

ESEIAAT



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Escola Superior d'Enginyeries Industrial,
Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

Trajectòries interplanetàries Sense integració numèrica

Informe

Curs: Màster en Enginyeria Aeronàutica

Assignatura: Aerodinàmica, Mecànica de Vol i Orbital

Data d'entrega: 22-01-2018

Estudiants:

González García, Sílvia

Kaloyanov Naydenov, Boyan

Pla Olea, Laura

Serra Moncunill, Josep Maria

Professor: Calaf Zayas, Jaume

Llista de continguts

Llista de taules	iii
Llista de figures	iv
1 Introducció	1
2 Òrbita el·líptica heliocèntrica	2
2.1 Plantejament d'equacions	2
2.1.1 Trajectòria el·líptica	3
2.1.2 Trajectòria hiperbòlica	4
2.2 Mètode de resolució	5
3 Sortida del planeta origen	6
3.1 Òrbita planetocèntrica hiperbòlica	6
3.2 Òrbita d'aparcament	6
3.3 DeltaV	6
4 Arribada al planeta destí	7
4.1 Òrbita planetocèntrica hiperbòlica	7
4.2 Òrbita d'aparcament	7
4.3 DeltaV	7
5 Funcions auxiliars	8
6 Resultats	9
6.1 Cas de la Terra a Mart	9
6.2 Cas de Mart a Júpiter	10
6.3 Cas de la Terra a Mart	10
6.4 Cas 1 de Mart a Júpiter	11
6.5 Cas 2 de la Terra a Mart	11
6.6 Cas 3 de la Terra a Mart	12
6.7 Cas 4 de la Terra a Mart	13
6.8 Cas 5 de la Terra a Venus	13
6.9 Cas 6 de Mart a la Terra	14

Trajectòries Interplanetàries

6.10 Cas 7 de Mart a la Terra	14
6.11 Cas 8 de la Terra a Mart	15
6.12 Cas 9 de la Terra a Mart	16
7 Conclusions	18

Llista de taules

6.1	Elements orbitals del primer cas resolt	9
6.1	Elements orbitals del segon cas resolt	10
6.1	Elements orbitals del tercer cas resolt	10
6.1	Elements orbitals del cas 1	11
6.1	Elements orbitals del cas 2	12
6.1	Elements orbitals del cas 3	12
6.1	Elements orbitals del cas 4	13
6.1	Elements orbitals del cas 5	14
6.1	Elements orbitals del cas 6	14
6.1	Elements orbitals del cas 7	14
6.1	Elements orbitals del cas 8	15
6.1	Elements orbitals del cas 9	16

Llista de figures

2.1	Òrbita interplanetària heliocèntrica del planeta d'origen al planeta de destí	2
2.1	Triangle esfèric de l'òrbita interplanetària heliocèntrica	3
6.1	Òrbita interplanetària del primer cas resolt	9
6.1	Òrbita interplanetària del tercer cas resolt	11
6.1	Òrbita interplanetària del cas 2	12
6.1	Òrbita interplanetària del cas 3	13
6.1	Òrbita interplanetària del cas 7	15
6.1	Òrbita interplanetària del cas 8	16
6.1	Òrbita interplanetària del cas 9	17

1 | Introducció

miau miau miaaaau

2 | Òrbita el·líptica heliocèntrica

El primer pas en la resolució de la trajectòria interplanetària és l'obtenció dels elements de l'òrbita que porta la nau d'un planeta a l'altre. Per tal de conèixer aquests elements és necessari saber quins són els punts d'origen i de destí de la nau. És a dir, cal saber la posició dels planetes en l'instant en què la sonda surt del planeta d'origen i en l'instant en què arriba al planeta de destí. Coneixent aquestes dues posicions ja és possible projectar una òrbita com la que es veu en la figura 2.1.

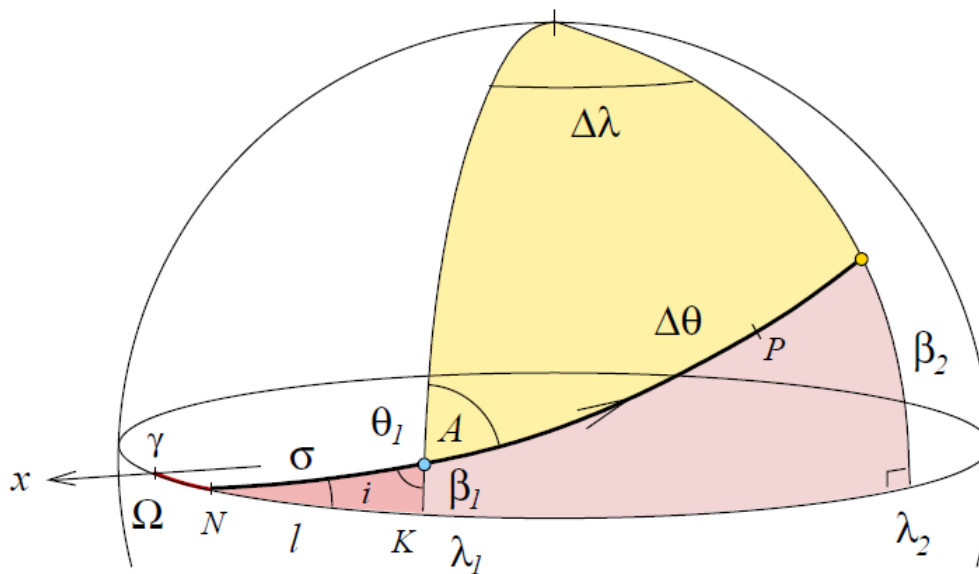


Figura 2.1: Òrbita interplanetària heliocèntrica del planeta d'origen al planeta de destí

2.1 Plantejament d'equacions

Com es dedueix de la figura, és possible calcular la inclinació de l'òrbita sabent la posició dels dos planetes. A partir dels vectors de posició, es pot calcular la desviació respecte de l'eclíptica dels planetes d'origen (en blau) i de destí (en groc), β_1 i β_2 respectivament. També

Trajectòries Interplanetàries

es pot obtenir la longitud eclíptica dels dos planetes, λ_1 i λ_2 . A partir d'aquestes variables, el problema es resol aplicant trigonometria esfèrica:

$$\cos \Delta\theta = \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \cos \Delta\lambda \quad (2.1)$$

Del triangle groc s'obté:

$$\sin A = \cos \beta_2 \frac{\sin \Delta\lambda}{\sin \Delta\theta} \quad (2.2)$$

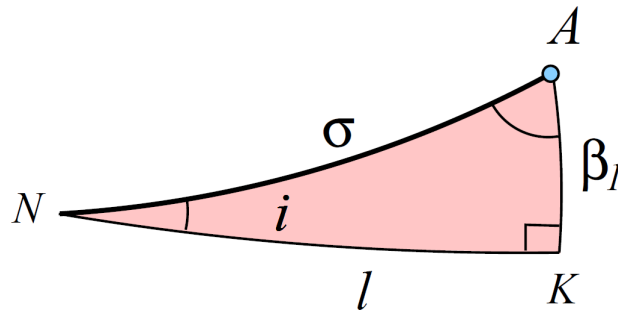


Figura 2.1: Triangle esfèric de l'òrbita interplanetària heliocèntrica

D'altra banda, del triangle esfèric de la figura 2.1 s'obtenen les següents expressions:

$$\tan \sigma = \frac{\cos \beta_1}{\tan \beta_1} \quad (2.3)$$

$$\cos i = \sin A \cos \beta_1 \quad (2.4)$$

$$\sin l = \frac{\tan \beta_1}{\tan i} \quad (2.5)$$

De la figura 2.1 també es poden deduir l'ascensió recta del node ascendent i l'argument del perigeu:

$$\Omega = \lambda_1 - l \quad (2.6)$$

$$\omega = 2\pi - (\theta_1 - \sigma) \quad (2.7)$$

2.1.1 Trajectòria el·líptica

Finalment, a partir dels vectors de posició també s'obtenen els tres elements orbitals que falten. Assumint que la trajectòria és el·líptica, els mòduls dels vectors de posició vénen donats per les expressions:

$$r_1 = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta_1} \quad (2.8)$$

$$r_2 = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta_1 + \Delta\theta)} \quad (2.9)$$

Trajectòries Interplanetàries

D'altra banda, també es pot relacionar el temps amb la posició de la sonda en l'òrbita mitjançant l'equació:

$$\frac{2\pi t}{T} = 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta_1}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta_1}{1+e \cos \theta_1} \quad (2.10)$$

on T és el període en dies del planeta d'origen.

Per tant, es pot plantejar un sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos (\theta_1 + \Delta\theta)} \quad (2.11)$$

$$a = \frac{r_1 (1 + e \cos \theta_1)}{1 - e^2} \quad (2.12)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{365.25}{2\pi} a^{3/2} \cdot \left[2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{(\theta_1 + \Delta\theta)}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin (\theta_1 + \Delta\theta)}{1+e \cos (\theta_1 + \Delta\theta)} \right] - \\ - 2 \arctan \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta_1}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta_1}{1+e \cos \theta_1} \quad (2.13)$$

en què tant els vectors \vec{r}_1 i \vec{r}_2 com el semieix major a estan expressats en AU, per tal de treballar amb valors més simples.

2.1.2 Trajectòria hiperbòlica

En el cas que la trajectòria sigui hiperbòlica, les equacions varien lleugerament. Les posicions vénen donades per les expressions:

$$r_1 = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos \theta_1} \quad (2.14)$$

$$r_2 = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e \cos (\theta_1 + \Delta\theta)} \quad (2.15)$$

I la relació entre el temps i la posició de la sonda s'expressa amb l'equació:

$$\frac{2\pi t}{T} = \sqrt{e^2 - 1} \left[\frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \ln \left\| \frac{\tan \frac{\theta}{2} + \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}}{\tan \frac{\theta}{2} - \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}} \right\| \right] \quad (2.16)$$

Per tant, el sistema de tres equacions i tres incògnites és el següent:

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1 \cos \theta_1 - r_2 \cos (\theta_1 + \Delta\theta)} \quad (2.17)$$

$$a = \frac{r_1 (1 + e \cos \theta_1)}{e^2 - 1} \quad (2.18)$$

$$t_2 - t_1 = \frac{365.25}{2\pi} a^{3/2} \cdot \left[\frac{e\sqrt{e^2 - 1} \sin(\theta_1 + \Delta\theta)}{1 + e \cos(\theta_1 + \Delta\theta)} - \ln \left\| \frac{\tan \frac{(\theta_1 + \Delta\theta)}{2} + \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}}{\tan \frac{(\theta_1 + \Delta\theta)}{2} - \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}} \right\| - \right. \\ \left. - \frac{e\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta_1}{1 + e \cos \theta_1} - \ln \left\| \frac{\tan \frac{\theta_1}{2} + \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}}{\tan \frac{\theta_1}{2} - \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}} \right\| \right] \quad (2.19)$$

2.2 Mètode de resolució

1. Es calcula la posició del planeta d'origen en l'instant de temps de sortida i la posició del planeta de destí en l'instant de temps d'arribada.
2. A partir dels vectors de posició es calculen les longituds i latituds eclíptiques dels planetes.
3. A partir del sistema d'equacions donat per 2.11, 2.12 i 2.13 s'obtenen l'excentricitat e i el semieix major a de l'òrbita, i l'anomalia vertadera de la sonda θ_1 en l'instant de sortida. Aquest sistema es resol mitjançant la funció *solve* de *MATLAB*. Si no s'obté cap solució (o les solucions no són coherents), s'assumeix que una trajectòria el·líptica no és possible i, per tant, l'òrbita ha de ser hiperbòlica. En aquest cas, es resol el sistema donat per 2.17, 2.18 i 2.19 mitjançant un mètode iteratiu.
4. Es calcula la inclinació a partir de les equacions donades pels triangles esfèrics 2.4.
5. Càlcul de la longitud eclíptica del node ascendent donat per 2.6.
6. Es calcula l'argument del periheli amb 2.7.

3 | Sortida del planeta origen

3.1 Òrbita planetocèntrica hiperbòlica

3.2 Òrbita d'aparcament

3.3 DeltaV

4 | Arribada al planeta destí

4.1 Òrbita planetocèntrica hiperbòlica

4.2 Òrbita d'aparcament

4.3 DeltaV

5 | Funcions auxiliars

6 | Resultats

6.1 Cas de la Terra a Mart

- Sortida: $t_1 = 2020$ Juliol 19
- Arribada: $t_2 = 2021$ Gener 25

$$\Delta\lambda = 141.693^\circ \quad \Delta\theta = 141.684^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.33073 AU	0.23629	359.613°	0.387°	1.434°	296.515°

Taula 6.1: Elements orbitals del primer cas resolt

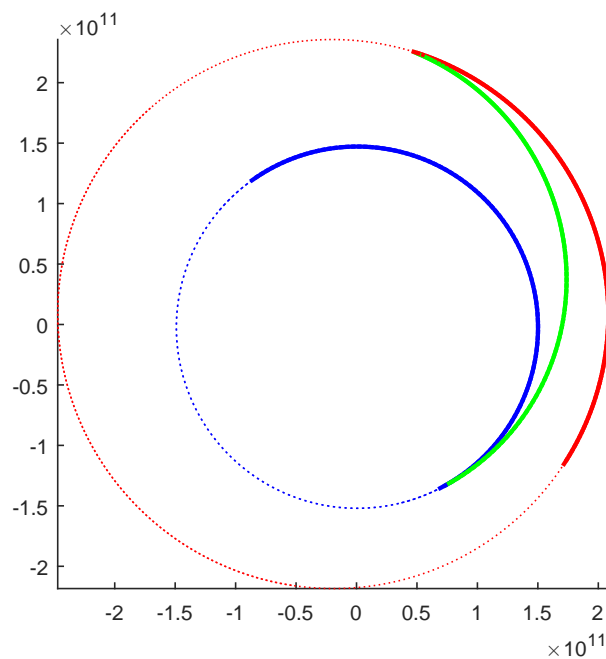


Figura 6.1: Òrbita interplanetària del primer cas resolt

6.2 Cas de Mart a Júpiter

- Sortida: $t_1 = 2026$ Juny 05
- Arribada: $t_2 = 2029$ Abril 25

$$\Delta\lambda = 182.835^\circ \quad \Delta\theta = 177.141^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
3.45405 AU	0.59043	356.872°	176.203°	7.508°	207.127°

Taula 6.1: Elements orbitals del segon cas resolt

6.3 Cas de la Terra a Mart

- Sortida: $t_1 = 2020$ Març 06
- Arribada: $t_2 = 2020$ Juny 09

$$\Delta\lambda = 135.697^\circ \quad \Delta\theta = 135.670^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
71.33848 AU	1.01109	306.690°	233.310°	2.514°	345.607°

Taula 6.1: Elements orbitals del tercer cas resolt

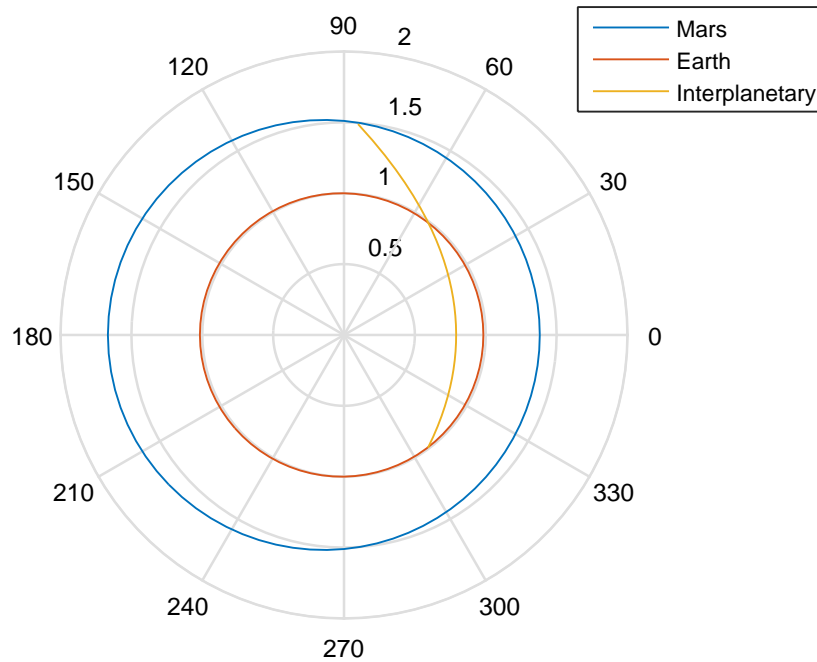


Figura 6.1: Òrbita interplanetària del tercer cas resolt

6.4 Cas 1 de Mart a Júpiter

- Sortida: $t_1 = 2037$ Octubre 25
- Arribada: $t_2 = 2039$ Octubre 15

$$\Delta\lambda = 121.960^\circ \quad \Delta\theta = 121.957^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
3.87684 AU	0.64755	32.516°	317.644°	1.267°	52.502°

Taula 6.1: Elements orbitals del cas 1

6.5 Cas 2 de la Terra a Mart

- Sortida: $t_1 = 2033$ Març 13
- Arribada: $t_2 = 2033$ Agost 05

Trajectòries Interplanetàries

$$\Delta\lambda = 126.666^\circ \quad \Delta\theta = 126.647^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.34585 AU	0.26502	347.845°	192.155°	2.154°	352.263°

Taula 6.1: Elements orbitals del cas 2

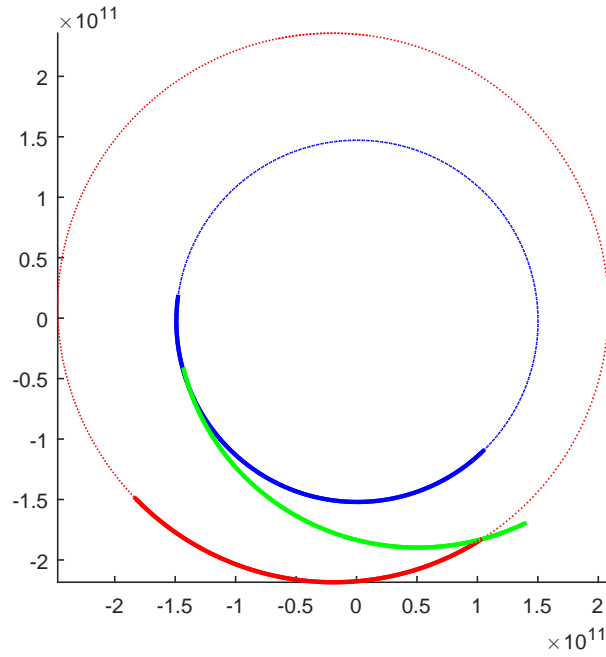


Figura 6.1: Òrbita interplanetària del cas 2

6.6 Cas 3 de la Terra a Mart

- Sortida: $t_1 = 2031$ Gener 23
- Arribada: $t_2 = 2031$ Agost 01

$$\Delta\lambda = 148.092^\circ \quad \Delta\theta = 148.071^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.24568 AU	0.20996	1.674°	358.471°	2.293°	122.188°

Taula 6.1: Elements orbitals del cas 3

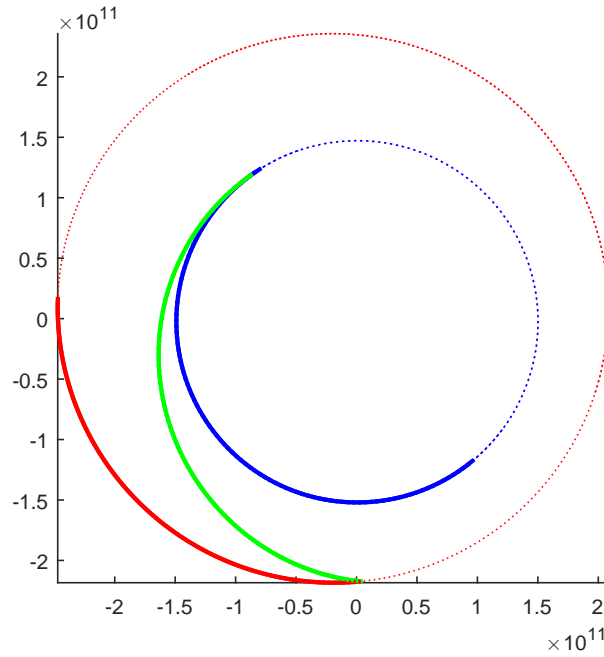


Figura 6.1: Òrbita interplanetària del cas 3

6.7 Cas 4 de la Terra a Mart

$$\Delta\lambda = 308.176^\circ \quad \Delta\theta = 51.825^\circ$$

- Sortida: $t_1 = 2025$ Juliol 18
- Arribada: $t_2 = 2025$ Octubre 21

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.07039 AU	0.46551	112.076°	67.350°	0.563°	115.868°

Taula 6.1: Elements orbitals del cas 4

6.8 Cas 5 de la Terra a Venus

- Sortida: $t_1 = 2023$ Maig 27
- Arribada: $t_2 = 2023$ Novembre 01

$$\Delta\lambda = 202.000^\circ \quad \Delta\theta = 157.992^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
0.86221 AU	0.23212	147.050°	32.951°	1.678°	65.165°

Taula 6.1: Elements orbitals del cas 5

6.9 Cas 6 de Mart a la Terra

- Sortida: $t_1 = 2033$ Gener 18
- Arribada: $t_2 = 2033$ Agost 28

$$\Delta\lambda = 140.675^\circ \quad \Delta\theta = 140.663^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.31415 AU	0.24918	191.345°	207.993°	1.696°	154.559°

Taula 6.1: Elements orbitals del cas 6

6.10 Cas 7 de Mart a la Terra

- Sortida: $t_1 = 2030$ Novembre 20
- Arribada: $t_2 = 2031$ Juliol 06

$$\Delta\lambda = 134.956^\circ \quad \Delta\theta = 134.927^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.31613 AU	0.26617	184.700°	220.499°	2.572°	103.210°

Taula 6.1: Elements orbitals del cas 7

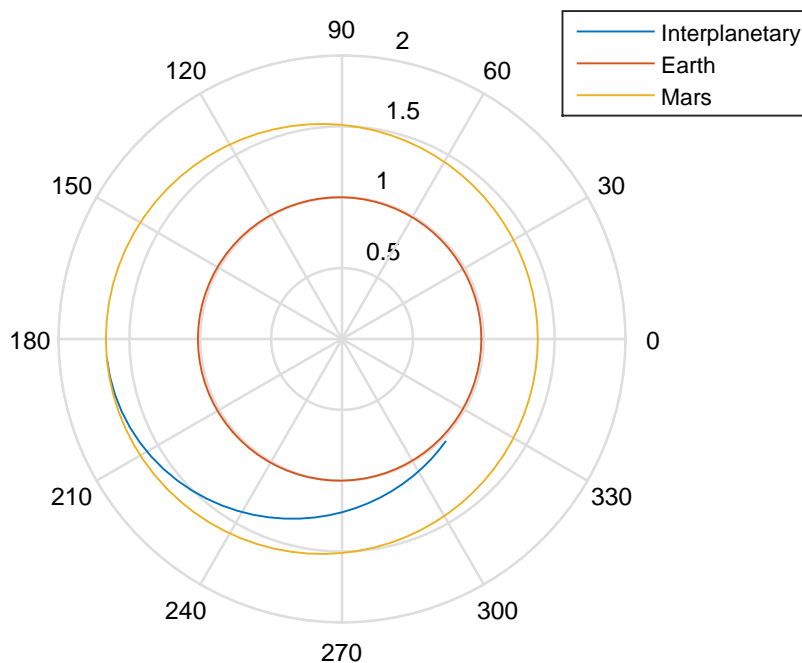


Figura 6.1: Òrbita interplanetària del cas 7

6.11 Cas 8 de la Terra a Mart

- Sortida: $t_1 = 2021$ Novembre 26
- Arribada: $t_2 = 2022$ Febrer 19

$$\Delta\lambda = 198.239^\circ \quad \Delta\theta = 161.735^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.34032 AU	1.44253	288.926°	251.074°	3.166°	243.635°

Taula 6.1: Elements orbitals del cas 8

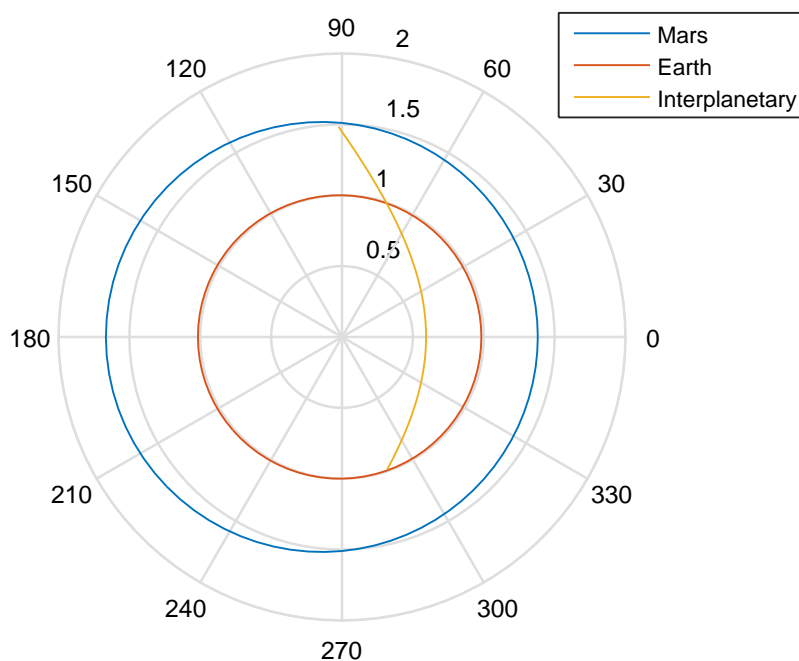


Figura 6.1: Òrbita interplanetària del cas 8

6.12 Cas 9 de la Terra a Mart

- Sortida: $t_1 = 2022$ Gener 15
- Arribada: $t_2 = 2022$ Abril 20

$$\Delta\lambda = 182.508^\circ \quad \Delta\theta = 176.966^\circ$$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
5.10048 AU	1.11071	280.991°	259.009°	34.288°	294.501°

Taula 6.1: Elements orbitals del cas 9

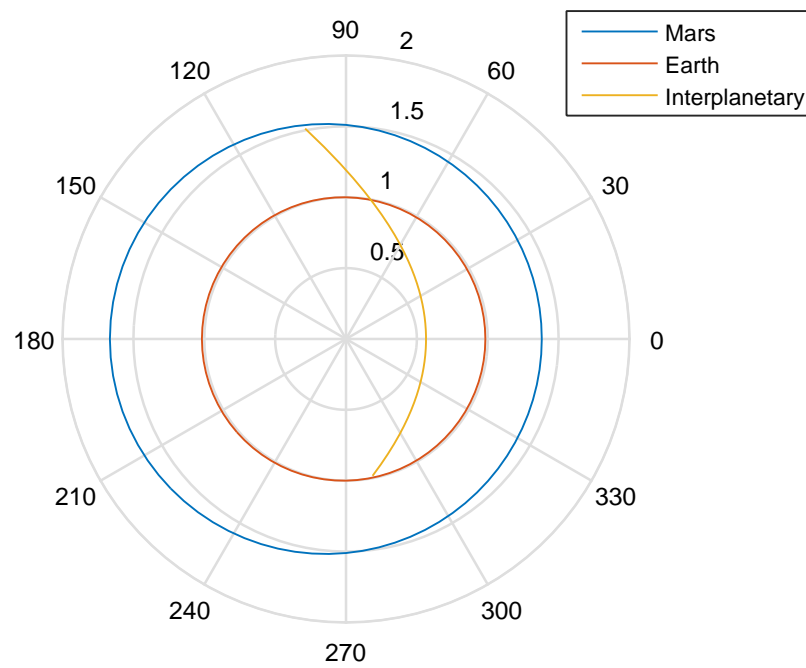


Figura 6.1: Òrbita interplanetària del cas 9

7 | Conclusions

miau miau miaaaau