Jaume Calaf, Departament de Física, ESEIAAT, UPC
[20 de desembre de 2017]

Treballs de MO$^{(vp)}$

Sobre els treballs en equip.

Exemples de temes.

Treballs en equip (ASSIGNMENT).

- Els treballs es fan en equips de 2, 3 o 4 persones.
- Tipus de treballs: el tema és de lliure elecció d'entre els que proposo després.

  Pel que fa a l'extensió i profunditat es deixa a la voluntat (i al sentit comú!) de cada equip.
- Tots els treballs s'han de presentar com una carpeta comprimida amb:
  - Un fitxer pdf amb l'explicació "completa" del treball (títol, objectius, explicació teòrica, referències i, si s'han fet càlculs numèrics i/o gràfiques, els resultats més importants i les conclusions).

    Com que aquest treball és docent, no escatimeu les explicacions ni les referències.
  - Els altres fitxers necessaris per entendre i avaluar el treball: programes, càlculs intermedis, etc.

- Un dels autors ha d'enviar el treball a: `jaume.calaf@upc.edu`
  amb l'"assumpte": `TREBALL-MECANICA-ORBITAL`
  adjuntant la carpeta comprimida (tipus zip) amb la informació.
  La carpeta s'ha de dir: `Treball-MO-2017des(C1-C2-C3-..)`,
  on `C1-C2-C3-...` són el primer cognom de cada membre de l'equip.
  Quan hagi descomprimit el zip us respondré el missatge amb un "OK Rebut".
- Si hi ha alguna pregunta o aclaració que m'hagi de fer l'equip i ja s'ha acabat el curs, la faré per e-mail al membre que m'ha enviat el treball i aquest, si cal, es posarà en contacte amb els altres.
- No hi ha una data límit concreta (però s'haurien d'haver lliurat, com a màxim, uns 10 dies abans de les notes definitives de l'assignatura).
- Per a la nota es valorarà tot una mica. En funció del tema: els resultats, la claretat de la presentació en el pdf, la recerca d'informació i de casos reals, etc.

Exemples de temes per al treball.

A continuació proposo una llista de possibles temes.
Tot és flexible, és a dir, es pot variar, reduir o ampliar segons els gustos i el temps que vulgui dedicar-hi cada equip.

Tota la teoria/formulació per fer aquests treballs (aquesta és la intenció) està en els apunts.

De totes formes, si teniu qualsevol dubte, envieu-me un correu.

A) Sense integració: Sobre trajectòries d'ICBM

(amb Terra esfèrica en rotació, però sense atmosfera)

A$_1$) S'ha de fer un programa que donats dos punts de la "superfície" de la Terra i considerant la rotació d'aquesta, trobi, per a diferents velocitats inicials de sortida dels ICBM, els angles d'elevació i els azimuts corresponents, així com el temps de vol, altitud màxima i la sensibilitat a les condicions inicials.

A$_2$) Un radar que es troba a una latitud, longitud i altitud conegudes $(\phi, \lambda, \hbar)$ detecte en un instant determinat t_0 un ICBM que s'està desplaçant. Si a t_0, el radar dóna la posició i la velocitat topocèntriques de l'ICBM, és a dir, distància radial ρ radar-ICBM, l'azimut nord a_n i l'elevació o altura h, i les seves derivades $\dot{\rho}$, $\dot{a}_n$ i $\dot{h}$, trobeu, en primer lloc, les coordenades cartesianes geocèntriques de l'ICBM, després els seus elements orbitals i, finalment, en quin instant i on impactarà, així com d'on ha sortit.

(B) Amb integració numèrica: Pertorbacions de curt període de J_2

B$_1$) Efectes de curt i de llarg període de J_2 sobre els elements orbitals.

Efectes seculars: comprovació dels resultats analítics.

B$_2$) Complement de l'anterior: estudi dels efectes de curt període de J_2.

Per això s'ha de fer una estimació de l'error màxim en les coordenades horitzontals observades (a, h, ρ) des d'una estació de seguiment situada a $(\phi, \lambda, \bar{h})$, després de comparar amb les (a, h, ρ) calculades sense integració considerant només les fórmules que donen el creixement secular de ω, Ω i M_0.

Feu aquests estudis per a diversos conjunts d'elements, diversos llocs i durant 24, 48 i 96 hores.

($\mathbf{C}_1$) Amb integració numèrica: Pertorbacions dels satèl·lits geoest per C_{22}

Estudi dels efectes de C_{22} i S_{22} en els satèl·lits geoestacionaris segons la longitud on estan nominalment situats.

L'acceleració[1] $(a_r,\, a_\delta,\, a_\lambda)$ a la qual està sotmés el satèl·lit és la següent :

$$\begin{aligned}
a_r + \frac{\mu}{r^2} &= -\frac{\mu R_e^2}{r^4}\left[\frac{3}{2}C_{20}(3\,\mathrm{sen}^2\,\delta - 1) + 9\cos^2\delta\big(C_{22}\cos 2\lambda + S_{22}\,\mathrm{sen}\,2\lambda\big)\right] \\
a_\delta &= -\frac{\mu R_e^2}{r^4}\cdot\frac{3}{2}\,\mathrm{sen}\,2\delta\Big[C_{20} - 2\big(C_{22}\cos 2\lambda + S_{22}\,\mathrm{sen}\,2\lambda\big)\Big] \\
a_\lambda &= -\frac{\mu R_e^2}{r^4}\cdot 6\cos\delta\,\big(-C_{22}\,\mathrm{sen}\,2\lambda + S_{22}\cos 2\lambda\big)
\end{aligned}$$

amb els coeficients: $C_{20} = \sqrt{5}\,\overline{C}_{20} = J_2 = -10826.27 \times 10^{-7}$,

$C_{22} = \sqrt{5/12}\,\overline{C}_{22} = +15.7446 \times 10^{-7}$, $S_{22} = \sqrt{5/12}\,\overline{S}_{22} = -9.0380 \times 10^{-7}$

No oblideu que aquesta acceleració s'ha de passar a coordenades rectangulars ECI amb l'eix x orientat cap a Àries, com s'ha vist al Tema 3.

[1] Repasseu tot: l'expressió, els coeficients, els signes!

(C_2) Amb integració numèrica: Pertorbacions dels satèl·lits geoest per la LLuna

Es tracta de fer càlculs orientatius; per ex., es pot prendre l'òrbita de la Lluna com a circular, amb diferents inclinacions respecte de l'equador de la Terra (recordeu que oscil·la entre 18.3° i 28.6° en 18.6 anys). Amb la notació habitual:

$\vec{r}$: Terra→Satèl·lit; $\vec{\rho}$: Satèl·lit→Lluna; $\vec{R}$: Terra→Lluna i $\mu_\ell = \mu/81.301$

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \mu_\ell \left(\frac{\vec{\rho}}{\rho^3} - \frac{\vec{R}}{R^3} \right)$$

Com que l'efecte és petit s'ha d'integrar per a un interval de bastants mesos: vigileu amb els errors de la integració numèrica. Feu un seguiment de cóm l'òrbita del satèl·lit es va distanciant lentament de la geoestacionària.

Es pot fer el mateix amb el Sol (més fàcil i més realista). L'efecte és més petit que el que fa la Lluna.

(D) Sense integració numèrica: trajectòries interplanetàries.

Donades les posicions rectangulars eclíptiques de dos planetes en dos instants coneguts, trobeu una trajectòria que porti una nau, en un sol impuls inicial, del primer al segon planeta en els instants previstos.

Per això,calculeu els elements eclíptics de l'òrbita de transferència

i les velocitats heliocèntriques de sortida i arribada, etc.

(Per trobar les velocitats planetocèntriques —que són molt importants—

necessiteu les velocitats dels planetes, però no les dono aquí.)

A continuació s'exposen uns casos resolts (com s'explica als apunts)

i, després, uns quants casos per resoldre.

Les dates de sortida i arribada s'han triat perquè es puguin fer els càlculs bé.

Cas de la Terra a Mart (resolt):

- Sortida: t_1 =2020 Jul 19, Arribada: t_2 =2021 Gen 25, $\Delta t = 190$ dies
  - Sortida i Arribada, AU: $\Delta\lambda_0 = 29.837^\circ$, $\Delta\theta_0 = 141.683^\circ$

    $\vec{r}_T(t_1) = (0.4537, \;\; -0.9094, \;\; 0.0000)$

    $\vec{r}_M(t_2) = (0.3148, \;\; 1.5078, \;\; 0.0239)$

  - COMPROVEU QUE: Elements eclíptics de la transferència

$$a = 1.33069 \text{ AU}, \quad e = 0.23629, \quad \theta_0 = 359.621^\circ$$

$$\omega = 0.470^\circ, \quad i = 1.435^\circ, \quad \Omega = 296.424^\circ$$

Velocitats heliocèntriques sonda a la sortida i a l'arribada, km/s:

$\vec{v}_s(t_1) = (29.3678, \;\; 14.6982, \;\; 0.8229)$

$\vec{v}_s(t_2) = (20.4069, \;\; 8.2771, \;\; 0.3656)$

Cas de Mart a Júpiter (resolt):

- Sortida: t_1 =2026 Juny 05, Arribada: t_2 =2029 Abril 25, $\Delta t = 1055$ dies
  - Sortida i Arribada, AU: $\Delta\lambda_0 = 101.387°$, $\Delta\theta_0 = 182.859°$

    $\vec{r}_M(t_1) = (1.3277,\ \ 0.4901,\ \ 0.0223)$

    $\vec{r}_J(t_2) = (5.0135,\ \ 2.1380,\ \ 0.0505)$

  - COMPROVEU QUE: Elements eclíptics de la transferència

$$a = 3.45403 \text{ AU}, \quad e = 0.59218, \quad \theta_0 = 350.769°$$

$$\omega = 182.312°, \quad i = 7.513°, \quad \Omega = 207.121°$$

Velocitats heliocèntriques sonda a la sortida i a l'arribada, km/s:

$\vec{v}_s(t_1) = (12.5324,\ \ 28.6817,\ \ 4.1200)$

$\vec{v}_s(t_2) = (1.9715,\ \ 7.9799,\ \ 1.0552)$

Cas de la Terra a Mart (hiperbòlic, resolt):

- Sortida: t_1 =2020 Mar 06, Arribada: t_2 =2020 Jun 09, $\Delta t = 95$ dies
  - Sortida i Arribada, AU: $\Delta\lambda_0 = 81.006^\circ$, $\Delta\theta_0 = 135.670^\circ$

    $\vec{r}_T(t_1) = (-0.9609, \ \ 0.2466, \ \ 0.0000)$,

    $\vec{r}_M(t_2) = (0.7285, \ \ -1.1980, \ \ -0.0430)$
  - COMPROVEU QUE: Elements eclíptics de la transferència

$$a = 71.08581 AU, \text{ AU}, \quad e = 1.01113, \quad \theta_0 = -53.310^\circ$$

$$\omega = 233.297^\circ, \quad i = 2.513^\circ, \quad \Omega = 345.619^\circ$$

Velocitats heliocèntriques sonda a la sortida i a l'arribada, km/s:

$\vec{v}_s(t_1) = (9.1364, \ -41.4090, \ -1.6612)$

$\vec{v}_s(t_2) = (35.1754, \ \ -6.3201, \ \ 0.1148)$

Cas 1 de Mart a Júpiter:

Sortida: $t_1 =$2037 Oct 25, Arribada: $t_2 =$2039 Oct 15, $\Delta t = 720$ dies

Sortida i Arribada, AU:

$$\vec{r}_M(t_1) = (1.0707, \quad 0.9868, \quad 0.0055)$$

$$\vec{r}_J(t_2) = (5.2210, \quad 1.4357, \quad 0.1109)$$

(Ajuda: $e = 0.64754$)

Cas 2 de la Terra a Mart:

Sortida: $t_1 =$2033 Mar 13, Arribada: $t_2 =$2033 Ago 05, $\Delta t = 145$ dies

Sortida i Arribada, AU:

$$\vec{r}_T(t_1) = (0.9848, \quad 0.1338, \quad 0.0000)$$

$$\vec{r}_M(t_2) = (0.6797, \quad 1.2298, \quad 0.0424)$$

Cas 3 de la Terra a Mart:

Sortida: $t_1 =$2031 Gen 23, Arribada: $t_2 =$2031 Ago 01, $\Delta t = 190$ dies

Sortida i Arribada, AU:

$$\vec{r}_T(t_1) = (0.5264, \quad 0.8316, \quad 0.0001)$$

$$\vec{r}_M(t_2) = (0.0108, \quad 1.4542, \quad 0.0309)$$

Cas 4 de la Terra a Mart:

Sortida: t_1 =2025 Jul 18, Arribada: t_2 =2025 Oct 21, $\Delta t = 95$ dies

Sortida i Arribada, AU (l'òrbita és molt el·líptica):

$$\vec{r}_T(t_1) = (0.4342, \ \ 0.9188, \ \ 0.0001)$$

$$\vec{r}_M(t_2) = (0.6775, \ \ 1.3571, \ \ 0.0118)$$

Cas 5 de la Terra a Venus:

Sortida: t_1 =2023 Mai 27, Arribada: t_2 =2023 Nov 01, $\Delta t = 158$ dies

Sortida i Arribada, AU:

$$\vec{r}_T(t_1) = (-0.4255, \ \ -0.9194, \ \ 0.0000)$$

$$\vec{r}_V(t_2) = (0.0356, \ \ 0.7189, \ \ 0.0079)$$

Cas 6 de Mart a la Terra:

Sortida: t_1 =2033 Gen 18, Arribada: t_2 =2033 Ago 28, $\Delta t = 222$ dies

Sortida i Arribada, AU:

$$\vec{r}_M(t_1) = (1.5831, \ \ 0.3913, \ \ 0.0306)$$

$$\vec{r}_T(t_2) = (0.9123, \ \ 0.4340, \ \ 0.0000)$$

Cas 7 de Mart a la Terra:

Sortida: t_1 =2030 Nov 20, Arribada: t_2 =2031 Jul 06, $\Delta t = 228$ dies

Sortida i Arribada, AU:

$$\vec{r}_T(t_1) = (1.4166, \ \ 0.8722, \ \ 0.0530)$$

$$\vec{r}_V(t_2) = (0.2345, \ \ 0.9893, \ \ 0.0001)$$

Cas 8 de la Terra a Mart (hiperbòlica):

Sortida: t_1 =2021 Nov 26, Arribada: t_2 =2022 Feb 19, $\Delta t = 85$ dies

Sortida i Arribada, AU:

$$\vec{r}_T(t_1) = (0.4383, \quad 0.8843, \quad 0.0000)$$

$$\vec{r}_M(t_2) = (-0.2082, \quad -1.4582, \quad -0.0255)$$

Cas 9 de la Terra a Mart (hiperbòlica):

Sortida: t_1 =2022 Gen 15, Arribada: t_2 =2022 Abr 20, $\Delta t = 95$ dies

Sortida i Arribada, AU:

$$\vec{r}_T(t_1) = (-0.4079, \quad 0.8950, \quad 0.0000)$$

$$\vec{r}_M(t_2) = (0.6393, \quad -1.2542, \quad -0.0420)$$