

ESEIAAT



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Escola Superior d'Enginyeries Industrial,
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

Trajectòries interplanetàries Sense integració numèrica

Informe

Curs: Màster en Enginyeria Aeronàutica

Assignatura: Aerodinàmica, Mecànica de Vol i Orbital

Data d'entrega: 23-01-2018

Estudiants:

González García, Sílvia

Kaloyanov Naydenov, Boyan

Pla Olea, Laura

Serra Moncunill, Josep Maria

Professor: Calaf Zayas, Jaume

Llista de continguts

Llista de taules	iii
Llista de figures	iv
1 Introducció	1
1.1 <i>Patched Conics Approximation</i>	1
1.2 Viatges interplanetaris	2
2 Òrbita el·líptica heliocèntrica	4
2.1 Plantejament d'equacions	4
2.1.1 Trajectòria el·líptica	5
2.1.2 Trajectòria hiperbòlica	6
2.2 Mètode de resolució	7
3 Sortida del planeta origen	8
3.1 Velocitats a la sortida	8
3.2 Òrbita planetocèntrica hiperbòlica	9
3.3 DeltaV	10
4 Codi	11
4.1 Programa principal	11
4.2 Transfer Orbit	13
4.2.1 Hyperbolic transfer orbit	15
4.3 Hipèrbola de sortida	17
4.4 Posició i velocitat	17
4.5 Data Juliana	19
4.6 Correcció d'angles	20
5 Resultats	21
5.1 Cas de la Terra a Mart	22
5.2 Cas de Mart a Júpiter	23
5.3 Cas de la Terra a Mart	24
5.4 Cas 1 de Mart a Júpiter	25
5.5 Cas 2 de la Terra a Mart	26

Trajectòries Interplanetàries

5.6	Cas 3 de la Terra a Mart	27
5.7	Cas 4 de la Terra a Mart	28
5.8	Cas 5 de la Terra a Venus	29
5.9	Cas 6 de Mart a la Terra	30
5.10	Cas 7 de Mart a la Terra	31
5.11	Cas 8 de la Terra a Mart	32
5.12	Cas 9 de la Terra a Mart	33
6	Conclusions	34
7	Bibliografia	35

Llista de taules

5.1	Elements orbitals del primer cas resolt	22
5.1	Elements orbitals del segon cas resolt	23
5.1	Elements orbitals del tercer cas resolt	24
5.1	Elements orbitals del cas 1	25
5.1	Elements orbitals del cas 2	26
5.1	Elements orbitals del cas 3	27
5.1	Elements orbitals del cas 4	28
5.1	Elements orbitals del cas 5	29
5.1	Elements orbitals del cas 6	30
5.1	Elements orbitals del cas 7	31
5.1	Elements orbitals del cas 8	32
5.1	Elements orbitals del cas 9	33

Llista de figures

1.1	Trajectòria interplanetària d'una nau utilitzant el mètode <i>Patched Conics Approximation</i>	2
2.1	Òrbita interplanetària heliocèntrica del planeta d'origen al planeta de destí	4
2.1	Triangle esfèric de l'òrbita interplanetària heliocèntrica	5
3.1	Òrbita hiperbòlica de sortida de l'esfera d'influència del planeta.	8
5.1	Òrbita interplanetària del primer cas resolt	22
5.1	Òrbita interplanetària del segon cas resolt	23
5.1	Òrbita interplanetària del tercer cas resolt	24
5.1	Òrbita interplanetària del cas 1	25
5.1	Òrbita interplanetària del cas 2	26
5.1	Òrbita interplanetària del cas 3	27
5.1	Òrbita interplanetària del cas 5	29
5.1	Òrbita interplanetària del cas 6	30
5.1	Òrbita interplanetària del cas 7	31
5.1	Òrbita interplanetària del cas 8	32
5.1	Òrbita interplanetària del cas 9	33

1 | Introducció

El problema a resoldre consisteix en trobar un impuls ΔV inicial que porti una nau d'un planeta a un altre, donats els instants de sortida t_1 i d'arribada t_2 , i els planetes d'origen i destí.

Per tal de fer això, primer s'han de trobar els elements orbitals eclíptics de l'òrbita de transferència d'un planeta a l'altre així com les velocitats heliocèntriques de sortida i d'arribada de la sonda als respectius planetes. Finalment, a partir d'aquestes velocitats, es pot obtenir el ΔV i determinar així la viabilitat del viatge.

Es tracta d'un projecte complex que toca gran part del contingut vist a la part de mecànica orbital de l'assignatura *Aerodinàmica, Mecànica de Vol i Mecànica Orbital* del Màster d'Enginyeria Aeronàutica de l'UPC. Per aquest motiu, ha despertat l'interès de l'equip i ha sigut l'escollit.

1.1 Patched Conics Approximation

La metodologia matemàtica que s'ha seguit consisteix en el mètode de *Patched Conics Approximation* [5]. Segons aquest, la trajectòria es divideix per zones d'influència. És a dir, en un problema exacte, caldria tenir en compte la influència del Sol i de tots els objectes del Sistema Solar en cada moment. Tanmateix, en aquest mètode es suposa que cada planeta té una esfera d'influència (EdI) dins de la qual un cos només es veu atret per la força gravitatòria que exerceix aquest planeta. Fora de l'EdI, s'assumeix que l'única força gravitatòria és la que fa el Sol. Aquesta esfera d'influència depèn de la distància entre els cossos que exerceixen la força gravitatòria i de la seva massa segons l'expressió:

$$R_I = R \left(\frac{m_{\text{planeta}}}{m_{\odot}} \right) \quad (1.1)$$

En aquest cas, ja que ens trobem dins del Sistema Solar, R és la distància del planeta al Sol, m_{\odot} la massa del Sol, m_{planeta} la massa del planeta i R_I la seva esfera d'influència.

Així, en un viatge interplanetari, inicialment la sonda es troba dins de l'esfera d'influència del planeta de sortida. Un cop surt d'aquesta, està només sota la influència del Sol. I en arribar al

planeta de destí, està dins de la seva EdI. El mètode es basa en tenir sempre un problema de dos cossos, variant el cos central segons l'EdI, bé sigui un dels planetes o bé el Sol. D'aquesta forma es simplifica molt el problema. Per aquest motiu la PCA va molt bé per càlculs inicials, tot i que s'hauran de refinar numèricament a posteriori si es volen resultats més precisos.

1.2 Viatges interplanetaris

Com s'ha resumit a l'apartat anterior, en el càlcul de la trajectòria interplanetària que segueix la sonda, es suposa sempre que es troba sota la influència d'un sol cos, ja sigui un planeta o el Sol. Tanmateix, la seva trajectòria serà diferent en funció de sota la influència de quin cos es trobi, com es pot veure a la Figura 1.1

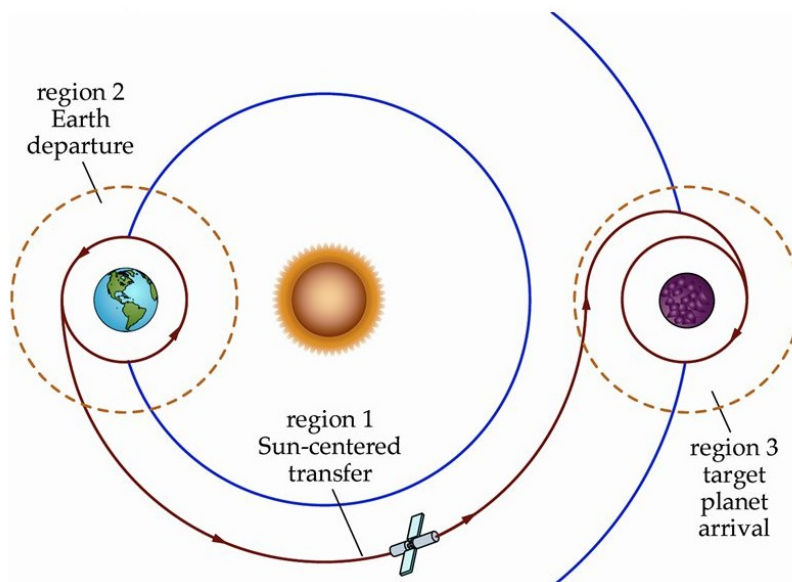


Figura 1.1: Trajectòria interplanetària d'una nau utilitzant el mètode *Patched Conics Approximation*

Per tant, la trajectòria que seguirà el planeta es divideix en les següents fases:

1. Sortida: El planeta es troba en una òrbita d'aparcament a sobre del planeta de sortida. Evidentment, aquesta òrbita es troba dins de l'esfera d'influència del planeta. És aquí on se li aplica el ΔV inicial en l'instant t_1 . Un cop se li ha aplicat aquest impuls, la sonda segueix una trajectòria hiperbòlica que l'envia fora de l'esfera d'influència del planeta.
2. Trajectòria interplanetària: Un cop ha sortit de l'esfera d'influència del planeta, la sonda es troba sota la influència únicament del Sol. En aquest moment fa l'òrbita de transferència de l'EdI del planeta d'origen a l'EdI del planeta de destí. Aquesta trajectòria pot ser el·líptica o hiperbòlica en funció dels temps de sortida i arribada dels planetes.

Trajectòries Interplanetàries

3. Arribada: Un cop arriba a l'EdI del planeta de destí en l'instant t_2 , la sonda deixa d'estar sota la influència del Sol i només és atreta pel planeta de destí. Un cop ha entrat en aquesta esfera d'influència segueix una trajectòria hiperbòlica. En funció de la hipèrbola, la sonda xocarà contra el planeta o el passarà de llarg. En aquest punt, si es vol que la sonda quedi orbitant el planeta caldrà aplicar-li un altre ΔV .

2 | Òrbita el·líptica heliocèntrica

El primer pas en la resolució de la trajectòria interplanetària és l'obtenció dels elements de l'òrbita que porta la nau d'un planeta a l'altre. Per tal de conèixer aquests elements és necessari saber quins són els punts d'origen i de destí de la nau. És a dir, cal saber la posició dels planetes en l'instant en què la sonda surt del planeta d'origen i en l'instant en què arriba al planeta de destí. Coneixent aquestes dues posicions ja és possible projectar una òrbita com la que es veu en la figura 2.1.

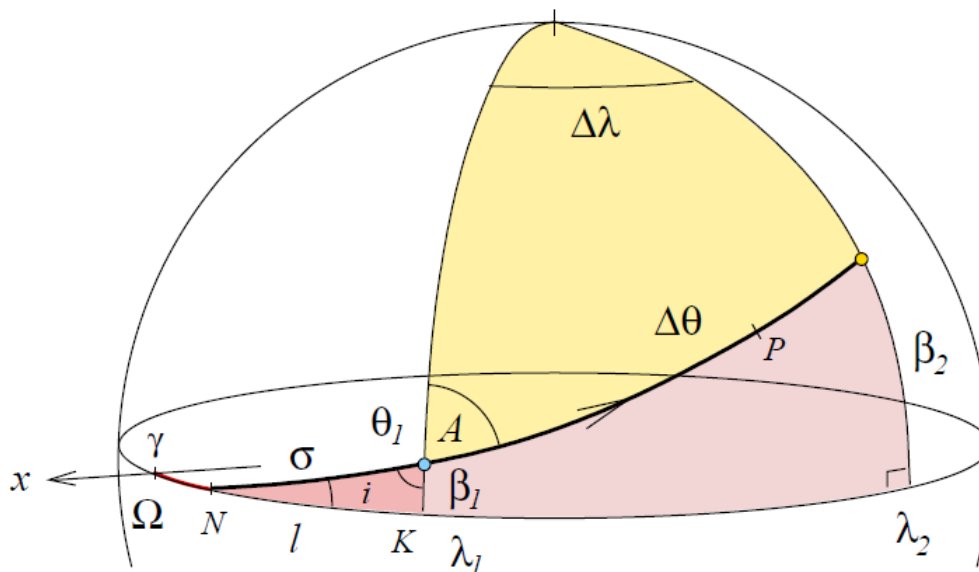


Figura 2.1: Òrbita interplanetària heliocèntrica del planeta d'origen al planeta de destí

2.1 Plantejament d'equacions

Com es dedueix de la figura, és possible calcular la inclinació de l'òrbita sabent la posició dels dos planetes. A partir dels vectors de posició, es pot calcular la desviació respecte de l'eclíptica dels planetes d'origen (en blau) i de destí (en groc), β_1 i β_2 respectivament. També

Trajectòries Interplanetàries

es pot obtenir la longitud eclíptica dels dos planetes, λ_1 i λ_2 . A partir d'aquestes variables, el problema es resol aplicant trigonometria esfèrica:

$$\cos \Delta\theta = \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \Delta\lambda \quad (2.1)$$

Del triangle groc s'obté:

$$\sin A = \cos \beta_2 \frac{\sin \Delta\lambda}{\sin \Delta\theta} \quad (2.2)$$

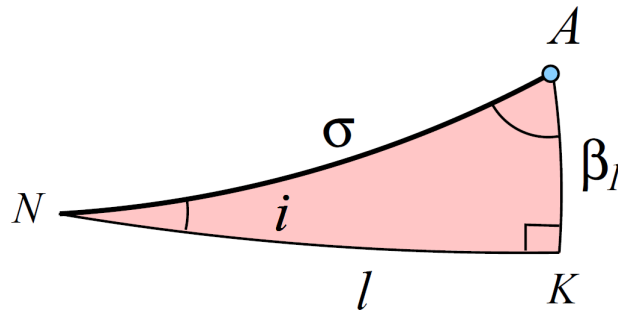


Figura 2.1: Triangle esfèric de l'òrbita interplanetària heliocèntrica

D'altra banda, del triangle esfèric de la figura 2.1 s'obtenen les següents expressions:

$$\tan \sigma = \frac{\cos \beta_1}{\tan \beta_1} \quad (2.3)$$

$$\cos i = \sin A \cos \beta_1 \quad (2.4)$$

$$\sin l = \frac{\tan \beta_1}{\tan i} \quad (2.5)$$

De la figura 2.1 també es poden deduir l'ascensió recta del node ascendent i l'argument del perigeu:

$$\Omega = \lambda_1 - l \quad (2.6)$$

$$\omega = 2\pi - (\theta_1 - \sigma) \quad (2.7)$$

2.1.1 Trajectòria el·líptica

Finalment, a partir dels vectors de posició també s'obtenen els tres elements orbitals que falten. Assumint que la trajectòria és el·líptica, els mòduls dels vectors de posició vénen donats per les expressions:

$$r_1 = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta_1} \quad (2.8)$$

$$r_2 = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta_1 + \Delta\theta)} \quad (2.9)$$

Trajectòries Interplanetàries

D'altra banda, també es pot relacionar el temps amb la posició de la sonda en l'òrbita mitjançant l'equació:

$$\frac{2\pi t}{T} = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta_1}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta_1}{1+e \cos \theta_1} \quad (2.10)$$

on T és el període en dies del planeta d'origen.

Per tant, es pot plantejar un sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos (\theta_1 + \Delta\theta)} \quad (2.11)$$

$$a = \frac{r_1 (1 + e \cos \theta_1)}{1 - e^2} \quad (2.12)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{365.25}{2\pi} a^{3/2} \cdot \left[2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{(\theta_1 + \Delta\theta)}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin (\theta_1 + \Delta\theta)}{1+e \cos (\theta_1 + \Delta\theta)} \right] - \\ - 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta_1}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta_1}{1+e \cos \theta_1} \quad (2.13)$$

en què tant els vectors \vec{r}_1 i \vec{r}_2 com el semieix major a estan expressats en AU, per tal de treballar amb valors més simples.

2.1.2 Trajectòria hiperbòlica

En el cas que la trajectòria sigui hiperbòlica, les equacions varien lleugerament. Les posicions vénen donades per les expressions:

$$r_1 = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta_1} \quad (2.14)$$

$$r_2 = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos (\theta_1 + \Delta\theta)} \quad (2.15)$$

I la relació entre el temps i la posició de la sonda s'expressa amb l'equació:

$$\frac{2\pi t}{T} = \sqrt{e^2 - 1} \left[\frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \ln \left\| \frac{\tan \frac{\theta}{2} + \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}}{\tan \frac{\theta}{2} - \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}} \right\| \right] \quad (2.16)$$

Per tant, el sistema de tres equacions i tres incògnites és el següent:

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos (\theta_1 + \Delta\theta)} \quad (2.17)$$

$$a = \frac{r_1 (1 + e \cos \theta_1)}{e^2 - 1} \quad (2.18)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{365.25}{2\pi} a^{3/2} \cdot \left[\frac{e\sqrt{e^2 - 1} \sin(\theta_1 + \Delta\theta)}{1 + e \cos(\theta_1 + \Delta\theta)} - \ln \left\| \frac{\tan \frac{(\theta_1 + \Delta\theta)}{2} + \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}}{\tan \frac{(\theta_1 + \Delta\theta)}{2} - \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}} \right\| - \right. \\ \left. - \frac{e\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta_1}{1 + e \cos \theta_1} - \ln \left\| \frac{\tan \frac{\theta_1}{2} + \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}}{\tan \frac{\theta_1}{2} - \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}} \right\| \right] \quad (2.19)$$

2.2 Mètode de resolució

1. Es calcula la posició del planeta d'origen en l'instant de temps de sortida i la posició del planeta de destí en l'instant de temps d'arribada.
2. A partir dels vectors de posició es calculen les longituds i latituds eclíptiques dels planetes.
3. A partir del sistema d'equacions donat per 2.11, 2.12 i 2.13 s'obtenen l'excentricitat e i el semieix major a de l'òrbita, i l'anomalia vertadera de la sonda θ_1 en l'instant de sortida. Aquest sistema es resol mitjançant la funció *solve* de *MATLAB*. Si no s'obté cap solució (o les solucions no són coherents), s'assumeix que una trajectòria el·líptica no és possible i, per tant, l'òrbita ha de ser hiperbòlica. En aquest cas, es resol el sistema donat per 2.17, 2.18 i 2.19 mitjançant un mètode iteratiu.
4. Es calcula la inclinació a partir de les equacions donades pels triangles esfèrics 2.4.
5. Càlcul de la longitud eclíptica del node ascendent donat per 2.6.
6. Es calcula l'argument del periheli amb 2.7.

3 | Sortida del planeta origen

Un cop es disposa dels elements keplerians eclíptics de l'òrbita de transferència, és possible trobar tant la trajectòria hiperbòlica que la sonda haurà de prosseguir des de la seva òrbita d'aparcament fins la sortida de l'EdI, com el ΔV que se li haurà d'aplicar per a que sigui capaç se sortir de l'òrbita d'aparcament i arribar al planeta en el temps marcat.

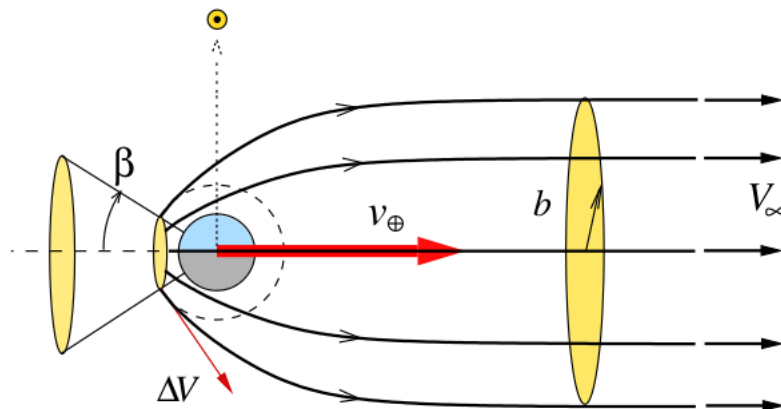


Figura 3.1: Òrbita hiperbòlica de sortida de l'esfera d'influència del planeta.

A la figura 3.1 es veuen els elements rellevants que s'han d'obtenir.

3.1 Velocitats a la sortida

Per tal de determinar la hipèrbola de sortida, el primer pas és trobar les velocitats planetocèntrica i heliocèntrica de la sonda, V_{∞} i V_1 respectivament, en el moment de sortida de l'EdI del planeta. La velocitat planetocèntrica, V_{∞} , s'obté a partir de la velocitat heliocèntrica de la sonda, V_1 , i de la velocitat heliocèntrica del planeta d'origen, V_{P0} , de la següent manera:

$$\vec{V}_{\infty} = \vec{V}_1 - \vec{V}_{P0} \quad (3.1)$$

Per tal d'obtenir tant \vec{V}_1 com \vec{V}_{P0} de manera senzilla i genèrica, s'ha elaborat una funció de MATLAB, que a partir d'els elements orbitals i de l'anomalia mitjana que tenia un cos en òrbita en un temps de referència, calcula la posició i la velocitat d'el cos en un instant determinat de temps 4.4.

D'aquesta manera, s'utilitzen els elements orbitals del planeta d'origen en J2000 per a obtenir la seva posició i velocitat en l'instant t_1 , i s'utilitzen els elements orbitals i l'anomalia mitjana de l'òrbita interplanetària, calculats en la secció anterior, fent servir com a temps de referència el propi instant t_1 .

3.2 Òrbita planetocèntrica hiperbòlica

A les classes de l'assignatura s'ha arribat a les següents relacions [5]:

$$a = \frac{\mu}{V_\infty^2} \quad (3.1)$$

$$e = 1 + \left(\frac{V_\infty}{V_o}\right)^2 \quad (3.2)$$

$$\cos(\beta) = \frac{1}{e} \quad (3.3)$$

$$b = a\sqrt{e^2 - 1} \quad (3.4)$$

$$V_o = \sqrt{\frac{\mu}{r_o}} \quad (3.5)$$

On:

- a és el semieix major.
- e és l'excentricitat.
- β és l'angle de l'asímtota. Veure fig.3.1.
- b és el paràmetre de sortida. Veure fig.3.1.
- V_o és la velocitat que porta la sonda en l'òrbita d'aparcament de radi r_o .
- μ és el paràmetre de gravitació estàndard del planeta. (GM)
- V_∞ representa el mòdul de la velocitat planetocèntrica que porta la sonda al sortir del planeta.

Aquests càlculs s'han portat a terme mitjançant el codi de la secció 4.3.

3.3 DeltaV

Per trobar l'impuls que s'ha de subministrar s'aplica conservació d'energia cinètica:

$$\frac{1}{2}V_{\infty}^2 = \frac{1}{2}(V_o + \Delta V)^2 - \frac{\mu}{r_o}$$

Arribant així a:

$$\Delta V = \sqrt{V_{\infty}^2 + 2V_o^2} - V_o \quad (3.1)$$

4 | Codi

Per tal de poder resoldre les equacions definides en els apartats anteriors de forma ràpida i eficient, s'ha elaborat un codi *MATLAB*. A fi de simplificar el seu ús i la seva comprensió, el codi està dividit en diferents funcions amb una tasca definida i clara. Aquestes es detallen a continuació.

4.1 Programa principal *main.m*

```
1 %% Patched Conics. Interplanetary Trajectories.
2 % Authors:
3 %   - Silvia Gonzalez
4 %   - Laura Pla
5 %   - Josep Maria Serra Moncunill
6 %   - Boyan Naydenov
7 % Subject: Aerodynamics, Flight and Orbital Mechanics.
8 % Date: January 20th, 2018
9
10 %%
11 clear
12 clc
13
14 %% Data
15 mu = 1.3271741784e20;
16 dST = 149597870700;
17
18 %Venus data
19 a_V = 0.723330*dST;
20 e_V = 0.006772;
21 I_V = 3.3947;
22 RAAN_V = 76.6799;
23 AP_V = 54.8838;
24 MO_V = 50.4161;
25
26 %Earth data
```


Trajectòries Interplanetàries

```

27 a_E = 149598023000;
28 e_E = 0.0167086;
29 I_E = 0.00005;
30 RAAN_E = -11.26064;
31 AP_E = 114.20783;
32 M0_E = 358.617;
33
34 %Mars data
35 a_M = 227939200000;
36 e_M = 0.0934;
37 I_M = 1.850;
38 RAAN_M = 49.558;
39 AP_M = 286.502;
40 M0_M = 19.3564;
41
42 %Jupiter data
43 a_J = 7.7830e+11;
44 e_J = 0.048498;
45 I_J = 1.3033;
46 RAAN_J = 100.46;
47 AP_J = 273.866;
48 M0_J = 20.021;
49
50 % Time data
51 t0 = JulianDate(2000,1,1);
52 t1 = JulianDate(2020,7,19);
53 t2 = JulianDate(2021,1,25);
54 deltat = t2-t1;
55
56 % Distances, velocities and true anomalies (O:origin, D:destination)
57 [r1_O,v1_O,thetal_O] = OrbitalVectors (t1,mu,a_E,e_E,I_E,RAAN_E,AP_E,...
    M0_E,t0);
58 r1_O = r1_O/dST;
59 [r2_D,v2_D,theta2_D] = OrbitalVectors (t2,mu,a_M,e_M,I_M,RAAN_M,AP_M,...
    M0_M,t0);
60 r2_D = r2_D/dST;
61
62 %% Part 1: Heliocentric elliptic trajectory
63 [a_S, e_S, thetal, AP_S, I_S, RAAN_S] = orbita_interplanetaria(r1_O,r2_D...
    ,deltat);
64 E_S=acosd((e_S+cosd(thetal))/(1+e_S*cosd(thetal)));
65 M_S=E_S-e_S*sin(E_S);
66 a_S = a_S*dST;
67
68 %% Part 2: Exit. Geocentric Parking orbit and hyperbolic trajectory and ...
    deltaV
69 [r1,v1,thetal] = OrbitalVectors (t1,mu,a_S,e_S,I_S,RAAN_S,AP_S,M_S,t1);
70 v_inf1=v1-v1_O;
71 [hyperbolaExit, deltaV] = outHyperbola (v_inf1);
72

```

```

73 %% Part 3: Arrival. Geocentric hyperbolic trajectory and Parking orbit ...
    and deltaV
74 [r2,v2,theta2] = OrbitalVectors (t2,mu,a_S,e_S,I_S,RAAN_S,AP_S,M_S,t1);
75 v_inf2=v2-v2_D;
76
77 %% Part 4: Results Presentation
78 N=100;
79 A=2;
80 t=linspace(t1-A*deltat,t2+A*deltat,(2*A+1)*N);
81 r_O=zeros(1,(2*A+1)*N,3);
82 r_D=zeros(1,(2*A+1)*N,3);
83 r_S=zeros(1,N,3);
84 for i=1:(2*A+1)*N
85     [r_O(1,i,:),v_O,theta_O] = OrbitalVectors (t(i),mu,a_E,e_E,I_E,...
        RAAN_E,AP_E,M_O_E,t0);
86     [r_D(1,i,:),v_D,theta_D] = OrbitalVectors (t(i),mu,a_M,e_M,I_M,...
        RAAN_M,AP_M,M_O_M,t0);
87     if t(i)>=t1 && t(i)<=t2
88         [r_S(1,i-A*N,:),v1_S,theta1_S] = OrbitalVectors (t(i),mu,a_S,e_S...
            ,I_S,RAAN_S,AP_S,M_S,t1);
89     end
90 end
91 plot3(r_O(1,:,1),r_O(1,:,2),r_O(1,:,3),'b');
92 hold on
93 plot3(r_O(1,A*N:(A+1)*N,1),r_O(1,A*N:(A+1)*N,2),r_O(1,A*N:(A+1)*N,3),'-b...
    ','LineWidth',2);
94 hold on
95 plot3(r_D(1,:,1),r_D(1,:,2),r_D(1,:,3),'r');
96 hold on
97 plot3(r_D(1,A*N:(A+1)*N,1),r_D(1,A*N:(A+1)*N,2),r_D(1,A*N:(A+1)*N,3),'-r...
    ','LineWidth',2);
98 hold on
99 plot3(r_S(1,:,1),r_S(1,:,2),r_S(1,:,3),'-g','LineWidth',2);
100 axis equal;
101 ax.XAxisLocation = 'origin';
102 ax.YAxisLocation = 'origin';
103 ax.ZAxisLocation = 'origin';

```

4.2 Transfer Orbit *orbitainterplanetaria.m*

Funció que calcula els elements orbitals de l'òrbita de transferència. En cas que sigui el · líptica, els resultats s'obtenen gràcies a la funció *solve.m*. En canvi, si és hiperbòlica cal emprar una altra funció desenvolupada a continuació.

```

1 function [a, e, theta1, w, i, Omega] = orbita_interplanetaria(r1,r2,...
    deltat)

```

Trajèctories Interplanetàries

```

2 % Function that computes the orbital elements of the interplanetary
3 % trajectory
4
5 % OUTPUTS
6 % a: semi-major axis [AU]
7 % e: eccentricity
8 % thetal: true anomaly in t1 [deg]
9 % w: argument of periapsis [deg]
10 % i: inclination [deg]
11 % Omega: longitude of the ascending node [deg]
12
13 % INPUTS
14 % r1: heliocentric position of the probe in t2 [AU]
15 % r2: heliocentric position of the probe in t2 [AU]
16 % deltat: t2-t1 [days]
17
18 % Angle calculations
19 lambda1 = atan(r1(2)/r1(1)); % [rad]
20 lambda1 = checkTangent(lambda1,r1(2),r1(1));
21 lambda2 = atan(r2(2)/r2(1)); % [rad]
22 lambda2 = checkTangent(lambda2,r2(2),r2(1));
23 beta1 = asin(r1(3)/norm(r1)); % [rad]
24 beta2 = asin(r2(3)/norm(r2)); % [rad]
25
26 % Angle increments
27 deltalambda = wrapTo2Pi(lambda2-lambda1); % [rad]
28 deltatheta = acos(sin(beta1)*sin(beta2)+cos(beta1)*cos(beta2)*cos(...
    deltalambda)); % [rad]
29
30 % ELLIPTICAL ORBIT (Resolution of the system of equations)
31 syms e a thetal;
32 eqn1 = (norm(r2)-norm(r1))/(norm(r1)*cos(thetal)-norm(r2)*cos(thetal+...
    deltatheta))-e == 0;
33 eqn2 = norm(r1)*(1+e*cos(thetal))/(1-e^2)-a == 0;
34 eqn3 = 365.25*a^(3/2)*(2*atan(sqrt((1-e)/(1+e))*tan((thetal+deltatheta)...
    /2))-e*sqrt(1-e^2)*sin(thetal+deltatheta)/(1+e*cos(thetal+deltatheta)...
    )-2*atan(sqrt((1-e)/(1+e))*tan(thetal/2))+e*sqrt(1-e^2)*sin(thetal)...
    /(1+e*cos(thetal)))/(2*pi)-deltat == 0;
35 S = solve(eqn1,eqn2,eqn3);
36
37 e = double(S.e); % eccentricity
38 a = double(S.a); % semi-major axis
39 thetal = double(S.thetal); % true anomaly in t1 [rad]
40
41 % HYPERBOLIC ORBIT (Resolution of the system of equations)
42 if isreal(e)==0 || isreal(a)==0 || isreal(thetal)==0 || isempty(e)==1 ||...
    isempty(a)==1 || isempty(thetal)==1 || e>1 || e<-1
43     [e,a,thetal] = hyperbolic_orbit(r1,r2,deltat,deltatheta);
44 end
45

```

Trajectòries Interplanetàries

```

46 % Correction for negative excentricities
47 if e<0
48     e = -e;
49     thetal = thetal+pi;
50 end
51 thetal = wrapTo2Pi(thetal);
52
53 % Inclination calculation using spherical trigonometry
54 A = asin(cos(beta2)*sin(deltalambda)/sin(deltatheta)); % [rad]
55 A = checkTangent(A,cos(beta2)*sin(deltalambda),sin(deltatheta));
56 i = acos(sin(A)*cos(beta1)); % [rad]
57 l = asin(tan(beta1)/tan(i)); % [rad]
58
59 if i>pi/2
60     i = i-pi;
61 end
62
63 if beta1==0 && beta2<0 && i>0
64     i = -i;
65 end
66
67 if beta1<0 && l>0
68     l = -l;
69 end
70
71 sigma = atan(tan(beta1)/cos(A)); % [rad]
72 sigma = checkTangent(sigma,tan(beta1),cos(A));
73 Omega = lambda1-l; % [rad]
74 w = 2*pi-(thetal-sigma); % [rad]
75
76 if(i<0)
77     i = abs(i);
78     Omega = Omega+pi;
79     w = w+pi;
80 end
81
82 thetal = rad2deg(thetal); % [deg]
83 i = rad2deg(i); % [deg]
84 Omega = rad2deg(wrapTo2Pi(Omega)); % [deg]
85 w = rad2deg(wrapTo2Pi(w)); % [deg]
86
87 end

```

4.2.1 Hyperbolic transfer orbit *hyperbolicorbit.m*

Funció que implementa un mètode iteratiu per tal de calcular els elements orbitals d'una òrbita de transferència el·líptica. Cal destacar la importància d'escollir un valor inicial d'iteració

adequat, ja que sinó no s'obtenen resultats correctes.

```

1 function [e,a,theta] = hyperbolic_orbit(r1,r2,deltat,deltatheta)
2 % Function that computes the excentricity, the semimajor axis and the
3 % true anomaly of an hyperbolic orbit using an iterative algorithm
4
5 % OUTPUTS
6 % e: eccentricity
7 % a: semi-major axis [AU]
8 % theta: true anomaly in t1 [rad]
9
10 % INPUTS
11 % r1: heliocentric position of the probe in t2 [AU]
12 % r2: heliocentric position of the probe in t2 [AU]
13 % deltat: t2-t1 [days]
14 % deltatheta: increment of the true anomaly between t1 and t2 [rad]
15
16 resta = 1000;
17 d = 1e-6; % error
18 theta = pi/2-acos(dot(r1,r2)/(norm(r1)*norm(r2))); % initial value
19 if theta>deg2rad(-50)
20     theta = theta-deg2rad(10);
21 end
22 eant = 1000;
23
24 while(resta>d)
25
26     e = (norm(r2)-norm(r1))/(norm(r1)*cos(theta)-norm(r2)*cos(theta+...
27         deltatheta));
28     a = norm(r1)*(1+e*cos(theta))/(e^2-1);
29     delta = 365.25*a^(3/2)*(e*sqrt(e^2-1)*sin(theta+deltatheta)/(1+e*cos...
30         (theta+deltatheta))-log(abs((tan((theta+deltatheta)/2)+sqrt((e+1)...
31         /(e-1)))/(tan((theta+deltatheta)/2)-sqrt((e+1)/(e-1)))))-e*sqrt(e...
32         ^2-1)*sin(theta)/(1+e*cos(theta))+log(abs((tan(theta/2)+sqrt((e...
33         +1)/(e-1)))/(tan(theta/2)-sqrt((e+1)/(e-1))))))/(2*pi);
34
35     resta = abs(e-eant);
36     eant = e;
37
38     if resta>d
39         theta = theta+(deltat-delta)/10000;
40     end
41 end
42 end

```

4.3 Hipèrbola de sortida *outHyperbola.m*

Funció que calcula els paràmetres de la hipèrbola de sortida, així com el ΔV que se li ha d'aplicar a la nau.

```

1 function [hyperbolaExit, deltaV] = outHyperbola (v_inf)
2 % Function that gets Vinf and gives hyperbolic trajectory
3 % and the necessary deltaV
4
5 % OUTPUTS
6 % hyperbolaExit: orbital parameters of the hyperbola
7 % deltaV: Increment of velocity required to go from the parking orbit to
8 % the hyperbolic orbit [m/s]
9
10 % INPUT
11 % v_inf: planetocentric hyperbolic excess velocity [m/s]
12
13 %% DATA
14 R_e = 6.3782e+03; % [km]
15 mu_sun = 1.3271741784e20;
16 mu_e = 3.9820e+14; %SI
17
18 %% parkingOrbit
19 h = 800000; %height [m]
20 ro = R_e*1000 + h;
21 Vo = sqrt(mu_e/ro); % velocity in the parking orbit
22
23 %% deltaV
24 Vinf = norm(v_inf);
25 deltaV = sqrt(Vinf^2+2*Vo^2)-Vo;
26
27 %% hyperbolic path
28 hyperbolaExit.a = mu_e/(Vinf^2); % semi-major axis
29 hyperbolaExit.e = 1 + (Vinf/Vo)^2; % eccentricity
30 hyperbolaExit.beta = acosd(1/hyperbolaExit.e); % hyperbolic angle
31 hyperbolaExit.b = hyperbolaExit.a*sqrt(hyperbolaExit.e^2-1); % Impact ...
    parameter (semi-minor axis)
32 end

```

4.4 Posició i velocitat *OrbitalVectors.m*

Càlcul dels vectors de posició i velocitat en funció dels elements orbitals.

```

1 function [r,v,theta] = OrbitalVectors (t,mu,a,e,I,RAAN,AP,M0,t0)

```

Trajectòries Interplanetàries

```

2 % Function that computes the position vector (r), the velocity vector
3 % (v) and the true anomaly (theta) for a given orbital parameters
4
5 % OUTPUTS
6 % r: position vector of the orbiting object in the same system of
7 % reference as the orbital parameters [m]
8 % v: velocity vector of the orbiting object in the same system of
9 % reference as the orbital parameters [m/s]
10 % theta: true anomaly [deg]
11
12 % INPUTS
13 % t: time at which to compute the outputs in JD [days]
14 % mu: gravitational constant multiplied by the mass of the central body
15 % (G*M) [N*m^2/kg^2]
16 % a: semi-major axis [m]
17 % e: eccentricity
18 % I: inclination [deg]
19 % RAAN: right ascension of the ascending node [deg]
20 % AP: argument of the perigee [deg]
21 % M0: mean anomaly at a reference time [deg]
22 % t0: reference time in JD [days]
23
24 I=deg2rad(I); %Inclination [rad]
25 RAAN=deg2rad(RAAN); %Right ascension of the ascending node [rad]
26 AP=deg2rad(AP); %Argument of the perigee [rad]
27 M0=deg2rad(M0); %Mean anomaly at reference time t0 [rad]
28 t=t*24*3600; %Time [s]
29 t0=t0*24*3600; %Reference time [s]
30
31 T=sqrt(4*pi^2*a^3/mu); %Period [s]
32 n=2*pi/T; %Mean motion [rad/s]
33 M=M0+n*(t-t0); %Mean anomaly [rad]
34 M=wrapTo2Pi(M); %Mean anomaly between 0 and 2pi
35 if M>pi
36     M=M-2*pi; %Correction for the hyperbolic equations
37 end
38
39 E0=M+e*sin(M); %Initial eccentric anomaly
40 error=1e-8;
41 if e<1 %Elliptic case
42     p=a*(1-e^2); %Conic parameter
43     E=1;
44     while abs(E-E0)>error %Newton-Rapson
45         E=E0+(M-E0+e*sin(E0))/(1-e*sin(E0));
46         E0=E;
47     end
48     theta=2*atan(sqrt((1+e)/(1-e))*tan(E/2)); %True anomaly
49     r_mod=a*(1-e*cos(E)); %Modulus of the position vector
50 else %Hyperbolic case
51     p=a*(e^2-1); %Conic parameter

```

Trajectòries Interplanetàries

```

52     if e<1.6
53         if M<=pi
54             F0=M+e; %Initial hyperbolic anomaly
55         else
56             F0=M-e; %Initial hyperbolic anomaly
57         end
58     else
59         if e<3.6 && M>pi
60             F0=M-e; %Initial hyperbolic anomaly
61         else
62             F0=M/(e-1); %Initial hyperbolic anomaly
63         end
64     end
65     F=1;
66     while abs(F-F0)>error %Newton Rapson
67         F=F0+(M-e*sinh(F0)+F0)/(e*cosh(F0)-1);
68         F0=F;
69     end
70     theta=2*atan(sqrt((e+1)/(e-1))*tanh(F/2)); %True anomaly
71     r_mod=a*(e*cosh(F)-1); %Modulus of the position vector
72 end
73
74 %Rotation coefficients
75 Px=cos(RAAN)*cos(AP)-sin(RAAN)*cos(I)*sin(AP);
76 Py=sin(RAAN)*cos(AP)+cos(RAAN)*cos(I)*sin(AP);
77 Pz=sin(I)*sin(AP);
78 Qx=-cos(RAAN)*sin(AP)-sin(RAAN)*cos(I)*cos(AP);
79 Qy=-sin(RAAN)*sin(AP)+cos(RAAN)*cos(I)*cos(AP);
80 Qz=sin(I)*cos(AP);
81 Wx=sin(RAAN)*sin(I);
82 Wy=-cos(RAAN)*sin(I);
83 Wz=cos(I);
84 P=[Px ; Py ; Pz]; %Rotation vector for x_orb
85 Q=[Qx ; Qy ; Qz]; %Rotation vector for y_orb
86
87 r=r_mod*(cos(theta)*P+sin(theta)*Q); %Distance vector
88 v=sqrt(mu/p)*(-sin(theta)*P+(e+cos(theta))*Q); %velocity vector
89 end

```

4.5 Data Juliana *JulianDate.m*

S'aplica l'algoritme de conversió de data Gregoriana a data Juliana vist a classe [2, pàg.48].

```

1 function JDN=JulianDate(year,month,day)
2 % Function that computes the Julian Date of a given Gregorian date
3

```


Trajectòries Interplanetàries

```

4 % OUTPUT
5 % JDN: Julian Date
6
7 % INPUT
8 % year: year (Gregorian calendar)
9 % month: month (Gregorian calendar)
10 % day: day (Gregorian calendar)
11
12 a = floor((14 - month) / 12);
13 y = year + 4800 - a;
14 m = month + 12*a - 3;
15
16 JDN = day + floor((153*m + 2)/5) + 365*y + floor(y/4) - floor(y/100) + ...
    floor(y/400) - 32045;
17 end

```

4.6 Correcció d'angles *checkTangent.m*

Aquesta funció simplement s'encarrega de rebre un quocient i, segons el signe, decidir en quin quadrant situar l'angle que s'obté en calcular l'arc tangent.

```

1 function angle = checkTangent(result,num,den)
2 % Function that rectifies the angle obtained with atan() as a function
3 % of the numerator and the denominator
4
5 % OUTPUT
6 % angle: rectified angle [rad]
7
8 % INPUTS
9 % result: angle obtained with atan() [rad]
10 % num: numerator
11 % den: denominator
12
13 if den<0 && num>0
14     % second quadrant
15     angle = pi + result;
16 elseif den<0 && num<0
17     % third quadrant
18     angle = result + pi;
19 else
20     angle = result;
21 end
22 end

```

5 | Resultats

En els apartats següents es detallen els resultats obtinguts per diversos casos amb el codi presentat en el capítol 4. Aquests casos són d'índole molt diversa, per tal de poder estudiar el comportament del programa en diferents exemples.

Com es pot veure, s'han calculat les òrbites de transferència entre diferents planetes d'origen i destí. En aquests càlculs s'han emprat tan òrbites el·líptiques com hiperbòliques en funció del que era possible. Per cada cas s'ha calculat la posició del planeta d'origen (i de la sonda) en l'instant de sortida $\vec{r}_O(t_1)$ i la posició del planeta de destí (i de la sonda) en l'instant d'arribada $\vec{r}_D(t_2)$, així com els elements orbitals de l'òrbita de transferència.

En el cas de les òrbites el·líptiques, també s'han calculat les velocitats heliocèntriques de sortida $\vec{v}_s(t_1)$ i d'arribada $\vec{v}_s(t_2)$ de la sonda en els instants de temps corresponents. A més a més, s'han obtingut les velocitats planetocèntrica de sortida de l'EdI \vec{v}_∞ i, finalment, l'impuls Δv necessari que cal donar a la sonda perquè abandoni l'òrbita d'escapament i iniciï el viatge interplanetari.

5.1 Cas de la Terra a Mart

- Sortida: $t_1 = 2020$ Juliol 19

$$\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} 0.4797 & -0.8958 & 0.0000 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} 29.2061 & 15.0177 & 0.8220 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_1} = \begin{bmatrix} 3.4299 & 1.0667 & 0.8220 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\Delta v = 3.71102 \text{ km/s}$$

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 190$ dies

$$\Delta \lambda = 141.693^\circ$$

$$\Delta \theta = 141.684^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.33073 AU	0.23629	359.613°	0.387°	1.434°	296.515°

Taula 5.1: Elements orbitals del primer cas resolt

- Arribada: $t_2 = 2021$ Gener 25

$$\vec{r}_M(t_2) = \begin{bmatrix} 0.3060 & 1.5107 & 0.0241 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} -20.3937 & 8.3428 & -0.3636 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_2} = \begin{bmatrix} 2.4337 & 1.4755 & -1.0686 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

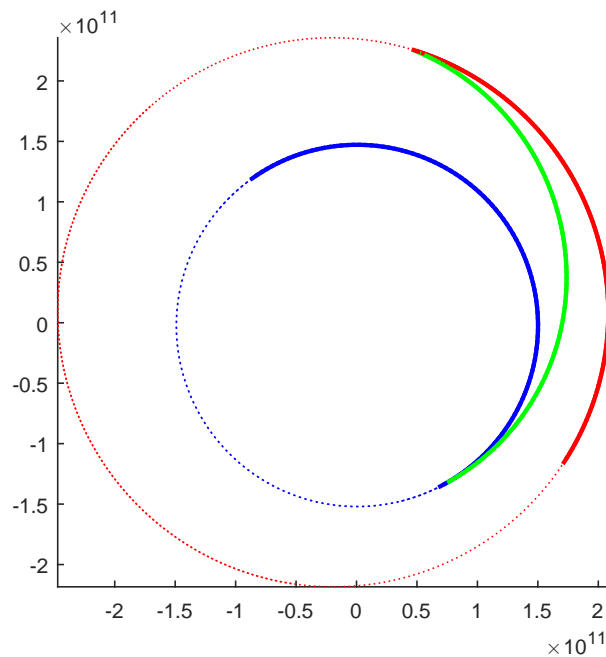


Figura 5.1: Òrbita interplanetària del primer cas resolt

5.2 Cas de Mart a Júpiter

- Sortida: $t_1 = 2026$ Juny 05

$$\vec{r}_M(t_1) = \begin{bmatrix} 1.3247 & 0.5006 & -0.0221 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} -13.5814 & 28.1939 & -4.1235 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_1} = \begin{bmatrix} -5.9464 & 3.4595 & -4.8294 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\Delta v = 6.0278 \text{ km/s}$$

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 1055$ dies

$$\Delta \lambda = 182.835^\circ$$

$$\Delta \theta = 177.141^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
3.45405 AU	0.59043	356.872°	176.203°	7.508°	207.127°

Taula 5.1: Elements orbitals del segon cas resolt

- Arribada: $t_2 = 2029$ Abril 25

$$\vec{r}_J(t_2) = \begin{bmatrix} -5.0246 & -2.1122 & 0.1211 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} 0.9891 & -8.2071 & 1.0222 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_2} = \begin{bmatrix} -3.9190 & 3.2311 & 1.0847 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

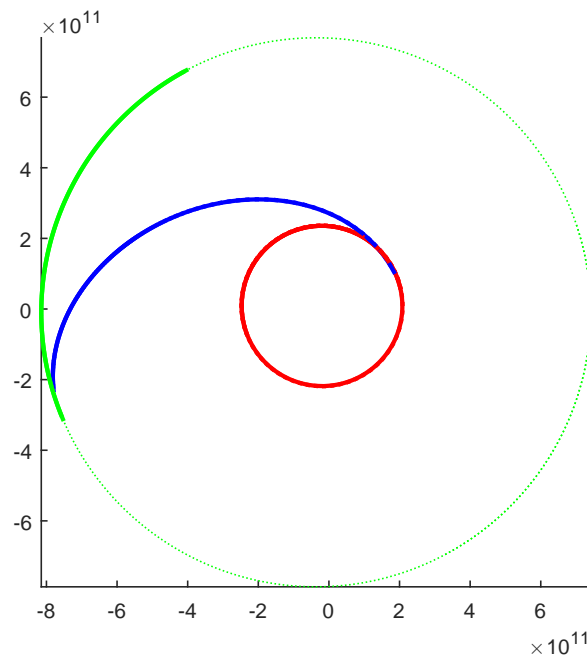


Figura 5.1: Òrbita interplanetària del segon cas resolt

5.3 Cas de la Terra a Mart

- Sortida: $t_1 = 2020$ Març 06

$$\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} -0.9684 & 0.2176 & 0.0000 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 95$ dies

$$\Delta\lambda = 135.697^\circ$$

$$\Delta\theta = 135.670^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
71.33848 AU	1.01109	306.690°	233.310°	2.514°	345.607°

Taula 5.1: Elements orbitals del tercer cas resolt

- Arribada: $t_2 = 2020$ Juny 09

$$\vec{r}_M(t_2) = \begin{bmatrix} 0.7378 & -1.1916 & -0.0431 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

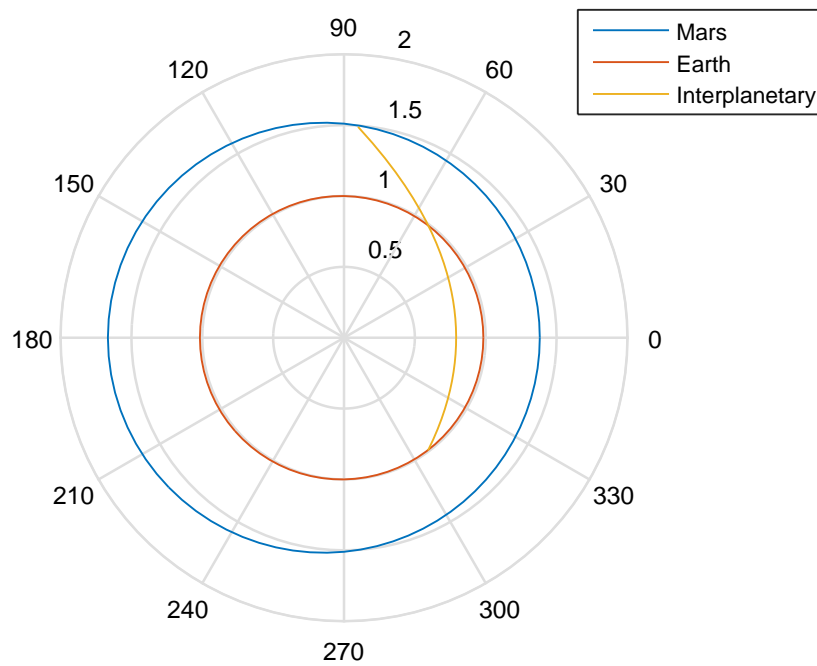


Figura 5.1: Òrbita interplanetària del tercer cas resolt

5.4 Cas 1 de Mart a Júpiter

- Sortida: $t_1 = 2037$ Octubre 25

$$\vec{r}_M(t_1) = \begin{bmatrix} 1.0628 & 0.9973 & -0.0052 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} -21.4616 & 17.6853 & 0.6145 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_1} = \begin{bmatrix} -5.8071 & -2.0496 & -0.1839 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\Delta v = 4.7546 \text{ km/s}$$

- Òrbita interplanetària: $\Delta t =$ dies

$$\Delta \lambda = 121.960^\circ$$

$$\Delta \theta = 121.957^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
3.87684 AU	0.64755	32.516°	317.644°	1.267°	52.502°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 1

- Arribada: $t_2 = 2039$ Octubre 15

$$\vec{r}_J(t_2) = \begin{bmatrix} -5.2121 & 1.4740 & 0.1105 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} -8.6037 & -6.1586 & 0.0680 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_2} = \begin{bmatrix} -4.8918 & 5.8075 & -0.0644 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

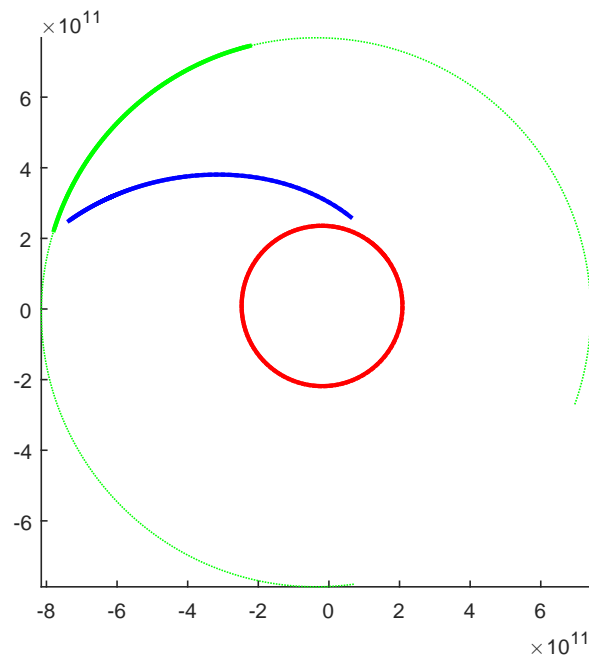


Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 1

5.5 Cas 2 de la Terra a Mart

- Sortida: $t_1 = 2033$ Març 13

$$\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} -0.9890 & 0.1028 & 0.0000 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} 9.9048 & -31.9421 & -1.1405 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_1} = \begin{bmatrix} 13.4689 & -2.2007 & -1.1405 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\Delta v = 9.8291 \text{ km/s}$$

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 145$ dies

$$\Delta \lambda = 126.666^\circ$$

$$\Delta \theta = 126.647^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.34585 AU	0.26502	347.845°	192.155°	2.154°	352.263°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 2

- Arribada: $t_2 = 2033$ Agost 05

$$\vec{r}_M(t_2) = \begin{bmatrix} 0.6911 & -1.2225 & -0.0426 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} 20.3889 & 10.7059 & 0.5023 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_2} = \begin{bmatrix} -1.6222 & -3.2966 & 0.7500 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

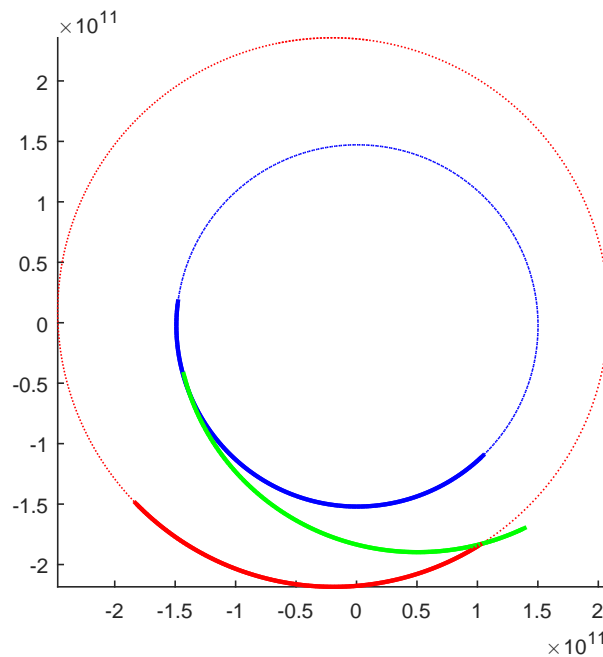


Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 2

5.6 Cas 3 de la Terra a Mart

- Sortida: $t_1 = 2031$ Gener 23

$$\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} -0.5527 & 0.8145 & 0.0000 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} -27.9432 & -17.5505 & 1.3211 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_1} = \begin{bmatrix} -2.8084 & -0.7119 & 1.3212 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\Delta v = 3.5559 \text{ km/s}$$

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 190$ dies

$$\Delta \lambda = 148.092^\circ$$

$$\Delta \theta = 148.071^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.24568 AU	0.20996	1.674°	358.471°	2.293°	122.188°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 3

- Arribada: $t_2 = 2031$ Agost 01

$$\vec{r}_M(t_2) = \begin{bmatrix} 0.0231 & -1.4528 & -0.0310 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} 22.3536 & -2.8628 & -0.6964 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_2} = \begin{bmatrix} -2.7906 & -5.3291 & -0.1299 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

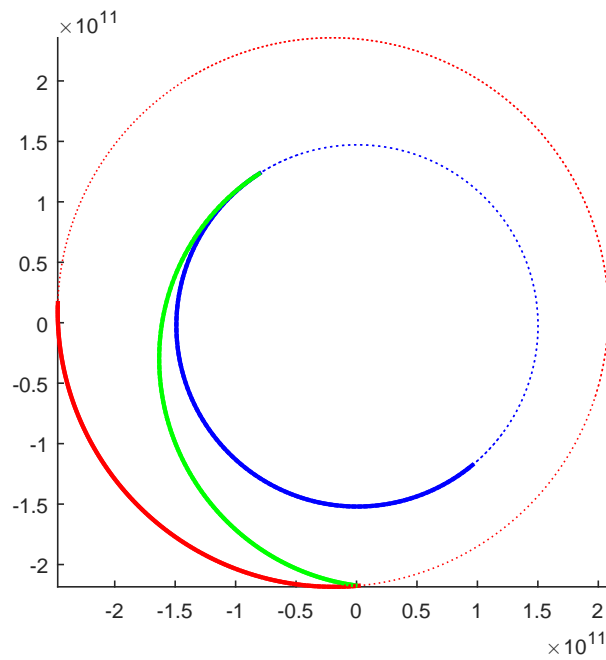


Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 3

5.7 Cas 4 de la Terra a Mart

- Sortida: $t_1 = 2025$ Juliol 18

$$\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} 0.4609 & -0.9057 & 0.0000 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} 23.7170 & 8.0146 & -0.2439 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_1} = \begin{bmatrix} 5.0303 & 30.9264 & -0.2439 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\Delta v = 25.6087 \text{ km/s}$$

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 95$ dies

$$\Delta \lambda = 308.176^\circ$$

$$\Delta \theta = 51.825^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.07039 AU	0.46551	112.076°	67.350°	0.563°	115.868°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 4

- Arribada: $t_2 = 2025$ Octubre 21

$$\vec{r}_M(t_2) = \begin{bmatrix} -0.6676 & -1.3608 & -0.0121 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} 2.1862 & 17.3824 & -0.0938 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_2} = \begin{bmatrix} -20.4827 & 25.9781 & 0.6436 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

5.8 Cas 5 de la Terra a Venus

- Sortida: $t_1 = 2023$ Maig 27

$$\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} -0.3986 & -0.9317 & 0.0000 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} 23.5396 & -11.9653 & -0.7732 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_1} = \begin{bmatrix} -3.3635 & -0.1365 & -0.7731 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\Delta v = 3.6369 \text{ km/s}$$

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 158$ dies

$$\Delta \lambda = 202.000^\circ$$

$$\Delta \theta = 157.992^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
0.86221 AU	0.23212	147.050°	32.950°	1.678°	65.165°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 5

- Arribada: $t_2 = 2023$ Novembre 01

$$\vec{r}_V(t_2) = \begin{bmatrix} 0.0215 & 0.7194 & 0.0086 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} -34.9238 & 17.3219 & 1.1418 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_2} = \begin{bmatrix} 0.2017 & 16.4570 & -0.8976 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

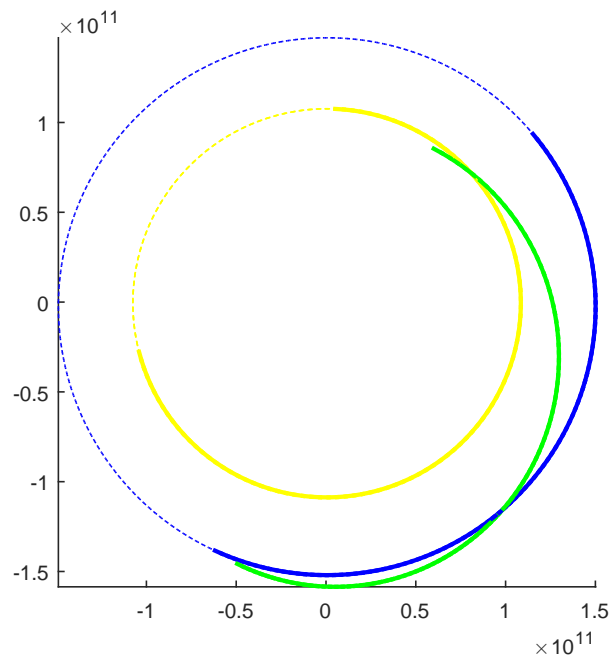


Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 5

5.9 Cas 6 de Mart a la Terra

- Sortida: $t_1 = 2033$ Gener 18

$$\vec{r}_M(t_1) = \begin{bmatrix} -1.5798 & -0.4008 & 0.0304 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} -3.4918 & -19.9512 & 0.5779 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_1} = \begin{bmatrix} -10.3564 & 1.4666 & 1.1954 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\Delta v = 7.4443 \text{ km/s}$$

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 222$ dies

$$\Delta \lambda = 140.675^\circ$$

$$\Delta \theta = 140.663^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.31415 AU	0.24918	191.345°	207.993°	1.696°	154.559°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 6

- Arribada: $t_2 = 2033$ Agost 28

$$\vec{r}_T(t_2) = \begin{bmatrix} 0.9246 & -0.4059 & 0.0000 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} 25.3126 & 14.6475 & -0.7136 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_2} = \begin{bmatrix} 13.8240 & -12.5180 & -0.7137 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

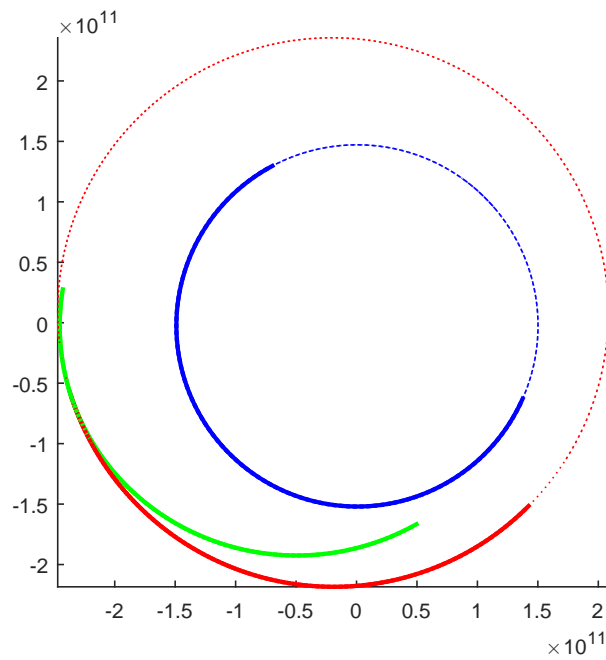


Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 6

5.10 Cas 7 de Mart a la Terra

- Sortida: $t_1 = 2030$ Novembre 20

$$\vec{r}_M(t_1) = \begin{bmatrix} -1.4214 & 0.8647 & 0.0531 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} -13.0320 & -14.8691 & 0.7226 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_1} = \begin{bmatrix} -1.3512 & 3.7651 & 0.8259 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\Delta v = 3.8493 \text{ km/s}$$

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 228$ dies

$$\Delta \lambda = 134.956^\circ$$

$$\Delta \theta = 134.927^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.31613 AU	0.26617	184.700°	220.499°	2.572°	103.210°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 7

- Arribada: $t_2 = 2031$ Juliol 06

$$\vec{r}_T(t_2) = \begin{bmatrix} 0.2640 & -0.9818 & 0.0000 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

$$\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} 30.9612 & 26.0696 & -1.3808 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

$$\vec{v}_{\infty_2} = \begin{bmatrix} 2.6783 & -5.0153 & -1.3808 \end{bmatrix} \text{ km/s}$$

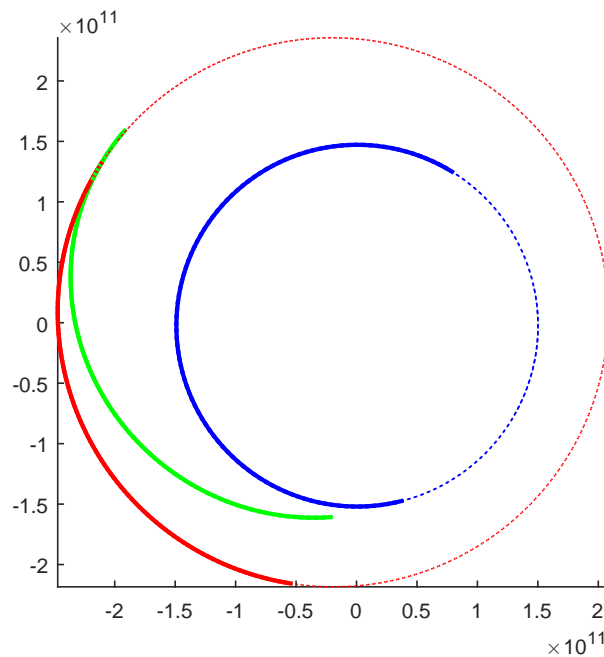


Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 7

5.11 Cas 8 de la Terra a Mart

- Sortida: $t_1 = 2021$ Novembre 26

$$\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} 0.4106 & 0.8971 & 0.0000 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 85$ dies

$$\Delta\lambda = 198.239^\circ$$

$$\Delta\theta = 161.735^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.34032 AU	1.44253	288.926°	251.074°	3.166°	243.635°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 8

- Arribada: $t_2 = 2022$ Febrer 19

$$\vec{r}_M(t_2) = \begin{bmatrix} -0.1973 & -1.4584 & -0.0257 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

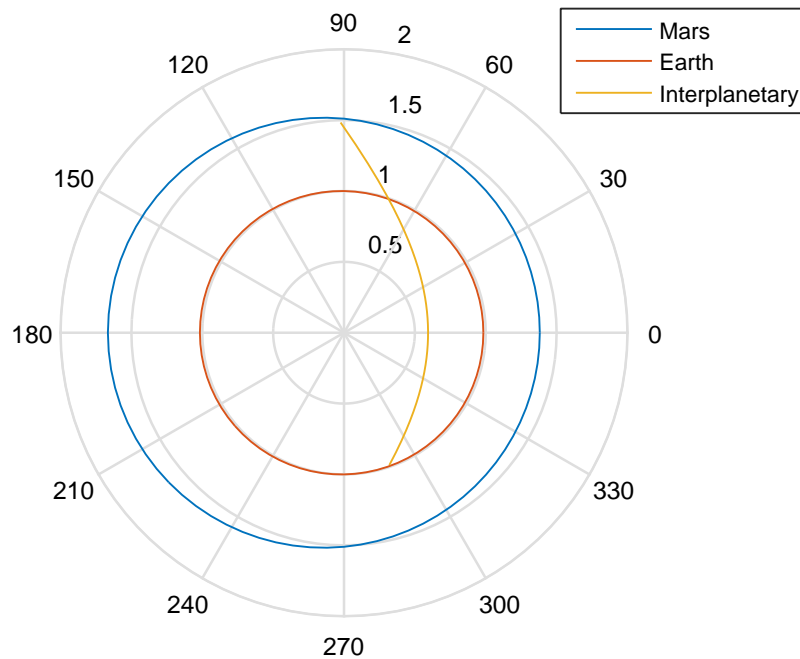


Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 8

5.12 Cas 9 de la Terra a Mart

- Sortida: $t_1 = 2022$ Gener 15

$$\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} -0.4355 & 0.8821 & 0.0000 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 95$ dies

$$\Delta\lambda = 182.508^\circ$$

$$\Delta\theta = 176.966^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
5.10048 AU	1.11071	280.991°	259.009°	34.288°	294.501°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 9

- Arribada: $t_2 = 2022$ Abril 20

$$\vec{r}_M(t_2) = \begin{bmatrix} 0.6495 & -1.2481 & -0.0421 \end{bmatrix} \text{ AU}$$

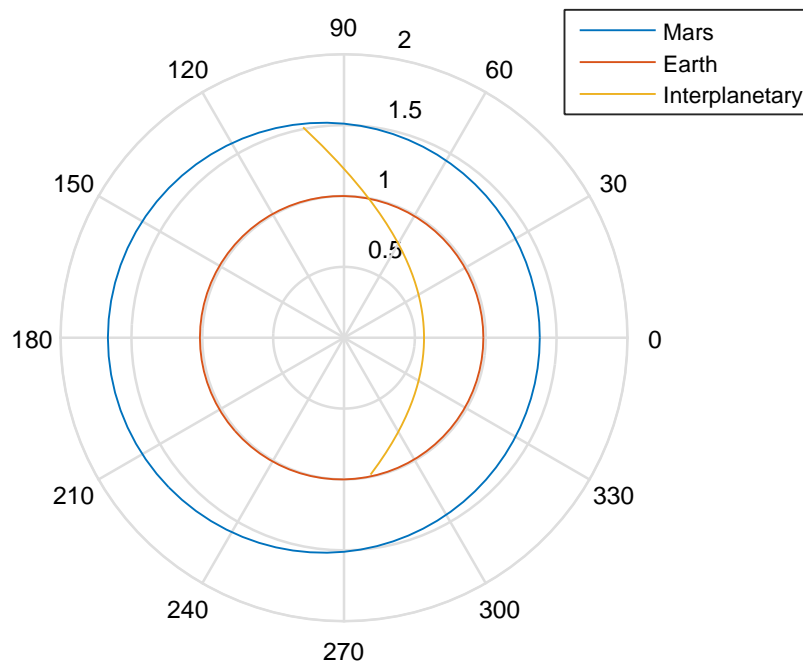


Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 9

6 | Conclusions

Ens vam decidir pel treball de càlcul de trajectòries interplanetàries des del primer moment degut a que és un tema que realment ens apassiona. Vivim en una època en què l'arribada a Mart és imminent. Això ens anima a pensar que encara es pot anar més lluny, però per això cal saber com arribar-hi.

No obstant, el càlcul de trajectòries interplanetàries no és una tasca fàcil, per això s'empren diverses aproximacions. El mètode de *Patched Conics Approximation* és un molt útil per a obtenir una primera aproximació de l'òrbita que ha de seguir una sonda per viatjar d'un planeta a un altre. Tanmateix, els resultats no són exactes, ja que es tracta d'un mètode numèric i es basa en aproximacions.

Com es pot veure en els resultats obtinguts, alguns valors es desvien de la solució aportada pel professor. Aquesta variació s'explica perquè des dels primers càlculs els resultats que s'obtenen no són 100% iguals als de referència. És a dir, s'observa que una petita variació en els vectors de posició comporta una gran variació en els angles d'Euler. No obstant, es pot afirmar que els resultats que s'han obtingut són satisfactoris ja que, tot i no ser exactes, són coherents i s'aproximen a la solució real.

En quant a la distribució del treball, aquest s'ha dividit en petites funcions que s'han repartit entre els diferents membres de l'equip. Un cop elaborada, cada funció s'ha intentat validar de forma independent a la resta del codi. D'aquesta forma és més fàcil trobar possibles errors i s'assegura que el programa global és funcional i robust.

Finalment, a fi de ser el més eficients possible, s'ha emprat un sistema de control de versions *Git*, per així poder treballar simultàniament sobre els mateixos arxius sense perdre cap informació.

Així doncs, s'ha aconseguit combinar la nostra passió pel tema amb una bona organització. Això ha ajudat a que poguéssim gaudir alhora que apreníem molt amb el tema escollit.

7 | Bibliografia

- [1] BATTIN, R. H. *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. 1999.
- [2] CALAF, J. 1. Sistemes de referència. *Teoria de màster UPC* (2017).
- [3] CALAF, J. 2. Moviment orbital keplerià. *Teoria de màster UPC* (2017).
- [4] CALAF, J. 4. Maniobres orbitals bàsiques. *Teoria de màster UPC* (2017).
- [5] CALAF, J. 5. Trajectòries interplanetàries i lunars. *Teoria de màster UPC* (2017).
- [6] CALAF, J. A. Repàs de Matemàtiques. *Teoria de màster UPC* (2017).
- [7] CALAF, J. A. Treballs de Mecànica Orbital. *Teoria de màster UPC* (2017).
- [8] VALLADO, D. A. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. 1998.