathcal{X}_k = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{X}_e$

3.2. Első - és másodfajú hibavalószínűség

A döntésünk nem lesz minden esetben helyes, elképzelhető, hogy hibásan döntünk.

3.1. ábra. *Hibafajták*



Elsőfajú hiba: H_1-et fogadjuk el, minközben H_0 igaz. Ennek értékét tudjuk befolyásolni, általában 5-10%-ra választjuk.

Másodfajú hiba: H_0-t fogadjuk el, miközben H_1 az igaz. A másodfajú hiba értékét nehéz megállapítani.

A két hibafajta között trade-offot kell találni, ha az egyiket csökkentjük, a másik nőni fog. A hibavalószínűségeket csak úgy tudjuk csökkenteni, ha növeljük a mintaelemszámot (mivel így a sűrűségfüggvények szórása csökken)

További vonatkozó tételek:

- *Neyman-Pearson fundamentális lemma:* Adottak a minta sűrűségfüggvényei $\mathbf{P}_0$ és $\mathbf{P}_1$ valószínűségi mértékekre (f_0 és f_1), melyeknek együttes sűrűségfüggvényei L_0 és L_1. Amennyiben dönteni szeretnénk a null hipotézisről az alternatív hipotézissel szemben, akkor
  - tetszőleges $0 < \epsilon < 1$ esetén $\exists c_0 > 0$ és $0 < \tau < 1$ szám, amivel a
    $$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } L_1(x) > c_0 L_0(x) \\ \tau & \text{ha } L_1(x) = c_0 L_0(x) \\ 0 & \text{ha } L_1(x) < c_0 L_0(x) \end{cases}$$
    döntésfüggvény olyan véletlenített próbához tartozik, aminek ϵ a terjedelme
  - az előbb definiált próba egyenletesen legjobb próba
  - ha $\Phi*$ egy ϵ terjedelmű legjobb próba, akkor
    $\mathbf{P}_0(\Phi(x) = \Phi*(x)) = \mathbf{P}_1(\Phi(x) = \Phi*(x)) = 1$

  E lemma segítségével lehet rögzített elsőfajú hibavalószínűséghez a lehető legkisebbb másodfajú hibavalószínűségű próbát megkonstruálni

- *Stein-lemma:* Adottak a minta sűrűségfüggvényei $\mathbf{P}_0$ és $\mathbf{P}_1$ esetén, melyeknek relatív entrópiája $|\mathbf{D}(f_0||f_1)| = \left|\mathbf{E}_{\mathbf{P}_0} log_2 \frac{f_0(X_1)}{f_1(X_1)}\right|$ véges. Legyen α_n az elsőfajú hibavalószínűség, β_n pedig a másodfajú hibavalószínűség. Legyen $\beta_{n,\epsilon}$, $0 < \epsilon < 1/2$ a legfeljebb ϵ terjedelmű próbák esetén a minimális másodfajú hibavalószínűség.
  Ekkor $lim_{n\to\infty} log_2 \beta_{n,\epsilon} = -\mathbf{D}(f_0||f_1)$

3.3. Erőfüggvény, próba konzisztenciája, torzítatlansága, ereje

Erőfüggvény: $E(\epsilon, n, \mathbf{P}) = \mathbf{P}((X_1, X_2, ...X_n)^T \in \mathcal{X}_k)$, $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_1$, $0 < \epsilon < 1$, $n \in \mathbb{N}$

Próba *ereje:* $\sup_{\forall \mathbf{P} \in \mathcal{P}} \mathbf{P}((X_1, X_2, ...X_n)^T \in \mathcal{X}_k)$

Próba *torzítatlansága:*
$\mathbf{P}((X_1, X_2, ...X_n)^T \in \mathcal{X}_k) \leq \epsilon$, $\forall \mathbf{P} \in \mathcal{P}_0$-ból következik, hogy
$\mathbf{P}((X_1, X_2, ...X_n)^T \in \mathcal{X}_k) \geq \epsilon$, $\forall \mathbf{P} \in \mathcal{P}_1$, $0 < \epsilon < 1$, vagyis ha a nullhipotézis nem áll fenn, akkor nagyobb valószínűséggel utasítjuk el, mint amikor fennáll.

Próba *konzisztenciája:* $\lim_{n\to\infty} E(\epsilon, n, \mathbf{P}) = 1$, $\forall \mathbf{P} \in \mathcal{P}_1$, $0 < \epsilon < 1$

4. fejezet

Próbák

4.1. Paraméteres próbák

Paraméteres próbák esetén $\mathcal{P} = \{\mathbf{P}_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$, $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$, $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$, ahol Θ a paramétertér. A nullhiptézis, hogy $\vartheta \in \Theta_0$, az alternatív hipotézis pedig, hogy $\vartheta \in \Theta_1$. Feltételezzük, hogy a minta normális eloszlást követ, a nullhipotézist pedig a normális eloszlás paramétereivel kapcsolatban fogalmazzuk meg.[1] Akkor döntünk a nullhipotézis mellett, ha a számolt próbastatisztika kisebb a kritikus értéknél.

4.1. táblázat. *Paraméteres próbák*

Próba neve	**Feltétel**	Paraméter	Döntés
egymintás u-próba	szórás ismert	várhető érték	$\lvert u_{proba}\rvert < K_{krit}$
kétmintás u-próba	független statisztikai minták, szórásaik ismertek	várható érték	$\lvert u_{proba}\rvert < K_{krit}$
egymintás t-próba	szórás nem ismert	várható érték	$\lvert t_{proba}\rvert < K_{krit}$
független kétmintás t-próba	minták függetlenek, szórásai egyenlőeknek tekintendők ($\rightarrow$ F-próba)	várható érték	$\lvert t_{proba}\rvert < K_{krit}$
összetartozó kétmintás t-próba		várható érték	$\lvert t_{proba}\rvert < K_{krit}$
Welch-próba	független, normális eloszlású minták, eltérő szórással (amik nem ismertek)	várható érték	$\lvert W_{proba}\rvert < K_{krit}$
F-próba	független, normális eloszlású minták, szórás nem ismert	szórás	tört $\in F_{n-1,m-1}$
Bartlett-próba		szórás	$W \in \chi^2_{p-1}$

Egymintás u-próba: a normális eloszlású mintának ismerjük a szórását és arra vagyunk kiváncsiak, hogy a várható értéke m_0-e. A nullhipotézis ellenőrzéséhez első lépésben kiszámoljuk a próbastatisztika abszolútértékét. Második lépésben a kritikus értéket kell meghatároznunk: $\mathbf{P}(|N(0,1)| < u_{krit}) = \mathbf{P}(-u_{krit} < N(0,1) < u_{krit}) = \Phi(u_{krit}) - \Phi(-u_{krit}) = 2\Phi(u_{krit}) - 1 = 1 - \epsilon$, vagyis $\Phi(u_{krit}) = 1 - \epsilon/2$. A kritikus értéket ez alapján a megfe-

[1] A vizsgán használhattuk a képletgyűjteményt, így a képleteket nem gépeltem le.

lelő táblázatból olvashatjuk ki. Az egymintás u-próba torzítatlan és konzisztens, ráadásul egyenletesen legjobb próba is.

Kétmintás u-próba: adott két, egymástól független statisztikai minta, amelyek normális eloszlást követnek és a szórásaik ismertek. Nullhipotézisünk, hogy a két minta várható értéke megegyezik. Kétmintás esetben a döntéshez majdnem ugyanazokat a lépéseket kell elvégeznünk, mint egymintás esetben, csak a próbastatisztikát számoljuk másként (lásd képletgyűjtemény).

Egymintás t-próba: normális eloszlású mintának nem ismerjük a szórását, de feltételezzük, hogy várható értéke m_0. Hogy a feltételezéstől döntsünk, ki kell számolnunk a próbastatisztika értékét, ami t_{n-1} eloszlást követ, ha igaz a nullhipotézis. A kritikus értéket a $\mathbf{P}(|t_{n-1}| < t_{krit}) = 1 - \epsilon$ összefüggésből kapjuk.

Független mintás t-próba esetén először meg kell győződnünk arról, hogy a minták szórása egyenlőnek tekinthető-e. Ezt F-próbával tehetjük meg. Ha az F-próba sikeres, akkor elvégezhetjük a független mintás t-próbát. Nullhipotézisünk, hogy a minták várható értékei egyenlőek. Először kiszámoljuk a próbastatisztika abszolútértékét, ami t_{n+m-2} eloszlást követ, ha a nullhipotézis igaz, majd ezt hasonlítjuk össze a kritikus értékkel a megfelelő táblázatból.

Összetartozó mintás t-próba: nullhipotézisünk, hogy a minták várható értékei egyenlőek. Ellenőrzéshez kiszámoljuk a próbastatisztika abszolútértékét, ami t_{2n-2} eloszlást követ, ha igaz a nullhipotézis, és ezt hasonlítjuk össze a próbastatisztika értékével.

Welch-próba: független mintás t-próbát akartunk, de az F-próba sikertelen volt, vagyis a szórások nem tekinthetőek egyenlőnek. Ilyenkor Welch-próbával dönthetünk arról, hogy a várható értékek megegyeznek-e. A próbastatisztika közelítőleg t_f eloszlást követ, ha igaz a nullhipotézis, ahol f-et külön számolni kell a képletgyűjteményben megadottak szerint. Ha megvan f, táblázatból kinézhetjük a kritikus értéket és meghozhatjuk a döntést.

F-próba: két független mintáról eldönthetjük vele, hogy a minták szórásai egyenlőnek tekinthetőek-e. A próbastatisztika $F_{n-1,m-1}$ eloszlást követ, ha igaz a nullhipotézis, a képletben $s^*_{x,m}$ az X minta empirikus szórásnégyzete: $s^*_{x,m} = \frac{1}{n-1}\Sigma_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X_n})^2$.

A *Bartlett-próba* az F-próba általánosítása, nem két, hanem p független mintáról dönti el, hogy szórásaik egyenlőnek tekinthetőek-e. A próbastatisztika χ^2_{p-1} eloszlást követ, ha igaz a nullhipotézis, vagyis abból a táblázatból kell nézni a kritikus értéket.

4.2. Nemparaméteres próbák

Ha a statisztikai minta eloszlását nem tekintjük eleve ismernek, akkor nemparaméteres próbákról beszélünk. Ilyenkor az előzetes felvetéseink nagyon általánosak, de természetesek, pl. szórás véges, eloszlás folytonos, stb. Mivel kevesebb feltételt követelünk meg kiinduláskor, a következtetések levonásához nagyobb elemszámú mintára lesz szükségünk.

4.2.1. Tiszta illeszkedésviszgálat

Nullhipotézisünk, hogy az elemzett változó eloszlása megegyezik a hipotetikussal. A nullhipotézisről dönthetünk χ^2*-próbával.* Adjuk meg a minta értékkészletének egy tetszőleges r diszjunkt intervallumból álló felosztását. Tudjuk, hogy mekkora egy-egy esemény bekövetkezésének valószínűsége a hipotetikus eloszlás esetén (ν_i) és mekkora lett a mintánk esetén (p_i). Ha a nullhipotézis igaz, akkor $\Sigma_{i=2}^{r}\frac{(\nu_i - np_i)^2}{npi}$ aszimptotikusan $r-1$ szabadságfokú χ^2 eloszlást követ, n a minta elemszáma. A kritikus értéket a megfelelő táblázatból kapjuk.

5. fejezet

Szórásanalízis aka ANOVA

A célünk kideríteni, hogy van-e hatása a független változóknak a függő változóra, illetve, hogy ez a hatás egyforma vagy különböző. A hatás, kapcsolat függvényszerű feltárása akkor sem cél, ha a független változók kvantitatívek. A szórásanalízis megelőzi a regressziós vizsgálatokat, megadja, hogy van-e értelme keresni az összefüggés jellegét. Alapfogalmak:

- *Faktor:* a vizsgálatba bevont változók
  - Kvantitatív faktor: numerikus vagy intervallum skálájú
  - Kvalitatív faktor: nem kvantitatív
- *Faktor szint:* a faktor értékkészletének egy eleme, ezen beállítások mellett figyeljük meg a függő változót
  - Véletlen faktor: nem tudjuk előre garantálni, hogy milyen értéket vesz fel
  - Beállított faktor: a felvett értékeket előre be tudjuk állítani
- *Interakció:* az egyes faktorok között feltételezett kapcsolat
- *Kezelés:* egyfaktoros esetben a faktor szintje, többfaktoros esetben a figyelembe vett faktorok szintjeiből előálló kombinációk

A modelleket a faktorok száma szerint csoportosítjuk, így beszélhetünk egy-, két-, háromfaktoros modellekről stb. Bizonyos kérdéseket csak többfaktorok modellekben tehetünk fel (pl. interakció kérdése).

5.1. Fisher-Cohran tételek

Addíciós tétel: Ha $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ teljesen független rendre $n_1, n_2, \ldots, n_k$ szabadságfokú $a > 0$ paraméterű χ^2-eloszlású változók, akkor a $Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k$ szintén χ^2-eloszlású lesz $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ szabadságfokkal és $a > 0$ paraméterrel.

Partíciós tétel: Legyenek $X_1, X_2, ..., X_n$ teljesen független, 0 várható értékű és a varianciájú normális eloszlású változók, $Q_j = X^T \underline{\mathbf{A}}_j X (j = 1, 2, \ldots, k)$ kvadratikus alakok, ahol $rank(A_i) = n_i$. Tegyük fel, hogy $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ és $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$. Akkor a $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$ kifejezések rendre $n_1, n_2, \ldots, n_k$ szabadságfokú, $a > 0$ paraméterű, teljesen független χ^2-eloszlású változók.

5.2. Kísérleti elrendezések

Hierarchikus osztályozás: a faktorok hierarchiában vannak és egy faktor összes szintje a felette álló faktor egy szintjéhez kapcsolódik. Ilyen kísérleti beállítást követünk, amikor p osztály tanulóinak tudását akarjuk összehasonlítani, r különböző tantárgy számonkérésével.

Keresztosztályozás: Az A és B faktor szintjeinek minden párosításához veszünk egy- vagy többelemű mintát. Kettőnél több faktor esetén azon kezelés-kombinációhoz veszünk mintát, ahol k a faktorok száma.

Nem teljes kísérleti elrendezések: olyankor alkalmazandó, amikor egy vizsgálandó faktor mellett más, nem kívánt, de számontartott hatás is fellép és azokat ki akarjuk küszöbölni, pl. a latin négyzetek módszerével. Tegyük fel, hogy a célváltozónkkal három kategóriaváltozó van kapcsolatban, mindegyik $r > 1$ szinttel:

- *Véletlen blokkok módszere:* C faktor hatását úgy eliminájuk, hogy a B faktor minden szintjéhez az A faktor szintjeinek egy véletlen permutációját rendeljük. Ilyenkor r^3 kezelésre van szükség
- *Latin négyzete módszere:* r^2 kezelés is elég a döntéshez az alábbi szisztéma szerint:

	A_1	A_2	...	A_p
B_1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1p}
B_2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2p}
...	...	...	...	...
B_r	C_{r1}	C_{r2}	...	C_{rp}

  A módszer feltételezi, hogy a faktorok közötti interakciók nem jelentősek. Alkalmazásának feltételei:

  1. Minden kezeléshez tartozó mintának követnie kell a normális eloszlást
  2. Minták szórásnégyzeteinek meg kell egyezniük
  3. Mintáknak függetleneknek kell lenniük

  Tekintsünk egy $H = (h_{ij})$ rxr-es latin négyzetet (mátrix, aminek minden sora és oszlopa $1, ..., r$ véletlen permutációja)! A három faktor minden (i, j, h_{ij}) szintbeállítása mellett figyeljük meg a célváltozó értékét (X_{ijh})! Feltesszük, hogy a X_{ijh} változók teljesen független normális eloszlásúak és $\mathbf{E}X_{ijh} = f_h + b_i + c_j$, $\sigma X_{ijh} = \sigma$, vagyis a célváltozó várható értékére mindhárom faktor additív taggal van hatással.

  H_0: a harmadik faktor szintjei nincsenek hatással a célváltozóra, vagyis f_h mindenhol azonos.

  A döntéshez a faktorok szintjeihez tartozó átlagok és a minta teljes átlagának négyzetes eltéréseit kell vizsgálni, valamit ki kell számolni a véletlen ingadozásokat kifejező négyzetes eltérést is. Amennyiben igaz a nullhipotézis, akkor a $\frac{\text{harmadik faktorhoz tartozó eltérések négyzetösszege}}{\text{véletlen ingadozásokat kifejező négyzetes eltérés}}(r-2)$ próbastatisztika $F_{(r-1),(r-1)(r-2)}$-eloszlást követ.

5.3. Egyszeres osztályozás

Egy X normális eloszlású változónak egyetlen L szintű faktorváltozóval való kapcsolatát vizsgáljuk (one-way-ANOVA). Az X-re vett n elemű mintát a faktor szintjei szerint L csoportba soroljuk.

H_0: az L db minta átlagai között nincs különbség

Amennyiben igaz a nullhipotézis, akkor a $\frac{\frac{\Sigma_{i=1}^{L} n_i \left(\bar{x}^{(i)} - \bar{x}\right)^2}{L-1}}{\frac{\Sigma_{i=1}^{L} n_i \left(x_j^{(i)} - \bar{x}^{(i)}\right)^2}{n-L}}$ statisztika

$F_{(L-1),(n-L)}$-eloszlású lesz. Ha a nullhipotézist el kell vetni, akkor az eltérések nagyságát Student próbával lehet megbecsülni.

5.4. Kétszeres osztályozás

Ha egy folytonos függővváltozó, és két nominális faktorváltozó adott, kétszeres osztályozásról beszélünk. Tegyük fel hogy az egyik faktor értékei az $1, 2, ..., L$ a másik faktor értékei az $1, 2, ..., K$ közül valók. Így a mintát összesen KxL részhalmazra bonthatjuk. Feltesszük, hogy a minták normális eloszlásúak és a szórásaik ismeretlenek, de azonos értékűek.

Ha a két nominális faktorváltozó között nincs interakció, akkor feltesszük, hogy a (j, k) cella elméleti várhatóértéke $\mu_{j,k} = a_j + g_k$ alakú, ahol az első tag az első faktor j szintjéből, a második tag pedig a második faktor k szintjéből eredő tag.

H_0: Az első faktor szintjeihez ugyanakkora hatás tartozik minden cellában

Amennyiben igaz a nullhipotézis, akkor a $\frac{\frac{L \cdot \Sigma_{i=1}^{L} n_i \left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)^2}{L-1}}{\frac{\text{véletlen ingadozásokat mérő négyzetösszeg}}{(L-1)(K-1)}}$ statisztika

$F_{(L-1),(L-1)(K-1)}$ eloszlást követ. Vagyis, ha a nullhipotézist elfogadjuk, akkor az első faktornak nincsen hatása a célváltozóra.

Ezzel az eljárással a második faktor hatását is tesztelhetjük, csak akkor a próbastatisztikában a felső tört számlálójába $K \cdot \Sigma_{j=1}^{K} n_i \left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2$ (a második faktor magyarázta négyzetösszeg) kerül.

Ha interakciót is feltételezünk a faktorok között, akkor a (j, k) cella elméleti várhatóértéke $\mu_{j,k} = \mu + a_j + g_k + c_{i,j}$ alakú, ahol $c_{i,j}$ fejezi ki, hogy a hatások erősítik vagy gyengítik egymást. A módszer alkalmas egyidejűleg három hipotézis ellenőrzésére is:

1. Az első faktornak minden cellában ugyanakkora a hatása
2. A második faktornak minden cellában ugyanakkor a hatása
3. $c_{i,j} = 0$ minden cellában

A nullhipotézisek ellenőrzéséhez itt is az átlagtól való eltérés négyzetösszegeit kell számolunk: az első és második faktor magyarázta eltérések négyzetösszegei, az interakcióval magyarázott eltérés négyzetösszege és a csoportokon belüli ingadozásokat mérő véletlen hibatag. A próbastatisztikáknak igaz nullhipotézisek esetén F-eloszlást kell követnie.

6. fejezet

Nemparaméteres próbák

Ha a statisztikai minta eloszlását nem tekintjük eleve ismernek, akkor nemparaméteres próbákról beszélünk. Ilyenkor az előzetes felvetéseink nagyon általánosak, de természetesek, pl. szórás véges, eloszlás folytonos, stb. Mivel kevesebb feltételt követelünk meg kiinduláskor, a következtetések levonásához nagyobb elemszámú mintára lesz szükségünk.

6.1. Függetlenségvizsgálat

Függetlenségvizsgálat esetén a nullhipotézisünk, hogy az elemzett változók függetlenek. A nullhipotéziról χ^2-próbával dönthetünk, ahol n elemszámú, kétdimenziós statisztikai mintánk van $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$. Mindkét minta értékeiből halmazokat készítünk úgy, hogy $I_k = [x_{k-1}, x_k)$ és $J_k = [y_{k-1}, y_k)$. Jelölje V_{ij} azon mintaelemek számát, ahol $(X_i, Y_j) \in I_i \times J_j$, $p_{ij} = \mathbf{P}(X_k \in I_i, Y_k \in J_j)$. Becsléses illeszkedésvizsgálatot hajtunk végre, ahol a becsült paraméterek száma $r+s-2$, a próbastatisztikát a képletgyűjtemény alapján számoljuk. Ha a nullhipotézis igaz, akkor a próbastatisztika eloszlása szabadságfokó $\chi^2_{(r-1)(s-1)}$ eloszlást követ.

6.2. Homogenitásvizsgálat

Homogenitásvizsgálat esetén a nullhipotézisünk, hogy az elemzett változók eloszlása azonos. A nullhipotézisról dönthetünk χ^2-próbával, kétmintás Kolmogorov-Szmirnov próbával, Wilcoxon-próbával, Kruskal-Wallis próbával, Mann-Whitney próbával vagy Friedman-próbával.

χ^2-próbával: adott két statisztikai minta. Intervallum-felosztást készítünk a számegyenesen és megnézzük, hogy hány elem esett egy-egy intervallumba az egyik (ν_k) és a másik (λ_k) minta esetén. A próbastatisztikát a képletgyűjtemény alapján számoljuk, ami $\chi^2_{(r-1)}$-eloszlást követ.

Kolmogorov-Szmirnov-próbával: adott két minta, azt szeretnénk eldönteni, hogy az eloszlásfüggvényük azonos-e. Ehhez mindkét mintának képezzük az empirikus eloszlásfüggvényét (F_{n_1} és F_{n_2}), majd képletgyűjtemény alapján kiszámoljuk a próbastatisztika értékét. Ha a nullhipotézis igaz, akkor a próbastatisztika aszimptotikusan Kolmogorov-eloszlást követ (*Kolmogorov-tétel*), vagyis ebből a táblázatból kapjuk a kritikus értéket. Ha kis elemszámú mintánk van, akkor a *Gnyegyenko-Koroljuk-tétel* segítségével tudjuk ellenőrizni a homogenitást. Ez a tétel is empririkus eloszlásfüggvényekkel számol, ráadásul pontos eloszlást számol ki az $L(y)$ eloszlásfüggvénnyel.

Mann-Whitney próba: Két független mintáról szeretnénk eldönteni, hogy azonos eloszlást

követnek-e. Ehhez összefésüljük a mintákat és az összefésült rendezett elemekhez rangszámokat rendelünk (hányadik legkisebb az adott elem?), majd képezzük a rangszámösszegeket (R_x és R_y). Ha minták elemszámai elég nagyok, akkor a próbastatisztika eloszlása aszimptotikusan standard normális lesz, vagyis onnan vesszük a kritikus értéket. Kis minták esetén ott a Mann-Whitney táblázat.

Kruskal-Wallis próba: a Mann-Whitney próba általánosítása, p független mintáról szeretnénk eldönteni, hogy ugyanabból az eloszlásból származnak-e. A p független mintát egy Y tördelő változó segítségével állítjuk elő. Innentől kezdve az algoritmus elég hasonló a Mann-Whitney-hez: összefésülés és rendezés, rangszámokat rendelünk a rendezett mintához és minden mintára kiszámoljuk a rangszámösszegét. Ha a nullhipotézis igaz, akkor a próbastatisztika aszimptotikusan χ^2_{p-1}-eloszlást követ.

Wilcoxon-próba: el akarjuk dönteni, hogy két összetartozó minta azonos eloszlásfüggvényhez tartozik-e. Ehhez ki kell számolni az összetartozó párok közötti differenciákat, majd rendezni kell őket és rangszámokat kell hozzájuk rendelni. Próbastatisztika a képletgyűjteményben, ami igaz nullhipotézis esetén standard normális eloszlást követ nagy mintaszám (> 25) esetén. Kis mintákra ott a Wilcoxon-táblázat, ahol két kritikus érték van és a nullhipotézist akkor fogadjuk el, ha R_+ a két kritikus érték közé esik.

Friedman-próba: a Wilcoxon-próba általánosítása, p változóról szeretnénk eldönteni, hogy azonos eloszláshoz tartoznak-e. Ekkor a p változóhoz tartozó adatok egy adatmátrixban vannak, és az adatmátrix soraihoz kell rangszámokat rendelnünk. A rangszám megmondja, hogy az adott elem hányadik legkisebb a sorban. A rangszámösszegeket oszlopok szerint számoljuk, a próbastatisztika pedig, ha a nullhipotézis igaz, χ^2_{p-1}-eloszlást követ. Kicsi elemszám esetén van Friedman-táblázat. Ha ez a próba megbukik, a változók között páronként még mindig ellenőrizhetünk homogenitást Wincoxon-próbával.

7. fejezet

Regresszióanalízis I.

7.1. Feltételes várható érték

$\mathbf{E}(X|Y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X|Y}(x|y)dx = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{X,Y}(x,y)dx}{f_Y(y)}$, amit regressziós görbének is nevezünk, ezzel lehet a legpontosabban közelíteni. Tulajdonságai:

- $\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|Y)) = \mathbf{E}X$
- $\mathbf{E}(h(Y) \cdot X|Y) = h(Y) \cdot \mathbf{E}(X|Y)$
- Ha X és Y függetlenek, akkor $\mathbf{E}(X|Y) = \mathbf{E}X$
- $\mathbf{E}(a \cdot X_1 + b \cdot X_2|Y) = a \cdot \mathbf{E}(X_1|Y) + b \cdot \mathbf{E}(X_2|Y)$

7.2. Regressziószámítás

Regressziószámításkor egy változót egy vagy több másik változóval becslünk: a becsült változó a *függőváltozó*, amivel becsüljük azt, az(ok) a *független változó(k)*. A becslés annyit jelent, hogy egy f függvénnyel szeretnénk leírni a függőváltozót, amely függvénynek a független változók az argumentumai és minimalizálja a négyzetes eltérés várható értékét. Ha ismernénk a függő és független változók együttes eloszlását, akkor probléma elméletileg megoldott, hiszek ekkor:

$f(X_1, ...X_p) = \mathbf{E}(Y|X_1, ..., X_p)$

A gyakorlatban azonban csak egy adatmátrix adott és a függvénykapcsolatot a statisztikai minta alapján kell meghatározni. A regresszióanalízis végrehajtásának csak akkor van értelme, ha kimutatható a függő és független változók között az összefüggés (pl. el kellett vetni a nullhipotézist függetlenségvizsgálatnál).

Példák regresszióra:

- *Lineáris regresszió:* $f(X) = B_0 + B_1X$ Mivel a gakorlatban nem ismertek a változók momentumai, ezért az egyes paramétereket becsülni kell. Erre van a legkisebb négyzetek módszere:
  - *Legkisebb négyzetek módszere:* Adott az $(X_1, Y_1), ...(X_p, Y_p)$ statisztikai minta és az $F = f(x, a, b, c, ...)$ k-paraméteres függvényosztály. A B_i-ket a $\min_{\forall a_1,...a_k} \Sigma_{i=1}^{p}(Y_i - f(X_i; a_1, ..., a_k))^2$ szélsőérték feladat megoldásából kapjuk. Ez a módszer a legjobb tozítatlan becslést adja

A lineáris kapcsolat kitüntetett, mivel ez a legegyszerűbb és leggyakoribb, könnyű a két paramétert értelmezni, ráadásul kétdimenziós normális eloszlás esetén a kapcsolat nem is lehet más.

- *Polinomiális regresszió:* $f(X_1, ..., X_p) = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + ... + B_pX_p$
- *Kétparaméteres (lineárisra visszavezethető) regresszió:* pl. $Y = f(X) = B_0 \cdot e^{B_1X} \rightarrow lnY = B_1X + lnB_0$
- *Nem-lineáris regresszió:* elég sok fajta van, a lényeg, hogy f nem csak lineáris összefüggéseket tartalmaz, hanem exponenciális, logaritmikus vagy éppen hányados tagokkal is rendelkezik. Néhány példa:
  - Aszimptotikus 1: $f(x) = B_1 + B_2e^{B_3X}$
  - Aszimptotikus 2: $f(x) = B_1 + B_2 \cdot B_3^X$
  - Sűrűség: $f(x) = (B_1 + B_2X)^{-1/B_3}$
  - Gauss: $f(x) = B_1 \cdot (1 - B_3e^{B_2X^2})$
  - Gompertz: $f(x) = B_1e^{-B_2e^{-B_3X^2}}$
  - Johnson-Schumacher: $f(x) = B_1e^{-B_2/(B_3+X)}$

A regressziót *Naradaja módszerével* lehet közelíteni. A tökéletes függvénykapcsolatot a regressziós görbe adja meg. A sűrűségfüggvény becslését felhasználva a regressziós görbe konzisztens becslése:

$r_n(x) = \frac{\Sigma_{i=1}^n Y_i \cdot k\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}{\Sigma_{i=1}^n k\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}$, ahol

- $k(x)$ egy korlátos függvény, amelynek második momentuma véges és $|xk(x)| \rightarrow 0$ ha $|x| \rightarrow \infty$
- $h_n > 0$ egy számsorozat, hogy h_n nullsorozat, $nh_n \rightarrow \infty$. A gyakorlatban sorozat helyett egy h paraméterrel minimalizálunk

7.3. A regresszió jósága

A regresszióval számolt *modell érvényességét* eldönthetjük szórásanalízissel. Ekkor a nullhipotézisünk, hogy a független változók mindegyike 0, vagyis egyik prediktor változó sem magyarázza a célváltozót. A nullhipotézisről F-próbával dönthetünk.

A *meghatározottsági együttható* (R-squared) megmutatja, hogy a lineáris regresszióval a célváltozó mekkora hányadát lehet magyarázni. Értéke 0 és 1 között változik, számítása:

$R^2 = \frac{SSR=\Sigma_{i=1}^n \left(\tilde{Y}_i - \bar{Y}\right)^2}{SSTO=\Sigma_{i=1}^n \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$

SSR: Sum of Squares (regression), *SSTO:* Sum of Squares (Total).

8. fejezet

Regresszióanalízis II.

Regressziószámításkor egy változót egy vagy több másik változóval becslünk: a becsült változó a *függővváltozó*, amivel becsüljük azt, az(ok) a *független változó(k)*. A becslés annyit jelent, hogy egy f függvénnyel szeretnénk leírni a függővváltozót, amely függvénynek a független változók az argumentumai és minimalizálja a négyzetes eltérés várható értékét. Ha ismernénk a függő és független változók együttes eloszlását, akkor probléma elméletileg megoldott, hiszek ekkor:

$f(X_1, ...X_p) = \mathbf{E}(Y|X_1, ..., X_p)$

A gyakorlatban azonban csak egy adatmátrix adott és a függvénykapcsolatot a statisztikai minta alapján kell meghatározni. A regresszióanalízis végrehajtásának csak akkor van értelme, ha kimutatható a függő és független változók között az összefüggés (pl. el kellett vetni a nullhipotézist függetlenségvizsgálatnál).

8.1. Többváltozós lineáris regresszió

Többváltozós lineáris regressziónál a függő változót az $f(X_1, ..., X_p) = B_0 + B_1X_1 + ... + B_pX_p$ függvénnyel közelítjük. A lehetséges függvények közül azt választjuk, amelynél a függővváltozót legkisebb négyzetes hibával tudjuk közelíteni. A függvényt tetszőlegesen bonyolítani is lehet, pl. kategória-változóval:

$$f(x) = \begin{cases} B_0 + B_1X & \text{ha } K = c, \\ (B_0 + B_2) + (B_1 + B_{c+1})X & \text{ha } K = 1, \\ (B_0 + B_3) + (B_1 + B_{c+2})X & \text{ha } K = 2, \\ ... & ... \\ (B_0 + B_c) + (B_1 + B_{2c-1})X & \text{ha } K = c - 1 \end{cases}$$

Az együtthatókat itt is a legkisebb négyzetek módszerével határozzuk meg, lásd 7. tétel.

8.2. Modellépítési technikák

Egy tipikus többváltozós regressziós problémánál adott az Y célváltozó és nagy számú magyarázó változó. Új magyarázó változó felvételekor ellenőrizni kell, hogy annak magyarázó ereje szignifikáns-e. Ezt *parciális F-próbával* tehetjük meg: ha a magyarázó erő elhagyagolható, akkor a régi és új R^2 értékekből számolt statisztika Fisher-eloszlást követ. A p-dik változók akkot vonjuk be a modellbe, ha

$\frac{K_\epsilon \cdot (1-R^2)}{n-p-1} < R^2 - R_0^2$, ahol K_ϵ olyan kritikus érték, hogy $\mathbf{P}(\mathbf{F}_{1,n-p-1} < K_\epsilon) = 1 - \epsilon$.

Az elemzés kezdetekor azonban még azt sem tudjuk, melyek azok a változók, amik bekerülnek és melyek azok, amik nem kerülnek majd be a modellbe. Ha minden lehetséges kombinációt ki akarnánk próbálni, akkor $2^p - 1$ db modellillesztést kéne elvégeznünk, tehát szűkíteni kell az illesztendő modellek számát.

A szűkítésre az alábbi eljárások léteznek:

- *ENTER:* a változólistában azok a független változók vannak, amiket szeretnénk bele tenni a modellbe. Az így készült modelleket utólag értékelni kell R^2 és regressziós együttható szignifikancia-szint szerint, majd a szükséges módosítások után újra elvégezni az illesztést
- *FOREWARD:* alulról építkező modellépítési eljárás, minden lépésben azt a változót vonjuk be a modellbe, amelyik parciális F-próbájához a legkisebb ϵ tartozik. A bevonást addig folytatjuk, amíg a legkisebb ϵ egy megadott korlát alatt van. A módszerrel viszonylag kevés magyarázó változónk lesz a modellben, így azt könnyebb értelmezni
- *BACKWARD:* felülről lebontó eljárás, ami az összes változó közül hagyja el azokat a változónak, amiknek a legnagyobb az ϵ értékük. Megállunk, ha ϵ egy előre beállított küszöbérték alá esik. Ezzel a módszerrel viszonylag sok magyarázó változó marad a modellben
- *STEPWISE:* a FOREWARD eljárás módosítása úgy, hogy minden lépésben ellenőrizzük, hogy a korábban már bevont változókhoz tartozó ϵ szignifikancia-szintek közül valamelyik átlép-e egy meghatározott korlátot. Ha valamelyiknél átlép, akkor azt a változók elhagyjuk
- *REMOVE:* az ENTER eljárás beállításából indul ki, egyszerre hagy el változókat a modellből, összehasonlításként csak a konstans tagot tartalmazó modell eredményeit közli

Az ENTER kivételével az eljárások automatikusak, csak a kiindulási változólistát kell specifikálni.

A *multikollinearitás* a magyarázó változók között fellépő lineáris kapcsolat megléte. Amennyiben a változók között multikollinearitás van jelen, az rontja a modell értékelhetőségét. Mérőszámai:

- Tolerancia: az i-dik változót az összes többi milyen szorosan határozza meg. Ha nullához közeli, akkor közel függvényszerű kapcsolat van a változók között
- Variancia infláló faktor: a tolerancia reciproka. Ha a magyarázó változók korrelálatlanok, akkor értéke 1
- Kondíciós index: a magyarázó változók korrelációs mátrixának sajátértékeiből számolt statisztika. Ha nagyobb, mint 15, akkor erős kollinearitás állapítható meg
- Variancia hányad: multikollinearitásra utal, ha egy-egy nagy kondíciós index sorában több regressziós együtthatónak magas a variancia hányada

A változók közötti kapcsolatokat korrelációs együtthatókkal is leírhatjuk:

- *Totális korrelációs együttható:* minden változónak minden másik változóval vett korrelációs együtthatója. Az eredmény mátrixba rendezhető, amely szimmetrikus, az átlón csupa 1-gyel.

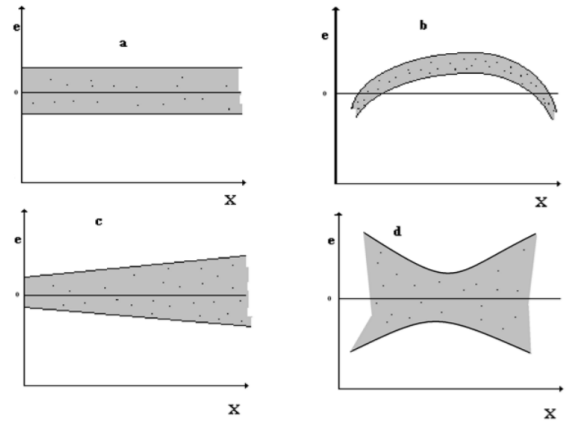
- *Többszörös korrelációs együttható:* az i-dik változónak a többivel vett lineáris regressziójának a korrelációs együtthatója
- *Parciális korrelációs együttható:* két változó közötti korrelációs kapcsolat erősségét méri úgy, hogy a többi változó befolyásolási hatását figyelmen kívül hagyja

8.3. A modell értékelése

A modell értékelésének fontos lépése az egyes adatpontok fontosságának feltárása. Bizonyos pontok erősen mutatják az összefüggést, míg az *outlier* pontok illeszkednek a legkevésbé, vagyis gyengítik azt. A becslést befolyásoló pontok feltárásához a *leverage* mátrixot elemezzük. A mátrix szimmetrikus és diagonális elemei azt mutatják, hogy az i-dik eset mekkora hatást fejt ki a regressziós becslésre. Egy pont outliernek minősül, ha $h_{ii} - 1/n \geq 0,5$. Az outlier pontokat ki kell hagyni az elemzésből.

A *heteroszkedaszticitás* mutatja meg a maradéktagok nulla szint körüli szóródásának lehetséges típusait, lásd 8.1. ábra. A a) eset megfelel a lineáris modellnek, a b) esetben nem a lineáris modellhez tartoznak a maradéktagok. A c) esetben a szóródások nem azonosokat, a d) esetben pedig a hibatagok nem függetlenek egymástól.

8.1. ábra. *Heteroszkedaszticitás*



A prediktor változókhoz rendelt *BETA együtthatók* minősítik a változók fontosságát az összefüggésben: minél nagyobb a *BETA* együttható abszolútértéke, annál fontosabb a változó. Az együtthatók meghatározása az alábbi összefüggés szerint történik:

$BETA_i = b_i \cdot \frac{\text{i-dik változó standard szórása}}{\text{célváltozó standard szórása}}$, ahol b_i a regressziós együttható

A meghatározottsági együttható (R-squared) megmutatja, hogy a lineáris regresszióval a célváltozó mekkora hányadát lehet magyarázni. Értéke 0 és 1 között változik, számítása:

$$R^2 = \frac{SSR = \Sigma_{i=1}^{n} \left(\tilde{Y}_i - \bar{Y}\right)^2}{SSTO = \Sigma_{i=1}^{n} \left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$$

Az *adjusztált meghatározottsági együttható* segítségével kiküszöbölhetjük azt a problémát, hogy újabb változók bevonásával R^2 automatikus nő és túl optimista képet mutat a modell illeszkedéséről. A adjusztált változatban büntetjük a túl sok változó bevonását a modellbe.

9. fejezet

Faktor- és főkomponensanalízis

9.1. Faktoranalízis

Nagyszámú, sztochasztikusan erősen összefüggő változónk van, amik redundáns információt hordoznak. A célunk a változók számának csökkentése, de úgy, hogy ezáltal a megfigyelésekben rejlő információ ne csökkenjen lényegesen. Így nehezen megadható fogalmakat definiálhatunk összetett mutatórendszerrel való jellemzés útján. Alapvetően abban különbözik a regresszióanalízistól, hogy a prediktor változók a vizsgálat megkezdésekor nem ismertek, azok előállítása és értelmezése a feladat.

A módszerek általában számolásigényesek és számítógépes programcsomagok segítségével hajthatók végre. Amennyiben többdimenziós normális eloszlásúak a megfigyelések, ezek a módszerek bizonyos optimumtulajdonságokkal rendelkeznek.

A faktoranalízis csak akkor eredményes, ha a vizsgált változók között erős összefüggések vannak. Az összefüggés erejének mérésére több statisztikai is létezik:

- *Kaiser-Meyer-Olkin statisztika:* változók közötti korrelációs együtthatókkal számol. $0,5$ alatt elfogadhatatlan az összefüggés, $0,9$ fölött csodálatos, a kettő között $0,1$-enként lépeget. A statisztika képlete:

  $$KMO = \frac{\Sigma_{i=1}^{p}\Sigma_{j=1,j\neq i}^{p} R_{ij}^2}{\Sigma_{i=1}^{p}\Sigma_{j=1,j\neq i}^{p}\left(\frac{R_{ij}}{\sqrt{R_{ii}\cdot R_{jj}}}\right)^2 + \Sigma_{i=1}^{p}\Sigma_{j=1,j\neq i}^{p} R_{ij}^2}$$

- *Minta-alkalmassági érték (MSA_i):* megadja, hogy az indulási p változóból melyikeket érdemes elhagyni (amelyeknél az MSA_i érték a legkisebb). A statisztika képlete:

  $$MSA_i = \frac{\Sigma_{i\neq j} R_{ij}^2}{\Sigma_{i\neq j}\left(\frac{R_{ij}}{\sqrt{R_{ii}\cdot R_{jj}}}\right)^2 + \Sigma_{i\neq j} R_{ij}^2},\ i = (1,2,...,p)$$

- *Bartlett-féle gömb-próba:* a nullhipotézis, hogy a vizsgált változók függetlenek egymástól. Akkor érdemes továbbmenni, ha ez a próba nem szignifikáns, vagyis a változók között kapcsolat van

A k-faktoros modellben adottak az $X_1, ..., X_p$ változók, a belőlük alkotott p-dimenziós vektor, $\underline{X}$. A vektorról az következő összefüggést tételezzük fel: $\underline{X} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{F} + \underline{U} + \mathbf{E}\underline{X}$, a jelöléseleket a 9.1. táblázat mutatja. A faktoranalízist teljesen behatárolja a változók korrelációs mátrixának felépítése. Az átviteli mártixszal pont ezt a korrelációs struktúrát tudjuk feltárni, leírni (adatmátrix $\rightarrow$ korrelációs mátrix $\rightarrow$ átviteli mátrix).

A modellel csak akkor érdemes tovább foglalkozni, ha

9.1. táblázat. *k-faktoros modell jelölései*

Jelölés	Név
$\underline{\underline{A}}$	pxk-s átviteli mátrix
$\underline{F}$	k-dimenziós közös faktor-vektor
$\underline{U}$	p-dimenziós egyedi faktor-vektor

- $\underline{F}$ elemei páronként korrelálatlanok, várható értékük 0 és varianciájuk 1,
- $\underline{U}$ elemei páronként korrelálatlanok, várható értékük 0 és varianciájuk Ψ_{ii} és
- $\underline{F}$ és $\underline{U}$ elemei páronként korrelálatlanok.

Egy k-faktoros modell pontosan akkor oldható meg, ha $\underline{X}$ kovariancia mátrixa megegyezik $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^T + \underline{\underline{\Psi}}$-vel, ahol Ψ $\underline{U}$ kovariancia mátrixa. Ekkor van $p(p+1)/2$ egyenletünk és $p(k+1)$ ismeretlenünk. Amennyiben az egyenletrendszerben kevesebb az egyenlet, mint a változó, különböző kényszerfeltételeket adunk meg, amelyek más-más átviteli mátrixhoz vezetnek. Ezek közül azt választjuk, amelyiknek a legnagyobb a magyarázó ereje.

Az átviteli mátrix együtthatói (a_{ij}) jelölik az X_i és F_j közötti kovarianciát, az $\frac{a_{ij}}{\mathbf{D}X_i}$ hányados a közöttük lévő korrelációt adja meg, a $\frac{\Sigma_{j=1}^{k} a_{ij}^2}{\mathbf{D}^2 X_i}$ pedig megadja, hogy a közös faktorok az i-dik változó hány %-át magyarázzák.

A *kommunalitás* ($\mathbf{D}^2 X_i = \Sigma_{j=1}^{k} a_{ij}^2 + \mathbf{D}^2 U_i$) a változók varianciájának az a része, amit a közös faktorok magyaráznak.

9.1.1. Faktorok forgatása

Az átviteli mátrix egyértelművé tétele segíti a becslési eljárások matematikai elemzését, de az az ára, hogy a kapott közös faktorok nehezen értelmezhetőek. Alkalmas elforgatással esetleg szemléletesebb jelentést tudunk adni a faktoroknak:

- *Varimax* forgatás esetén azon változók száma kevés lesz, melyekhez sok faktor szerepel nagy súllyal. Célja, hogy minél több 0-hoz közeli faktorsúlyt állítson elő. Ez azért előnyös, mert ha a faktorsúlyok 0-közeliek, akkor a változókat csoportosíthatjuk aszerint, hogy melyik faktor magyarázza őket a legjobban
- *quartimax* forgatás a magyarázó faktorok számát minimalizálja
- *equamax* forgatás az előbbi két eljárás keverékét végzi.

9.2. Főkomponensanalízis

A főkomponensanalízis a faktoranalízis speciális eset, dimenziószám csökkentésre használható. Az eredetileg p változóval jellemzett statisztikai sokaságot $k << p$ főkomponenssel jellemzzük úgy, hogy a főkomponensek alapján elvégzett statisztikai elemzések következtetései a p-dimenziós sokaságra is érvényesek lesznek. A főkomponensek terében a változók korrelálatlanok lesznek. A főkomponensek korrelálatlanok, csökkenő súlyúak, amiknek az összege a totális variancia; vagyis csökkenő jelentőségűek.

Watanabe-tétel: ha p dimenziót lecsökkentünk k dimenzióra, akkor az összes lehetséges dimenziócsökkentési eljárással összevetve a főkomponens analízissel végrehajtott dimenziócsökkentés minimalizálja az információveszteséget.

10. fejezet

Adatredukciós módszerek

10.1. Klaszteranalízis

A klaszteranalízis egy adatredukciós módszer, aminek segítségével az eseteket homogén csoportokba sorolhatjuk. A klaszterezés célkitűzése, hogy az "összetartozó" eseteket közös csoportba soroljuk. A hasonlóságot egy $d(\underline{x}, \underline{y})$ távolságfüggvény írja le, melyre igaz, hogy $d(\underline{x}, \underline{y}) > 0$, $d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{y}, \underline{x})$ és teljesíti a háromszög-egyenlőtlenséget:

- Két klaszter távolságát definiálhatjuk a két legközelebbi társ távolságaként, az egymástól legtávolabbi társak távolságaként, vagy a klaszter-középpontok távolságaként
- Az esetek távolságait is többféleképpen definiálhatjuk: Manhattan-blokkok, Euklideszi távolság, Csebisev ($max_{i=1,\ldots,p}|x_i - y_i|$), stb.

A naiv hozzáállás a problémához, ha az összes lehetséges csoportosításból kiválasztjuk a legjobbat. Azonban N elemet K csoportba $\frac{1}{K!}\Sigma_{k=1}^{K}(-1)^{K-k}\binom{K}{k}k^N$-féleképpen lehet sorolni. Ez túl nagy szám. Ehelyett olyan algoritmusok kellenek, amelyek eleve jó csoportosítások képeznek, és ezek közül egy optimum elv segítségével kiválasztható egy nagyon jó.

A *k-közép* módszer olyan klaszterező eljárás, amikor előre meg kell adni a klaszterek számát. Lépéseit *McQueen-tételként* ismerjük: válasszuk ki a klaszterek számát (k). Véletlenszerűen hozzunk létre k számú klasztert és határozzuk meg minden klaszter közepét (vagy válasszunk k véletlen klaszter-középpontot). Az esetvektorok a legközelebbi klaszter-középponthoz lesznek rendelve. Számoljuk ki az új klaszter-középpontokat! Az előzőeket isméterljük, amíg valamilyen konvergencia kritérium nem teljesül. Előnye, hogy nagy esetszámú adatmátrix is feldolgozható vele, egyszerű, gyors és végessor lépésben leáll. Hátránya, hogy a metrika beépített (Euklideszi), körülményes a koordinátázás, előre meg kell adni a klaszterek számát és az eredmény függ a sorrendtől. A k-közép algoritmus általánosítása a *k-medoids*, ami tetszőleges metrikával működik.

A *hierarchikus klaszterezés* egyelemű klaszterekből indul ki és minden lépésben a két legközelebb fekvő klasztert összevonva csökkenti a klaszterek számát, amíg egyetlen klaszterbe nem kerül minden eset. A folyamatot dendogrammon követhetjük végig és azt a köztes állapotot fogadjuk el, amikor az összevont klaszterek elég távol voltak egymástól. Előnye, hogy nem kell előre tudni a klaszterek számát, ráadásul változtatható a távolság- és hasonlósági-mérték. Hátránya, hogy csak kis dimenziószám esetén indítható el.

10.2. Diszkriminanciaanalízis

Diszkriminanciaanalízisnél az esetek egy kategóriaváltozó értékei alapján osztályokba vannak tagolva. A feladat az, hogy a többdimenziós térben az osztályokat szeparáló felületekkel elválasszuk. A szeparációs felületek az eseteket vagy objektumokT jellemző változók alkalmas lineáris kombinációi. A módszerrel újabb objektumok csoportokhoz tartozásának lehető legjobb előrejelzését is megadhatjuk.

Csoportképző változó: természetes számokkal kódolt kisszámú értéket vehet fel, amelyek egymást kölcsönösen kizáró kategóriáknak felelnek meg.

Prediktor változó: többdimenziós, normális eloszlású kvantitatív adatokat kell tartalmaznia minden csoportban közel azonos kovariancia mátrixokkal.

Diszkriminancia-függvény: a csoportképző változók alkalmas módon megválasztott lineáris kombinációja, amelynek alapján a csoporthoz tartozás megadható. A lineáris kombináció konstansait úgy választjuk meg, hogy a $\frac{\Sigma_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2}{\Sigma_j\Sigma_i(x_{ij}-\bar{x}_i)^2}$ hányados értéke maximális legyen.

10.3. Osztályozás

Osztályozásról beszélünk, ha ismert kategóriájú esetek segítségével (tananyag) döntésfüggvényt konstruálunk, amivel ismeretlen kategóriájú esetekhez is tudunk osztályokat rendelni. A $\mathcal{D}_n = \{(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)\}$ halmazt *tananyagnak* nevezzük. X_i az i-dik tanulópont, a belőlük képzett halmaz pedig a tanulópont-halmaz. Y_i a megfelelő tanítás. Az osztályozás folyamata 3 lépésből áll:

1. A tananyag előfeldolgozása: csak egyszer kell elvégezni, míg az osztályozást nagyon sokszor. Az előfeldolgozás költsége megtérül, ha kisebb költséggel osztályzunk.
    - Ritkítás: részhalmaz előállítása, ami pontosan osztályozza a tananyagot és minimális elemszámú
    - Tömörítés: olyan tananyag készítése, ami kevesebb elemből áll, mint az eredeti és pontosan osztályozza azt
    - Átdefiniálás: megadunk egy transzformációt, ami átdefiniálja az osztályokat, ezzel új tananyagot készíthetünk
    - Szűrés: olyan részhalmazt akarunk előállítani, amelynél a tananyag pontjait a legközelebbi szomszék módszerrel pontosabban lehet osztályozni
2. A döntésfüggvény előállítása a $\mathcal{D}_n$ tananyag függvényeként
3. Ismeretlen alakzatvektorok osztályozása

A *legközelebbi társ módszerével* minden osztályozandó pontot abba az osztályba fogunk sorolni, amelyik osztálynak a már létező tagjai közül valamelyikre az osztályozandó pont a legjobban hasonlít. A hasonlóságot itt is egy távolságfüggvény írja le. Alapesetben ez n db távolság kiszámítását jelenti, vagyis jó lenne gyorsítani az algoritmust. A gyorsításhoz szükség van a tananyag előfeldolgozásából nyert adatokra, statisztikákra. A gyorsítás ún. *kizárási feltételek* alapján történik, amik megadják, hogy mikor biztosan nem legközelebbi szomszédja egy tanulópont egy adott esetnek, pl. adott esettől vett távolsága nagyobb, mint a legkisebb távolság kétszerese; van olyan tanulópont, amitől több, mint kétszer távolabb van, mint a potenciális szomszéd.

11. fejezet

Többdimenziós skálázás (MDS)

Adott egy olyan adatállomány, amelyet valamilyen megadott külső objektumokra vonatkozó hasonlósági vagy különbözőségi adatok (ált. skálázott szubjektív vélemények vagy észlelt különbségek) alkotnak. A cél olyan geometriai reprezentációk létrehozása a hasonlósági vagy különbözőségi adatokból, amelyek az adott külső tárgy (észlelt) viszonyát egy megfelelő dimenzió-számú geometrikai térben a lehető legpontosabban tükrözik vissza. Az eljárás eredménye mindig egy ponthalmaz egy adott dimenziószámú geometriai térben. A ponthalmaz képe alapján kísérletet tehetünk koordinátatengelyek megadására, amivel rejtett dimenziókat tárhatunk fel. Pl. milyen szempontokat tartanak fontosnak az emberek autóvásárlásnál? Miért szavaznak arra a politikusra, amelyikre?

Sokszor már a szemléletes ábrázolás önmagában is sokat segít az adott jelenség megértésében, ha van benne valamilyen szabályszerűség. Azonban az ábrázolás önmagában még nem skálázás. Ha a térben sikerül olyan koordináta tengelyeket találni, amelyek mentén az objektumok elhelyezkedése jól értelmezhető, akkor ezeknek a *tengelyeknek* az alkalmas *beskálázásával* minden objektumhoz skálaértékeket rendelhetünk az adott dimenziók mentén.

Azonban az érzékelt különbözőségeknek pontosan megfelelő geometriai konfiguráció nem mindig állítható elő, a feladatnak nem mindig létezik egzakt megoldása az adott térben. Azért a cél az, hogy legalább a lehetséges legjobb közelítő megoldást (optimális konfigurációt) találjuk meg.

Az MDS alkalmazásához speciálisabb távolság vagy hasonlóság jellegű adatokra van szükség, amelyek általában csak erre a célra tervezett kísérletekben vagy felmérésekben nyerhetők. Amennyiben viszont sikerül alkalmas hasonlósági mértékeket definiálni és azokat megfelelő pontossággal mérni, akkor az MDS lényegesen jobb eredményt ad a faktoranalízisnél.

11.1. Metrikus klasszikus MDS

A *klasszikus MDS (CMDS)* modellje egyetlen különbözőségi mátrixot képes egyidejűleg kezelni és megkívánja a bemenő adatoktól a legalább intervallum-skálát. Az i és j pontoknak megfelelő objektumok közötti különbözőség-érzékletet a létrehozott pontkonfigurációban a pontok euklideszi távolságával képezi le. A $\underline{\underline{D}}$ távolság-mártix elemei az egyes távolságértékek, amelyek a pontkonfigurációt jellemzik. Ennek a konfigurációnak az eltérése az eredeti észlelési adatokat tartalmazó S különbözőség-mátrixtól mutatja, hogy egy megtalált megoldásnak mekkora a hibája. A illeszkedést a következő mutatók segítségével tudjuk mérni:

- *S-stress:* $\sqrt{\frac{\text{hibamátrix (E) elemei négyzeteinek összege}}{\text{S-ből alkalmas lineáris transzformációval képzett mátrix (T) elemei négyzeteinek összege}}}$, szemléletesen a modell által meghatározott térben az összes észlelt különbözőséghez képest mekkora az eltérés az elméleti távolságok és a pontkonfigurációban létrejött távolságok között. Ha tökéletes a megfelelés, értéke 0

- *Stress:* mint az s-stress, csak nem távolságnégyzetekkel, hanem magukkal a távolságokkal számol

- *RSQ:* D és T megfelelő elemei között kiszámított korrelációs együttható négyzete.

A rekonstrukció akkor elfogadható, ha az s-stress és a stress értékei 0,20 alatt vannak (0,05 alatt kíváló). RSQ-nál a kisebb értékek rosszabb illeszkedést jeleznek.

Metrikus CMDS esetén probléma, hogy nincs garancia arra, hogy az emberek hasonlósági ítéleteiket valóban egyenletesen skálázzák, ráadásul egyesek kifejezetten sarkítják a véleményüket. A gyakorlatban ráadásul inkább csak ordinális skálájú adataink vannak, nem intervallum-skálájúak. Megoldás: nemmetrikus MDS!

11.2. Nemmetrikus CMDS

Nemmetrikus MDS esetén a távolságokat rangszámokkal helyettesítjük, amik az eredeti távolságok sorrendjét reprezentálják. Ábrázolásnál a rangszámok a pontok köré rajzolt kör/gömb/stb. sugarának felelnek meg. Ekkor azonban a konfiguráció instabil: az egyes pontok helye megváltoztatható anélkül, hogy a rangsor megváltozna. Azonban a pontok számának növelésével az egyes pontok mozgástere radikálisan szűkül. A három illeszkedési mutató ugyanúgy használható itt is, mint metrikus esetben, csak T-t nem lineáris, hanem monoton transzformációval kell létrehozni.

11.3. Továbbfejlesztett MDS modellek

Több kísérleti személy eredményeinek együttes kiértékelése az előző módszerekkel problémás, mert csak egyetlen különbözőség-mátrixot tudnak egyidőben használni. A CMDS egyszerű személyenkénti ismételgetése azonban általában nem elfogadható, mert közvetve feltételei, hogy az egyes személyek különbözőség-érzékletei egymástól függetlenek, nincs bennük semmi közös. Az igazán jól használható megoldásokhoz más típusú matematikai modellekre volt szükség, pl.

- Replicated MDS: ez már több különbözőségi mátrixot is képes egyidejűleg kezelni és feltételezi, hogy az egyes objektumok különbözőségei bizonyos véletlenszerű hibáktól eltekintve azonos mértékben tükröződnek → az adatmátrixok egymás replikái

- Weighted MDS: több különbözőségi mátrixot is képes egyidejűleg kezelni és a válaszok mögött meghúzódó egyéni észlelési és kognitív folyamatok különbségeiről is bizonyos információkat tud adni

12. fejezet

Kérdőíves felmérések módszertana

A kérdőívnek alapvetően kétféle tétele van: kérdések és állítások. A kérdő és a kijelentő forma egyaránt hasznos lehet, kombinálásukkal elkerülhető a monotómia.

- *Kérdések:* a kérdések sorrendje hatással lehet a későbbi válaszokra, ezért az általánostól érdemes indulni a konkrét felé és témakörönként csoportosítani kell őket. Önkitöltős tesztnél fontos az is, hogy előbb érdekes kérdések jöjjenek, különben a kérdezett elunja magát és a kérdőív nagy részét nem tölti ki. A kérdések sorrendjének randomizálása megnehezítheti a kitöltést, ezért előre fel kell mérni, hogy melyik kérdés vezetheti meg a kérdezettet egy később felteendő kérdésnél. Ha van ilyen, azt hátrébb kell sorolni
  - *Nyitott kérdés:* a válaszoló a saját szavaival fogalmazza meg a választ. A nyitott kérdések előnye, hogy nem köti meg a kérdezett fantáziáját, viszont nehezen kódolható, ráadásul teret ad a kutató szabad értelmezésének, amit torzítást eredményezhet. Előfordul, hog a válasz irreleváns
  - *Zárt kérdések* esetében a válaszolónak egy listából kell kiválasztania a lehetséges válaszokat. Fontos, hogy a válaszok teljes eseményrendszert alkossanak. A zárt kérdéseket könnyen és egyértelműen lehet kódolni számítógépes feldolgozáshoz, de figyelni kell a hiányzó válaszok feldolgozásánál. Zárt kérdéseknél előfordulhat, hogy a kérdezett több választ is meg tudna jelölni, ráadásul a gyűtő válasz ("egyéb") nagyon tág lehet
  - *Feltételes kérdések:* elágazási pontok a kapott választól föggően
  - *Mátrix kérdések:* ha egy csoportban teszünk fel zárt kérdéseket Likert-skálás válaszokkal, mátrix struktúrát alkalmazhatunk (táblázatos forma: sorok a kérdések, oszlopok a lehetséges válaszok)
- *Állítások:* akkor alkalmazzuk, ha a kutató azt akarja megtudni, hogy milyen mértékben oszt a kérdezett bizonyos attitűdöt vagy nézetet. Az attitűdöt egy tömör kijelentésben összefoglaljuk, és megkérdezzük, mennyiben ért ezzel egyet a kérdezett.

A lehetséges válaszokat Likert formalizálta, megalkotva a *Likert-skálát*. Likert-skála esetén a válaszolónak egy állítással való egyetértés mértékét, vagy egy vélemény helyeslését kell kifejeznie. A kérdőívszerkesztőnek csak az állítást kell meghatároznia, maga a skála mindig ugyanaz, pl. Egyetért - Közömbös - Nem ért egyet. A skála lehet:

- Verbális/nem verbális

- Egyirányú: pl. 5 = teljes mértékben egyetért, ..., 1 = egyáltalán nem ért egyet
- Középre rendezett: pl. 5 = teljesen elégedett, ..., 3 = közömbös, ... 1= teljesen elégedett
- Szemantikus differenciál: az intenzitást és a tartalmat egyszerre vizsgálja a megkérdezett gondolkodásmódjában egy hétfokozatú skálán, pl. korszerű 1,2,...,6,7 régimódi. Így egyéni és csoportátlagok, szóródások számíthatók

A skálaértékek között egyenletes távolságoknak kell lenniük, biztosítani kell a megfelelő szórást és szemantikus differenciál esetén a verbális végpontoknak tartalmilag szembenállóknak kell lenniük

12.1. Adatgyűjtési technikák

Primer adatok: a mintavételből nyert adatok.

Szekunder adatok: meglévő adatázisokból, releváns forrásokból és a szakirodalomból nyert adatok.

Interjú módszer: az interjú módszer korlátozza a kutató előítéletéből fakadó korlátokat, interaktív és lehetőséget ad a változtatásra. Személyesen vagy telefonon történik jegyzeteléssel vagy hangrögzítéssel. A kérdezőnek semlegesnek kell maradnia! Lehet:

- Strukturálatlan: szabad beszélgetés (nehéz a kódolása)
- Dinamikus, non-direktív: ilyen csak irányító kérdések vannak, a kérdezőnek nem szabad közbekérdezni
- Strukturált: irányított beszélgetés, ami kódolható és statisztikai feldolgozásra alkalmas

Kérdőíves adatgyűjtés: sikere a kérdések megfogalmazásán áll vagy bukik. Kutatási kérdések megválaszolását szolgálja, a válaszok alapján kell tudni dönteni a hipotézisről. Lépései:

1. Kérdőív-szerkesztés:
    - Formati követelmények: elrendezésnél fekvő és álló is elfogadható, legyen rajta verziószám és a papírnak csak az egyik oldalára nyomtassunk. A kérdéseket és válaszokat számozzuk, az utasításokat CSUPA NAGY BETŰVEL ÍRJUK. Ha 5 vagy kevesebb választási lehetőség van egy zárt kérdésnél, akkor azokat két függőleges oszlopba kell rendezni
    - Tartalmi követelmények: ne legyen túl rövid, kerüljük a tagadó kérdéseket, negatív megfogalmazást. A kérdések legyenek egyértelműek, világosak, csak egy dologra kérdezzenek rá, relevánsak legyenek és ne sugalmazzák a választ
2. Kérdőív tesztelése
3. Mintavétel (lásd 13. tétel)
4. Adatgyűjtés: lehet személyes megkérdezés, telefonos felvétel vagy önkitöltős kérdőív, lehetőség van másodelemzésekre. Pl. önkitöltő kérdőív fókuszcsoportban (célcsoport közös beszélgetésen vesz rész, ált. 8 főből áll), vezetőknél kitöltött kérdezőbiztosi, kombinált telefon/posta, stb.
5. Kiértékelés

13. fejezet

Mintavételezés

A statisztika célja a halmaz egészének kevés adattal történő tömör jellemzése, és a populáció egyedeinek leírására bevezetett változók közötti kapcsolatok leírása. Arra nincs lehetőség (erőforrás), hogy a populációminden egyes eleméről adatokat szerezzünk be, azaz mintát kell vételeznünk a sokaságból.

Minta: A sokaság elemeinek egy csoportja. A mintajellemzőkből (statisztikákból) tudunk valamilyen következtetést levonni a teljes sokaságra.

Reprezentativitás: nem reprezentatív mintából levont következtetések értékelhetetlenek, torzak. Az alkalmazott statisztikai módszerek, becslési hibák akkor lesznek érvényesek, ha a minta, amivel számolunk reprezentatív! A populáció minden egyes elemének ugyanakkora esélyt kell biztosítani a mintába kerüléshez. A minta elemszámának elég nagynak kell lennie ahhoz, hogy a következtetéseink átvihetők lehessenek a populációra is. A szükségesnél ne kelljen nagyobb mintát feldolgozni, mert az költségesebb.

Mintavételi keret: a mintavételi egységekről (vizsgálati egység, amelyik rendelkezik a keresett információval, vagy az az alapegység, amelyik magában foglalja a sokaság elemeit) készült felsorolás, amely segítségével azonosíthatóak az elemek. Amennyiben a populáció bizonytalanul körülhatárolható csak, a mintavételi keretet keressük meg, amely alkalmas arra, hogy a populáció minden egyes elemét azonosítsuk és bevonjuk bármely mintánkba.

13.1. Mintavételezési technikák

Cenzus: A sokaság elemeinek teljes számbavétele. Cenzust alkamazunk, ha kicsi a sokaság, figyelni kell az egyedi esetekre, sok idő és pénz áll rendelkezésre vagy nagon szóródik a megfigyelt jellemző a sokaságban.

Visszatevéses mintavétel: egy adott elem elvileg többször is a mintába kerülhet.

Visszatevés nélküli mintavétel: egy elem csak egyszer kerülhet a mintába.

Bayes-technika: minden egyes kiválasztást követően kiszámítják a mintajellemzésőket és meghatározzák a költségeket, és ezek alapján válsztják a következő egyedet.

Nem véletlen mintavételi technikák: a ilyen technikák esetében nem minden esetben teljesül a reprezentativitás. Azonban feltáró kutatáshoz jól használható, illetve alkalmazzuk, ha nagyok a nem mintavételi hibák, a sokság homogén, vagy nem statisztikai módszerekkel kívánjuk elemezni a mintát.

- Önkényes mintavétel: a minta elemeit általában kérdezőbiztos választja ki, nincs mintavételi keret, amiből választani lehetne. Olcsó, a mintavételi egységek könnyen el-

érhetők, de semmilyen meghatározható sokaságot nem reprezentálnak és semmilyen általánosításra nem ad módot. Mire jó: leíró kutatások, hipotézisek felállítása

- Elbírálásos mintavétel: a kutató saját tapasztalatai alapján választ a sokaság elemei közül és eldönti, hogy bekerüljenek-e a mintába, vagy sem. Pl. teszthelyszínek kiválasztása, szakértők kiválasztása, stb.

- Kvótás mintavétel: A kutató felállítja a sokaság kontroll kategóriáit, azaz a kvótákat, a mintaelemeket a kvótának megfelelően önkényesen vagy elbírálással választja ki. Ha kimarad a sokaság egy fontos jellemzője, akkor a minta nem reprezentatív

- Hólabda mintavétel: egyvalakit, vagy egy kis csoportot megkeresünk és a kezdeti csoport tagjait arra kérjük, hogy ajánljanak másokat, akik szintén a célsokasághoz tartoznak. Akkor használjuk, ha speciális jellemzővel bíró sokaságot keresünk.

Véletlen mintavételi technikák: az elérendő cél az, hogy a minta jellemzői teljes egészében megegyezzenek a célsokaság jellemzőivel, azaz ne legyen torzítás. Ha mégis lenne eltérés, akkor a különbség legyen statisztikailag mérhető. Az így vett minták jellemzői kivetíthetők az egész sokaságra. Használjuk leíró kutatásokhoz, ha nagyok a mintavételi hibák vagy a sokaság szórása nagy és statisztikai módszerekkel kívánjuk elemezni a mintát.

- Egyszerű véletlen mintavétel: a sokaság minden eleme ismert és azonos valószínűséggel kerülhet be a mintába. Minden elemet egymástól függetlenül, a mintavételi keretből véletlen eljárással választunk ki

- Szisztematikus mintavétel: a mintavételi keretben véletlenszerűen kijelölnek egy kezdőpontot, majd kiválasztják a mintavételi keret i-dik elemét, $i = [N/n]$, ahol N a mintavételi keret elemszáma, n pedig a minta elvárt nagysága. Akkor működik jól, ha nincsenek sorbaállítva az egyedek a vizsgált jellemzővel összefüggésben

- Rétegzett mintavétel: sokaságot csoportokra bontják valamilyen ismert rétegképző ismérv segítségével, az egyes rétegekből pedig egyszerű véletlen mintavétellel választanak. Attól függően, hogy a rétegekből kiválasztott elemek száma arányos-e a rétegnek a teljes sokasághoz viszonyított nagyságával, beszélhetünk arányos és nem arányos rétegezésről

- Csoportos mintavétel: A célsokaságot egymást kölcsönösen kizáró csoportokra bontják, amelyek együttesen lefedik az egész sokaságot (statisztikai populációt). Az így képzett csoportokból egyszerű véletlen mintát vesznek (csoportokat választanak ki). A kiválasztott csoportból vagy mindenki kiválasztanak, vagy csoporton belül egyszerű véletlen mintavételeznek.

- Többlépcsős mintavételezés: nagyobb egységeket részekre bontjuk és a részek között véletlenszerűen választunk egyet. A kiválasztott rész újabb részekre bontjuk és véletlenszerűen megint választunk...

- Szekvenciális mintavétel: a sokaság elemeiből egymást követően veszünk mintát, majd valamilyen mintavételt követően elvégezzük az elemzést és eldöntjük, hogy kell-e újabb elemet választani

- Kettős mintavétel: a sokaság elemeiből kétszer veszünk mintát

13.2. A szükséges minta elemszám meghatározása

Minél pontosabb információra van szükség, annál nagyobb mintát kell venni. Ám minél jobban nő a minta, annál kisebb a javulás a mintanagyság egységnyi növekedésével. Léteznek ökölszabályok és tudományos módszerek is az elemszám meghatározására

Ökölszabály: kis csoport (elemszám max. 30-35) esetén a teljesen populációt be kell venni a mintába, vagyis cenzust kell alkalmazni. Nagyobb elemszám esetén a minta elemszáma és a teljes populáció között közel logaritmikus kapcsolat áll fenn.

Tudományos módszerek: minimális mintaelemszám meghatározásakor a
$\mathbf{P}\big(|\bar{x}_n - m| \leq \epsilon\big) \geq 1 - \mu$ relációra keressük a megfelelő n-eket. A reláció jelentése: mekkora n elemszám garantálja, hogy a mintaátlag a minta várható értékétől legfeljebb ϵ távolságra esik $1 - \mu$ valószínűséggel? Ha a 3 paraméter (n, ϵ, μ) bármelyik kettőt ismerjük, akkor alsó-becslést tudunk adni a harmadikra.

- Egymintás t-próbához (centrális határeloszlás-tétel alapján): ahhoz, hogy $(1-\alpha)$ valószínűséggel kimutassunk egy legalább $2d$ nagyságú különbséget, a mintának $\frac{u^2_{\alpha/2} \cdot \sigma^2}{d^2}$ elemet kell tartalmaznia. $u^2_{\alpha/2}$ a standard normális eloszlás $\alpha/2$ valószínűséghez tartozó értéke, σ az elméleti szórás vagy annak becslése, d pedig a konfidencia intervallum szélességének fele
- Kétmintás t-próbához Beyer készített táblázatot figyelembe véve a másodfajú hibát és hogy milyen valószínűséggel szeretnénk a különséget kimutatni
- Paraméteres módszerek:
  - ismert σ szórás esetén: $n \geq \frac{z^2_{\mu/2} \cdot \sigma^2}{\epsilon^2}$, ahol $\Phi(z_{\mu/2}) = 1 - \mu/2$
  - ismeretlen szórás esetén: $n \geq \frac{t^2_{\mu/2} \cdot s^2_n}{\epsilon^2}$, ahol $F_{n-1}(t_{\mu/2}) = 1 - \mu/2$ és s^2_n a minta szórásnégyzete
- Ha a mérések garantáltan az (a, b) intervallumba esnek
  - ismeretlen szórás esetén Hoeffding-egyenlőtlenség: $n \geq -\frac{ln(\mu/2) \cdot \frac{(b-a)^2}{2}}{\epsilon^2}$
  - ismert σ szórás esetán Bernstein-egyenlőtlenség: $n \geq -\frac{ln(\mu/2) \cdot (2\sigma^2 + 2\epsilon\frac{b-a}{3})}{\epsilon^2}$
- Csernov-egyenlőtlenség