ESEIAAT

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
BARCELONATECH
Escola Superior d'Enginyeries Industrial, Aeroespacial i Audiovisual de Terrassa

Trajectòries interplanetàries
Sense integració numèrica

Informe

Curs: Màster en Enginyeria Aeronàutica
Assignatura: Aerodinàmica, Mecànica de Vol i Orbital
Data d'entrega: 23-01-2018

Estudiants:

González García, Sílvia
Kaloyanov Naydenov, Boyan
Pla Olea, Laura
Serra Moncunill, Josep Maria

Professor: Calaf Zayas, Jaume

Llista de continguts

Llista de taules

Llista de figures

1 | Introducció

El problema a resoldre escollit consisteix en trobar un ΔV inicial que porti la nau d'un planeta a un altre, donats els instants de sortida t_1 i d'arribada t_2.

Per fer això, primer s'han de trobar els elements orbitals eclíptics de l'òrbita de transferència així com les velocitats heliocèntriques de sortida i d'arribada de la respectiva sonda. A partir d'aquestes es podrà obtenir també el ΔV i determinar així la viabilitat del viatge.

La metodologia matemàtica consistirà en el mètode del *Patched Conics* [5]. Segons aquest, la trajectòria es divideix per zones d'influència. Així, inicialment la sonda estarà dins de l'esfera d'influència del planeta de sortida. Un cop surti d'aquesta, estarà dins de l'esfera d'influència (EdI) del Sol. I a l'arribar al planeta de destí estarà dins de la seva EdI. El mètode es basa en el supòsit de que sempre s'aplica el problema dels dos cosos, variant el cos central segons l'EdI, bé sigui un dels planetes o bé sigui el Sol. Això fa simplificar força el problema. És per aquest motiu que va molt bé per càlculs inicials, que s'hauran de refinar numèricament a posteriori.

Així doncs, es tracta d'un projecte complex que toca gran part del contingut donat a la part de mecànica orbital de l'assignatura *Aerodinàmica, Mecànica de Vol i Mecànica Orbital* del màster d'Enginyeria Aeronàutica de l'UPC. Per aquest motiu, ha despertat l'interès de l'equip i ha sigut l'escollit.

2 | Òrbita el · líptica heliocèntrica

El primer pas en la resolució de la trajectòria interplanetària és l'obtenció dels elements de l'òrbita que porta la nau d'un planeta a l'altre. Per tal de conèixer aquests elements és necessari saber quins són els punts d'origen i de destí de la nau. És a dir, cal saber la posició dels planetes en l'instant en què la sonda surt del planeta d'origen i en l'instant en què arriba al planeta de destí. Coneixent aquestes dues posicions ja és possible projectar una òrbita com la que es veu en la figura 2.1.

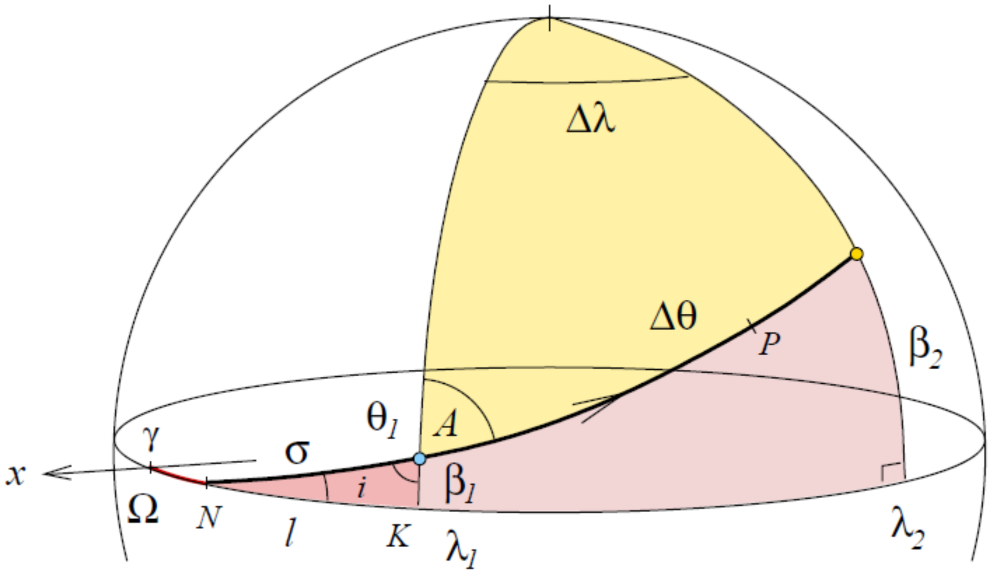

Figura 2.1: Òrbita interplanetària heliocèntrica del planeta d'origen al planeta de destí

2.1 Plantejament d'equacions

Com es dedueix de la figura, és possible calcular la inclinació de l'òrbita sabent la posició dels dos planetes. A partir dels vectors de posició, es pot calcular la desviació respecte de l'eclíptica dels planetes d'origen (en blau) i de destí (en groc), β_1 i β_2 respectivament. També es pot obtenir la longitud eclíptica dels dos planetes, λ_1 i λ_2. A partir d'aquestes variables, el problema es resol aplicant trigonometria esfèrica:

$$\cos\Delta\theta = \sin\beta_1 \sin\beta_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos\Delta\lambda \tag{2.1}$$

Del triangle groc s'obté:

$$\sin A = \cos\beta_2 \frac{\sin\Delta\lambda}{\sin\Delta\theta} \tag{2.2}$$

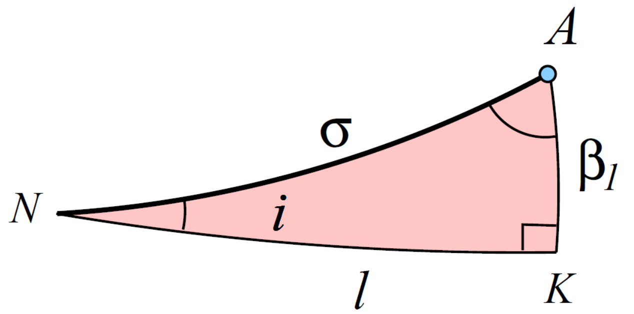

Figura 2.1: Triangle esfèric de l'òrbita interplanetària heliocèntrica

D'altra banda, del triangle esfèric de la figura 2.1 s'obtenen les següents expressions:

$$\tan\sigma = \frac{\cos\beta_1}{\tan\beta_1} \tag{2.3}$$

$$\cos i = \sin A \cos\beta_1 \tag{2.4}$$

$$\sin l = \frac{\tan\beta_1}{\tan i} \tag{2.5}$$

De la figura 2.1 també es poden deduir l'ascensió recta del node ascendent i l'argument del perigeu:

$$\Omega = \lambda_1 - l \tag{2.6}$$

$$\omega = 2\pi - (\theta_1 - \sigma) \tag{2.7}$$

2.1.1 Trajectòria el · líptica

Finalment, a partir dels vectors de posició també s'obtenen els tres elements orbitals que falten. Assumint que la trajectòria és el · líptica, els mòduls dels vectors de posició vénen donats per les expressions:

$$r_1 = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\theta_1} \tag{2.8}$$

$$r_2 = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos\left(\theta_1+\Delta\theta\right)} \tag{2.9}$$

D'altra banda, també es pot relacionar el temps amb la posició de la sonda en l'òrbita mitjançant l'equació:

$$\frac{2\pi t}{T} = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta_1}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta_1}{1+e\cos\theta_1} \tag{2.10}$$

on T és el període en dies del planeta d'origen.

Per tant, es pot plantejar un sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1\cos\theta_1 - r2\cos(\theta_1+\Delta\theta)} \tag{2.11}$$

$$a = \frac{r_1(1+e\cos\theta_1)}{1-e^2} \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 = \frac{365.25}{2\pi}a^{3/2}\cdot \\ \cdot\left[2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{(\theta_1+\Delta\theta)}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin(\theta_1+\Delta\theta)}{1+e\cos(\theta_1+\Delta\theta)}\right] - \\ -2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta_1}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta_1}{1+e\cos\theta_1} \end{aligned} \tag{2.13}$$

en què tant els vectors $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$ com el semieix major a estan expressats en AU, per tal de treballar amb valors més simples.

2.1.2 Trajectòria hiperbòlica

En el cas que la trajectòria sigui hiperbòlica, les equacions varien lleugerament. Les posicions vénen donades per les expressions:

$$r_1 = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos\theta_1} \tag{2.14}$$

$$r_2 = \frac{a(e^2-1)}{1+e\cos(\theta_1+\Delta\theta)} \tag{2.15}$$

I la relació entre el temps i la posició de la sonda s'expressa amb l'equació:

$$\frac{2\pi t}{T} = \sqrt{e^2-1}\left[\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta} - \frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\ln\left\|\frac{\tan\frac{\theta}{2}+\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}}{\tan\frac{\theta}{2}-\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}}\right\|\right] \tag{2.16}$$

Per tant, el sistema de tres equacions i tres incògnites és el següent:

$$e = \frac{r_2 - r_1}{r_1\cos\theta_1 - r2\cos(\theta_1+\Delta\theta)} \tag{2.17}$$

$$a = \frac{r_1 \left(1 + e\cos\theta_1\right)}{e^2 - 1} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 = \frac{365.25}{2\pi} a^{3/2} \cdot \\ \cdot \left[\frac{e\sqrt{e^2-1}\sin\left(\theta_1 + \Delta\theta\right)}{1 + e\cos\left(\theta_1 + \Delta\theta\right)} - \ln\left\| \frac{\tan\frac{(\theta_1+\Delta\theta)}{2} + \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}}{\tan\frac{(\theta_1+\Delta\theta)}{2} - \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}} \right\| - \right. \\ \left. - \frac{e\sqrt{e^2-1}\sin\theta_1}{1 + e\cos\theta_1} - \ln\left\| \frac{\tan\frac{\theta_1}{2} + \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}}{\tan\frac{\theta_1}{2} - \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}} \right\| \right] \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.2 Mètode de resolució

1. Es calcula la posició del planeta d'origen en l'instant de temps de sortida i la posició del planeta de destí en l'instant de temps d'arribada.

2. A partir dels vectors de posició es calculen les longituds i latituds eclíptiques dels planetes.

3. A partir del sistema d'equacions donat per 2.11, 2.12 i 2.13 s'obtenen l'excentricitat e i el semieix major a de l'òrbita, i l'anomalia vertadera de la sonda θ_1 en l'instant de sortida. Aquest sistema es resol mitjançant la funció *solve* de *MATLAB*. Si no s'obté cap solució (o les solucions no són coherents), s'assumeix que una trajectòria el · líptica no és possible i, per tant, l'òrbita ha de ser hiperbòlica. En aquest cas, es resol el sistema donat per 2.17, 2.18 i 2.19 mitjançant un mètode iteratiu.

4. Es calcula la inclinació a partir de les equacions donades pels triangles esfèrics 2.4.

5. Càlcul de la longitud eclíptica del node ascendent donat per 2.6.

6. Es calcula l'argument del periheli amb 2.7.

3 | Sortida del planeta origen

Un cop es disposa dels elements keplerians eclíptics de l'òrbita de transferència, és possible trobar tant la trajectòria hiperbòlica que la sonda haurà de prosseguir des de la seva òrbita d'aparcament fins la sortida de l'EdI, com el ΔV que se li haurà d'aplicar per a que sigui capaç se sortir de l'òrbita d'aparcament i arribar al planeta en el temps marcat.

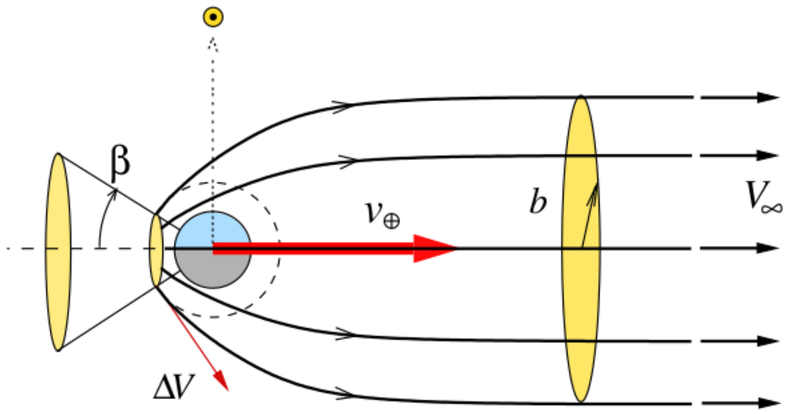

Figura 3.1: Òrbita hiperbòlica de sortida de l'esfera d'influència del planeta.

A la figura 3.1 es veuen els elements rellevants que s'han d'obtenir.

3.1 Velocitats a la sortida

Per tal de determinar la hipèrbola de sortida, el primer pas és trobar les velocitats les velocitats planetocèntrica i heliocèntrica de la sonda ,V_∞ i V_1 respectivament, en el moment de sortida de l'esfera d'influència del planeta. La velocitat planetocèntrica, V_∞, s'obté a partir de la velocitat heliocèntrica de la sonda, V_1, i de la velocitat heliocèntrica del planeta d'origen, V_{P0}, de la següent manera:

$$\vec{V}_{\infty} = \vec{V}_1 - \vec{V}_{P0} \tag{3.1}$$

Per tal d'obtenir tant $\vec{V}_1$ com $\vec{V}_{P0}$ de manera senzilla i genèrica, s'ha elaborat una funció que a partir d'uns elements orbitals i una anomalia mitjana en un temps de referència, calcula la posició i la velocitat d'un cos en òrbita en un instant determinat de temps 4.4.

D'aquesta manera, s'utilitzen els elements orbitals del planeta d'origen en J2000 per a obtenir la seva posició i velocitat en l'instant determinat t_1, i s'utilitzen els elements orbitals i l'anomalia mitjana de l'òrbita interplanetària, calculats en una altra funció **??**, utilitzant com a temps de referència el propi instant t_1.

3.2 Òrbita planetocèntrica hiperbòlica

A les classes de l'assignatura s'ha arribat a les següents relacions [5]:

$$a = \frac{\mu}{V_{\infty}^2} \tag{3.1}$$

$$e = 1 + \left(\frac{V_{\infty}}{V_o}\right)^2 \tag{3.2}$$

$$\cos(\beta) = \frac{1}{e} \tag{3.3}$$

$$b = a\sqrt{e^2 - 1} \tag{3.4}$$

$$V_o = \sqrt{\frac{\mu}{r_o}} \tag{3.5}$$

On:

- a és el semieix major.
- e és l'excentricitat.
- β és l'angle de l'asímptota. Veure fig.3.1.
- b és el paràmetre de sortida. Veure fig.3.1.
- V_o és la velocitat que porta la sonda en l'òrbita d'aparcament de radi r_o.
- μ és el paràmetre de gravitació estàndard del planeta. (GM)
- V_{∞} representa el mòdul de la velocitat planetocèntrica que porta la sonda al sortir del planeta.

Aquests càlculs s'han portat a terme mitjançant el codi de la secció 4.3.

3.3 DeltaV

Per trobar l'impuls que s'ha de subministrar s'aplica conservació d'energia cinètica:

$$\frac{1}{2}V_\infty^2 = \frac{1}{2}(V_o + \Delta V)^2 - \frac{\mu}{r_o}$$

Arribant així a:

$$\Delta V = \sqrt{V_\infty^2 + 2V_o^2} - V_o \tag{3.1}$$

4 Codi

Per tal de poder resoldre les equacions definides en els apartats anteriors de forma ràpida i eficient, s'ha elaborat un codi *MATLAB*. A fi de simplificar el seu ús i la seva comprensió, el codi està dividit en diferentes funcions amb una tasca definida i clara. Aquestes es detallen a continuació.

4.1 Programa principal *main.m*

```
%% Patched Conics. Interplanetary Trajectories.
% Authors:
%    - Silvia Gonzalez
%    - Laura Pla
%    - Josep Maria Serra Moncunill
%    - Boyan Naydenov
% Subject: Aerodynamics, Flight and Orbital Mechanics.
% Date: January 20th, 2018

%%
clear
clc

%% Data
mu = 1.3271741784e20;
dST = 149597870700;

%Venus data
a_V = 0.723330*dST;
e_V = 0.006772;
I_V = 3.3947;
RAAN_V = 76.6799;
AP_V = 54.8838;
M0_V = 50.4161;

%Earth data
```

```
a_E = 149598023000;
e_E = 0.0167086;
I_E = 0.00005;
RAAN_E = -11.26064;
AP_E = 114.20783;
M0_E = 358.617;

%Mars data
a_M = 227939200000;
e_M = 0.0934;
I_M = 1.850;
RAAN_M = 49.558;
AP_M = 286.502;
M0_M = 19.3564;

%Jupiter data
a_J = 7.7830e+11;
e_J = 0.048498;
I_J = 1.3033;
RAAN_J = 100.46;
AP_J = 273.866;
M0_J = 20.021;

% Time data
t0 = JulianDate(2000,1,1);
t1 = JulianDate(2020,7,19);
t2 = JulianDate(2021,1,25);
deltat = t2-t1;

% Distances, velocities and true anomalies (O:origin, D:destination)
[r1_O,v1_O,theta1_O] = OrbitalVectors (t1,mu,a_E,e_E,I_E,RAAN_E,AP_E,...
    M0_E,t0);
r1_O = r1_O/dST;
[r2_D,v2_D,theta2_D] = OrbitalVectors (t2,mu,a_M,e_M,I_M,RAAN_M,AP_M,...
    M0_M,t0);
r2_D = r2_D/dST;

%% Part 1: Heliocentric elliptic trajectory
[a_S, e_S, theta1, AP_S, I_S, RAAN_S] = orbita_interplanetaria(r1_O,r2_D...
    ,deltat);
E_S=acosd((e_S+cosd(theta1))/(1+e_S*cosd(theta1)));
M_S=E_S-e_S*sin(E_S);
a_S = a_S*dST;

%% Part 2: Exit. Geocentric Parking orbit and hyperbolic trajectory and ...
    deltaV
[r1,v1,theta1] = OrbitalVectors (t1,mu,a_S,e_S,I_S,RAAN_S,AP_S,M_S,t1);
v_inf1=v1-v1_O;
[hyperbolaExit, deltaV] = outHyperbola (v_inf1);

```

```
%% Part 3: Arrival. Geocentric hyperbolic trajectory and Parking orbit ...
    and deltaV
[r2,v2,theta2] = OrbitalVectors (t2,mu,a_S,e_S,I_S,RAAN_S,AP_S,M_S,t1);
v_inf2=v2-v2_D;

%% Part 4: Results Presentation
N=100;
A=2;
t=linspace(t1-A*deltat,t2+A*deltat,(2*A+1)*N);
r_O=zeros(1,(2*A+1)*N,3);
r_D=zeros(1,(2*A+1)*N,3);
r_S=zeros(1,N,3);
for i=1:(2*A+1)*N
    [r_O(1,i,:),v_O,theta_O] = OrbitalVectors (t(i),mu,a_E,e_E,I_E,...
        RAAN_E,AP_E,M0_E,t0);
    [r_D(1,i,:),v_D,theta_D] = OrbitalVectors (t(i),mu,a_M,e_M,I_M,...
        RAAN_M,AP_M,M0_M,t0);
    if t(i)>=t1 && t(i)<=t2
        [r_S(1,i-A*N,:),v1_S,theta1_S] = OrbitalVectors (t(i),mu,a_S,e_S...
            ,I_S,RAAN_S,AP_S,M_S,t1);
    end
end
plot3(r_O(1,:,1),r_O(1,:,2),r_O(1,:,3),':b');
hold on
plot3(r_O(1,A*N:(A+1)*N,1),r_O(1,A*N:(A+1)*N,2),r_O(1,A*N:(A+1)*N,3),'-b...
    ','LineWidth',2);
hold on
plot3(r_D(1,:,1),r_D(1,:,2),r_D(1,:,3),':r');
hold on
plot3(r_D(1,A*N:(A+1)*N,1),r_D(1,A*N:(A+1)*N,2),r_D(1,A*N:(A+1)*N,3),'-r...
    ','LineWidth',2);
hold on
plot3(r_S(1,:,1),r_S(1,:,2),r_S(1,:,3),'-g','LineWidth',2);
axis equal;
ax.XAxisLocation = 'origin';
ax.YAxisLocation = 'origin';
ax.ZAxisLocation = 'origin';
```

4.2 Transfer Orbit *orbitainterplanetaria.m*

Funció que calcula els elements orbitals de l'òrbita de transferència. En cas que sigui el · líptica, els resultats s'obtenen gràcies a la funció *solve.m*. En canvi, si és hiperbòlica cal emprar una altra funció desenvolupada a continuació.

```
function [a, e, theta1, w, i, Omega] = orbita_interplanetaria(r1,r2,...
    deltat)
```

```
% Function that computes the orbital elements of the interplanetary
% trajectory

% OUTPUTS
% a: semi-major axis [AU]
% e: eccentricity
% theta1: true anomaly in t1 [deg]
% w: argument of periapsis [deg]
% i: inclination [deg]
% Omega: longitude of the ascending node [deg]

% INPUTS
% r1: heliocentric position of the probe in t2 [AU]
% r2: heliocentric position of the probe in t2 [AU]
% deltat: t2-t1 [days]

% Angle calculations
lambda1 = atan(r1(2)/r1(1)); %  [rad]
lambda1 = checkTangent(lambda1,r1(2),r1(1));
lambda2 = atan(r2(2)/r2(1)); % [rad]
lambda2 = checkTangent(lambda2,r2(2),r2(1));
beta1 = asin(r1(3)/norm(r1)); % [rad]
beta2 = asin(r2(3)/norm(r2)); % [rad]

% Angle increments
deltalambda = wrapTo2Pi(lambda2-lambda1); % [rad]
deltatheta = acos(sin(beta1)*sin(beta2)+cos(beta1)*cos(beta2)*cos(...
    deltalambda)); % [rad]

% ELLIPTICAL ORBIT (Resolution of the system of equations)
syms e a theta1;
eqn1 = (norm(r2)-norm(r1))/(norm(r1)*cos(theta1)-norm(r2)*cos(theta1+...
    deltatheta))-e == 0;
eqn2 = norm(r1)*(1+e*cos(theta1))/(1-e^2)-a == 0;
eqn3 = 365.25*a^(3/2)*(2*atan(sqrt((1-e)/(1+e))*tan((theta1+deltatheta)...
    /2))-e*sqrt(1-e^2)*sin(theta1+deltatheta)/(1+e*cos(theta1+deltatheta)...
    )-2*atan(sqrt((1-e)/(1+e))*tan(theta1/2))+e*sqrt(1-e^2)*sin(theta1)...
    /(1+e*cos(theta1)))/(2*pi)-deltat == 0;
S = solve(eqn1,eqn2,eqn3);

e = double(S.e); % eccentricity
a = double(S.a); % semi-major axis
theta1 = double(S.theta1); % true anomaly in t1 [rad]

% HYPERBOLIC ORBIT (Resolution of the system of equations)
if isreal(e)==0 || isreal(a)==0 || isreal(theta1)==0 || isempty(e)==1 ||...
     isempty(a)==1 || isempty(theta1)==1 || e>1 || e<-1
    [e,a,theta1] = hyperbolic_orbit(r1,r2,deltat,deltatheta);
end

```

```
% Correction for negative excentricities
if e<0
    e = -e;
    theta1 = theta1+pi;
end
theta1 = wrapTo2Pi(theta1);

% Inclination calculation using spherical trigonometry
A = asin(cos(beta2)*sin(deltalambda)/sin(deltatheta)); % [rad]
A = checkTangent(A,cos(beta2)*sin(deltalambda),sin(deltatheta));
i = acos(sin(A)*cos(beta1)); % [rad]
l = asin(tan(beta1)/tan(i)); % [rad]

if i>pi/2
    i = i-pi;
end

if beta1==0 && beta2<0 && i>0
    i = -i;
end

if beta1<0 && l>0
    l = -l;
end

sigma = atan(tan(beta1)/cos(A)); % [rad]
sigma = checkTangent(sigma,tan(beta1),cos(A));
Omega = lambda1-l; % [rad]
w = 2*pi-(theta1-sigma); % [rad]

if(i<0)
    i = abs(i);
    Omega = Omega+pi;
    w = w+pi;
end

theta1 = rad2deg(theta1); % [deg]
i = rad2deg(i); % [deg]
Omega = rad2deg(wrapTo2Pi(Omega)); % [deg]
w = rad2deg(wrapTo2Pi(w)); % [deg]

end
```

4.2.1 Hyperbolic transfer orbit *hyperbolicorbit.m*

Funció que implementa un mètode iteratiu per tal de calcular els elements orbitals d'una òrbita de transferència el·líptica. Cal destacar la importància d'escollir un valor inicial d'iteració adequat, ja que sinó no s'obtenen resultats correctes.

```
function [e,a,theta] = hyperbolic_orbit(r1,r2,deltat,deltatheta)
% Function that computes the excentricity, the semimajor axis and the
% true anomaly of an hyperbolic orbit using an iterative algorithm

% OUTPUTS
% e: eccentricity
% a: semi-major axis [AU]
% theta: true anomaly in t1 [rad]

% INPUTS
% r1: heliocentric position of the probe in t2 [AU]
% r2: heliocentric position of the probe in t2 [AU]
% deltat: t2-t1 [days]
% deltatheta: increment of the true anomaly between t1 and t2 [rad]

resta = 1000;
d = 1e-6; % error
theta = pi/2-acos(dot(r1,r2)/(norm(r1)*norm(r2))); % initial value
if theta>deg2rad(-50)
    theta = theta-deg2rad(10);
end
eant = 1000;

while(resta>d)

    e = (norm(r2)-norm(r1))/(norm(r1)*cos(theta)-norm(r2)*cos(theta+...
        deltatheta));
    a = norm(r1)*(1+e*cos(theta))/(e^2-1);
    delta = 365.25*a^(3/2)*(e*sqrt(e^2-1)*sin(theta+deltatheta)/(1+e*cos...
        (theta+deltatheta))-log(abs((tan((theta+deltatheta)/2)+sqrt((e+1)...
        /(e-1)))/(tan((theta+deltatheta)/2)-sqrt((e+1)/(e-1)))))-e*sqrt(e...
        ^2-1)*sin(theta)/(1+e*cos(theta))+log(abs((tan(theta/2)+sqrt((e...
        +1)/(e-1)))/(tan(theta/2)-sqrt((e+1)/(e-1))))))/(2*pi);

    resta = abs(e-eant);
    eant = e;

    if resta>d
        theta = theta+(deltat-delta)/10000;
    end

end
end
```

4.3 Hipèrbola de sortida *outHyperbola.m*

```
function [hyperbolaExit, deltaV] = outHyperbola (v_inf)
%  Function that gets Vinf and gives hyperbolic trajectory
%  and the necessary deltaV

% OUTPUTS
% hyperbolaExit: orbital parameters of the hyperbola
% deltaV: Increment of velocity required to go from the parking orbit to
% the hyperbolic orbit [m/s]

% INPUT
% v_inf: planetocentric  hyperbolic excess velocity [m/s]

%% DATA
R_e = 6.3782e+03;  % [km]
mu_sun = 1.3271741784e20;
mu_e = 3.9820e+14; %SI

%% parkingOrbit
h = 800000; %height [m]
ro = R_e*1000 + h;
Vo = sqrt(mu_e/ro); % velocity in the parking orbit

%% deltaV
Vinf = norm(v_inf);
deltaV = sqrt(Vinf^2+2*Vo^2)-Vo;

%% hyperbolic path
hyperbolaExit.a = mu_e/(Vinf^2); % semi-major axis
hyperbolaExit.e = 1 + (Vinf/Vo)^2; % eccentricity
hyperbolaExit.beta = acosd(1/hyperbolaExit.e); % hyperbolic angle
hyperbolaExit.b = hyperbolaExit.a*sqrt(hyperbolaExit.e^2-1); % Impact ...
    parameter (semi-minor axis)
end
```

4.4 Posició i velocitat *OrbitalVectors.m*

Càlcul dels vectors de posició i velocitat en funció dels elements orbitals.

```
function [r,v,theta] = OrbitalVectors (t,mu,a,e,I,RAAN,AP,M0,t0)
% Function that computes the position vector (r), the velocity vector
% (v) and the true anomaly (theta) for a given orbital parameters

```

```
% OUTPUTS
% r: position vector of the orbiting object in the same system of
% reference as the orbital parameters [m]
% v: velocity vectorof the orbiting object in the same system of
% reference as the orbital parameters [m/s]
% theta: true anomaly [deg]

% INPUTS
% t: time at which to compute the outputs in JD [days]
% mu: gravitational constant multiplied by the mass of the central body
% (G*M) [N*m^2/kg^2]
% a: semi-major axis [m]
% e: eccentricity
% I: inclination [deg]
% RAAN: right ascension of the ascending node [deg]
% AP: argument of the perigee [deg]
% M0: mean anomaly at a reference time [deg]
% t0: reference time in JD [days]

I=deg2rad(I); %Inclination [rad]
RAAN=deg2rad(RAAN); %Right ascension of the ascending node [rad]
AP=deg2rad(AP); %Argument of the perigee [rad]
M0=deg2rad(M0); %Mean anomaly at reference time t0 [rad]
t=t*24*3600; %Time [s]
t0=t0*24*3600; %Reference time [s]

T=sqrt(4*pi^2*a^3/mu); %Period [s]
n=2*pi/T; %Mean motion [rad/s]
M=M0+n*(t-t0); %Mean anomaly [rad]
M=wrapTo2Pi(M); %Mean anomaly between 0 and 2pi
if M>pi
    M=M-2*pi; %Correction for the hyperbolic equations
end

E0=M+e*sin(M); %Initial eccentric anomaly
error=1e-8;
if e<1 %Elliptic case
    p=a*(1-e^2); %Conic parameter
    E=1;
    while abs(E-E0)>error %Newton-Rapson
        E=E0+(M-E0+e*sin(E0))/(1-e*sin(E0));
        E0=E;
    end
    theta=2*atan(sqrt((1+e)/(1-e))*tan(E/2)); %True anomaly
    r_mod=a*(1-e*cos(E)); %Modulus of the position vector
else %Hyperbolic case
    p=a*(e^2-1); %Conic parameter
    if e<1.6
        if M<=pi
            F0=M+e; %Initial hyperbolic anomaly
```

```
        else
            F0=M-e; %Initial hyperbolic anomaly
        end
    else
        if e<3.6 && M>pi
            F0=M-e; %Initial hyperbolic anomaly
        else
            F0=M/(e-1); %Initial hyperbolic anomaly
        end
    end
    F=1;
    while abs(F-F0)>error %Newton Rapson
        F=F0+(M-e*sinh(F0)+F0)/(e*cosh(F0)-1);
        F0=F;
    end
    theta=2*atan(sqrt((e+1)/(e-1))*tanh(F/2)); %True anomaly
    r_mod=a*(e*cosh(F)-1); %Modulus of the position vector
end

%Rotation coefficients
Px=cos(RAAN)*cos(AP)-sin(RAAN)*cos(I)*sin(AP);
Py=sin(RAAN)*cos(AP)+cos(RAAN)*cos(I)*sin(AP);
Pz=sin(I)*sin(AP);
Qx=-cos(RAAN)*sin(AP)-sin(RAAN)*cos(I)*cos(AP);
Qy=-sin(RAAN)*sin(AP)+cos(RAAN)*cos(I)*cos(AP);
Qz=sin(I)*cos(AP);
Wx=sin(RAAN)*sin(I);
Wy=-cos(RAAN)*sin(I);
Wz=cos(I);
P=[Px ; Py ; Pz]; %Rotation vector for x_orb
Q=[Qx ; Qy ; Qz]; %Rotation vector for y_orb

r=r_mod*(cos(theta)*P+sin(theta)*Q); %Distance vector
v=sqrt(mu/p)*(-sin(theta)*P+(e+cos(theta))*Q); %velocity vector
end
```

4.5 Data Juliana *JulianDate.m*

S'aplica l'algoritme de conversió de data Gregoriana a data Juliana vist a classe [2, pàg.48].

```
function JDN=JulianDate(year,month,day)
% Function that computes the Julian Date of a given Gregorian date

% OUTPUT
% JDN: Julian Date

```

```
% INPUT
% year: year (Gregorian calendar)
% month: month (Gregorian calendar)
% day: day (Gregorian calendar)

a = floor((14 - month) / 12);
y = year + 4800 - a;
m = month + 12*a - 3;

JDN = day + floor((153*m + 2)/5) + 365*y + floor(y/4) - floor(y/100) + ...
    floor(y/400) - 32045;
end
```

4.6 Correcció d'angles *checkTangent.m*

Aquesta funció simplement s'encarrega de rebre un quocient i, segons el signe, decidir en quin quadrant situar l'angle que s'obté en calcular l'arc tangent.

```
function angle = checkTangent(result,num,den)
% Function that rectifies the angle obtained with atan() as a function
% of the numerator and the denominator

% OUTPUT
% angle: rectified angle [rad]

% INPUTS
% result: angle obtained with atan() [rad]
% num: numerator
% den: denominator

    if den<0 && num>0
        % second quadrant
        angle = pi + result;
    elseif  den<0 && num<0
        % third quadrant
        angle = result + pi;
    else
        angle = result;
    end
end
```

5 Resultats

En els apartats següents es detallen els resultats obtinguts per diversos casos amb el codi presentat en el capítol 4. Aquests casos són d'índole molt diversa, per tal de poder estudiar el comportament del programa en diferents exemples.

Com es pot veure, s'han calculat les òrbites de transferència entre diferents planetes d'origen i destí. En aquests càlculs s'han emprat tan òrbites el · líptiques com hiperbòliques en funció del que era possible. Per cada cas s'ha calculat la posició del planeta d'origen (i de la sonda) en l'instant de sortida $\vec{r}_O(t_1)$ i la posició del planeta de destí (i de la sonda) en l'instant d'arribada $\vec{r}_D(t_2)$, així com els elements orbitals de l'òrbita de transferència.

En el cas de les òrbites el · líptiques, també s'han calculat les velocitats heliocèntriques de sortida $\vec{v}_s(t_1)$ i d'arribada $\vec{v}_s(t_2)$ de la sonda en els instants de temps corresponents. A més a més, s'han obtingut les velocitats d'escapament $\vec{v}_\infty$ dels planetes i, finalment, l'impuls Δv necessari que cal donar a la sonda perquè abandoni l'òrbita d'escapament i iniciï el viatge interplanetari.

5.1 Cas de la Terra a Mart

- Sortida: t_1 =2020 Juliol 19

  $\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} 0.4797 & -0.8958 & 0.0000 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} 29.2061 & 15.0177 & 0.8220 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty_1} = \begin{bmatrix} 3.4299 & 1.0667 & 0.8220 \end{bmatrix}$ km/s

  $\Delta v = 3.71102$ km/s

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 190$ dies

  $\Delta\lambda = 141.693°$

  $\Delta\theta = 141.684°$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.33073 AU	0.23629	359.613°	0.387°	1.434°	296.515°

Taula 5.1: Elements orbitals del primer cas resolt

- Arribada: t_2 =2021 Gener 25

  $\vec{r}_M(t_2) = \begin{bmatrix} 0.3060 & 1.5107 & 0.0241 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} -20.3937 & 8.3428 & -0.3636 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty_2} = \begin{bmatrix} 2.4337 & 1.4755 & -1.0686 \end{bmatrix}$ km/s

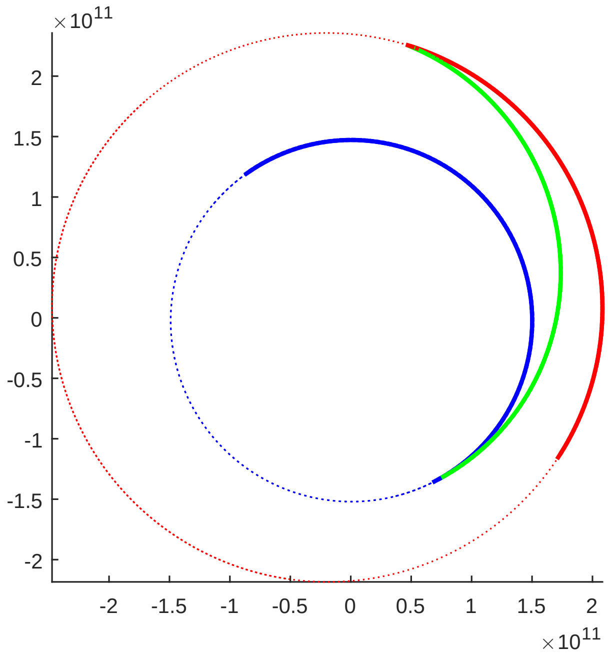

Figura 5.1: Òrbita interplanetària del primer cas resolt

5.2 Cas de Mart a Júpiter

- Sortida: t_1 =2026 Juny 05

  $\vec{r}_M(t_1) = \begin{bmatrix} 1.3247 & 0.5006 & -0.0221 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} -13.5814 & 28.1939 & -4.1235 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty 1} = \begin{bmatrix} -5.9464 & 3.4595 & -4.8294 \end{bmatrix}$ km/s

  $\Delta v = 6.0278$ km/s

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 1055$ dies

  $\Delta\lambda = 182.835°$

  $\Delta\theta = 177.141°$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
3.45405 AU	0.59043	356.872°	176.203°	7.508°	207.127°

Taula 5.1: Elements orbitals del segon cas resolt

- Arribada: t_2 =2029 Abril 25

  $\vec{r}_J(t_2) = \begin{bmatrix} -5.0246 & -2.1122 & 0.1211 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} 0.9891 & -8.2071 & 1.0222 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty 2} = \begin{bmatrix} -3.9190 & 3.2311 & 1.0847 \end{bmatrix}$ km/s

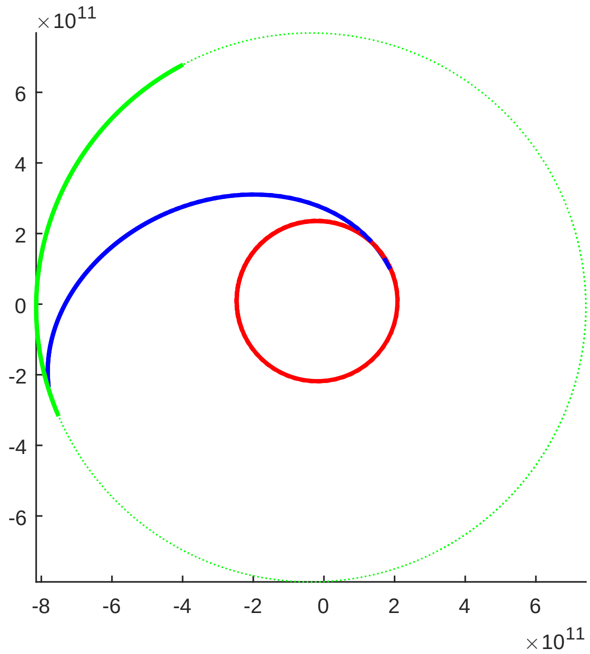

Figura 5.1: Òrbita interplanetària del segon cas resolt

5.3 Cas de la Terra a Mart

- Sortida: t_1 =2020 Març 06

  $\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} -0.9684 & 0.2176 & 0.0000 \end{bmatrix}$ AU

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 95$ dies

  $\Delta\lambda = 135.697°$

  $\Delta\theta = 135.670°$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
71.33848 AU	1.01109	306.690°	233.310°	2.514°	345.607°

Taula 5.1: Elements orbitals del tercer cas resolt

- Arribada: t_2 =2020 Juny 09

  $\vec{r}_M(t_2) = \begin{bmatrix} 0.7378 & -1.1916 & -0.0431 \end{bmatrix}$ AU

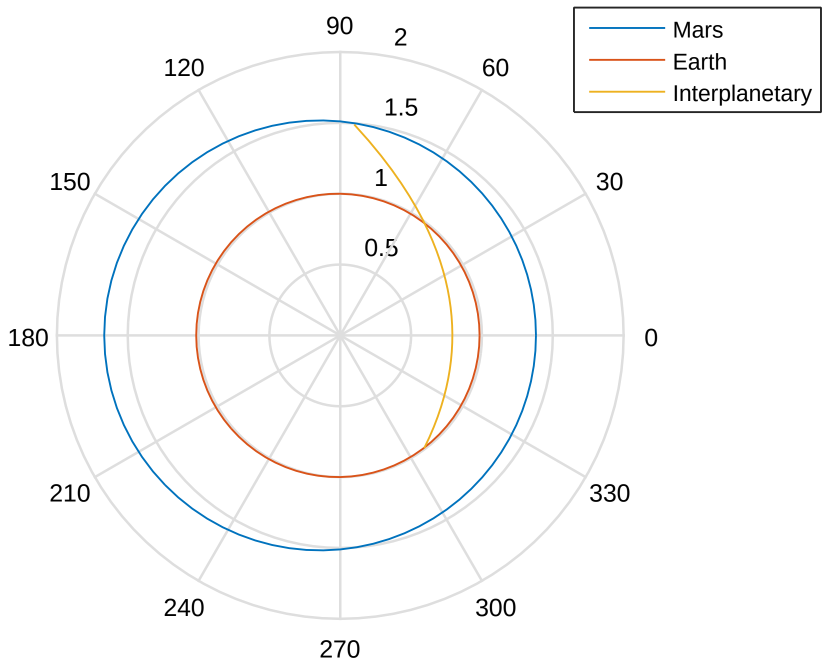

Figura 5.1: Òrbita interplanetària del tercer cas resolt

5.4 Cas 1 de Mart a Júpiter

- Sortida: t_1 =2037 Octubre 25

  $\vec{r}_M(t_1) = \begin{bmatrix} 1.0628 & 0.9973 & -0.0052 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} -21.4616 & 17.6853 & 0.6145 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty 1} = \begin{bmatrix} -5.8071 & -2.0496 & -0.1839 \end{bmatrix}$ km/s

  $\Delta v = 4.7546$ km/s

- Òrbita interplanetària: $\Delta t =$ dies

  $\Delta\lambda = 121.960°$

  $\Delta\theta = 121.957°$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
3.87684 AU	0.64755	32.516°	317.644°	1.267°	52.502°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 1

- Arribada: t_2 =2039 Octubre 15

  $\vec{r}_J(t_2) = \begin{bmatrix} -5.2121 & 1.4740 & 0.1105 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} -8.6037 & -6.1586 & 0.0680 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty 2} = \begin{bmatrix} -4.8918 & 5.8075 & -0.0644 \end{bmatrix}$ km/s

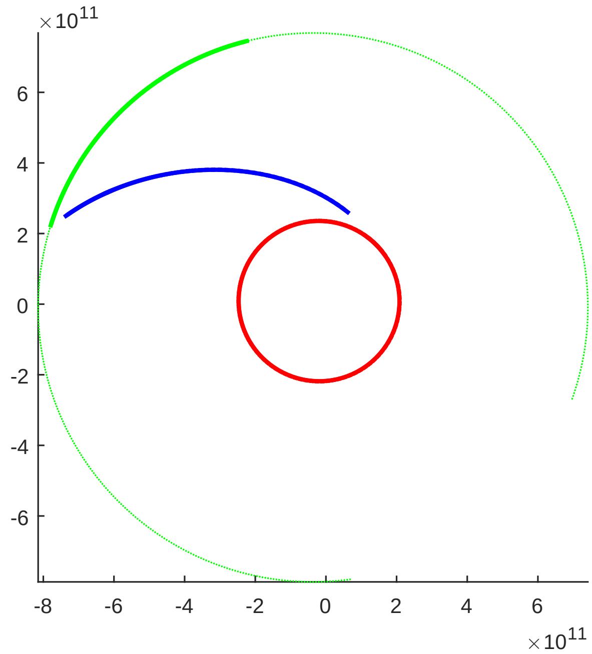

Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 1

5.5 Cas 2 de la Terra a Mart

- Sortida: t_1 =2033 Març 13

  $\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} -0.9890 & 0.1028 & 0.0000 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} 9.9048 & -31.9421 & -1.1405 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty 1} = \begin{bmatrix} 13.4689 & -2.2007 & -1.1405 \end{bmatrix}$ km/s

  $\Delta v = 9.8291$ km/s

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 145$ dies

  $\Delta\lambda = 126.666°$

  $\Delta\theta = 126.647°$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.34585 AU	0.26502	347.845°	192.155°	2.154°	352.263°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 2

- Arribada: t_2 =2033 Agost 05

  $\vec{r}_M(t_2) = \begin{bmatrix} 0.6911 & -1.2225 & -0.0426 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} 20.3889 & 10.7059 & 0.5023 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty 2} = \begin{bmatrix} -1.6222 & -3.2966 & 0.7500 \end{bmatrix}$ km/s

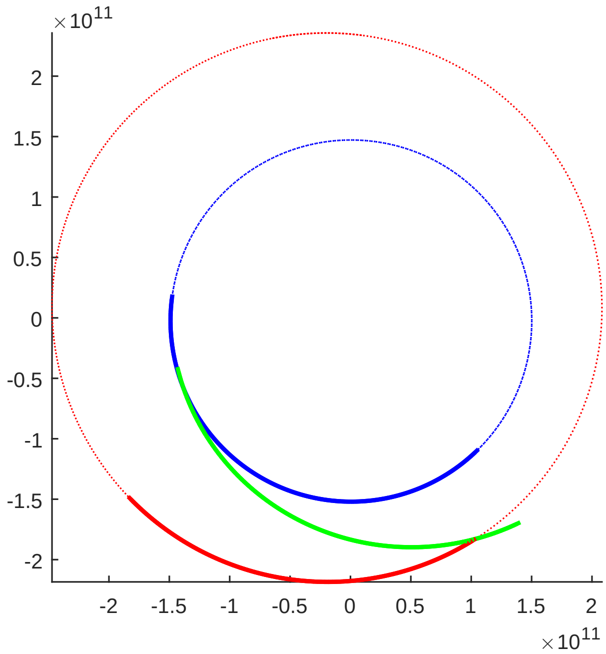

Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 2

5.6 Cas 3 de la Terra a Mart

- Sortida: t_1 =2031 Gener 23

  $\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} -0.5527 & 0.8145 & 0.0000 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} -27.9432 & -17.5505 & 1.3211 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty 1} = \begin{bmatrix} -2.8084 & -0.7119 & 1.3212 \end{bmatrix}$ km/s

  $\Delta v = 3.5559$ km/s

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 190$ dies

  $\Delta \lambda = 148.092°$

  $\Delta \theta = 148.071°$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.24568 AU	0.20996	1.674°	358.471°	2.293°	122.188°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 3

- Arribada: t_2 =2031 Agost 01

  $\vec{r}_M(t_2) = \begin{bmatrix} 0.0231 & -1.4528 & -0.0310 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} 22.3536 & -2.8628 & -0.6964 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty 2} = \begin{bmatrix} -2.7906 & -5.3291 & -0.1299 \end{bmatrix}$ km/s

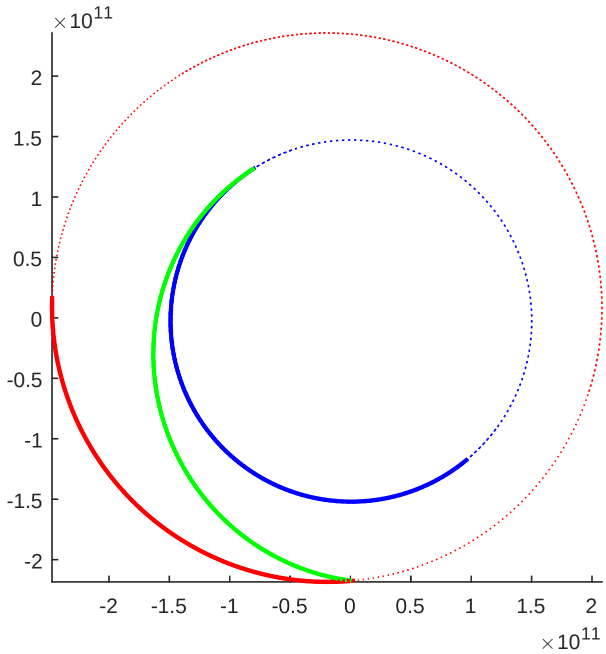

Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 3

5.7 Cas 4 de la Terra a Mart

- Sortida: t_1 =2025 Juliol 18

  $\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} 0.4609 & -0.9057 & 0.0000 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} 23.7170 & 8.0146 & -0.2439 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty_1} = \begin{bmatrix} 5.0303 & 30.9264 & -0.2439 \end{bmatrix}$ km/s

  $\Delta v = 25.6087$ km/s

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 95$ dies

  $\Delta\lambda = 308.176°$

  $\Delta\theta = 51.825°$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.07039 AU	0.46551	112.076°	67.350°	0.563°	115.868°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 4

- Arribada: t_2 =2025 Octubre 21

  $\vec{r}_M(t_2) = \begin{bmatrix} -0.6676 & -1.3608 & -0.0121 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} 2.1862 & 17.3824 & -0.0938 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty_2} = \begin{bmatrix} -20.4827 & 25.9781 & 0.6436 \end{bmatrix}$ km/s

5.8 Cas 5 de la Terra a Venus

- Sortida: t_1 =2023 Maig 27

  $\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} -0.3986 & -0.9317 & 0.0000 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} 23.5396 & -11.9653 & -0.7732 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty 1} = \begin{bmatrix} -3.3635 & -0.1365 & -0.7731 \end{bmatrix}$ km/s

  $\Delta v = 3.6369$ km/s

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 158$ dies

  $\Delta\lambda = 202.000°$

  $\Delta\theta = 157.992°$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
0.86221 AU	0.23212	147.050°	32.950°	1.678°	65.165°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 5

- Arribada: t_2 =2023 Novembre 01

  $\vec{r}_V(t_2) = \begin{bmatrix} 0.0215 & 0.7194 & 0.0086 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} -34.9238 & 17.3219 & 1.1418 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty 2} = \begin{bmatrix} 0.2017 & 16.4570 & -0.8976 \end{bmatrix}$ km/s

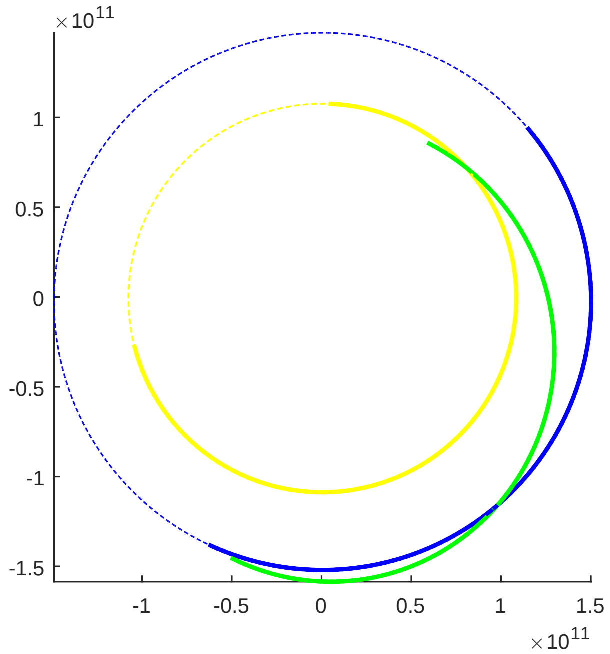

Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 5

5.9 Cas 6 de Mart a la Terra

- Sortida: t_1 =2033 Gener 18

  $\vec{r}_M(t_1) = \begin{bmatrix} -1.5798 & -0.4008 & 0.0304 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} -3.4918 & -19.9512 & 0.5779 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty 1} = \begin{bmatrix} -10.3564 & 1.4666 & 1.1954 \end{bmatrix}$ km/s

  $\Delta v = 7.4443$ km/s

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 222$ dies

  $\Delta\lambda = 140.675°$

  $\Delta\theta = 140.663°$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.31415 AU	0.24918	191.345°	207.993°	1.696°	154.559°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 6

- Arribada: t_2 =2033 Agost 28

  $\vec{r}_T(t_2) = \begin{bmatrix} 0.9246 & -0.4059 & 0.0000 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} 25.3126 & 14.6475 & -0.7136 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty 2} = \begin{bmatrix} 13.8240 & -12.5180 & -0.7137 \end{bmatrix}$ km/s

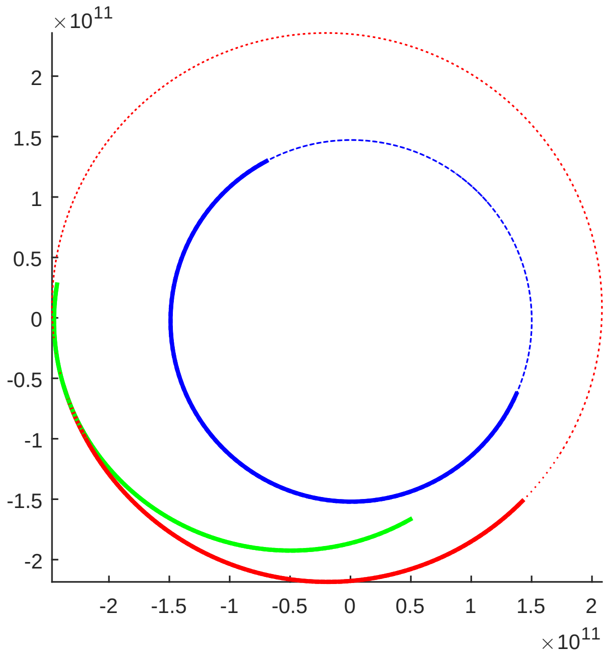

Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 6

5.10 Cas 7 de Mart a la Terra

- Sortida: t_1 =2030 Novembre 20

  $\vec{r}_M(t_1) = \begin{bmatrix} -1.4214 & 0.8647 & 0.0531 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_1) = \begin{bmatrix} -13.0320 & -14.8691 & 0.7226 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty 1} = \begin{bmatrix} -1.3512 & 3.7651 & 0.8259 \end{bmatrix}$ km/s

  $\Delta v = 3.8493$ km/s

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 228$ dies

  $\Delta\lambda = 134.956°$

  $\Delta\theta = 134.927°$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.31613 AU	0.26617	184.700°	220.499°	2.572°	103.210°

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 7

- Arribada: t_2 =2031 Juliol 06

  $\vec{r}_T(t_2) = \begin{bmatrix} 0.2640 & -0.9818 & 0.0000 \end{bmatrix}$ AU

  $\vec{v}_s(t_2) = \begin{bmatrix} 30.9612 & 26.0696 & -1.3808 \end{bmatrix}$ km/s

  $\vec{v}_{\infty 2} = \begin{bmatrix} 2.6783 & -5.0153 & -1.3808 \end{bmatrix}$ km/s

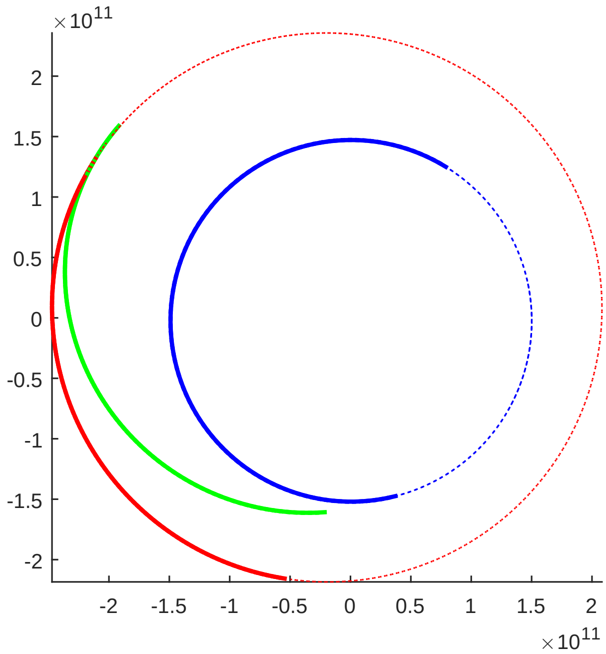

Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 7

5.11 Cas 8 de la Terra a Mart

- Sortida: t_1 =2021 Novembre 26

  $\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} 0.4106 & 0.8971 & 0.0000 \end{bmatrix}$ AU

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 85$ dies

  $\Delta\lambda = 198.239°$

  $\Delta\theta = 161.735°$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
1.34032 AU	1.44253	$288.926°$	$251.074°$	$3.166°$	$243.635°$

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 8

- Arribada: t_2 =2022 Febrer 19

  $\vec{r}_M(t_2) = \begin{bmatrix} -0.1973 & -1.4584 & -0.0257 \end{bmatrix}$ AU

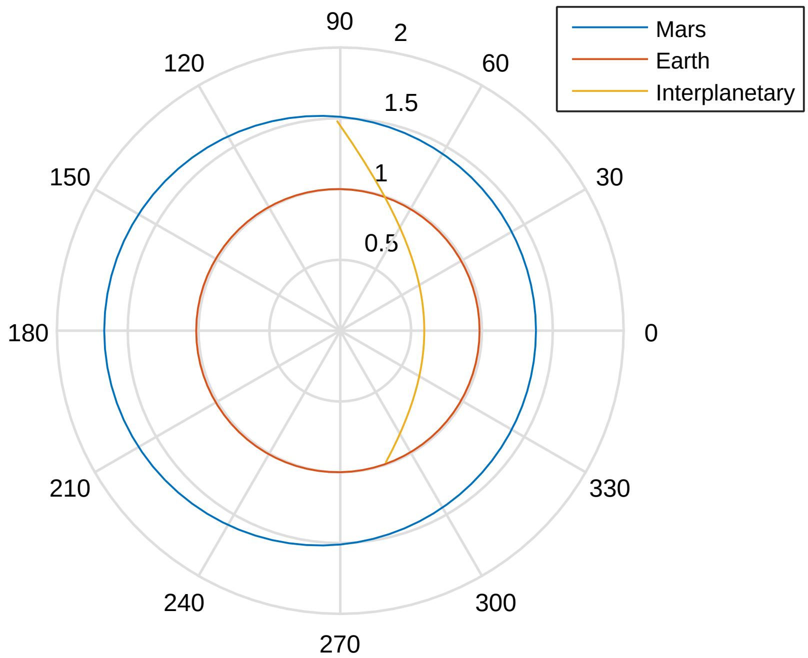

Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 8

5.12 Cas 9 de la Terra a Mart

- Sortida: t_1 =2022 Gener 15

  $\vec{r}_T(t_1) = \begin{bmatrix} -0.4355 & 0.8821 & 0.0000 \end{bmatrix}$ AU

- Òrbita interplanetària: $\Delta t = 95$ dies

  $\Delta\lambda = 182.508°$

  $\Delta\theta = 176.966°$

a	e	θ_1	ω	i	Ω
5.10048 AU	1.11071	$280.991°$	$259.009°$	$34.288°$	$294.501°$

Taula 5.1: Elements orbitals del cas 9

- Arribada: t_2 =2022 Abril 20

  $\vec{r}_M(t_2) = \begin{bmatrix} 0.6495 & -1.2481 & -0.0421 \end{bmatrix}$ AU

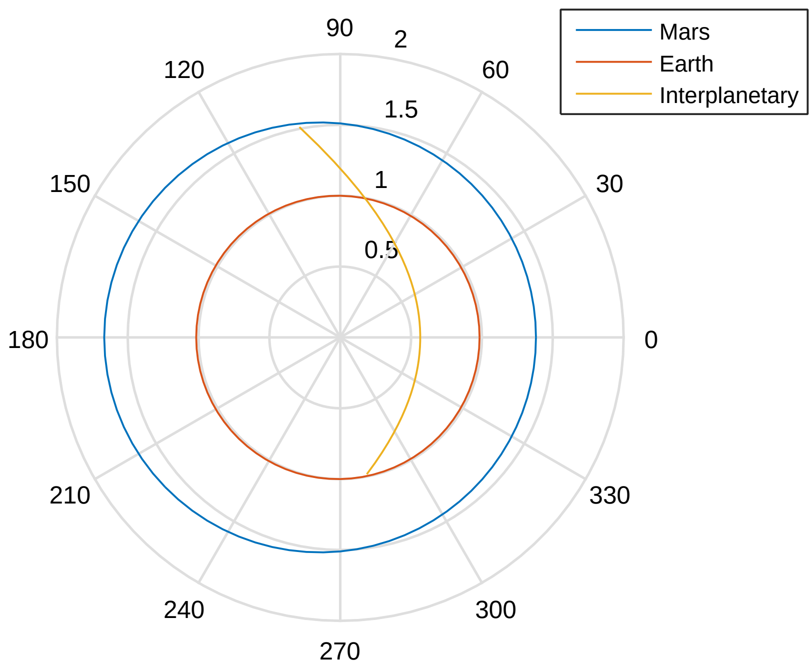

Figura 5.1: Òrbita interplanetària del cas 9

6 Conclusions

Ens vam decidir pel treball de càlcul de trajectòries interplanetaries des del primer moment degut a que és un tema que realment ens apassiona. Vivim en una època en què l'arribada a Mart és imminent. Això ens anima a pensar que encara es pot anar més lluny, però per això cal saber com arribar-hi.

No obstant, el càlcul de trajectòries interplanetàries no és una tasca fàcil, per això s'empren diverses aproximacions. El mètode de *Patched Conics Approximation* és un molt útil per a obtenir una primera aproximació de l'òrbita que ha de seguir una sonda per viatjar d'un planeta a un altre. Tanmateix, els resultats no són exactes, ja que es tracta d'un mètode numèric i es basa en aproximacions.

Com es pot veure en els resultats obtinguts, alguns valors es desvien de la solució aportada pel professor. Aquesta variació s'explica perquè des dels primers càlculs els resultats que s'obtenen no són 100% iguals als de referència. És a dir, s'observa que una petita variació en els vectors de posició comporta una gran variació en els angles d'Euler. No obstant, es pot afirmar que els resultats que s'han obtingut són satisfactoris ja que, tot i no ser exactes, són coherents i s'aproximen a la solució real.

En quant a la distribució del treball, aquest s'ha dividit en petites funcions que s'han repartit entre els diferents membres de l'equip. Un cop elaborada, cada funció s'ha intentat validar de forma independent a la resta del codi. D'aquesta forma és més fàcil trobar possibles errors i s'assegura que el programa global és funcional i robust.

Finalment, a fi de ser el més eficients possible, s'ha emprat un sistema de control de versions *Git*, per així poder treballar simultàniament sobre els mateixos arxius sense perdre cap informació.

Així doncs, s'ha aconseguit combinar la nostra passió pel tema amb una bona organització. Això ha ajudat a que poguéssim gaudir alhora que apreníem molt amb el tema escollit.

7 Bibliografia

[1] Battin, R. H. *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*. 1999.

[2] Calaf, J. 1. Sistemes de referència. *Teoria de màster UPC* (2017).

[3] Calaf, J. 2. Moviment orbital kepleria. *Teoria de màster UPC* (2017).

[4] Calaf, J. 4. Maniobres orbitals bàsiques. *Teoria de màster UPC* (2017).

[5] Calaf, J. 5. Trajectòries interplanetàries i lunars. *Teoria de màster UPC* (2017).

[6] Calaf, J. A. Repàs de Matemàtiques. *Teoria de màster UPC* (2017).

[7] Calaf, J. A. Treballs de Mecànica Orbital. *Teoria de màster UPC* (2017).

[8] Vallado, D. A. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*. 1998.