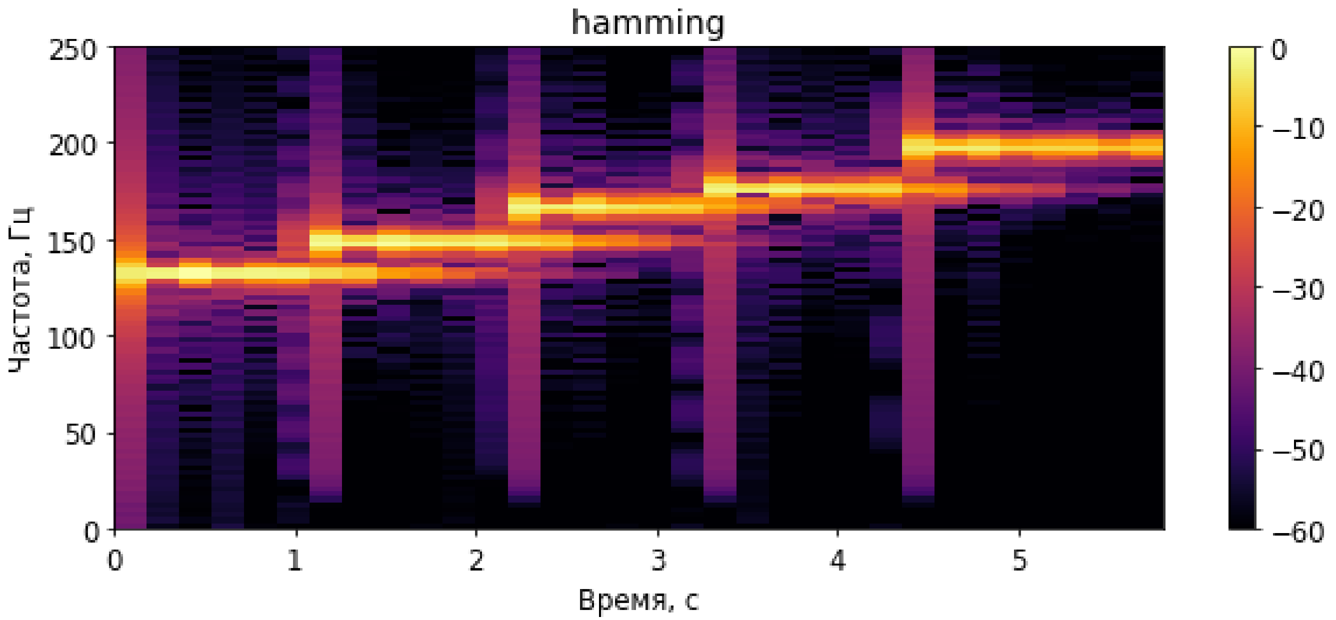
Лекция 12 по курсу «Дискретные преобразования сигналов»

23 апреля 2024 г.

8. Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT). Формула анализа. Разрешения по времени и по частоте. Обратимость.



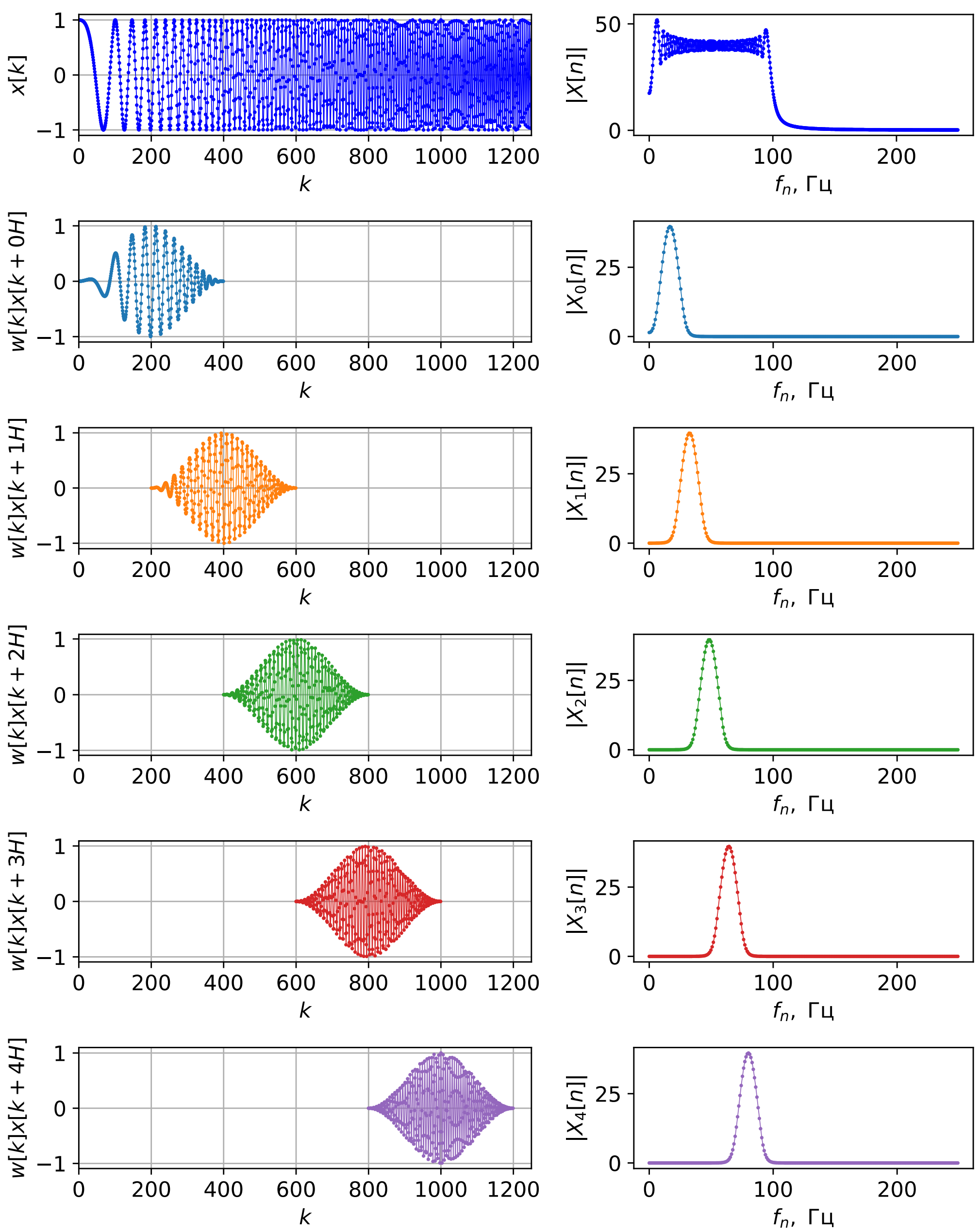
Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT).

Кратковременное дискретное преобразование Фурье (Discrete STFT, англ. Discrete Short-time Fourier transform) может задаваться формулой

$$X_m[n]=\sum_{k=mR}^{mR+M-1} x[k]w[k-mR]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right),$$

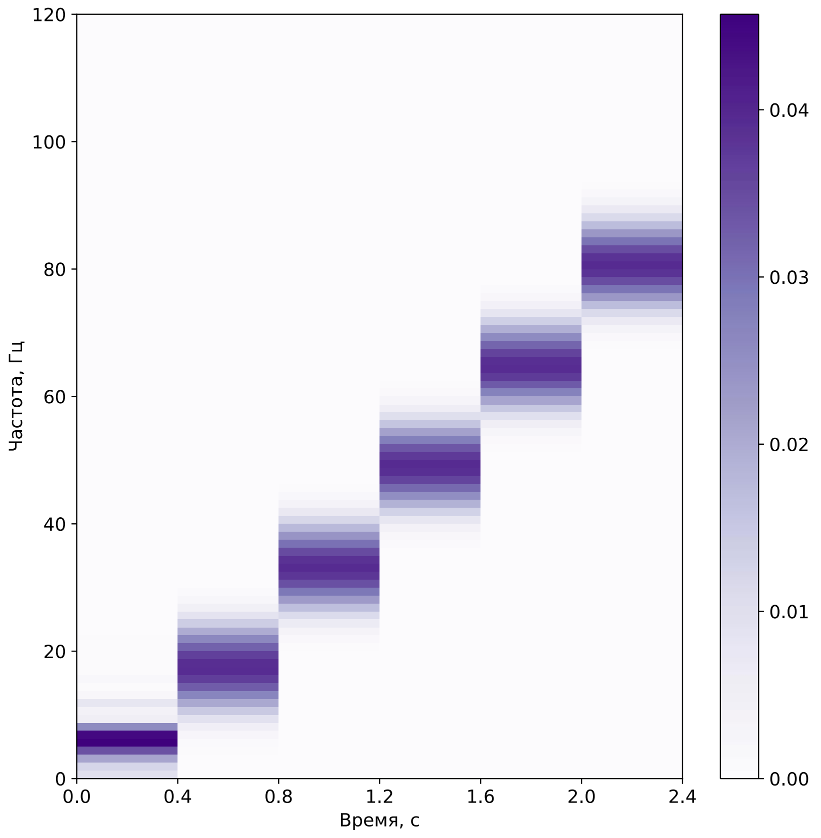
- $w[k]$ — временное окно,
- m — порядковый номер кадра,
- M — длина окна (сегмента),
- N_{FFT} – размерность ДПФ,
- $R=M-L$ – единичный сдвиг окна,
- L — число точек перекрытия.

Это преобразование позволяет осуществлять ДПФ-анализ на коротких интервалах времени. Для графического отображения результатов часто используется представление в виде графика с двумя осями, где по горизонтальной оси отображается время (или номер кадра m), по вертикальной — соответствующие частоты, а цветом — $|X_m[n]|$,.$|X_m[n]|^2$, или фазовая часть $X_m[n]$.

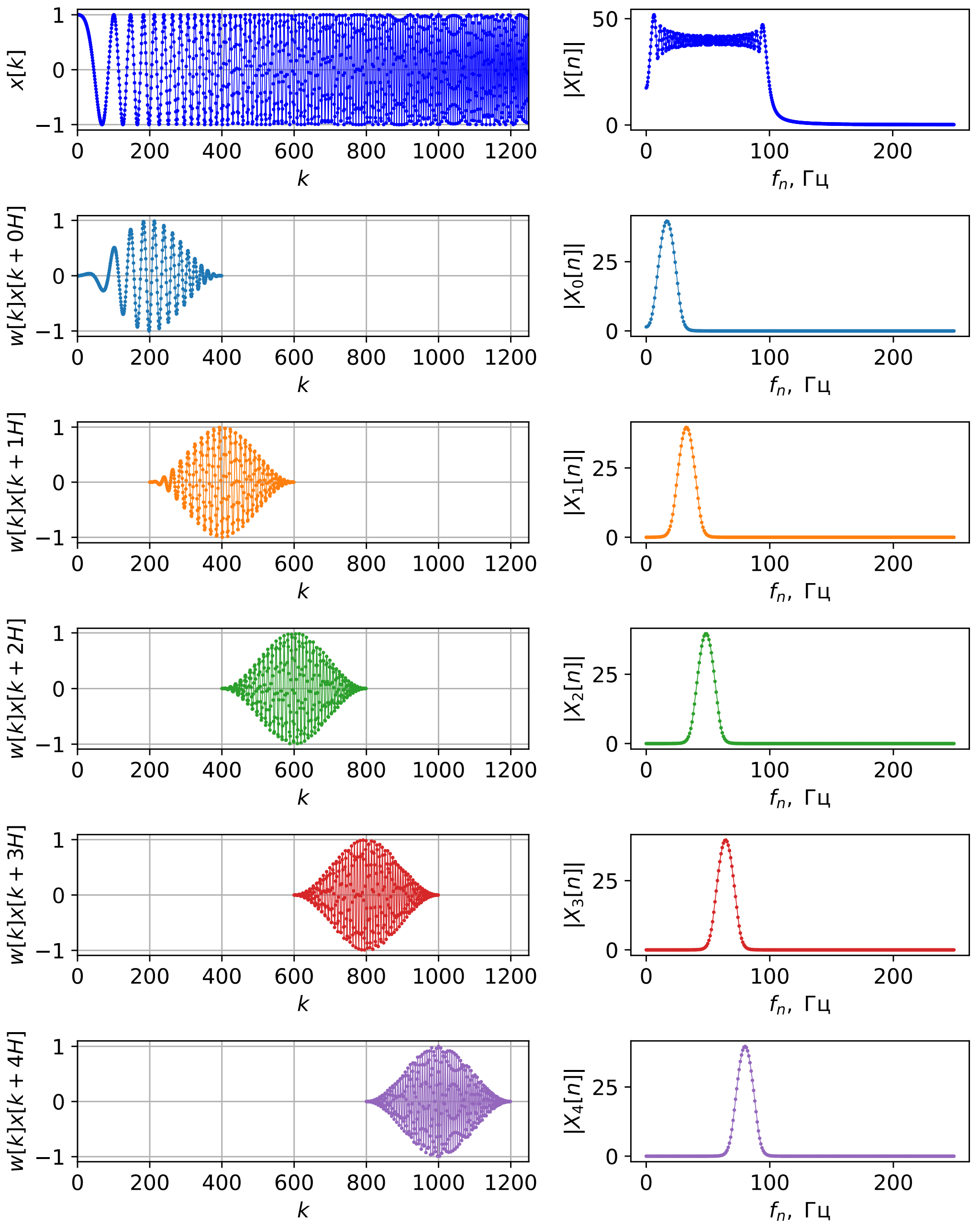


Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT)

Пример. Рассмотрим результаты спектрального анализа по отсчетам ЛЧМ – сигнала. В STFT используется окно Ханна, $M=400,\ L=200,\ N_{\text{FFT}}=M,\ f_{\text{д}}=500$ Гц, за время наблюдения 2,4 секунды мгновенная частота ЛЧМ сигнала изменяется от 1 Гц до 80 Гц.



Спектрограмма (с нормировкой и учетом перекрытий) отсчетов ЛЧМ-сигнала (фрагмент графика для частот до 120 Гц).

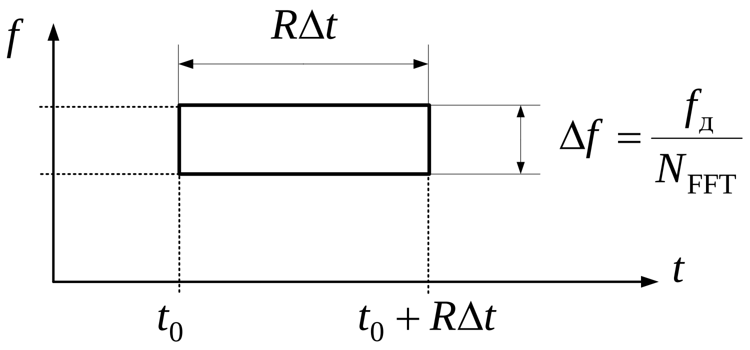


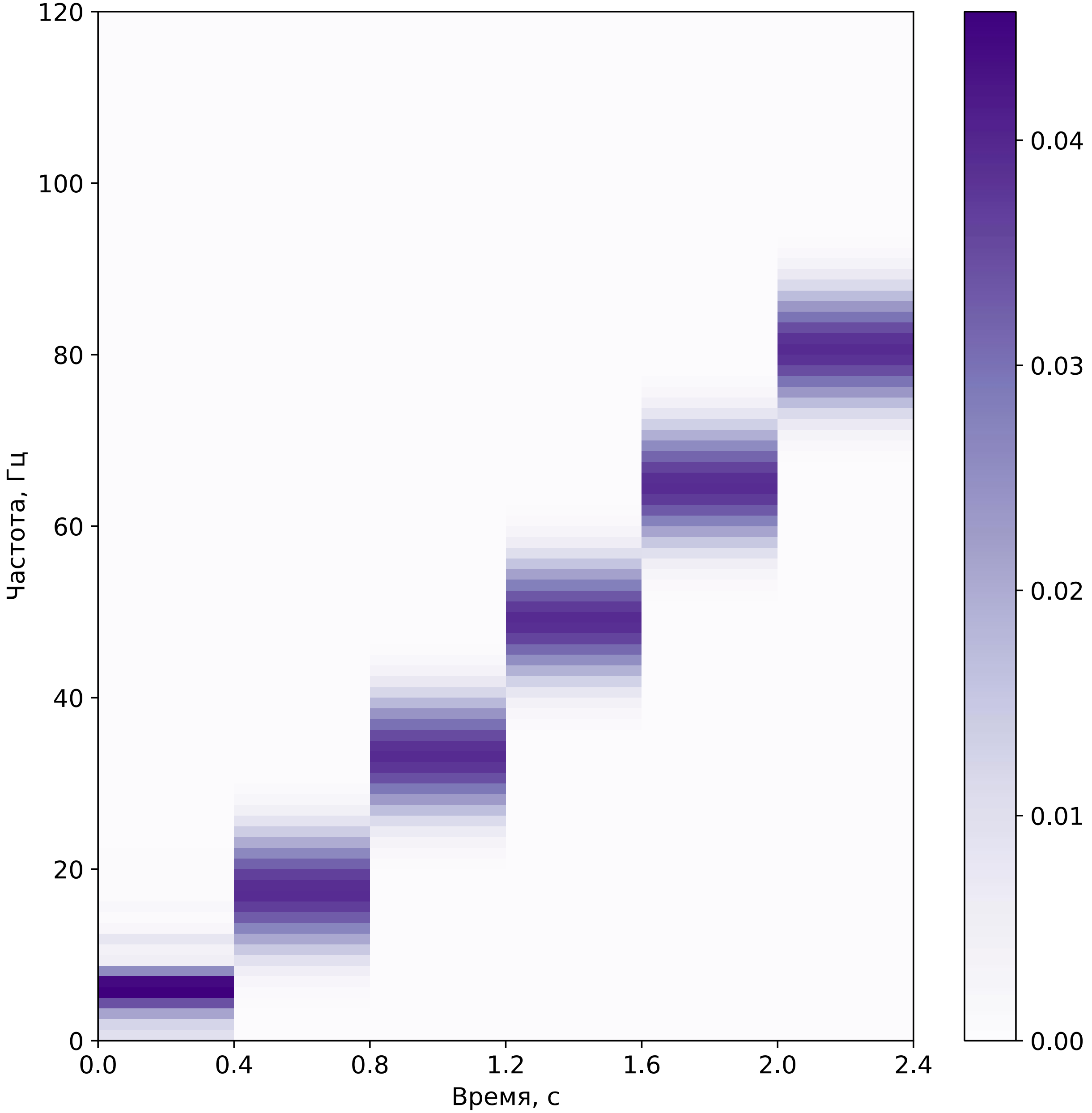
Разрешение по времени и по частоте для STFT

Результат кратковременного дискретного преобразования Фурье является дискретным по времени и по частоте. Если рассматривать вопрос о разрешении по времени и по частоте, обусловленный дискретностью сетки времени и частот, то можно установить следующее.

Ширина прямоугольника на графике STFT вдоль оси **времени** равна длине единичного сдвига окна в секундах, т.е. $R\Delta t$. В приведенном ранее примере $R\Delta t = 0,4$ с.

Ширина прямоугольника на графике STFT вдоль оси **частот** равно расстоянию между отсчетами отдельных ДПФ, входящих в формулу STFT: $\Delta f = f_д / N_{FFT}$, где N_{FFT} — размерность ДПФ.





Разрешение по времени и по частоте для STFT

На возможность различения гармонических компонент, также как и в ДПФ, здесь также влияет ширина главного лепестка окна (на уровне -3 дБ и -6 дБ). Она зависит от

- длины окна M ,
- вида окна.

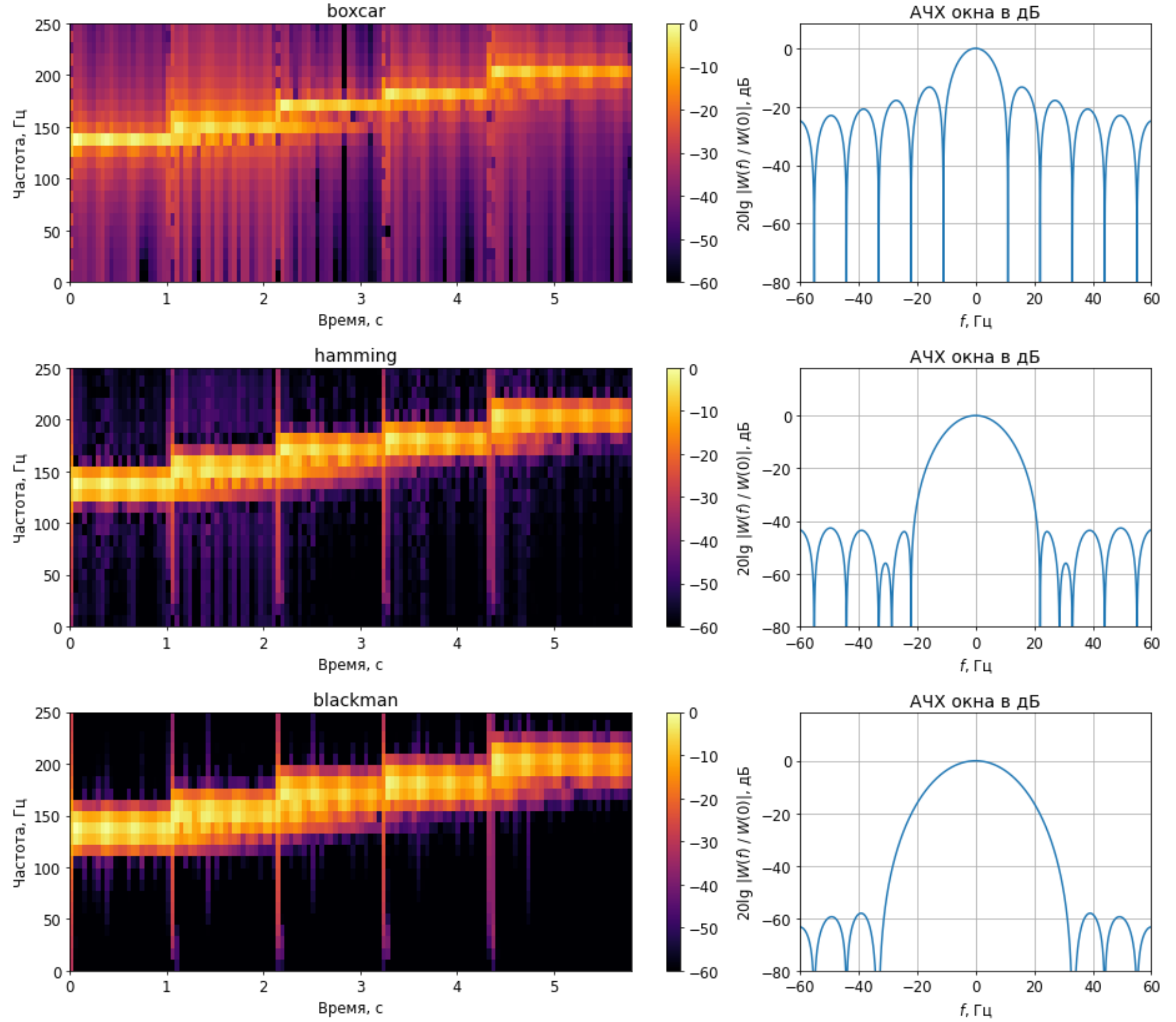
Необходимо учитывать, что увеличивая длину окна M мы улучшаем разрешение по частоте (главный лепесток становится уже), но вместе с тем, ухудшаем разрешение по времени (ширина прямоугольника по времени на графике больше).

Пример. В качестве сигнала используются отсчеты из WAV файла записи сигнала от вибрафона, $f_д = 44100$ Гц, воспроизводились соседние ноты. Перекрытие сегментов 50%. За 0 дБ взято максимальное значение $|X_m[n]|^2$.

$$R = M - L = M - M/2 = M/2.$$

В случае $M = 4000$ ширина главного лепестка у некоторых окон больше требуемой для разрешения соседних нот.

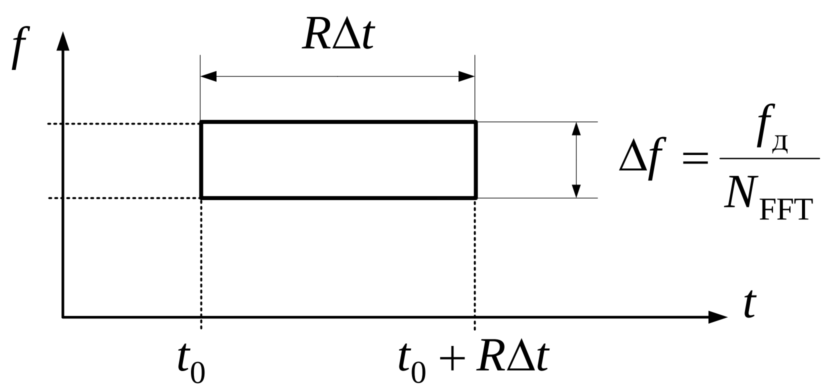
Ширина прямоугольника по времени на графике $R\Delta t \approx 0,04$ с.



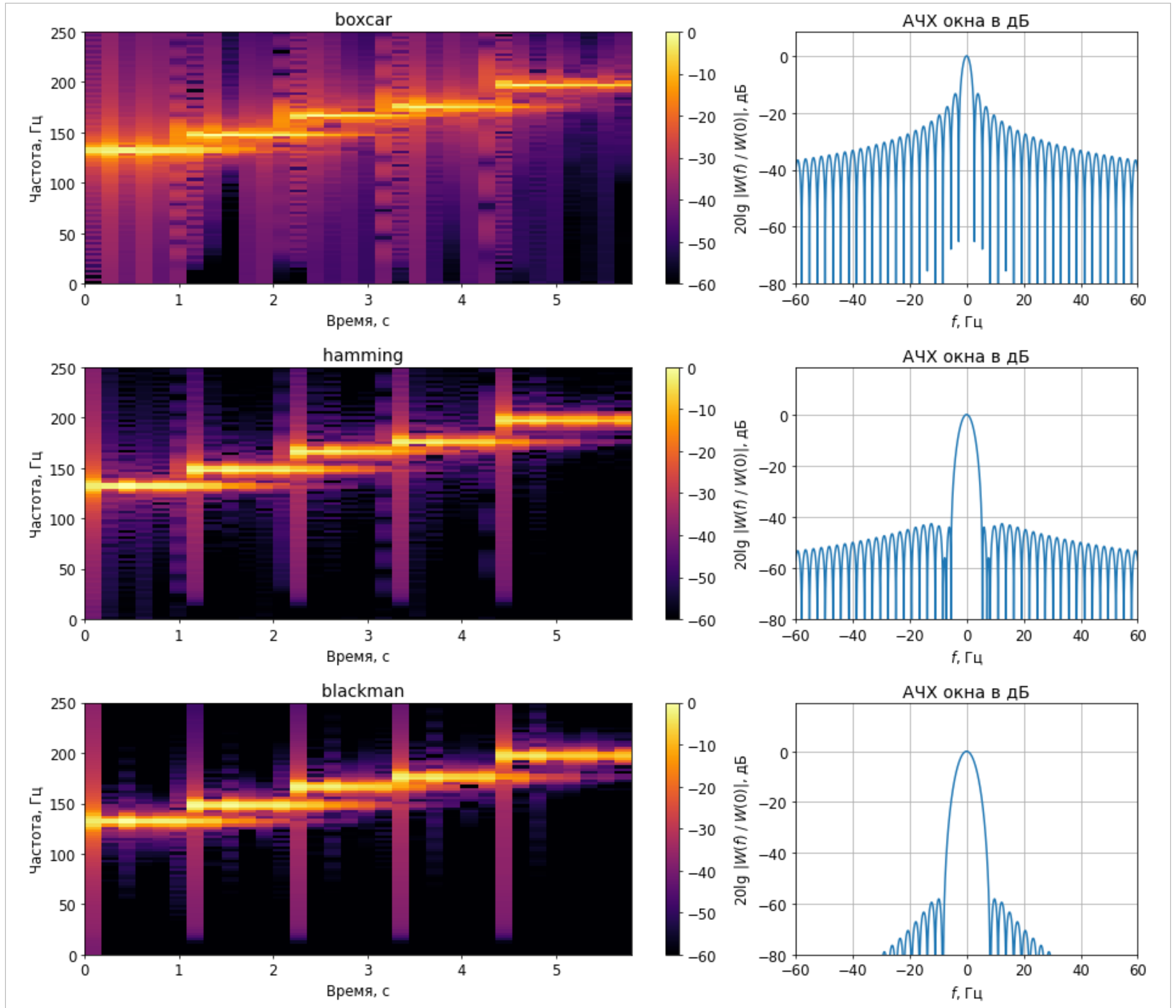
Спектрограммы в дБ и формы главного лепестка окна, M=4000

Разрешение по времени и по частоте для STFT

В случае $M = 16000$ у всех окон достаточно узкие главные лепестки и соседние ноты различимы. Вместе с тем $R\Delta t = M\Delta t / 2 \approx 0{,}18$ с. Т.е. увеличивая M мы получили более узкий главный леток окна, но вместе с тем, ухудшили разрешение по времени.



Заметим, что $\Delta f = f_д / N_{FFT}$ (ширина прямоугольника на графике STFT вдоль оси частот) может быть меньше реального разрешения спектральных комопонет.



Спектрограммы в дБ и формы главного лепестка окна, M=16000

Условия COLA и NOLA

По определению, для окна $w[k]$ выполнено условие **COLA(R)** (Constant OverLap-Add), если

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-mR] = const \ \forall k \in \mathbf{Z}$$

Если выполнено COLA(R), то

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]w[k-mR]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[k]w[k-mR]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-mR] =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\exp\left(-j2\pi\frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right)\sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-mR] = const\cdot X[n]$$

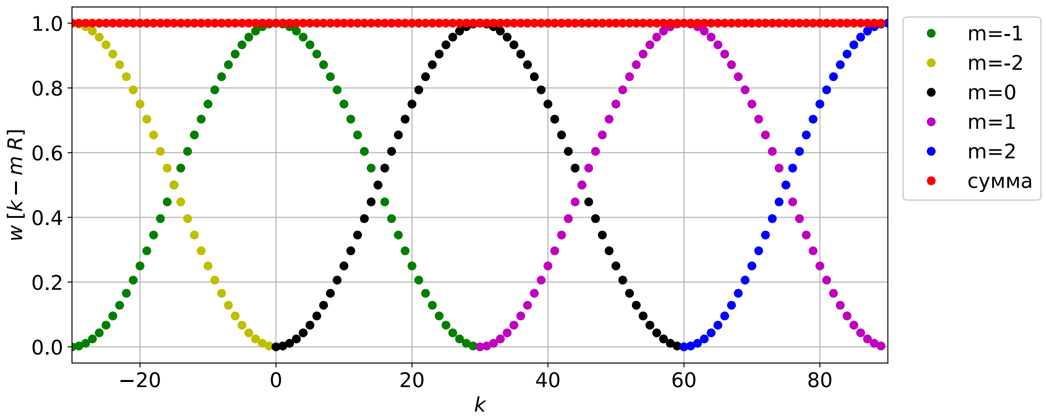
$$X[n] = const\sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m[n].$$

Формула означает, что для каждого коэффициента n сумма ДПФ по всем интервалам равна ДПФ всего сигнала.

Если условие COLA(R) выполнено, то по известному STFT гарантировано можно найти исходную последовательность.

Примеры окон и L, для которых условие выполнено:

- прямоугольное окно с перекрытием $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ от M;
- окно Бартлетта с перекрытием $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \ldots$ от M;
- окно Ханна с перекрытием $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ от M;
- любое окно при $L = M-1$, т.е. COLA(R=1) для любого окна выполнено.



Проверка условия COLA(R=30) для окна Ханна, $M=60$

По определению, окно $w[k]$ удовлетворяет условию **NOLA(R)** (Nonzero Overlap Add), если

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-mR]^2 \neq 0 \ \forall k \in \mathbf{Z}$$

Условие **NOLA(R)** необходимо для обратимости STFT.

Задачи с лекции

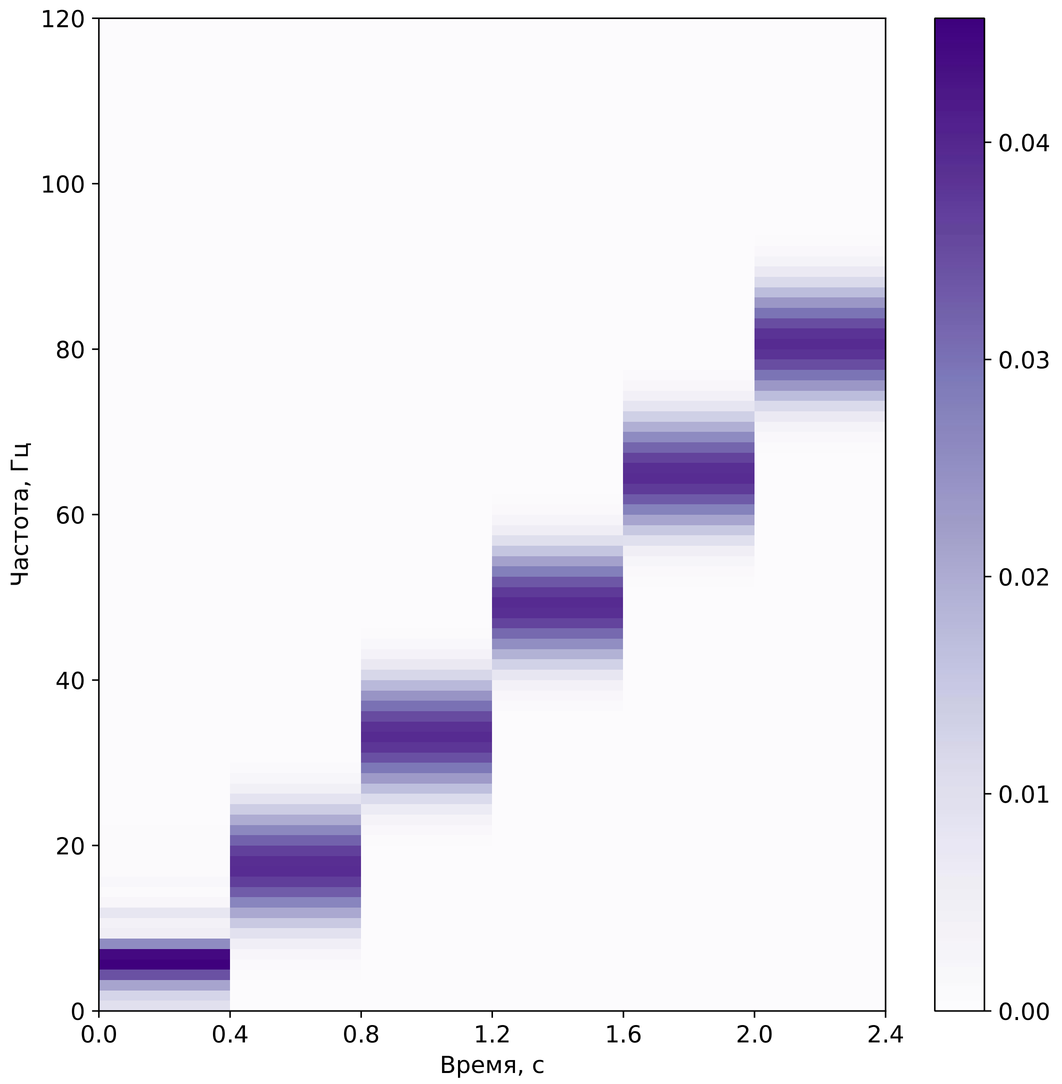
Задачи для самостоятельного решения
с лекции 23 апреля 2024 г.

№1. Предположим, что с помощью окна длиной $M = 8000$ осуществляется вычисление кратковременного дискретного преобразования Фурье последовательности

$$x[k] = \cos\left(2\pi\frac{f_1}{f_д}k + \varphi_1\right) + \cos\left(2\pi\frac{f_2}{f_д}k + \varphi_2\right)$$

длиной $N = 40000$ отсчетов без перекрытия. Фазы φ_1 и φ_2 заранее неизвестны. Частота дискретизации $f_д = 44100$ Гц. Указать, начиная с какого значения $\Delta f = |f_1 - f_2|$ можно выбором необходимой размерности ДПФ N_{FFT} обеспечить различимость гармонических компонент на спектрограмме. Рассмотреть случаи следующих окон: а) прямоугольного, б) Бартлетта, в) Ханна, г) Хэмминга, д) Блэкмана.

№2. На рисунке представлены результаты спектрального анализа по отсчетам ЛЧМ – сигнала. В STFT используется окно Ханна, $M = 400$, $L = 200$, $N_{FFT} = M$, $f_д = 500$ Гц, за время наблюдения 2,4 секунды мгновенная частота ЛЧМ сигнала изменяется от 1 Гц до 80 Гц. Укажите, чему равна ширина прямоугольника (ячейки одного цвета) на графике STFT вдоль оси времени и по оси частот.



Задачи с лекции

№3. Предположим, что для кратковременного дискретного преобразования Фурье используется окно длиной $M = 512$ отсчетов. Проверить, выполнены ли условия COLA(R) и NOLA(R) ($R = M - L$) для случая

а) числа точек перекрытия $L_0 = 0$ (без перекрытия), $L_1 = 1$, $L_2 = 128$ (25%), $L_3 = 256$ (50%), $L_4 = 384$ (75%), $L_5 = 511$ и прямоугольного окна;

б) числа точек перекрытия $L_0 = 0$ (без перекрытия), $L_1 = 256$ (50%), $L_2 = 511$ и окна Ханна.

* Проверьте результаты с помощью функций scipy.signal.check_COLA и scipy.signal.check_NOLA.