

## Лабораторная работа №3 «Цифровой спектральный анализ детерминированных сигналов»

Данная лабораторная работа посвящена основам цифрового спектрального анализа. Ей предшествует лабораторная работа №2 ДВПФ и ДПФ и лабораторная работа №1 дискретизация аналоговых сигналов. Работа нацелена на изучение эффектов, возникающих при спектральном анализе.

Под детерминированностью сигнала в данном случае подразумевается то, что спектральный анализ производится для конкретной реализации, которая полностью определена. Спектральный анализ случайных процессов, представленных ансамблем реализаций, подробно рассматривается в лабораторной работе «Цифровой спектральный анализ» на 5 курсе.

Лабораторная работа состоит из трех частей, каждая из которых рассчитана на одно занятие (4 ак. часа). Задания по моделированию выполняются с помощью библиотек языка программирования Python 3 (NumPy, SciPy, Matplotlib) либо в средах MATLAB / GNU Octave.

### Задание к допуску

**№1.** Вычислить ДПФ  $W[n]$  и ДВПФ  $W(v)$  для следующих оконных функций длины  $N$ .

а) Прямоугольное окно

$$w_{\text{пр}}[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

б) Окно Ханна

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

в) Окно Хэмминга

$$w_{\text{Хэмминга}}[k] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

г) Окно Блэкмана

$$w_{\text{Блэкмана}}[k] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi k}{N} + 0,08 \cos \frac{4\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

**№2.** Вычислите ДВПФ последовательности  $y[k] = x[k]w[k]$ , где  $x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16} k)$  и

$$w[k] = \sum_{m=0}^{15} 1[k-m].$$

**№3.** Вещественный сигнал  $x(t)$  с полосой  $2f_b = 10$  кГц ( $f_b$  – верхняя граничная частота) дискретизируется с минимально возможной частотой дискретизации в соответствии с теоремой отсчетов. В результате получается последовательность  $x[k]$ . Обозначим через  $X[n]$  1000-точечное ДПФ последовательности  $x[k]$ .

а) Каким частотам (в Гц) в ДВПФ последовательности  $x[k]$  соответствуют отсчеты ДПФ с номерами  $n_1 = 100$  и  $n_2 = 850$ ?

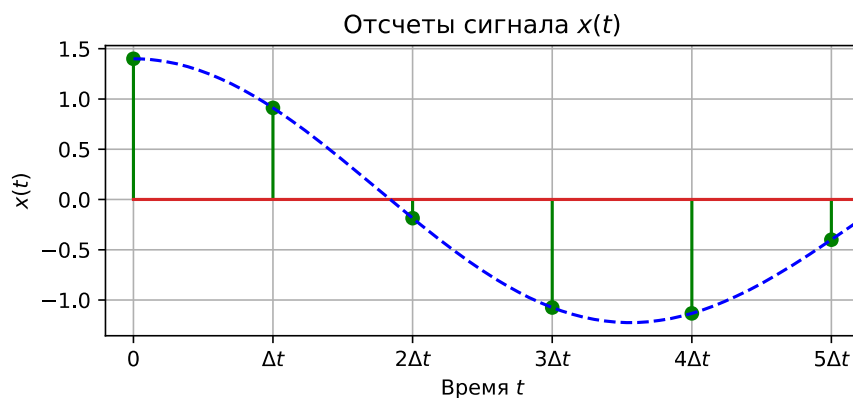
б) Каким частотам (в Гц) в спектре исходного сигнала  $x(t)$  соответствуют индексы  $n_1 = 100$  и  $n_2 = 850$  в последовательности  $X[n]$ ?

**№4.** Последовательность  $x[k]$  из 1000 элементов получена в результате дискретизации непрерывного сигнала  $x(t)$  с частотой  $f_d = 20480$  Гц. Обозначим через  $X[n]$  1024-точечное ДПФ последовательности  $x[k]$  (дополненной нулевыми отсчетами). Определить расстояние (в Гц) между непрерывными частотами, которые соответствуют соседним отсчетам ДПФ.

## Модуль 1. ДПФ и спектральный анализ

### Теоретическая часть

В первой части лабораторной работы мы будем рассматривать следующую ситуацию. Предположим, что наблюдается некоторый аналоговый сигнал  $x(t)$ . Мы получили его выборки  $x(k\Delta t)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  с шагом  $\Delta t$ . Чтобы значительно ослабить эффект наложения (полностью его исключить, как правило, невозможно), перед взятием выборок сигнал  $x(t)$  был пропущен через фильтр.



Предположим, что время наблюдения конечно и мы наблюдаем  $N$  отсчетов сигнала  $x(k\Delta t)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Задача состоит в том, чтобы с помощью ДПФ по этим выборкам оценить спектр сигнала.

### Вычисление спектра дискретизованного сигнала с помощью ДПФ

Спектр дискретизованного сигнала  $X_d(f)$  определяется с помощью ДВПФ через выборки  $x[k]$ :

$$X_d(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp(-j2\pi f k \Delta t),$$

$$x[k] = \frac{1}{f_d} \int_{-f_d/2}^{f_d/2} X_d(f) \exp(j2\pi f k \Delta t) df.$$

Отметим, что сигнал в рассматриваемом нами случае дискретизованной сигнал представлен конечным числом отсчетов  $x[k]$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Как правило, мы можем определить ДВПФ лишь в  $N$  точках на оси частот  $f_n = n \frac{f_d}{N} = n\Delta f$ ,  $n \in Z$  на одном периоде по оси частот, например на  $[0; f_d)$ . Тогда мы вычисляем

$$X_d(n\Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{N} nk\right), \text{ для } n = 0, 1, \dots, N-1.$$

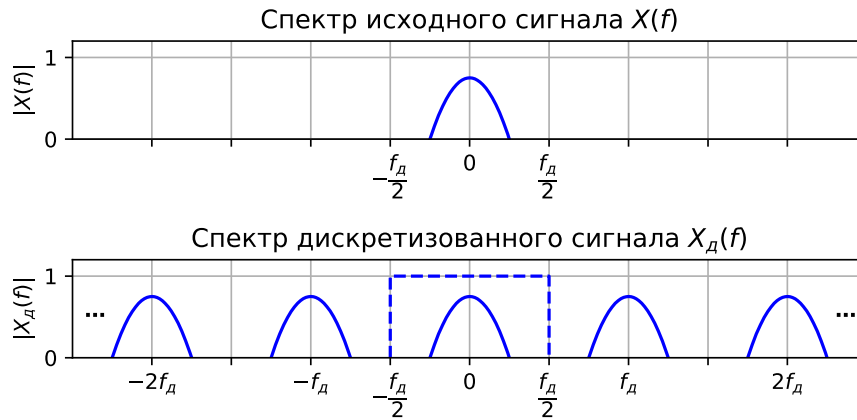
Заметим, что мы получили формулу прямого ДПФ, т.е.  $X[n] = X_d(n\Delta f)$  и ДПФ представляют собой выборки спектра дискретизованного сигнала, взятые с шагом  $\Delta f = \frac{f_d}{N}$ . Шаг по частоте  $\Delta f$  определяет разрешение по частоте.

Если частотное разрешение недостаточно для анализа, то мы можем его увеличить дополнив рассматриваемую последовательность нулевыми отсчетами. Добавление нулевых отсчетов никак не изменяет сам дискретный сигнал, однако увеличивает размерность ДПФ, а значит и число точек, в которых мы вычисляем спектр. Пусть сигнал дополнен нулями до  $M$  отсчетов,  $M > N$ . Тогда

$$X_d(n\Delta f) = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j \frac{2\pi}{M} nk\right), \text{ для } n = 0, 1, \dots, M-1.$$

### Оценка спектра исходного сигнала с помощью ДПФ

Заметим, что  $f = nf_d / N$  Гц – это частота в спектре дискретизованного сигнала, который при отсутствии наложения спектров образуется путем периодического продолжения (повторения) спектра исходного аналогового сигнала с периодом, равным частоте дискретизации ( $f_d$  в случае оси в Гц или 1 в случае оси нормированных частот). Это означает, что отсчет ДПФ с номером  $n$  будет соответствовать в спектре аналогового сигнала частоте  $f \in [-f_d/2; f_d/2]$ , такой, что  $f = (n + mN)f_d / N$ , где  $m$  – целое число.



**Пример.**

Рассмотрим для  $f_0 = 5$  Гц сигнал длительностью 1 с вида

$$x_a(t) = \sin(2\pi f_0 t), \quad 0 \leq t < 1.$$

Выберем частоту дискретизации  $f_d = 20$  Гц ( $\Delta t = 0,05$  с).

Последовательность отсчетов дискретизованного сигнала

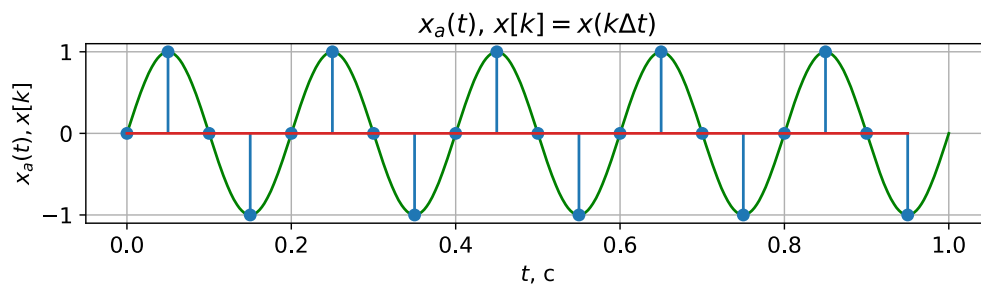
$$x[k] = x_a(k\Delta t) = \sin\left(2\pi \frac{f_0}{f_d} k\right).$$

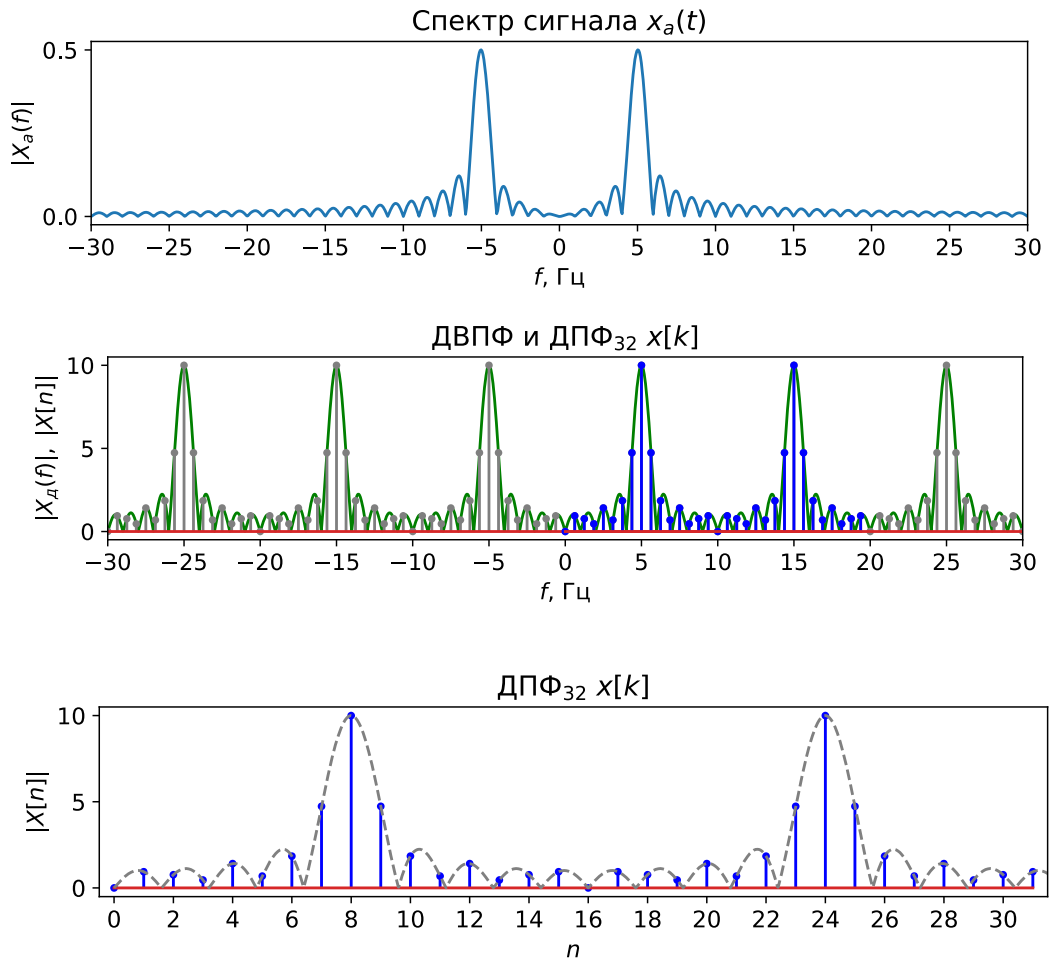
Спектр  $X_d(f)$  дискретизованного сигнала связан со спектром  $X_a(f)$  аналогового сигнала соотношением

$$X_d(f) = \frac{T}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_a(f - mf_d).$$

где  $T$  определено соотношением  $x[k] = Tx_a(k\Delta t)$ . Если бы эффекта наложения не было, то  $X_d(f)$  и  $X_a(f)$  совпадали бы на интервале  $[-f_d/2, f_d/2]$ , т.е. от  $-10$  Гц до  $10$  Гц.

Заметим, что отсчеты ДПФ размерности  $N = 32$  для  $n = 0, 1, \dots, N-1$  находятся на полуинтервале  $[0, f_d)$ .





### Пример задачи распознавания спектральных компонент

Приведем пример задачи спектрального анализа по обнаружению и оцениванию параметров сигнала. Пусть известно, что обрабатываемая последовательность имеет вид

$$x[k] = \sum_{m=1}^M A_m \sin(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где  $A_m$  и  $\varphi_m$  – неизвестные заранее амплитуды и фазы гармонических составляющих;  $m$  – натуральные числа, определяющие нормированные частоты  $\nu_m = m/N$  гармонических составляющих, которые совпадают с бинами ДПФ,  $m \leq (N-1)/2$ .

Требуется выразить неизвестные амплитуды  $A_m$  и фазы  $\varphi_m$  через отсчеты ДПФ данной последовательности.

**Решение.**

Для определения  $A_m$  и  $\varphi_m$  в этом случае достаточно вычислить ДПФ последовательности:

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{m=1}^M A_m \sin(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m) \right) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M \frac{A_m}{2j} \sum_{k=0}^{N-1} \left[ e^{j\left(\frac{2\pi}{N}mk + \varphi_m\right)} - e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}mk + \varphi_m\right)} \right] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^M \frac{A_m}{2j} \left[ \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}(m-n)k + \varphi_m\right)} - \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\left(\frac{2\pi}{N}(N-m-n)k - \varphi_m\right)} \right] =$$

$$= \begin{cases} \sum_{m=1}^M \left[ \tilde{X}[m] = \frac{A_m}{2} e^{j(\varphi_m - \pi/2)} \right], & \text{если } n \in \left[ 0, \frac{N}{2} - 1 \right], \\ \sum_{m=1}^M \left[ \tilde{X}[N-m] = \frac{A_m}{2} e^{-j(\varphi_m - \pi/2)} \right], & \text{если } n \in \left[ \frac{N}{2}, N-1 \right]. \end{cases}$$

Отсюда находим неизвестные амплитуды и фазы:

$$A_m = 2|\tilde{X}[m]|; \quad \varphi_m = \arg \tilde{X}[m] + \pi/2, \quad m \in \left[ 0, \frac{N}{2} - 1 \right]$$

## Задание на моделирование

### Задача 1.1. Частотная ось ДПФ.

Вариант	Имя файла	Вариант	Имя файла
<b>1</b>	'cello1.wav'	<b>7</b>	'cello3.wav'
<b>2</b>	'cello2.wav'	<b>8</b>	'cello4.wav'
<b>3</b>	'glockenspiel.wav'	<b>9</b>	'tuning-fork.wav'
<b>4</b>	'vibraphone1.wav'	<b>10</b>	'vibraphone2.wav'
<b>5</b>	'clarinet.wav'	<b>11</b>	'flute.wav'
<b>6</b>	'guitar.wav'	<b>12</b>	'wine-glass.wav'

Считайте отсчеты дискретного сигнала  $x[k]$ , содержащегося в аудиофайле Вашего варианта.

- 1) Выберите  $y[k]$  — часть информативной области сигнала  $x[k]$  длиной  $2^{14}$  отсчетов. Если в файле меньше  $2^{14}$  отсчетов, дополните ее нулями до этого числа отсчетов справа.
- 2) Постройте с помощью алгоритма БПФ один период ДВПФ сигнала  $y[k]$ . Укажите расстояние между точками по оси частот. Ось частот приведите в Гц. Определите по графику частоты основных гармонических компонент.
- 3) выведите график сигнала  $y[k]$  в области, где наблюдается колебание. По графику оцените период этого колебания  $T_0$ . Сравните частоту  $f_0 = 1/T_0$  с частотами основных гармоник из п.2.

### Задача 1.2. Задача распознавания спектральных компонент

Считайте последовательность  $x[k]$  из файла Вашего варианта (variant\_Nv\_ex\_1\_2.npy (для Python) или variant\_Nv\_ex\_1\_2.mat (для Octave и Matlab), где Nv — номер варианта). Известно, что ее аналитическая запись имеет вид

$$x[k] = \sum_{m=1}^M A_m \sin(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где  $N$  — длина последовательности,  $M < (N-1)/2$ , относительные частоты гармонических компонент совпадают с бинами ДПФ. Определите число компонент, их амплитуды  $A_m$  и фазы  $\varphi_m$ ,  $m=1, \dots, M$ .

## Контрольные вопросы к сдаче работы

**№1.1.** Пусть известно, что обрабатываемая последовательность имеет вид

$$x[k] = \sum_{m=1}^M A_m \cos(2\pi \frac{m}{N} k + \varphi_m), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

где  $A_m$  и  $\varphi_m$  — неизвестные заранее амплитуды и фазы гармонических составляющих;  $m$  — натуральные числа, определяющие нормированные частоты  $\nu_m = m/N$  гармонических составляющих, которые совпадают с бинами ДПФ,  $m \leq (N-1)/2$ .

1) Выразите неизвестные амплитуды  $A_m$  и фазы  $\varphi_m$  через отсчеты ДПФ данной последовательности.

2) Пусть для последовательности длиной  $N = 32$  известны два отсчёта ДПФ (с нормирующим множителем  $1/N$  в прямом преобразовании)  $\tilde{X}[1] = 4e^{-j\frac{\pi}{3}}$  и  $\tilde{X}[3] = 8e^{-j\frac{\pi}{6}}$ , а остальные отсчеты на отрезке  $0 \leq n \leq 16$  равны нулю. Запишите аналитическую формулу исходной последовательности.

**№1.2.** Вещественный сигнал  $x(t)$  с полосой  $2f_b = 10$  кГц ( $f_b$  — верхняя граничная частота) дискретизируется с шагом  $\Delta t$ . В результате получается последовательность  $x[k] = x(k\Delta t)$ . Вычисляется  $N$ -точечное ДПФ, где  $N = 2^m$ ,  $m$  — натуральное число. Определить минимальное значение  $m$ , при котором анализ возможен, а расстояние между отсчетами ДПФ по оси частот в герцах будет меньше 5 Гц. Для этого значения  $m$  определить допустимые пределы для частоты дискретизации  $f_{\min} < f_d < f_{\max}$ .

**№1.3.** Вычислить ДВПФ прямоугольного окна длины  $N = 8$ :

$$w[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Изобразить на одном графике:

а) ДВПФ и 8-точечное ДПФ для последовательности отсчетов данного окна;

б) ДВПФ и 16-точечное ДПФ для той же последовательности, но дополненной нулями справа до 16 отсчетов.

Указать, чему равно расстояние по оси частот между соседними отсчетами ДПФ в каждом из двух случаев.

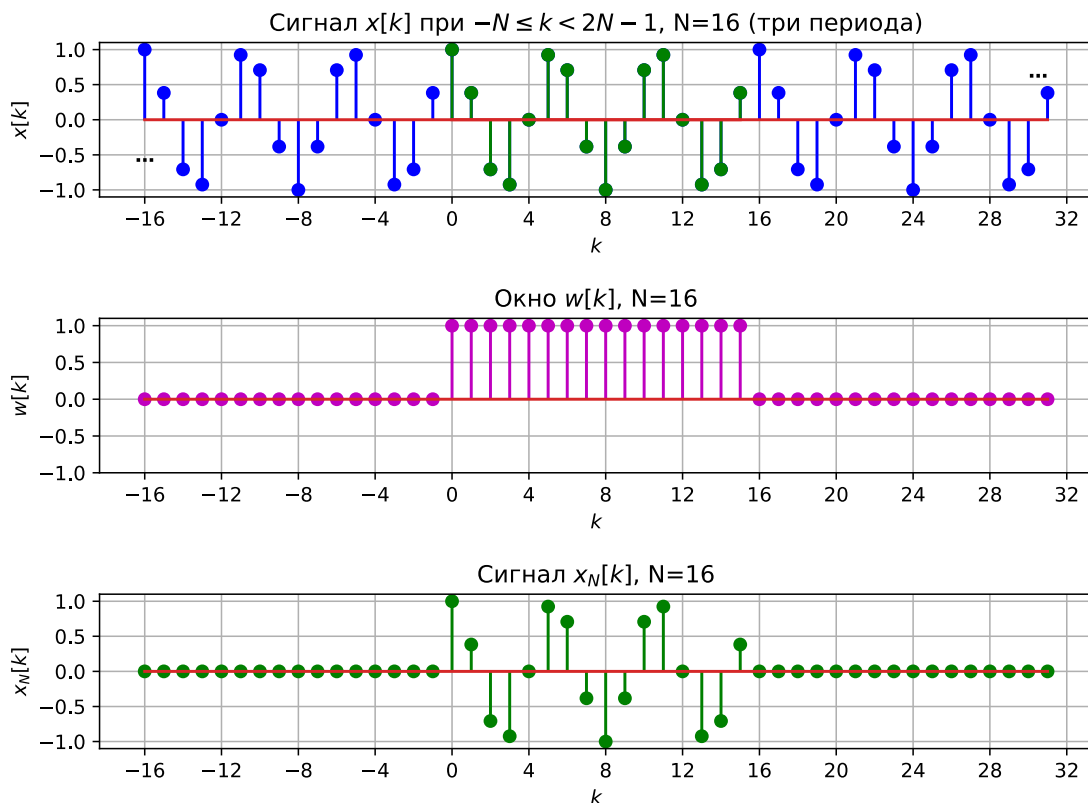
## Модуль 2. Окна в спектральном анализе

### Теоретическая часть

#### Эффекты растекания спектральных компонент и утечки спектра через боковые лепестки окна

Эффект растекания спектральных компонент неизбежно возникает при умножении последовательности на оконную функцию. Даже ограничение сигнала по длительности — умножение на прямоугольную оконную функцию — приводит к тому, что гармоники в спектре сигнала «размываются» в спектральные максимумы.

**Пример.**



Предположим, что имеется периодическая последовательность  $x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16} k)$ .

ДВПФ этой последовательности

$$X(v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \delta(v - \frac{3}{16} - n) + \frac{1}{2} \delta(v + \frac{3}{16} - n).$$

$X(v)$  содержит две  $\delta$ -функции с площадями  $1/2$  на каждом периоде.

Предположим, что нужно вычислить ДВПФ для одного периода последовательности

$x[k] = \cos(2\pi \frac{3}{16} k)$ , т.е. для последовательности  $x_N[k] = x[k]w[k]$ , где  $w[k] = \sum_{m=0}^{15} \mathbf{1}[k-m]$ .



Заметим, что

$$W(v) = e^{-j(N-1)\pi v} \frac{\sin(N\pi v)}{\sin(\pi v)},$$

$$X(v) = 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(v - \frac{3}{16} - m) + 0.5 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(v + \frac{3}{16} - m).$$

Способ 1. ДВПФ последовательности  $Y(v)$  может быть представлено в виде циклической свертки

$$Y(v) = \int_{-1/2}^{1/2} X(\tilde{v})W(v - \tilde{v})d\tilde{v} = \int_{-1/2}^{1/2} W(\tilde{v})X(v - \tilde{v})d\tilde{v}$$

Используя фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_a^b W(v)\delta(v - v_1)dv = \begin{cases} W(v_1), & a < v_1 < b, \\ 0.5W(v_1), & (v_1 = a) \cup (v_1 = b), \\ 0, & (v_1 < a) \cup (v_1 > b), \end{cases}$$

получаем, что

$$Y(v) = 0.5W(v - \frac{3}{16}) + 0.5W(v + \frac{3}{16}).$$

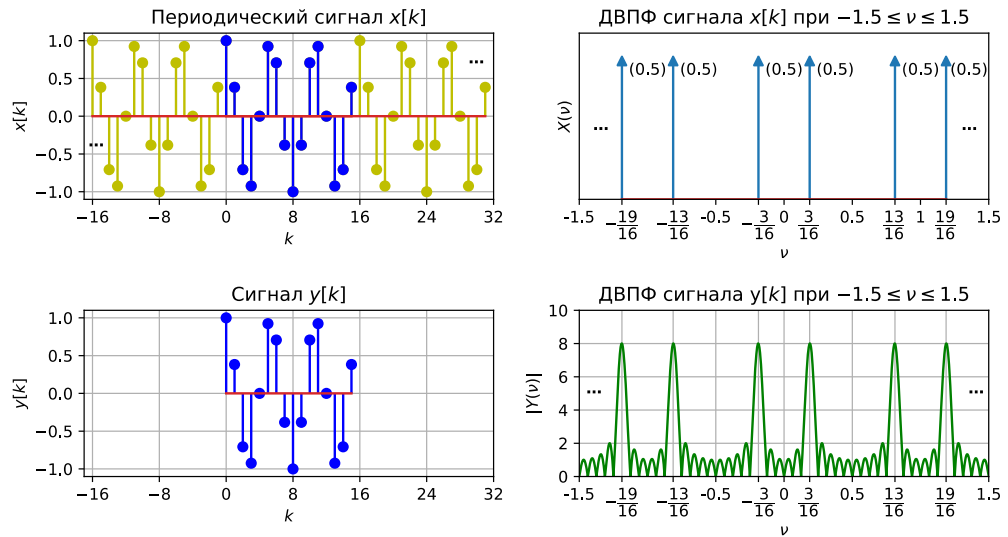
Способ 2. Аналогично через теорему смещения

$$y[k] = \left( \frac{1}{2} \exp(j2\pi k \frac{3}{16}) + \frac{1}{2} \exp(-j2\pi k \frac{3}{16}) \right) w[k],$$

$$Y(v) = 0.5W(v - \frac{3}{16}) + 0.5W(v + \frac{3}{16}).$$

$$Y(v) = \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(v - \frac{3}{16})\right) \frac{\sin(N\pi(v - \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(v - \frac{3}{16}))} + \frac{1}{2} \exp\left(-j(N-1)\pi(v + \frac{3}{16})\right) \frac{\sin(N\pi(v + \frac{3}{16}))}{\sin(\pi(v + \frac{3}{16}))}.$$

Как видно из приведённого примера, из-за ограничения длительности сигнала мы наблюдаем не только размытые спектральные максимумы, но и боковые выбросы, вызванные влиянием боковых лепестков окна. Физик Франц Артур Фридрих Шустер (нем. Franz Arthur Friedrich Schuster; 1851—1934), называл их "ложными периодичностями". Многие исследователи его времени ошибочно утверждали, эти максимумы обусловлены скрытыми периодичностями в сигнале. Шустер увидел здесь аналогию с дифракционными полосами в оптическом спектрографе, которые возникали из-за ограниченной апертуры прибора.

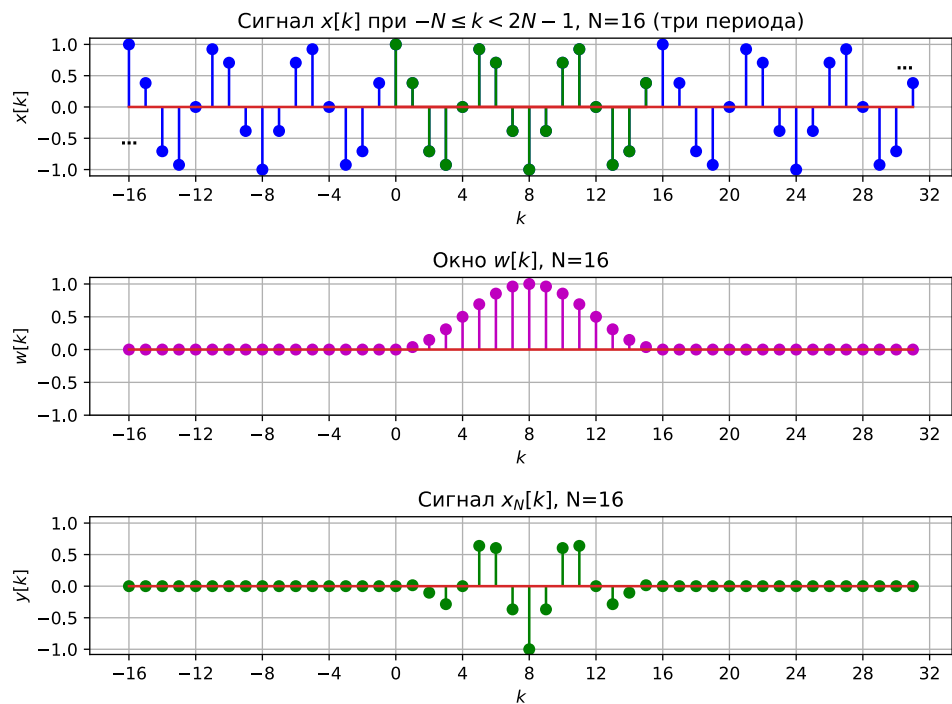


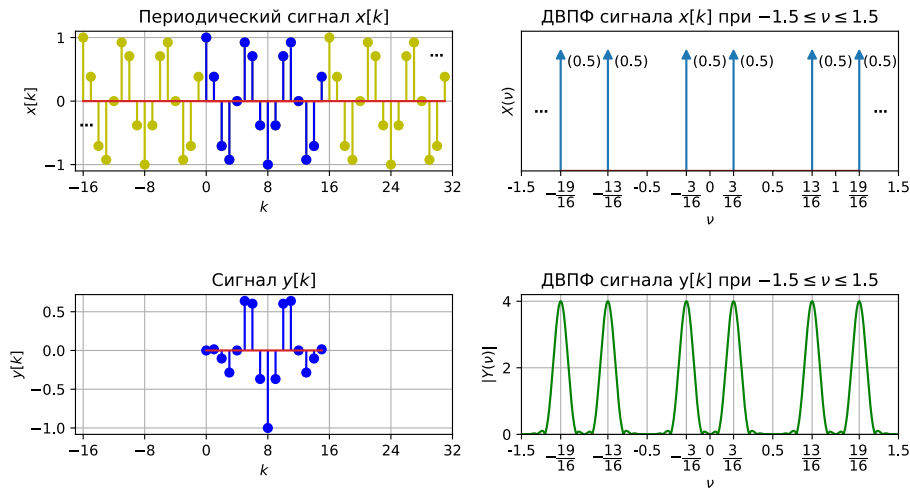
Эффект утечки спектра можно ослабить путем применения оконной функции, отличной от прямоугольной. В качестве примера рассмотрим окно Ханна. Предположим, что нужно вычислить

ДВПФ для одного периода последовательности  $x[k] = \cos\left(2\pi\frac{3}{16}k\right)$ , т.е. для последовательности

$y[k] = x[k]w_{\text{Ханна}}[k]$ , где

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$





### Паразитная амплитудная модуляция спектра.

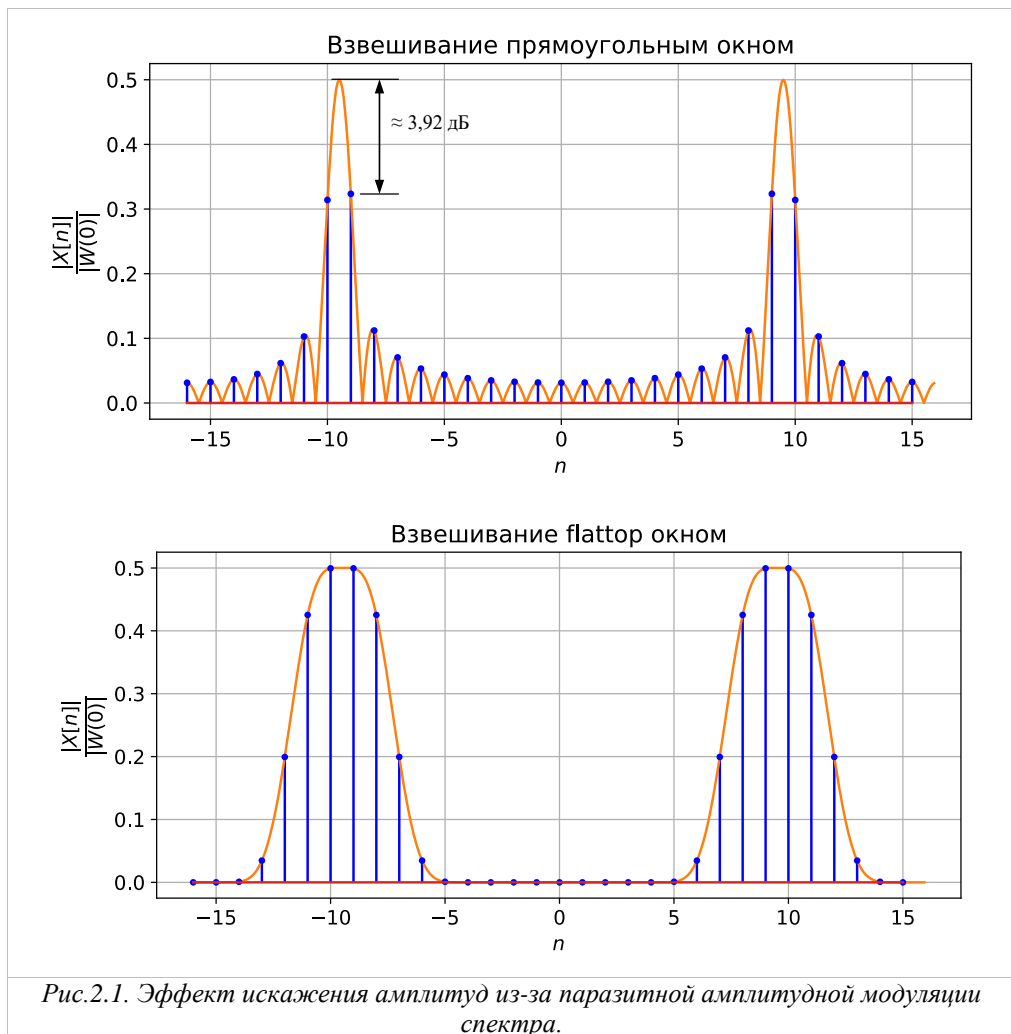
Паразитная амплитудная модуляция  $K_{\text{мод}}$  характеризует амплитуду гармонического сигнала, которую можно оценить с помощью ДПФ анализатора с оконной функцией. В самом неблагоприятном случае частота сигнала находится между соседними бинами ДПФ. Пусть спектр (ДВПФ) оконной функции  $W(\nu)$ . Величина  $K_{\text{мод}}$ , выраженная в децибелах, определяется как

$$K_{\text{мод}} = 20 \lg \left| \frac{W(0,5/N)}{W(0)} \right|.$$

Для прямоугольной функции  $K_{\text{мод}} = -3,92$  дБ, для окна Бартлетта  $K_{\text{мод}} = -1,82$  дБ, для окна Хэмминга  $K_{\text{мод}} = -1,78$  дБ. При этом для окна с плоской вершиной (flattop)  $K_{\text{мод}} = -0,02$  дБ. Заметим, что для снижения этой погрешности можно также воспользоваться методом дополнения нулями анализируемой последовательности.

На рисунке 2.1 проиллюстрировано, как выбор оконной функции влияет на результат анализа амплитуд косинусоид, относительные частоты которых не совпадают с бинами ДПФ и лежат посередине между отсчетами. Оранжевым цветом показан спектр (ДВПФ), а синим — отсчеты ДПФ. Спектральный анализ производился для последовательности  $x[k] = \cos(2\pi k 9,5/16)$ ,  $0 \leq k \leq 15$ .

Поскольку анализ проводился не по целому числу периодов, максимумы в спектре не попали на бины ДПФ. Это мешает оценить амплитуду гармоники в случае прямоугольного окна. Использование окна с плоской вершиной, обладающего низким коэффициентом паразитной амплитудной модуляции, позволяет минимизировать искажения амплитуд при ДПФ анализе.



## Основные оконные функции

Рассмотрим примеры оконных функций  $w[k]$  для ДПФ, которые часто используются. Для того, чтобы определить, к чему приводит умножение на ту или иную оконную функцию, для окон будем использовать следующие спектральные характеристики.

- Ширина  $\Delta\nu$  главного лепестка окна на нулевом уровне.
- Ширина  $\Delta\nu$  полосы на уровне половинной мощности (на уровне, который на 3 дБ ниже максимального уровня).
- Максимальный уровень боковых лепестков относительно главного в дБ.
- Асимптотическая скорость спада уровней боковых лепестков в дБ/октаву.

### Прямоугольное окно

Во временной области прямоугольное окно длительностью  $N$  задается формулой

$$w_{\text{пр}}[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Умножение на прямоугольную оконную функцию эквивалентно ограничению сигнала по длительности.

Вычислим ДВПФ оконной функции

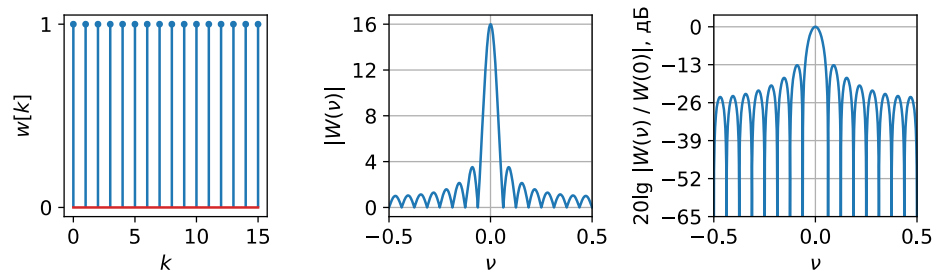
$$W_{\text{пр}}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[k] \exp(-j2\pi\nu k) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j2\pi\nu k) = \frac{1 - \exp(-j2\pi\nu N)}{1 - \exp(-j2\pi\nu)} =$$

$$= \frac{2j e^{-j\pi\nu N} (e^{j\pi\nu N} - e^{-j\pi\nu N})}{2j e^{-j\pi\nu} (e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu})} = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu).$$

$$W_{\text{пр}}(\nu) = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu)$$

АЧХ оконной функции

$$|W_{\text{пр}}(\nu)| = \left| \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \right|.$$



Основные характеристики прямоугольного окна длиной  $N$  :

- \* ширина главного лепестка на нулевом уровне  $\Delta\nu = \frac{2}{N}$ ;
- \* полоса по уровню  $-3$  дБ составляет  $\Delta\nu = \frac{0,89}{N}$ ;
- \* уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет  $-13,3$  дБ;
- \* скорость спада боковых лепестков  $6$  дБ / октава<sup>1</sup>.

### Окно Бартлетта

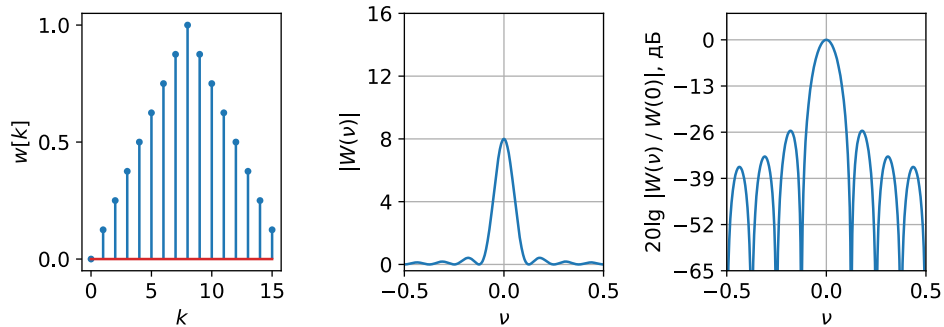
$$w_{\text{Бартлетта}}[k] = \begin{cases} 1 - \frac{2}{N} \left| k - \frac{N}{2} \right|, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Для четного  $N$  окно Бартлетта можно представить как свертку двух прямоугольных окон длиной  $N/2$ , от нормированную на их длину (на  $N/2$ ). Тогда по теореме о свертке для ДВПФ частотная характеристика этого окна

<sup>1</sup> Окта́ва — интервал частот, в котором соотношение граничных частот составляет один к двум. Например, расстояние между частотами  $\nu_1$  и  $\nu_2 = 0.2$  составляет одну октаву.

$$W(\nu) = \frac{2}{N} \left( \frac{\sin \pi \nu \frac{N}{2}}{\sin \pi \nu} \right)^2 \exp \left( -j2\pi \nu \left( \frac{N}{2} - 1 \right) \right).$$

В итоге ширина главного лепестка окна на нулевом уровне в два раза больше, чем у прямоугольного, и составляет  $\Delta \nu = 4 / N$  (4 бина).



Основные характеристики окна Бартлетта длиной  $N$  :

- \* ширина главного лепестка на нулевом уровне  $\Delta \nu = \frac{4}{N}$ ;
- \* полоса по уровню  $-3$  дБ составляет  $\Delta \nu = \frac{1,28}{N}$ ;
- \* уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет  $-26,5$  дБ;
- \* скорость спада боковых лепестков  $12$  дБ / октава.

### Окно Ханна

Окно Ханна для ДПФ во временной области описывается следующей формулой:

$$w_{\text{Ханна}}[k] = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Для того, чтобы определить это окно в спектральной области, заметим, что

$$\cos \frac{2\pi k}{N} = \frac{1}{2} e^{j \frac{2\pi k}{N}} + \frac{1}{2} e^{-j \frac{2\pi k}{N}}$$

Тогда по теореме смещения для ДВПФ, окно Ханна в спектральной области может быть записано через частотную характеристику прямоугольного окна:

$$W_{\text{Ханна}}(\nu) = \frac{1}{2} W_{\text{пр}}(\nu) - \frac{1}{4} W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{1}{N}\right) - \frac{1}{4} W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{1}{N}\right),$$

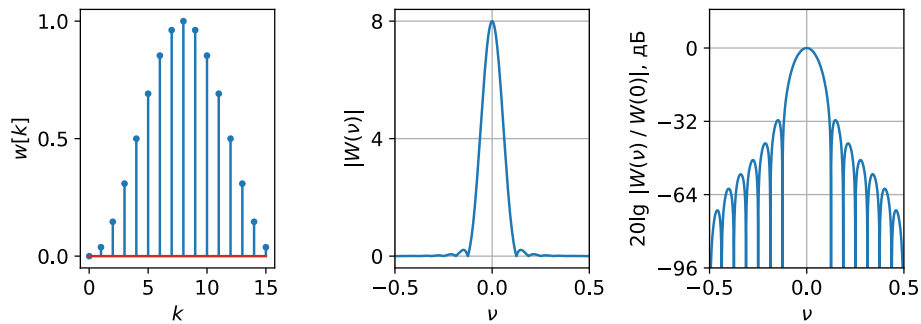
где

$$W_{\text{пр}}(\nu) = \frac{\sin(N\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)} \exp(-j(N-1)\pi\nu).$$

Как нетрудно видеть, у окна Ханна всего три ненулевых отсчета ДПФ на одном периоде:

$$W_{\text{Ханна}}[n] = \begin{cases} 0,5, & \text{при } n = mN, \quad m \in Z, \\ -0,25, & \text{при } n = \pm 1 + mN, \quad m \in Z, \\ 0, & \text{при других } n. \end{cases}$$

Это окно названо в честь австрийского метеоролога Юлиуса фон Ханна. Ханн изобрел метод взвешенного скользящего среднего для объединения метеорологических данных из соседних регионов, используя веса  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$ . Его также иногда ошибочно называют окном Хэннига из-за того, что в работе Блэкмана и Тьюки 1959 года [1] фраза "hanning a signal" означала взвешивание данных этим окном.



Основные характеристики окна Ханна длиной  $N$  :

- \* ширина главного лепестка на нулевом уровне  $\Delta\nu = 4 / N$ ;
- \* полоса по уровню  $-3$  дБ составляет  $\Delta\nu = 1,44 / N$ ;
- \* уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет  $-31,5$  дБ;
- \* скорость спада боковых лепестков  $18$  дБ / октава.

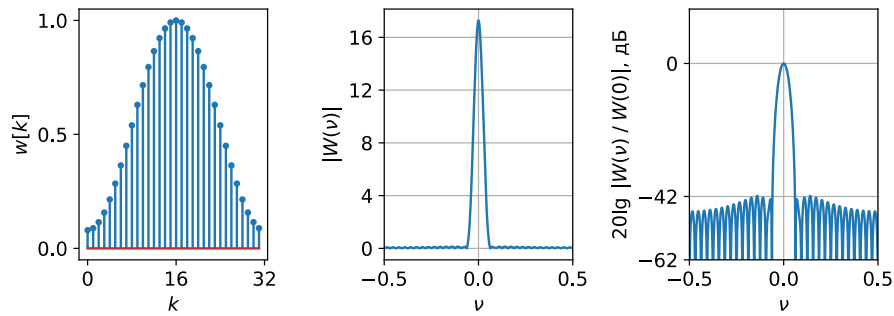
### Окно Хэмминга

Американский математик Ричард Уэсли Хэмминг, известный своими работами по теории информации, предложил использовать окно следующего вида:

$$w_{\text{Хэмминга}}[k] = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos \frac{2\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

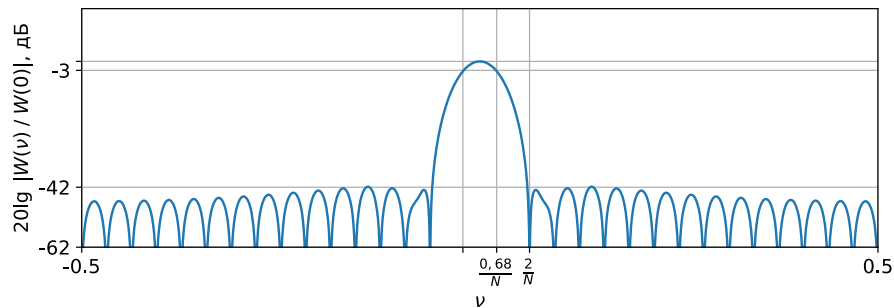
Множители 0,54 и 0,46 позволяют практически полностью устранить максимальный боковой лепесток. Используя теорему смещения для ДВПФ, получаем частотную характеристику окна Хэмминга

$$W_{\text{Хэмминга}}(\nu) = 0,54 W_{\text{пр}}(\nu) - 0,23 W_{\text{пр}}\left(\nu + \frac{1}{N}\right) - 0,23 W_{\text{пр}}\left(\nu - \frac{1}{N}\right).$$



Основные характеристики окна Хэмминга длиной  $N$  :

- \* ширина главного лепестка на нулевом уровне  $\Delta v = 4 / N$  ;
- \* полоса по уровню  $-3$  дБ составляет  $\Delta v = 1,36 / N$  ;
- \* уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет  $-42$  дБ;
- \* скорость спада боковых лепестков  $6$  дБ / октава.



### Окно Блэкмана

Окно Блэкмана имеет следующий вид:

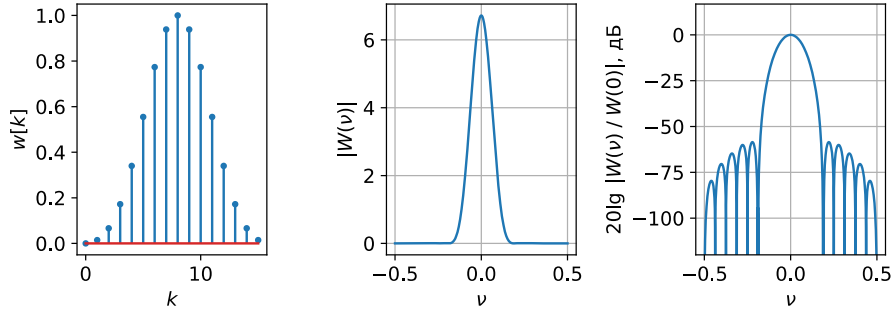
$$w_{\text{Блэкмана}}[k] = \begin{cases} 0,42 - 0,5 \cos \frac{2\pi k}{N} + 0,08 \cos \frac{4\pi k}{N}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

ДВПФ этого окна также может быть выражено через спектр прямоугольного окна:

$$W_{\text{Блэкмана}}(v) = 0,42 W_{\text{пр}}(v) - 0,25 W_{\text{пр}}\left(v + \frac{1}{N}\right) - 0,25 W_{\text{пр}}\left(v - \frac{1}{N}\right) + \\ + 0,04 W_{\text{пр}}\left(v + \frac{2}{N}\right) + 0,04 W_{\text{пр}}\left(v - \frac{2}{N}\right).$$

Окно Блэкмана обладает низким максимальным уровнем боковых лепестков относительно главного ( $-58$  дБ), но при этом ширина главного лепестка на нулевом уровне составляет  $\Delta v = 6 / N$  (6 бин).





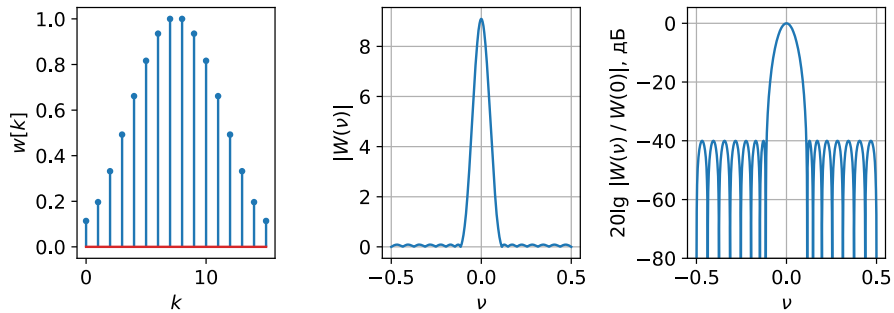
### Окно Чебышёва (равноволновое окно)

Частотная характеристика окна Чебышева длины  $N$  задается формулой

$$W_{\text{Чебышева}}(v) = \frac{\cos((N-1) \arccos(\alpha \cos \pi v))}{\text{ch}((N-1) \text{arch } \alpha)}, \quad \alpha = \text{ch} \frac{\text{arch } 10^{\beta/20}}{N-1},$$

где  $\beta$  — разность уровней главного и боковых лепестков в дБ. Во временной области окно Чебышева можно получить, взяв обратное ДПФ для выборок  $W_{\text{Чеб.}}(v_n)$ , таких, что  $v_n = n/N$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ .

У окна Чебышева все боковые лепестки имеют одинаковый уровень, спада боковых лепестков по мере удаления от главного у него нет. Однако из всех  $N$  — точечных дискретных окон с уровнем боковых лепестков относительно главного, не превосходящем  $\beta$  дБ, оно имеет самый узкий главный лепесток.



### Окно Кайзера

Джеймс Кайзер (Лаборатории Белла, MIT) предложил использовать окна следующего вида

$$w_{\text{Кайзера}}[k] = \begin{cases} \frac{I_0\left(\beta \sqrt{1 - \left(\frac{2k}{N} - 1\right)^2}\right)}{I_0(\beta)}, & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

где  $N$  — длина окна,  $\beta$  — параметр окна Кайзера,  $I_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, которая может быть вычислена с помощью быстро сходящегося степенного ряда (обычно достаточно  $L < 25$ )

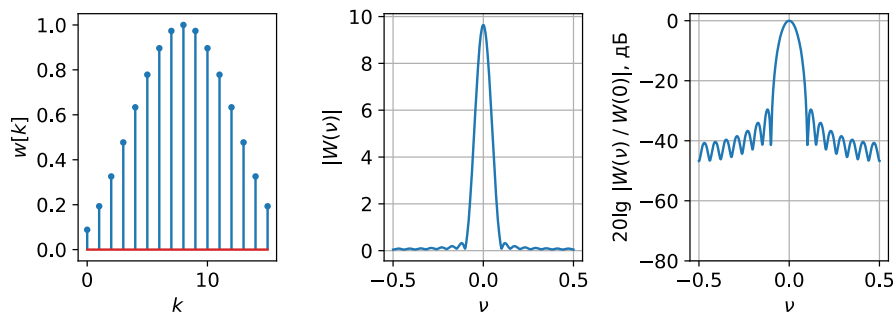
$$I_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^L \left( \frac{(x/2)^m}{m!} \right)^2.$$

Варьируя  $\beta$  и  $N$ , можно найти компромисс между относительным уровнем боковых лепестков окна и шириной главного. Характерно то, что относительный уровень боковых лепестков не зависит от длины окна, и определяется лишь параметром  $\beta$ . Кайзер и Шафер получили следующие эмпирические зависимости:

$$\beta = \begin{cases} 0,12438(a+6,3), & 60 < a \leq 120, \\ 0,76609(a-13,26)^{0,4} + 0,09834(a-13,26), & 13,26 < a \leq 60, \\ 0, & a \leq 13,26, \end{cases}$$

$$N \approx \frac{24\pi(a+12)}{155\Delta\nu} + 1,$$

где  $a$  — уровень боковых лепестков относительно уровня главного в дБ,  $\Delta\nu$  — ширина главного лепестка окна на нулевом уровне.

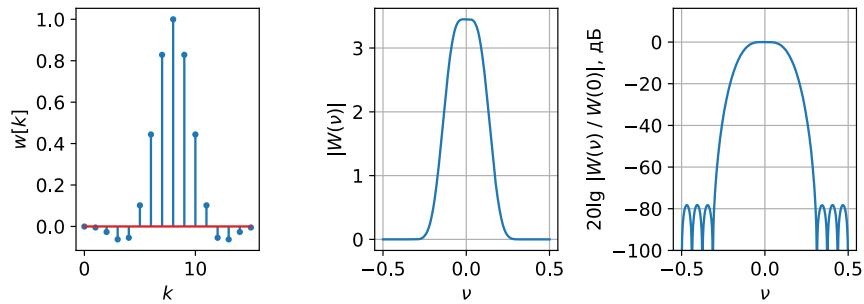


### Окна с плоской вершиной

Как было показано ранее, форма главного лепестка оконной функции приводит к искажению амплитуд гармоник, частоты которых не соответствуют бинам ДПФ. Если требуется уменьшить этот эффект, то следует использовать окно с плоской вершиной:

$$w_{\text{flatop}}[k] = \begin{cases} \sum_{r=0}^4 (-1)^r a_r \cos\left(\frac{2\pi}{N} rk\right), & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k, \end{cases}$$

где  $a_0 = 0,21557895$ ,  $a_1 = 0,41663158$ ,  $a_2 = 0,277263158$ ,  $a_3 = 0,083578947$ ,  $a_4 = 0,006947368$ . Заметим, что временная функция  $w_{\text{flatop}}[k]$  может принимать отрицательные значения. Как было ранее отмечено, для окна с плоской вершиной  $K_{\text{мод}} = -0,02$  дБ. Это означает, что использование этого окна позволяет минимизировать эффект паразитной амплитудной модуляции.



### Условия различения соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды

Достаточно близкие спектральные компоненты могут оказаться неразличимыми из-за слияния главных лепестков их максимумов. Рассмотрим условия, которые позволяют сделать выводы о различии соседних спектральных компонент по заданному расстоянию между их относительными частотами  $\Delta v_{1,2}$  и известным характеристикам главного лепестка окна.

#### а) Слияние компонент при $\Delta v_{1,2} < \Delta v_{-3\text{дБ}}$ .

Если  $\Delta v_{1,2}$  меньше ширины главного лепестка на уровне половинной мощности  $\Delta v_{-3\text{дБ}}$  ( $10\lg(0.5) \approx -3\text{дБ}$ ), то спектральные компоненты неразрешимы и спектральные пики сольются в один. Однако, если  $\Delta v_{1,2} > \Delta v_{-3\text{дБ}}$ , то сказать об их различимости при ДПФ анализе нельзя из-за когерентного суммирования, используемого в ДПФ. Отчеты ДПФ получаются путем когерентного сложения взвешенных окном спектральных компонент.

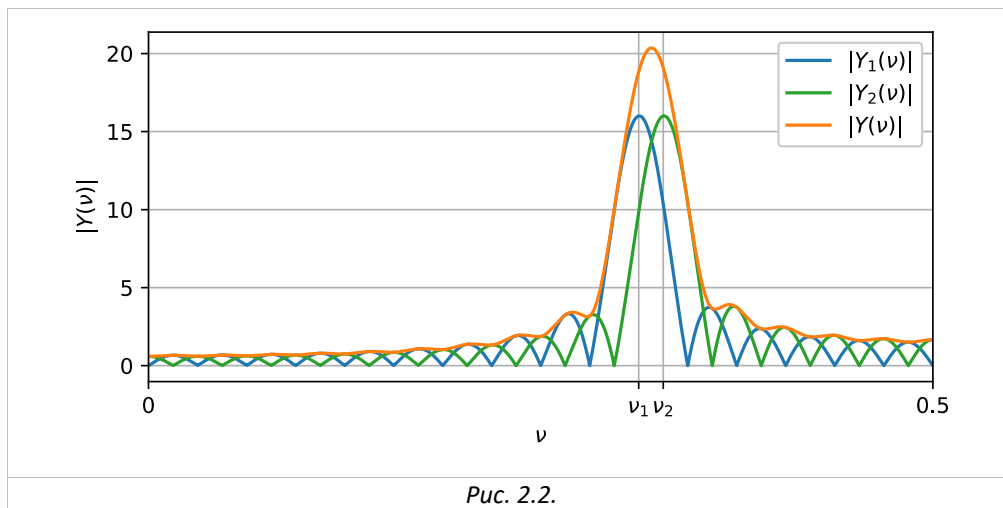
#### б) Различимость компонент при $\Delta v_{1,2} > \Delta v_{-6\text{дБ}}$ .

В ДПФ анализе условием различимости спектральных компонент служит ширина главного лепестка по уровню половинной амплитуды  $\Delta v_{-6\text{дБ}}$  ( $20\lg(0.5) \approx -6\text{дБ}$ ). Это связано с тем, что если вклад в когерентное суммирование вносят две спектральные компоненты одной амплитуды, то усиление от каждой компоненты в точке их пересечения не должно превышать 0,5 от их максимумов. Таким образом, различимость спектральных компонент будет гарантирована при  $\Delta v_{1,2} > \Delta v_{-6\text{дБ}}$ .

**Пример.** Рассмотрим, как работают приведённые критерии для случая прямоугольного окна  $w[k]$  длиной  $N = 32$ , для которого  $\Delta v_{-3\text{дБ}} = 0,89 / N$  (0,89 бин ДПФ) и  $\Delta v_{-6\text{дБ}} = 1,2 / N$  (1,2 бина ДПФ).

а) На рис. 2.2 приведены ДВПФ  $Y(v)$ ,  $Y_1(v)$  и  $Y_2(v)$  последовательностей

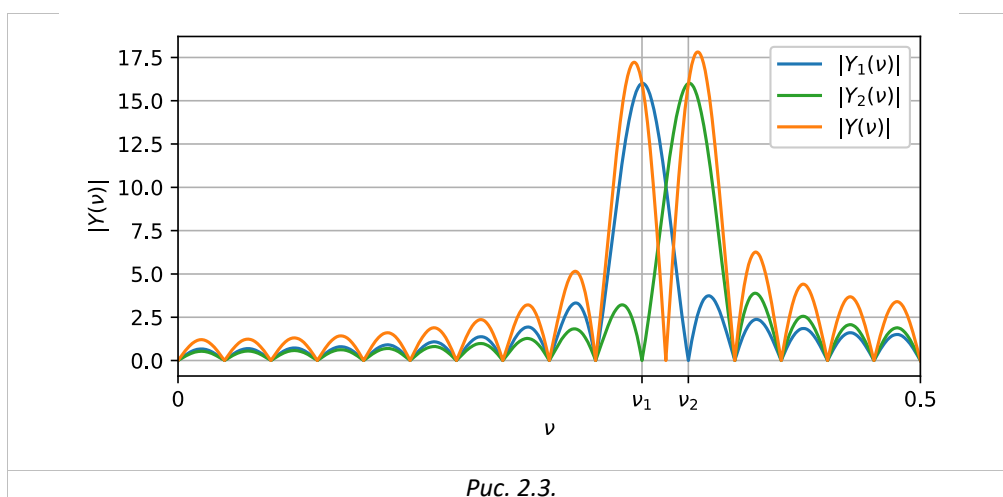
$$y_1[k] = \sin\left(2\pi \frac{10}{32} k\right) w[k], \quad y_2[k] = \sin\left(2\pi \frac{10,5}{32} k\right) w[k] \quad \text{и их суммы} \quad y[k] = y_1[k] + y_2[k].$$



Поскольку  $\Delta v_{1,2} = 0,5 / N$ , то  $\Delta v_{1,2} < \Delta v_{-3\text{дБ}}$  и спектральные максимумы сливаются в один. Две спектральные компоненты неразличимы на графике спектра.

б) На рис. 2.3 приведены ДВПФ  $Y(v)$ ,  $Y_1(v)$  и  $Y_2(v)$  последовательностей

$$y_1[k] = \sin\left(2\pi \frac{10}{32} k\right) w[k], \quad y_2[k] = \sin\left(2\pi \frac{11}{32} k\right) w[k] \quad \text{и их суммы} \quad y[k] = y_1[k] + y_2[k].$$



В этом случае  $\Delta v_{1,2} = 1 / N$ , и  $\Delta v_{-3\text{дБ}} < \Delta v_{1,2} < \Delta v_{-6\text{дБ}}$ . Две спектральные компоненты оказались различимы на графике спектра, однако, как будет показано далее, гарантировать эту различимость по расстоянию между гармониками нельзя. Заметим, что здесь наблюдается значительное смещение максимумов, вызванное влиянием боковых лепестков соседних спектральных компонент. Применение оконных функций, отличных от прямоугольной, могло бы ослабить этот эффект, но при этом может привести к неразличимости компонент из-за широкого главного лепестка.

в) На рис. 5.3.6 приведены ДВПФ  $Y(v)$ ,  $Y_1(v)$  и  $Y_2(v)$  последовательностей

$$y_1[k] = \sin\left(2\pi \frac{10}{32}k + 0,58\pi\right)w[k], \quad y_2[k] = \sin\left(2\pi \frac{11}{32}k\right)w[k] \text{ и их суммы } y[k] = y_1[k] + y_2[k].$$

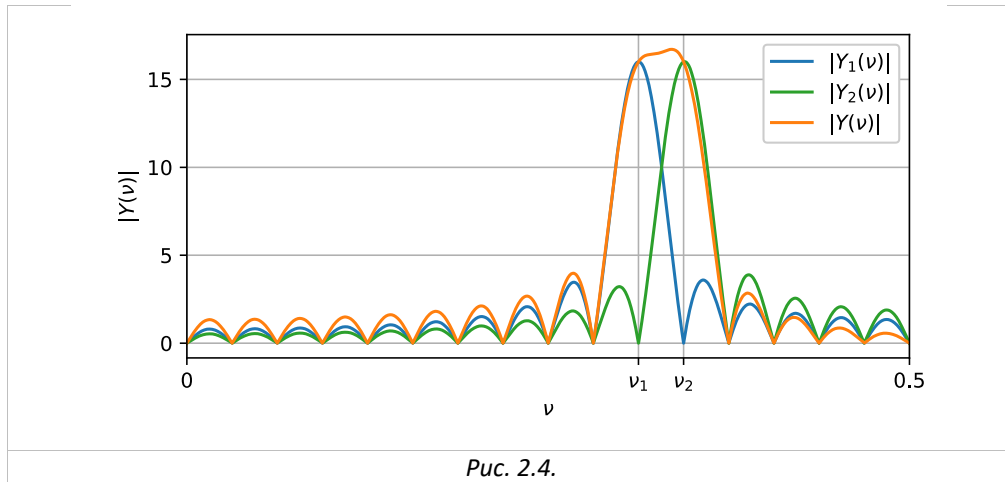


Рис. 2.4.

В этом случае также  $\Delta v_{1,2} = 1/N$ , и  $\Delta v_{-3\text{дБ}} < \Delta v_{1,2} < \Delta v_{-6\text{дБ}}$ . Однако из-за сдвига  $y_1[k]$  по фазе в данном случае действительные и мнимые части спектральных компонент сложились так, что спектральные максимумы не различимы. При этом мы не могли гарантировать их различимость.

Заметим, что, если условие  $\Delta v_{1,2} > \Delta v_{-6\text{дБ}}$  выполняется (с некоторым запасом, т.к. случай  $\Delta v_{1,2} = \Delta v_{-6\text{дБ}}$  является граничным) то мы можем гарантировать различимость спектральных компонент в спектре.

#### Пример Различимость спектральных компонент одинаковой амплитуды.

Даны два сигнала, представленные в виде линейной комбинации двух косинусоид:

$$x_1[k] = \cos(\pi k / 4) + \cos(17\pi k / 64),$$

$$x_2[k] = \cos(\pi k / 4) + \cos(21\pi k / 64).$$

Вычисляется ДВПФ каждого из этих сигналов, умноженных на 64-точечное прямоугольное окно. Определить, будут ли различимы спектральные максимумы в каждом из двух случаев.

#### Решение.

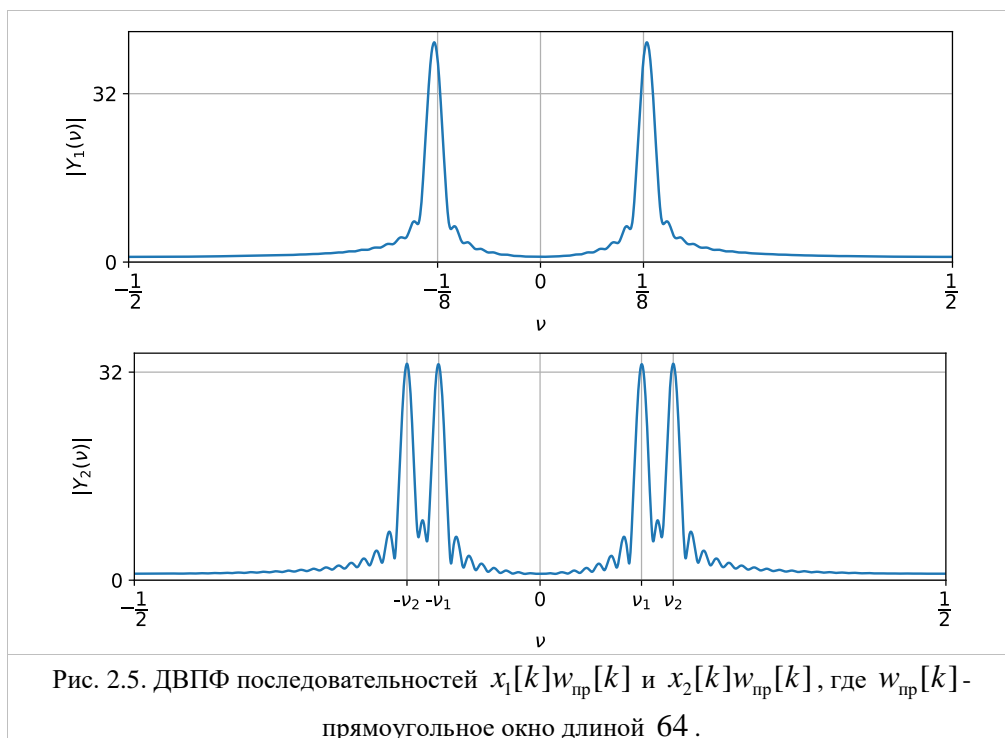
Сигналы можно представить в виде:

$$x_1[k] = \cos\left(2\pi \frac{8}{64}k\right) + \cos\left(2\pi \frac{8,5}{64}k\right),$$

$$x_2[k] = \cos\left(2\pi \frac{8}{64}k\right) + \cos\left(2\pi \frac{10,5}{64}k\right).$$

1) В последовательности  $x_1[k]$  относительные частоты гармонических компонент  $\nu_1 = \frac{8}{64}$  и  $\nu_2 = \frac{8,5}{64}$ . Расстояние между частотами  $\Delta\nu_{12} = \frac{0,5}{64}$  меньше ширины главного лепестка окна на уровне  $-3$  дБ ( $\Delta\nu_{12} < 0,89/64$ ), что означает неразличимость гармонических компонент в ДВПФ.

2) В последовательности  $x_2[k]$  относительные частоты гармонических компонент  $\nu_1 = \frac{8}{64}$  и  $\nu_2 = \frac{10,5}{64}$ . Расстояние между ними  $\Delta\nu_{12} = \frac{2,5}{64}$ .  $\Delta\nu_{12}$  больше ширины главного лепестка окна на уровне  $-6$  дБ ( $\Delta\nu_{12} > 1,2/64$ ), что означает различимость гармонических компонент в ДВПФ.



### Пример Различимость спектральных компонент разной амплитуды.

Даны три последовательности, каждая из которых состоит из двух косинусоид с разными относительными частотами:

$$x_1[k] = \cos \frac{\pi k}{4} + \cos \frac{17\pi k}{64},$$

$$x_2[k] = \cos \frac{\pi k}{4} + 0,8 \cos \frac{21\pi k}{64},$$

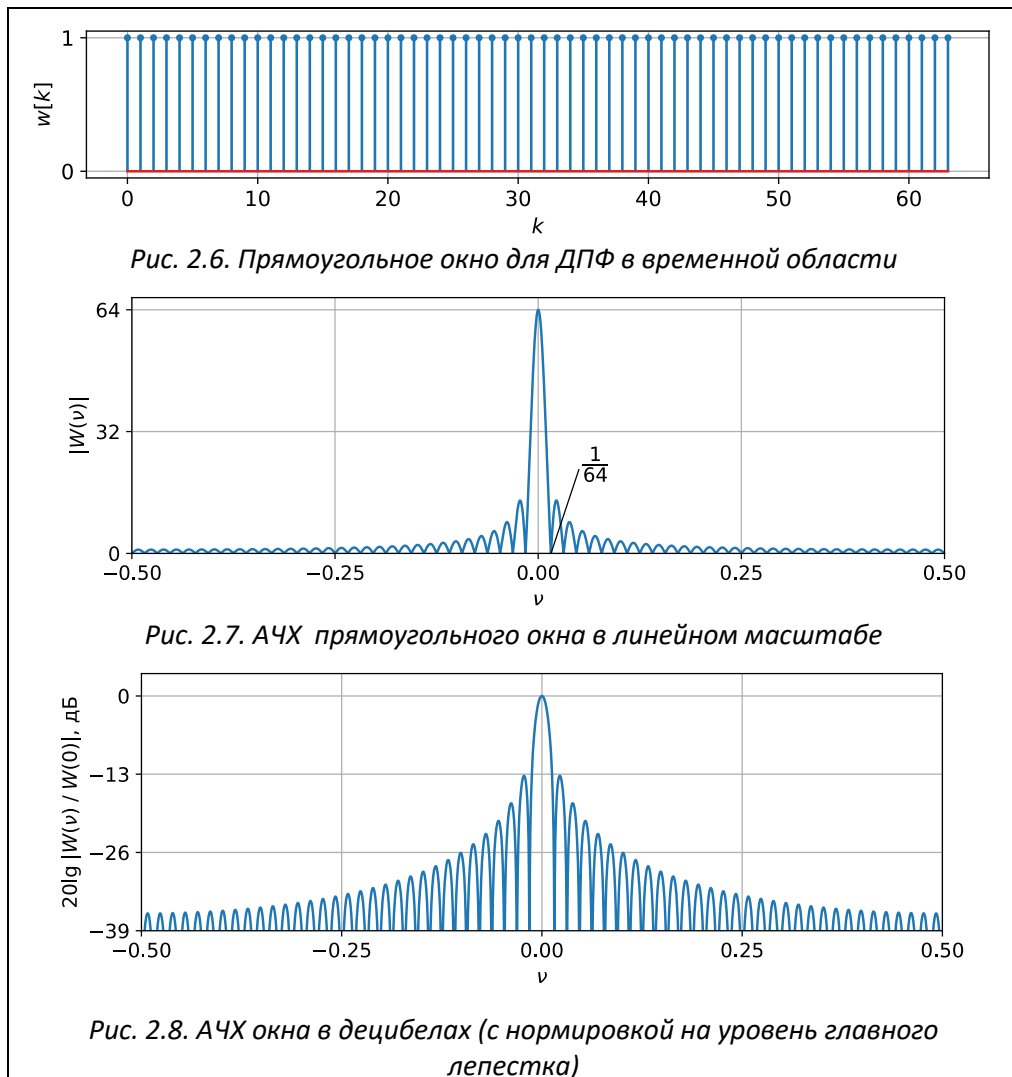
$$x_3[k] = \cos \frac{\pi k}{4} + 0,008 \cos \frac{21\pi k}{64}.$$

Спектральная оценка сигнала проводится с помощью ДПФ и прямоугольного окна длиной  $N = 64$ . Укажите оценки, которых спектральные компоненты будут различимы.

**Решение.** ДВПФ прямоугольного окна

$$W(v) = \sum_{k=0}^{N-1} w[k] e^{-j2\pi v k} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi v k} = \frac{1 - e^{-j2\pi v N}}{1 - e^{-j2\pi v}} = \frac{e^{-j\pi v N}}{e^{-j\pi v}} \cdot \frac{\sin \pi v N}{\sin \pi v} = e^{-j\pi v (N-1)} \frac{\sin \pi v N}{\sin \pi v}.$$

$W(v)$  – комплексная, периодическая (с периодом 1) функция частоты.



Отметим основные характеристики прямоугольного окна длиной:

- ширина главного лепестка на нулевом уровне  $\Delta v = \frac{2}{N}$  (2 бина);
- полоса по уровню  $-3$  дБ составляет  $\Delta v = \frac{0,89}{N}$  (0,89 бин);
- уровень максимального бокового лепестка относительно главного составляет  $-13,3$  дБ;

- скорость спада боковых лепестков 6 дБ / октава<sup>2</sup>.

Заметим, что последовательности

$$x_1[k] = \cos \frac{\pi k}{4} + \cos \frac{17\pi k}{64},$$

$$x_2[k] = \cos \frac{\pi k}{4} + 0,8 \cos \frac{21\pi k}{64},$$

$$x_3[k] = \cos \frac{\pi k}{4} + 0,008 \cos \frac{21\pi k}{64},$$

могут быть записаны в виде:

$$x_1[k] = \cos \left( 2\pi \frac{8}{64} k \right) + \cos \left( 2\pi \frac{8,5}{64} k \right),$$

$$x_2[k] = \cos \left( 2\pi \frac{8}{64} k \right) + 0,8 \cos \left( 2\pi \frac{10,5}{64} k \right),$$

$$x_3[k] = \cos \left( 2\pi \frac{8}{64} k \right) + 0,008 \cos \left( 2\pi \frac{10,5}{64} k \right).$$

Используя теорему смещения<sup>3</sup>, получаем ДВПФ последовательностей после взвешивания прямоугольным окном ( $y_i[k] = x_i[k]w[k]$ ,  $i = 1, 2, 3$ ):

$$Y_1(v) = \frac{1}{2} W \left( v - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{2} W \left( v + \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{2} W \left( v - \frac{8,5}{64} \right) + \frac{1}{2} W \left( v + \frac{8,5}{64} \right),$$

$$Y_2(v) = \frac{1}{2} W \left( v - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{2} W \left( v + \frac{1}{8} \right) + 0,4 W \left( v - \frac{10,5}{64} \right) + 0,4 W \left( v + \frac{10,5}{64} \right),$$

$$Y_3(v) = \frac{1}{2} W \left( v - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{2} W \left( v + \frac{1}{8} \right) + 0,004 W \left( v - \frac{10,5}{64} \right) + 0,004 W \left( v + \frac{10,5}{64} \right).$$

Теперь рассмотрим все три последовательности отдельно.

Заметим, что благодаря спаду уровня боковых лепестков на различимость боковых лепестков в основном будет влиять соотношение между значениями функций  $W \left( v - \frac{1}{8} \right)$ ,

$$W \left( v - \frac{8,5}{64} \right) \text{ и } W \left( v - \frac{10,5}{64} \right).$$

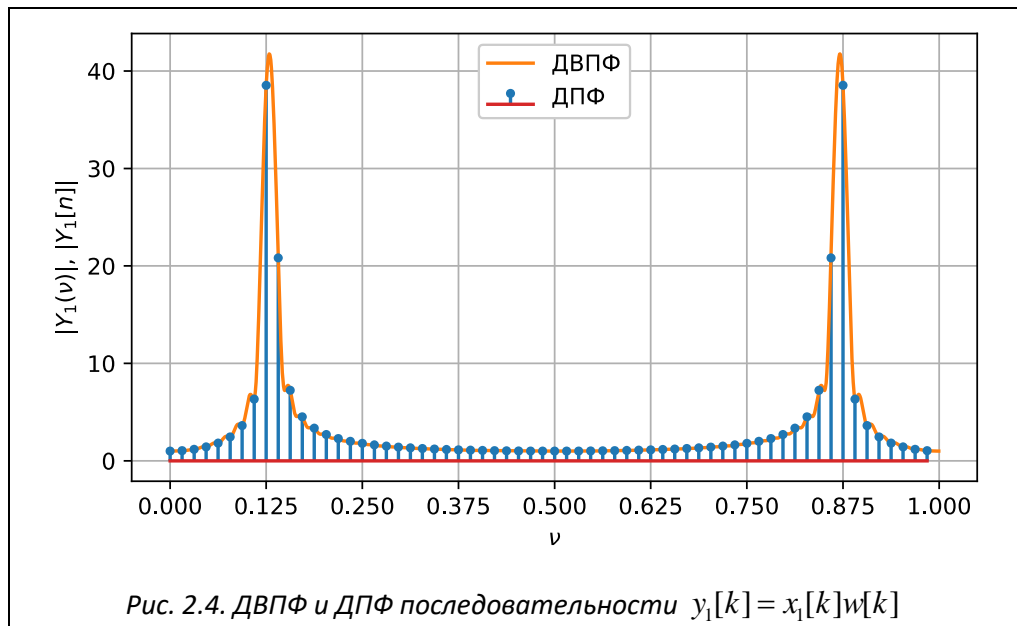
<sup>2</sup> Окта́ва — интервал частот, в котором соотношение граничных частот составляет один к двум. Например, расстояние между частотами  $\nu_1 = 0.1$  и  $\nu_2 = 0.2$  составляет одну октаву.

<sup>3</sup> Если  $w[k] \leftrightarrow W(v)$ , то  $w[k] \exp(j2\pi\nu_0 k) \leftrightarrow W(v - \nu_0)$ .



**Последовательность**  $x_1[k] = \cos\left(2\pi \frac{8}{64}k\right) + \cos\left(2\pi \frac{8,5}{64}k\right)$

В этом случае расстояние между относительными частотами косинусов  $\Delta\nu_{12} = \frac{8,5}{64} - \frac{8}{64} = \frac{0,5}{64}$ , что заметно меньше ширины главного лепестка окна (на уровне -3дБ она составляет  $\Delta\nu = 0,89/64$ , на нулевом уровне  $\Delta\nu = 2/64 = 1/32$ ). Из-за этого два соседних спектральных максимума сливаются в один и становятся неразличимы в ДВПФ. Отсчеты ДПФ являются выборками ДВПФ в точках  $\nu_n = n/N$ , а значит и в ДПФ они не будут различимы. На рисунке ниже изображен модуль ДВПФ на одном периоде и ДПФ (без нормирующего множителя  $1/N$ )



**Последовательность**  $x_2[k] = \cos\left(2\pi \frac{8}{64}k\right) + 0,8\cos\left(2\pi \frac{10,5}{64}k\right)$

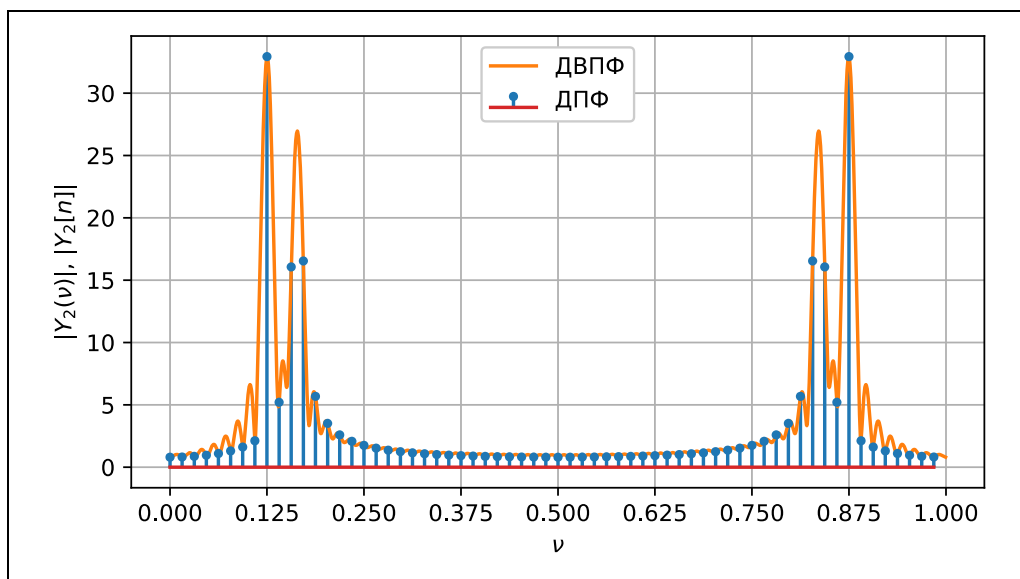


Рис. 2.5. ДВПФ и ДПФ последовательности  $y_2[k] = x_2[k]w[k]$

Расстояние между относительными частотами косинусойд для этого случая прерывает

ширину главного лепестка окна  $\Delta v_{12} = \frac{10,5}{64} - \frac{8}{64} = \frac{2,5}{64}$ . Остается оценить, насколько

уровень бокового лепестка у слагаемого  $\frac{1}{2}W\left(v - \frac{1}{8}\right)$  отличается от  $0,4W\left(v - \frac{10,5}{64}\right)$  на

частоте  $v = \frac{10,5}{64}$ . Относительный уровень второго максимума относительно первого

$20\lg(0,4/0,5) = 20\lg(0,8) = -1,93$  дБ. Это заметно больше максимального уровня боковых лепестков окна (-13 дБ), а значит будут видны обе гармонические компоненты.

**Последовательность**  $x_3[k] = \cos\left(2\pi\frac{8}{64}k\right) + 0,008\cos\left(2\pi\frac{10,5}{64}k\right)$

Расстояние между относительными частотами косинусойд такое же, как и в предыдущем

случае  $\Delta v_{12} = \frac{10,5}{64} - \frac{8}{64} = \frac{2,5}{64}$ . Однако в этом случае амплитуды гармоник заметно

отличаются. Относительный уровень второго максимума относительно первого

$20\lg(0,004/0,5) = 20\lg(0,008) = -41,93$  дБ. Это заметно меньше максимального уровня боковых лепестков окна (-13 дБ).

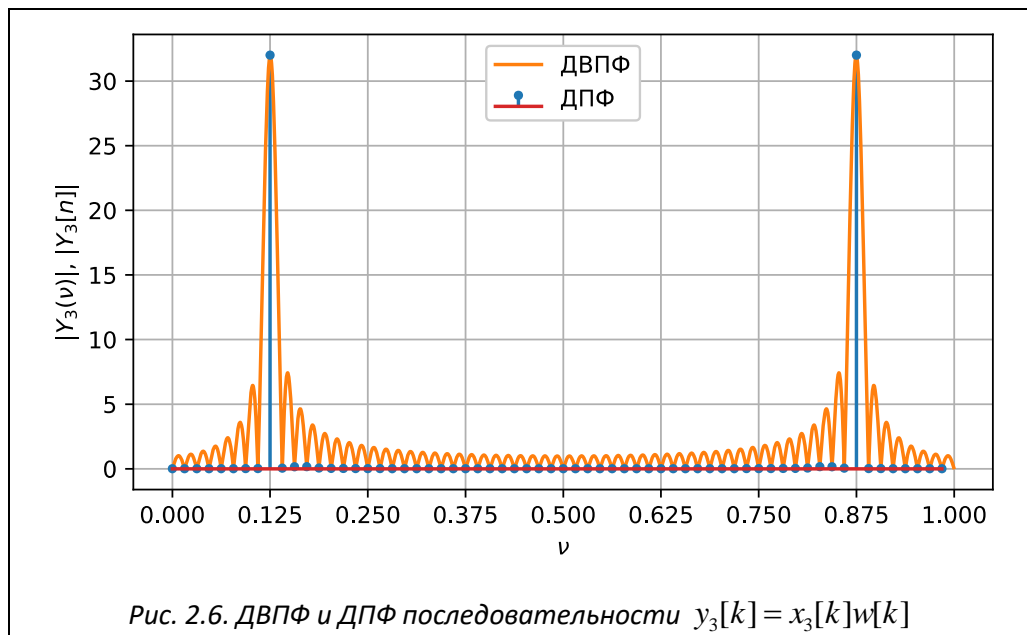
Заметим, что второй максимум попадает примерно на середину второго бокового

лепестка  $\frac{1}{2}W\left(v - \frac{1}{8}\right)$ . При этом расстояние между частотами  $\frac{1,5}{N}$  и  $\frac{2,5}{N}$  меньше одной

октавы, а значит уровень бокового лепестка прямоугольного окна на частоте  $\Delta v_{12} = \frac{2,5}{N}$

превышает -19 дБ. Получается, что вторая спектральная компонента при анализе не будет видна на фоне боковых лепестков оконных функций.

**Ответ.** Два соседних спектральных максимума будут отличаться только в оценке  $x_2[k]$ .



## Задание на моделирование

### Задача 2.1. Исследование характеристик различных окон.

Рассмотрите следующие окна для ДПФ длиной в  $N = 20 + 2N_v$ , где  $N_v$  — номер Вашего варианта:

- 1) прямоугольное ('boxcar' (Python), "rectwin" (Matlab)),
- 2) Бартлетта ('bartlett'),
- 3) Ханна ('hann'),
- 4) Хэмминга ('hamming'),
- 5) Блэкмана ('blackman'),
- 6) окно с плоской вершиной ('flattop' (Python), 'flattopwin' (Matlab)).

Постройте графики для окон во временной области, амплитудно-частотной характеристики окон в линейном масштабе и в дБ. По графикам для каждого окна оцените следующие параметры:

- а) ширину  $\Delta\nu$  главного лепестка на уровне половинной мощности,
- б) максимальный уровень боковых лепестков относительно главного в дБ,
- в) асимптотическую скорость спада боковых лепестков в дБ/октава.

Составьте таблицу с результатами.

### Задача 2.2. Окно Кайзера.

Повторите вычисления задачи 2.1 для окна Кайзера с параметром  $\beta = 0; 5; 6; 8,6$ . Сравните полученные результаты с предыдущей задачей.

### Задача 2.3. Окно Чебышева.

Получите окно Чебышева для четырех уровней боковых лепестков, которые получились в задаче 2.2. Сравните ширину главного лепестка на уровне половинной мощности с результатами предыдущих задач.

**Задача 2.4. Различимость спектральных компонент.**

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n_0$	11	15	18	17	32	48	15	18	47	32	40	38
$\beta_0$	1,1	1,5	1,2	1,5	1,1	1,3	1,1	1,4	1,5	1,3	1,2	1,1
$\beta_1$	5	5,5	6,2	5,7	6,1	4,9	5,1	5,7	6	5,8	5,7	5,5

Произведите спектральный анализ с помощью ДПФ размерности  $M = 2048$  последовательности

$$x[k] = \cos\left(2\pi \frac{n_0}{128} k\right) + \cos\left(2\pi \frac{n_0 + 2}{128} k\right)$$

со взвешиванием следующими оконными функциями длиной 128 отсчетов:

а) окном Кайзера с параметром  $\beta = \beta_0$ ,

б) окном Кайзера с параметром  $\beta = \beta_1$ .

в) окном Блэкмана.

Значения параметров  $n_0$  и  $\beta = \beta_1$  определите из таблицы. Ответьте на следующие вопросы.

- 1) Для каких оконных функций гармонические компоненты оказались различимы и почему?
- 2) Как влияет максимальный уровень боковых лепестков оконной функции на результат спектрального анализа?

**Задача 2.5. Маскировка слабой гармоника боковыми лепестками окна.**

Вариант	1	2	3	4	5	6
$w_1[k]$	Бартлетта	Ханна	Хэмминга	Ханна	Бартлетта	Хэмминга
$m_2$	-2	2	-2	2	-2	2
$m_3$	4	6	3	4	5	7
Вариант	7	8	9	10	11	12
$w_1[k]$	Хэмминга	Ханна	Бартлетта	Ханна	Хэмминга	Бартлетта
$m_2$	2	-2	2	-2	2	-2
$m_3$	7	3	-3	-4	5	4

Сгенерировать последовательность отсчетов гармонического сигнала  $x[k]$  длительностью  $N = 64$ , которая может быть описана следующей формулой:

$$x[k] = a_1 \sin\left(2\pi k \frac{a_1}{N}\right) + a_2 \cos\left(2\pi k \frac{a_1 + m_2}{N}\right) - a_3 \sin\left(2\pi k \frac{a_1 + m_3}{N}\right),$$

где  $a_1 = n_v + 10$  ( $n_v$  — номер вашего варианта),  $a_2 = \frac{a_1}{6}$ ,  $a_3 = \frac{a_1}{2}$ ,  $m_2$  и  $m_3$  значения из таблицы, соответствующие вашему варианту.

а) Построить ДВПФ  $x[k]$ , применив прямоугольное окно. Сколько гармонических компонент можно выделить?

б) Построить ДВПФ  $x[k]$ , применив окно Блэкмана. Какие гармонические компоненты наблюдаются теперь?

в) Построить ДВПФ  $x[k]$ , используя окно  $w_1[k]$  из вашего варианта. Получилось ли пронаблюдать все гармонические компоненты?

г) Подобрать коэффициенты для окон Чебышева и Кайзера так, чтобы возможно было наблюдать все гармонические компоненты. Построить соответствующие графики.

#### Задача 2.6. Амплитудная модуляция спектра.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n_0$	11,5	15,5	18,5	17,5	32,5	48,5	15,5	18,5	47,5	32,5	40,5	38,5

Произведите спектральный анализ с помощью ДПФ размерности  $M = 128$  последовательности

$$x[k] = \cos\left(2\pi \frac{n_0}{128} k\right)$$

со взвешиванием следующими оконными функциями длиной 128 отсчетов:

а) прямоугольным окном ('boxcar' (Python), "rectwin" (Matlab)),

б) окном с плоской вершиной ('flattop' (Python), 'flattopwin' (Matlab)).

Значение параметра  $n_0$  определите из таблицы. Отнормируйте ДПФ на значение АЧХ оконной функции на нулевой частоте ( $W(0) = \sum_{k=0}^{N-1} w[k]$ ). Для двух окон сравните амплитуду гармоники с модулем ближайших к ней отсчетов ДПФ.

### Контрольные вопросы к сдаче работы

**№2.1.** Вычислите для  $R = 4$  ДВПФ обобщенного косинусного окна:

$$w_{\cos}[k] = \begin{cases} \sum_{r=0}^R (-1)^r a_r \cos\left(\frac{2\pi}{N} rk\right), & \text{при } 0 \leq k \leq N-1, \\ 0, & \text{при других } k. \end{cases}$$

Сравните результат со следующими окнами: прямоугольное, Ханна, Хэмминга, Блэкмана, окно с плоской вершиной.

**№2.2.** Вычислите ДВПФ последовательности  $y[k] = x[k]w[k]$ , где  $x[k] = \sin\left(2\pi\frac{3}{16}k\right)$ , а  $w[k]$  — окно Ханна для ДПФ длины  $N = 16$ .

**№2.3.** Предположим, что требуется провести ДПФ-анализ сигнала  $x[k]$  с использованием окна Ханна  $w[k]$ . Размерность ДПФ, длина окна и длина сигнала равны  $N$ . Доказать, что для вычисления ДПФ  $Y[n]$  сигнала  $x[k]w[k]$  достаточно провести  $2N$  сдвигов на один двоичный разряд и  $2N$  сложений для коэффициентов ДПФ  $X[n]$  последовательности  $x[k]$ , т.е. показать, что

$$Y[n] = \frac{1}{2} \left( X[n] - \frac{1}{2} (X[n-1]_N + X[n+1]_N) \right).$$

**№2.4.** Вычислить ДВПФ и ДПФ последовательности  $y[k] = x[k]w[k]$ , где  $x[k] = \sin\left(2\pi\frac{3}{16}k\right)$ , а  $w[k]$  — окно Ханна для ДПФ длины  $N = 16$ . Построить графики действительной и мнимой части коэффициентов ДПФ на одном периоде.

**№2.5.** Даны два сигнала, представленные в виде линейной комбинации двух синусоид:

$$x_1[k] = \sin\left(2\pi\frac{10}{32}k\right) + \sin\left(2\pi\frac{10,5}{32}k\right),$$

$$x_2[k] = \sin\left(2\pi\frac{10}{32}k\right) + \sin\left(2\pi\frac{12,5}{32}k\right).$$

Вычисляется ДВПФ каждого из этих сигналов, умноженных на 32-точечное прямоугольное окно. Определить, будут ли различимы спектральные максимумы в каждом из двух случаев.

**№2.6.** Предположим, что нужно вычислить спектральную оценку дискретного сигнала с помощью ДВПФ и окна. При этом необходимо добиться разрешения (различения соседних гармонических компонент одинаковой амплитуды) не менее  $\Delta\nu = 0,006$ , а длина окна фиксирована и равна  $N = 256$ . Используя данные из таблицы, определить, какие из следующих окон гарантированно позволяют выполнить поставленную задачу:

а) прямоугольное, б) Бартлетта, в) Ханна, г) Хэмминга, д) Блэкмана.

название окна	полоса по уровню –3 дБ (в бинах ДПФ)	полоса по уровню –6 дБ (в бинах ДПФ)	ширина главного лепестка на нулевом уровне (в бинах ДПФ)	уровень максимального бокового лепестка относительно главного (дБ)
прямоугольное	0,89	1,20	2	-13,3
Бартлетта	1,28	1,78	4	-26,5
Ханна	1,44	2,00	4	-32
Хэмминга	1,33	1,82	4	-42
Блэкмана	1,64	2,30	6	-58,1

**№2.7.** Гармонический сигнал  $x(t) = \cos 2\pi f_0 t$  дискретизируется так, что на периоде  $[0; 1/f_0)$  образуется 8 отсчетов  $x[k] = x(k\Delta t)$ .

а) Изобразить последовательность  $x[k]$  и ее спектр.

б) Найти и изобразить по модулю ДВПФ и ДПФ последовательности

$$y[k] = \sum_{m=0}^{15} x[m] \mathbf{1}[k-m].$$

## Модуль 3. Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT)

### Теоретическая часть

#### Формула анализа STFT

Кратковременное дискретное преобразование Фурье (Discrete STFT, англ. Discrete Short-time Fourier transform) может задаваться формулой

$$X_m[n] = \sum_{k=mR}^{mR+M-1} x[k]w[k-mR] \exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right), \quad (3.1)$$

где

- $w[k]$  — временное окно,
- $m$  — порядковый номер кадра,
- $M$  — длина окна (сегмента),
- $N_{\text{FFT}}$  — размерность ДПФ,
- $R = M - L$  — единичный сдвиг окна,
- $L$  — число точек перекрытия.

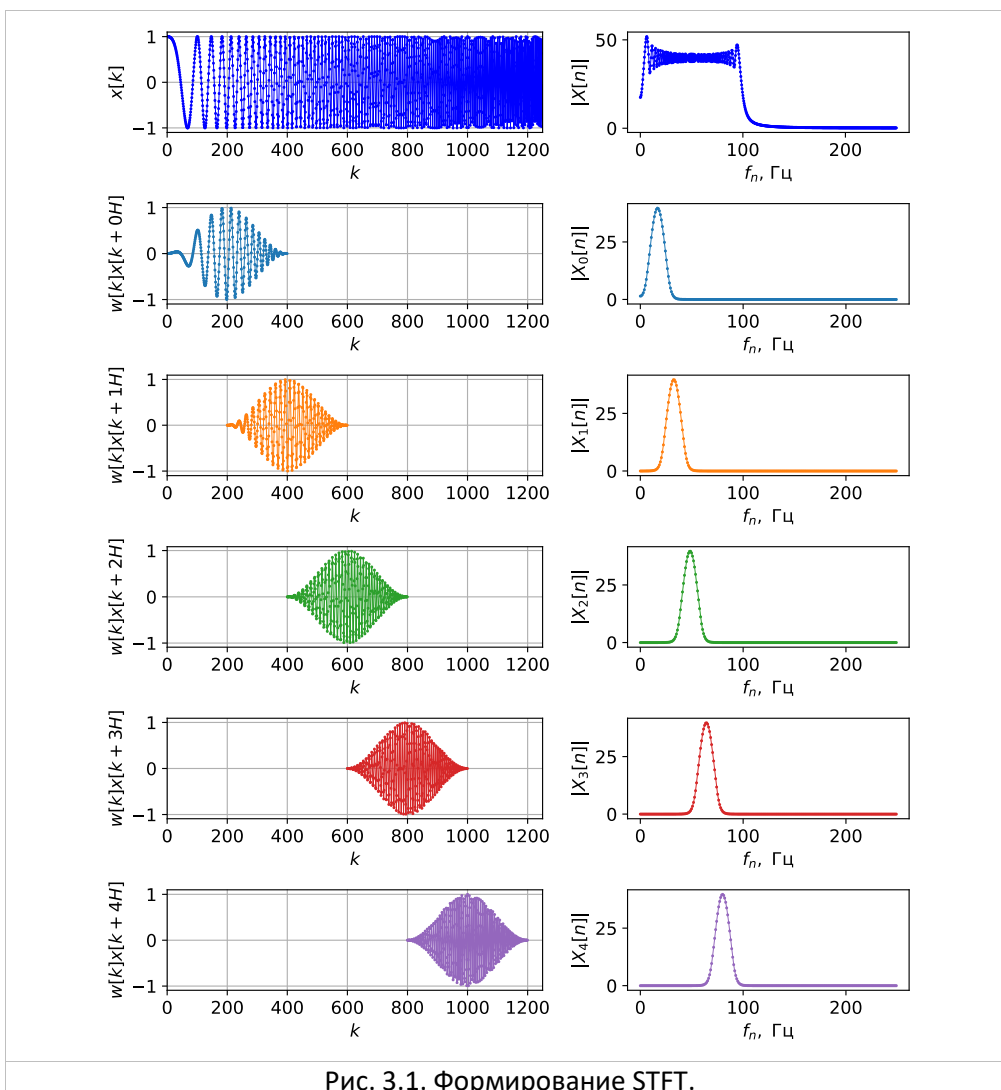


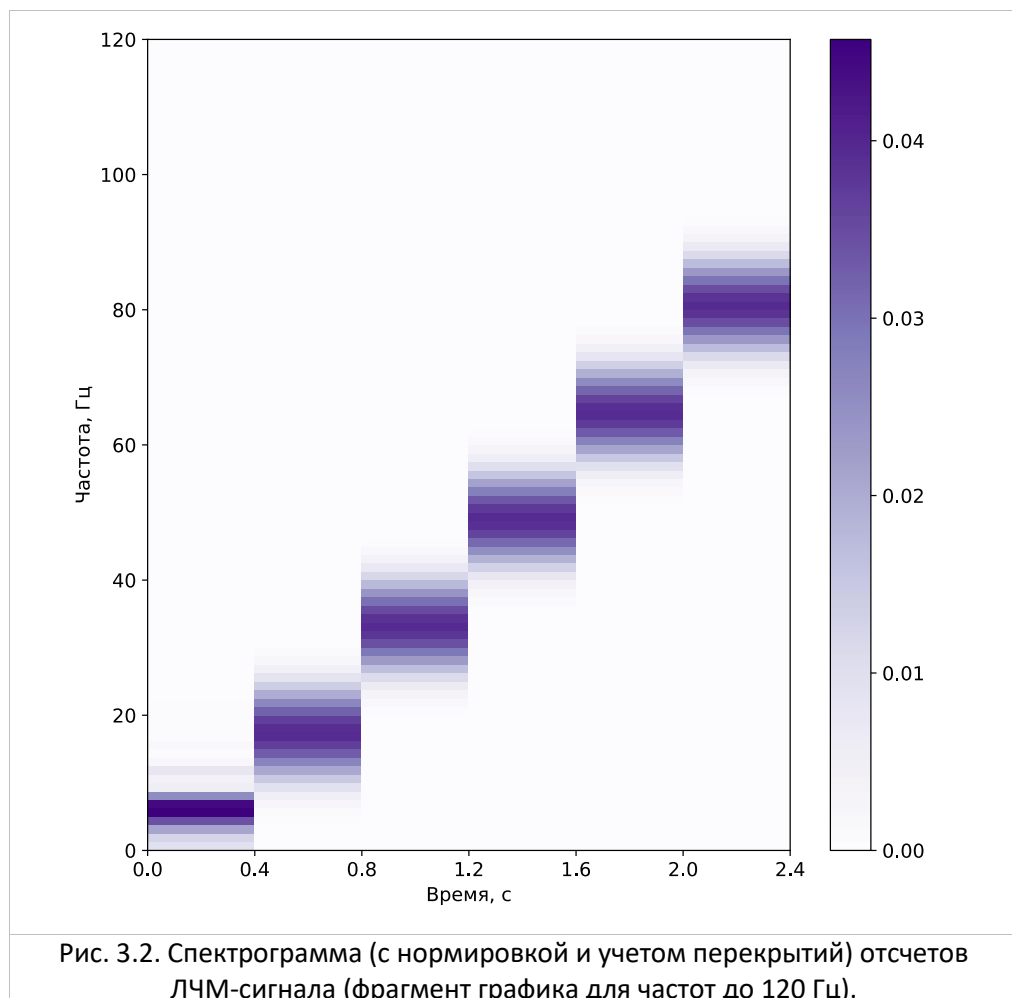
Рис. 3.1. Формирование STFT.



Это преобразование позволяет осуществлять ДПФ-анализ на коротких интервалах времени. Для графического отображения результатов данного преобразования часто используется представление в виде графика с двумя осями, где по горизонтальной оси отображается время (или номер кадра  $m$ ), по вертикальной — соответствующие частоты, а цветом отображается  $|X_m[n]|$ ,  $|X_m[n]|^2$  (в случае спектрограммы), или фазовая часть  $X_m[n]$ .

**Пример.** Рассмотрим результаты спектрального анализа по отсчетам ЛЧМ – сигнала. В STFT используется окно Ханна,  $M = 400$ ,  $L = 200$ ,  $N_{\text{FFT}} = M$ ,  $f_d = 500$  Гц, за время наблюдения 2,4 секунды мгновенная частота ЛЧМ сигнала изменяется от 1 Гц до 80 Гц.

На рис. 3.1 сверху показаны отсчеты сигнала и модуля ДПФ. По этому графику сложно сказать об изменении мгновенной частоты ЛЧМ сигнала. Далее последовательность разбивается на сегменты по  $M$  отсчетов, которые взвешиваются окном Ханна. Далее остается объединить отдельно взятые модули ДПФ на один график (рис. 3.2).



### Разрешение по времени и по частоте для STFT

Результат кратковременного дискретного преобразования Фурье является дискретным по времени и по частоте. Если рассматривать вопрос о разрешении по времени и по частоте, обусловленный дискретностью сетки времени и частот, то можно установить следующее.

Ширина прямоугольника на графике STFT вдоль оси **времени** равна длине единичного сдвига окна в секундах, т.е.  $R\Delta t$ . В приведенном ранее примере  $R\Delta t = 0,4$  с.

Ширина прямоугольника на графике STFT вдоль оси **частот** равно расстоянию между отсчетами отдельных ДПФ, входящих в формулу (3.1):  $\Delta f = f_d / N_{\text{FFT}}$ , где  $N_{\text{FFT}}$  — размерность ДПФ. В приведенном ранее примере  $\Delta f = 1,25$  Гц. Отметим, что  $N_{\text{FFT}}$  может превышать длину окна  $M$ . Такой случай соответствует интерполяции ДВПФ добавлением нулевых отсчетов. Для достаточно большой длины окна эффективно выбирать  $N_{\text{FFT}}$  в виде степени двух, чтобы использовать соответствующий алгоритм БПФ.

На возможность различения гармонических компонент, также как и в ДПФ, здесь также влияет ширина главного лепестка окна (на уровне -3 дБ и -6 дБ). Она зависит от длины окна  $M$  и его формы (вида). Необходимо учитывать, что увеличивая длину окна  $M$  мы улучшаем разрешение по частоте (главный лепесток становится уже), но в месте с тем, ухудшаем разрешение по времени (ширина прямоугольника по времени на графике больше).

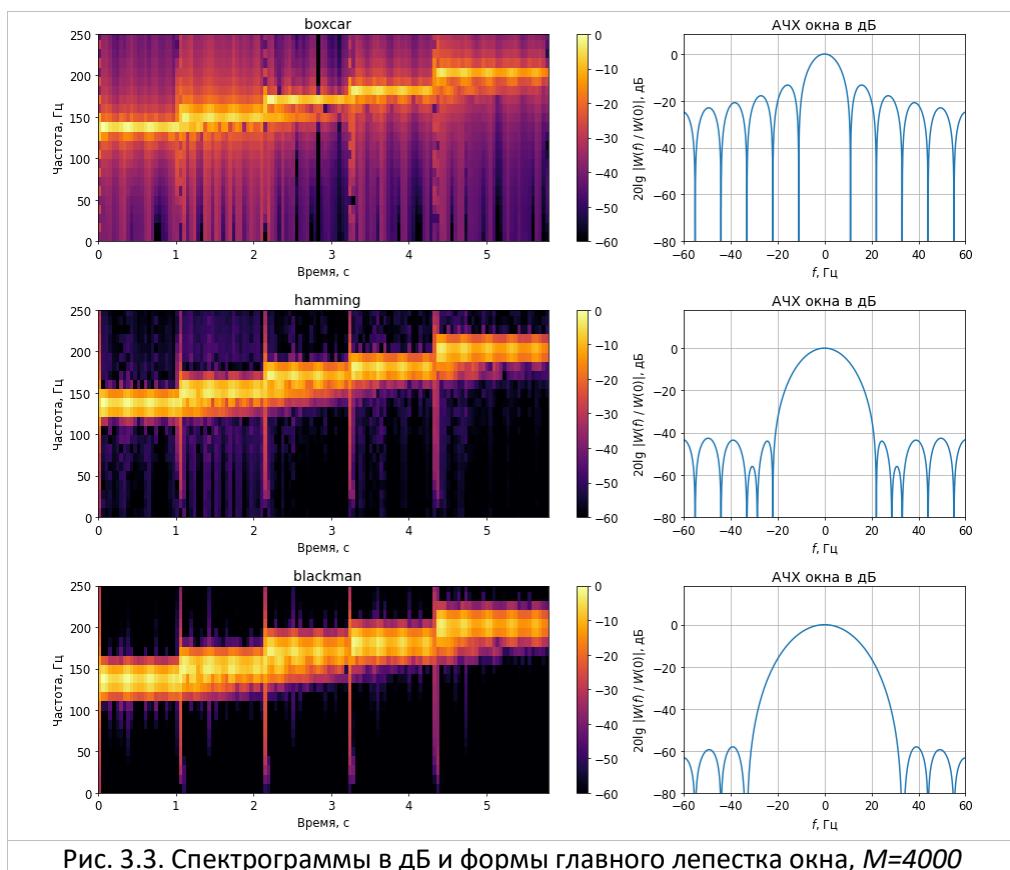


Рис. 3.3. Спектрограммы в дБ и формы главного лепестка окна,  $M=4000$

**Пример.** Влияние формы главного лепестка оконной функции на вид спектрограммы. В качестве сигнала используются отсчеты из WAV файла записи сигнала от вибрана (ударный музыкальный инструмент с определённой высотой звучания из группы металлофонов),  $f_d = 44100$  Гц, воспроизводились соседние ноты. Перекрывание сегментов 50%. Результаты приведены на рис. 3.3. и Рис. 3.4. В обоих случаях за уровень 0 дБ взято максимальное значение  $|X_m[n]|^2$ .

В случае  $M = 4000$  (рис.3.3) ширина главного лепестка у некоторых окон больше требуемой для разрешения соседних нот. Ширина прямоугольника по времени на графике  $R\Delta t \approx 0,04$  с.

В случае  $M = 16000$  (рис.3.4) у всех окон достаточно узкие главные лепестки и соседние ноты различимы. Вместе с тем  $R\Delta t_{\text{д}} \approx 0,18$  с. Т.е. увеличивая  $M$  мы получили более узкий главный леток окна, но вместе с тем, ухудшили разрешение по времени.

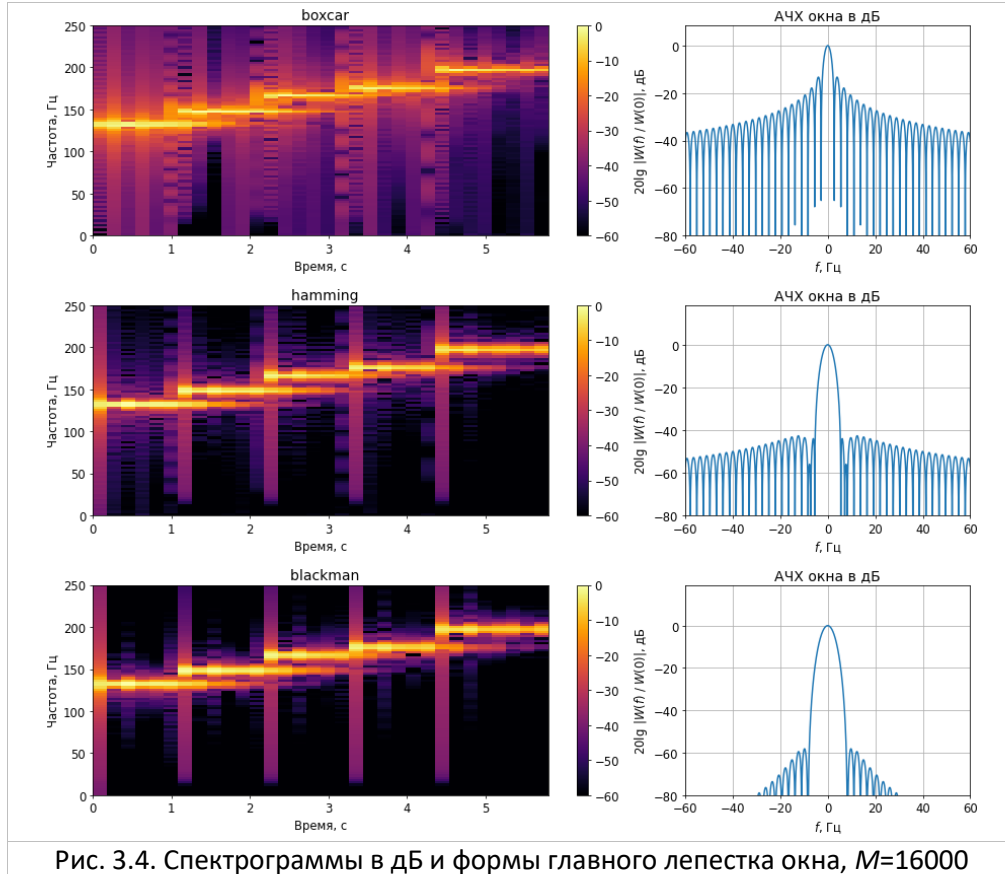


Рис. 3.4. Спектрограммы в дБ и формы главного лепестка окна,  $M=16000$

### Условия COLA и NOLA

По определению, для окна  $w[k]$  выполнено условие COLA(R) (Constant OverLap-Add), если

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k - mR] = \text{const} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.2)$$

Если выполнено COLA(R), то

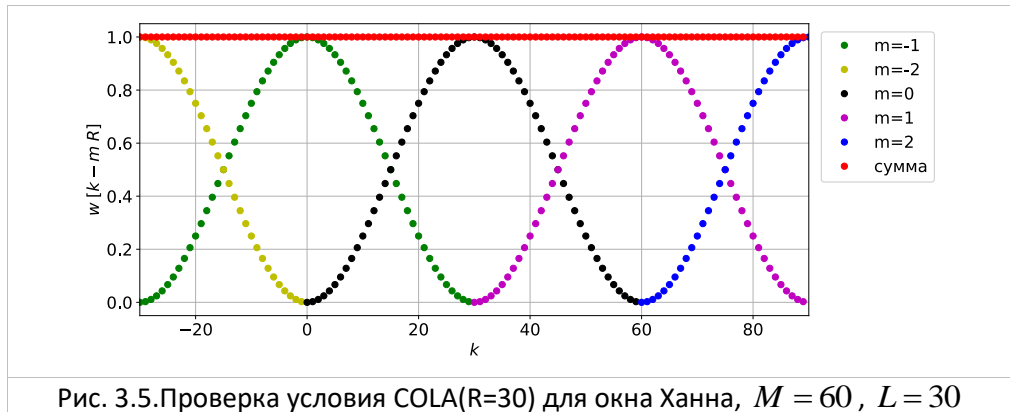
$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] w[k - mR] \exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[k] w[k - mR] \exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right) = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k - mR] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N_{\text{FFT}}}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-mR] = \text{const} \cdot X[n]$$

$$X[n] = \text{const} \sum_{m=-\infty}^{\infty} X_m[n] \quad (3.3)$$

Формула (3.3) означает, что для каждого коэффициента  $n$  сумма ДПФ по всем интервалам равна ДПФ всего сигнала. Приведем примеры окон и возможных перекрытий, для которых условие COLA(R) выполнено:

- прямоугольное окно с перекрытием  $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$  от  $M$ ;
- окно Бартлетта с перекрытием  $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \dots$  от  $M$ ;
- окно Ханна (рис. 5.7.5) с перекрытием  $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$  от  $M$ ;
- любое окно при  $L = M - 1$ , т.е. COLA(R=1) для любого окна выполнено.



Из формулы (3.3) видно, что если условие COLA(R) выполнено, то по известному STFT гарантировано можно найти исходную последовательность.

По определению, окно  $w[k]$  удовлетворяет условию NOLA(R) (Nonzero Overlap Add), если

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} w[k-mR]^2 \neq 0 \quad \forall k \in \mathbf{Z} \quad (3.4)$$

Условие (3.4) необходимо для обратимости STFT.

## Задание на моделирование

### Задача 3.1. Спектрограмма аудиофайла.

Вариант	Имя файла	Вариант	Имя файла
1	'clarinet_minor.wav'	7	'major_scale_flute5.wav'
2	'clarinet_major32.wav'	8	'major_scale_piano2.wav'
3	'major_scale_flute1.wav'	9	'major_scale_piano3.wav'
4	'major_scale_flute2.wav'	10	'single_notes.wav'

5	'major_scale_flute3.wav'	11	'violin_natural_minor.wav'
6	'major_scale_flute4.wav'	12	'violin_natural_minor_up.wav'

Вычислите кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT) для отсчетов сигнала, содержащихся в аудиофайле Вашего варианта. Изобразите спектрограмму сигнала. Длину окна (размер кадра), тип оконной функции, число точек в перекрытии, масштабы осей и размерность ДПФ самостоятельно подберите так, чтобы можно было выделить гармонические компоненты в сигнале. Ответьте на следующие вопросы.

- 1) Какие выводы можно сделать о составе данного сигнала по спектрограмме?
- 2) Чему равен размер кадра в секундах и как это соотносится с графиком?
- 3) Какое разрешение по времени и какое разрешение по частоте у данной спектрограммы?
- 4) Какие изменения можно наблюдать в спектрограмме, если изменяется:
  - а) тип оконной функции,
  - б) длина окна,
  - в) размерность ДПФ (за счет дополнения нулевыми отсчетами)?

### Задача 3.2. Спектрограмма ЛЧМ сигнала.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_0$ , Гц	170	80	90	75	120	130	85	95	70	65	110	105
$f_1$ , Гц.	800	900	850	870	820	875	780	810	790	825	830	840

Постройте спектрограмму с окном Блэкмана или с окном Ханна для ЛЧМ-сигнала длительностью  $T = 2$  секундам, мгновенная частота которого изменяется от  $f_0$  до  $f_1$ , частота дискретизации  $f_s = 2000$ . Гц. Начальный размер выберите  $M = 512$  отсчетов. Пронаблюдайте, как изменяется спектрограмма при изменении следующих параметров:

- а) тип оконной функции;
- б) длина кадра;
- в) размерность ДПФ.

## Контрольные вопросы к сдаче работы

**№3.1.** Предположим, что с помощью окна длиной  $M = 8000$  осуществляется вычисление кратковременного дискретного преобразования Фурье последовательности

$$x[k] = \cos\left(2\pi \frac{f_1}{f_d} k + \varphi_1\right) + \cos\left(2\pi \frac{f_2}{f_d} k + \varphi_2\right)$$

длиной  $N = 40000$  отсчетов без перекрытия. Фазы  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  заранее неизвестны. Частота дискретизации  $f_d = 44100$  Гц. Указать, начиная с какого значения  $\Delta f = |f_1 - f_2|$  можно выбором необходимой размерности ДПФ  $N_{\text{FFT}}$  обеспечить различимость гармонических компонент на спектрограмме. Рассмотреть случаи следующих окон: а) прямоугольного, б) Бартлетта, в) Ханна, г) Хэмминга, д) Блэкмана.

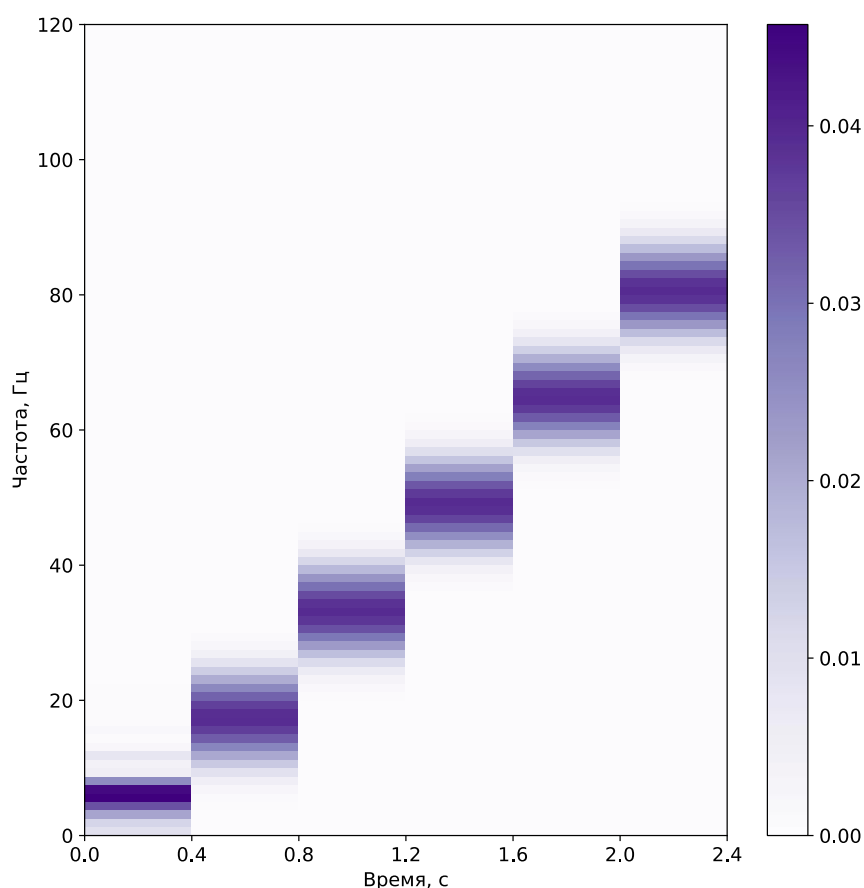
**№3.2.** Предположим, что для кратковременного дискретного преобразования Фурье используется окно длиной  $M = 512$  отсчетов. Проверить, выполнены ли условия COLA(R) и NOLA(R) ( $R = M - L$ ) для случая

а) числа точек перекрытия  $L_0 = 0$  (без перекрытия),  $L_1 = 1$ ,  $L_2 = 128$  (25%),  $L_3 = 256$  (50%),  $L_4 = 384$  (75%),  $L_5 = 511$  и прямоугольного окна;

б) числа точек перекрытия  $L_0 = 0$  (без перекрытия),  $L_1 = 256$  (50%),  $L_2 = 511$  и окна Ханна.

\* Проверьте результаты с помощью функций `scipy.signal.check_COLA` и `scipy.signal.check_NOLA`.

**№3.3.** На рисунке представлены результаты спектрального анализа по отсчетам ЛЧМ – сигнала. В STFT используется окно Ханна,  $M = 400$ ,  $L = 200$ ,  $N_{\text{FFT}} = M$ ,  $f_d = 500$  Гц, за время наблюдения 2,4 секунды мгновенная частота ЛЧМ сигнала изменяется от 1 Гц до 80 Гц. Укажите, чему равна ширина прямоугольника (ячейки одного цвета) на графике STFT вдоль оси времени и по оси частот.



## Список литературы

В качестве учебной литературы рекомендуется использовать учебные пособия [2], [3] и [4].

1. Blackman R.B., Tukey J.W. The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering — Part I // The Bell System Technical Journal. 1958. № 1(37). С. 185–282. DOI:10.1002/j.1538-7305.1958.tb03874.x.

2. Солонина А.И. Цифровая обработка сигналов в зеркале Matlab. СПб.: БХВ-Петербург, 2021. 560 с.
3. Романюк Ю.А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-х ч. Ч.1. Свойства и преобразования дискретных сигналов. Изд. 2-Е, . М.: МФТИ, 2007. 332 с.
4. Романюк Ю.А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе. Учебное пособие. М.: МФТИ, 2007. 120 с.

## Приложение 1. Работа в среде GNU Octave или MATLAB

Помимо библиотек Python, лабораторную работу можно выполнять в среде MATLAB или GNU Octave. Далее по тексту GNU Octave и MATLAB можно считать синонимами.

### Рабочая директория

В среде GNU Octave можно использовать не только встроенные команды, но и расширять функционал с помощью дополнительных файлов-скриптов (\*.m). Без указания полного пути в среде доступны файлы из так называемой «рабочей директории». Сменить ее можно с помощью команды `cd`, а также используя соответствующие кнопки в панели инструментов.

### Рабочая область

В ходе работы все вычисленные ранее переменные сохраняются в так называемой «рабочей области». Посмотреть содержимое «рабочей области» можно как в отдельном окне, так и с помощью команды `who`. Очистить рабочую область можно командой `clear`.

### Язык сценариев (m-файлы)

#### Переменные

Имена переменных могут состоять из произвольных букв, цифр и знаков «\_». Не рекомендуется использовать в качестве имен переменных имена стандартных функций, а также имена стандартных переменных:

- `i` или `j` – мнимая единица
- `inf` – неопределенность 1/0
- `NaN` – неопределенность 0/0
- `ans` – результат последней операции.
- `pi` – число Пи
- `rand` – псевдослучайное число из интервала [0;1]
- `eps` – текущая относительная точность вычислений

#### Матрицы

Матрицы – основной объект, с которым работает GNU Octave. Вектор – матрица размерности 1xN или Nx1. Скаляр – матрица 1x1. В записи размерности матрицы «MxN» M обозначает число строк, N – число столбцов.

Скаляры создаются с помощью оператора присваивания: `scalar = 1.234;`

Для ввода матриц большей размерности используются символы «`[]`». Матрицы задаются построчно, элементы одной строки разделяются пробелом, а строки – символом «`;`». Например, матрицы можно задать так:

```
matrix = [1 2; 3 4; 5 6];      % матрица 3x2
```

```
vector = [1 2 3];             % вектор — строка
```

```
vector1 = [1; 2; 3];          % вектор — столбец
```

Большие матрицы можно формировать из матриц меньшей размерности. Например, используя матрицу и вектор, заданные выше, команда `a = [matrix vector1; 0 1 2]` определяет матрицу `[1 2 1; 3 4 2; 5 6 3; 0 1 2]`.

Для обращения к элементам матрицы используются «`()`». Чтобы получить элемент из строки `i` и столбца `j` используется запись `A(i, j)`. Нумерация строк и столбцов начинается с единицы. Можно обращаться не только к отдельным элементам матриц, но также получить целые строки и столбцы. `A(:, j)` – `j`-ый вектор-столбец, `A(i, :)` – `i`-ая строка.

Для создания вектора-строки из последовательных элементов есть специальный оператор перечисления «`:`»

```
u = start : step : end;
```

В результате в `u` будет вектор, состоящий из элементов арифметической прогрессии, первый элемент которой равен `start`, а шаг – `step`. Последний элемент вектора будет максимальным членом прогрессии, который не превышает `end`. Если `step = 1`, то можно его не указывать: `v = 1:5` задает вектор `[1 2 3 4 5]` Для матриц доступны следующие полезные функции:

- оператор «`'`» – транспонирует матрицу
- `size(A)` – определяет размеры матрицы, возвращает вектор `1x2` вида `[M, N]`, где `M` – число строк, `N` – число столбцов.
- `length(A)` – максимальный из размеров матрицы `A`. Удобно определять число элементов в векторе.

### ***Арифметические операции***

Т.к. все объекты в GNU Octave – это матрицы, то и операции с ними соответствуют операциям с матрицами. Ниже приведен список основных операций:

- `=` – присваивание;
- `+` – сложение;
- `*` – умножение;
- `\` – деление слева (`x = A \ B` – результат решения уравнения  $A \cdot X = B$ ,  $X = A^{-1} \cdot B$ );
- `/` – деление справа (`x = A / B` – результат решения уравнения  $X \cdot B = A$ ,  $X = A \cdot B^{-1}$ );
- `^` – возведение в степень;
- `.*` – поэлементное умножение;
- `.^` – поэлементное возведение в степень;
- `./` – поэлементное деление.



Следует помнить, что операции подчиняются требованиям традиционной матричной алгебры. GNU Octave автоматически проверяет размерность операндов.

## Сценарии

Сценарии записываются в текстовых файлах с расширением «.m». В этом файле перечислена последовательность операций, так, как если бы она же выполнялась посредством ввода отдельных команд в командной строке. Все переменные, объявленные в сценарии, сохраняются в рабочей области и доступны для дальнейшего использования в командной строке или других сценариях. Чтобы вызвать сценарий, нужно набрать имя его файла без расширения в командной строке. Например, запуск сценария `my_script.m` из рабочей директории осуществляется вводом `my_script` в окне команд.

## Функции

Чтобы не засорять рабочую область лишними переменными, часть кода сценариев можно оформить в виде функций. Функции также записываются в текстовых файлах с расширением «.m». В отличие от сценариев в файле функции первым должен быть специальный оператор, содержащий описание функции:

```
function[out_params] = function_name(in_params)
```

Это означает, что в файле записана функция с именем `function_name`, у которой есть входные аргументы `in_params`, а результат сохраняется в выходных переменных `out_params`.

Завершается описание функции ключевым словом `end`.

Название функции должно совпадать с названием файла, в котором она описана.

Входные аргументы передаются в функцию «по значению». Любые изменения этих переменных в теле функции не отразятся на их значениях в рабочей области.

Чтобы вызвать функцию, нужно указать ее имя и список аргументов в круглых скобках:

```
val = function_name(some_arg) ;
```

Если указаны несколько входных/выходных значений:

```
function[out1out2] = function_name(in1,in2)
```

то функцию можно вызывать так:

```
[a1 a2] = function_name(b1,b2) ;
```

## Некоторые стандартные операции

В стандартной поставке GNU Octave доступны основные математические функции (`exp`, `cos`, `sin`, `acos`, `atan`, `sqrt`, `abs`, `log`, `log10` и т.п.)

Для округления можно пользоваться функциями `round(x)` (до ближайшего целого), `fix(x)` (до целого в сторону нуля), `ceil(x)` / `floor(x)` (до ближайшего целого в сторону увеличения/уменьшения).

Для работы с комплексными числами доступны следующие функции:

- `arg(x)` — аргумент комплексного числа;
- `abs(x)` — модуль комплексного числа;

- `real(x)` – действительная часть;
- `imag(x)` – мнимая часть;
- `conj(x)` – комплексное сопряжение.

Иногда требуется сформировать вектора или матрицы определенного вида. Для этого есть следующие функции:

- `linspace(start, end, N)` – формирует вектор-строку из `N` элементов равномерно расположенных между `start` и `end`.
- `zeros(N, M)` – создает нулевую матрицу размером `NxM`. Вектор-строку из `M` нулей можно получить с помощью команды `zeros(1, M)`.
- `ones(N, M)` – создает матрицу размером `NxM`, все элементы которой равны единице. Вектор-строку из `M` единиц можно получить с помощью команды `ones(1, M)`.
- `rand(N,M)` – создает матрицу размером `NxM`, все элементы которой – случайные числа, равномерно распределенные на интервале (0.0, 1.0).

### Рисование графиков

Команда `figure` создает новое окно для рисования графиков. Все команды рисования влияют на последнее созданное окно.

Непрерывные графики выводятся с помощью команды `plot(x,y)`. Аргументами могут быть:

- вектора одинаковой размерности, `x` – значения по оси абсцисс, `y` – значения по оси ординат;
- матрицы одинаковой размерности: для каждого столбца из `x` выбирается соответствующий столбец из `y` и строится график, как в случае выше;
- `x` - вектор, а `y` – матрица (или наоборот), такие, что длина вектора совпадает с одной из размерностей матрицы: для каждого столбца (строки) матрицы строится отдельный график, где в качестве значений для второй оси используются элементы вектора

Также можно задать несколько пар аргументов `(x,y)`, чтобы построить несколько графиков на одном рисунке:

```
plot(x1,y1, x2,y2)
```

Если нужно нарисовать график отдельных отсчетов, то следует использовать команду `stem`. Ее аргументы аналогичны команде `plot`.

Повторные вызовы команд `plot` или `stem` заменяют график в последнем окне, созданном командой `figure`. Для того, чтобы отобразить в одном окне несколько отдельных графиков, существует команда `subplot(i, j, p)`. Эта команда делит окно вывода графиков на сетку из `i` строк и `j` столбцов. Параметр `p` выбирает область окна, в которой следующая команда `plot` или `stem` будет осуществлять рисование графика. Области нумеруются слева направо сверху вниз (для вывода четырех графиков `(i,j - p)`: 1,1 – 1, 1,2 – 2, 2,1 – 3, 2,2 – 4).

## Приложение 2. Цифровой спектральный анализ методом ДПФ в GNU Octave / MATLAB

### Определение данных

Для осуществления спектрального анализа необходимо сначала определить входную последовательность данных  $x[k]$ . В данной лабораторной работе сигналы либо определяются формулой, либо задаются .wav или .mat файлами.

Аудиофайлы в формате .wav содержат информацию о дискретных отчетах цифрового (дискретизованного и квантованного по амплитуде) сигнала  $x[k]=x(k\Delta t)$  и о частоте дискретизации  $f_d = f_s = 1/\Delta t$ . Чтение .wav файла может быть произведено, например, с помощью следующего кода:

```
[x, fs]=audioread('dataset\cello1.wav');
```

где  $x$  – последовательность отсчетов сигнала,  $fs$  – частота дискретизации.

Файлы данных .mat в данной лабораторной работе содержат векторы с заранее записанными данными. Они могут быть считаны следующим образом:

```
data = load('dataset\variant_1_ex_1_2.mat');  
x = data.x;
```

Здесь первая строка считывает структуру в переменную `data`, вторая – присваивает переменной `x` значения поля структуры. Детерминированные последовательности отсчетов могут быть определены с помощью математических функций, описанных в предыдущем разделе.

### Быстрое преобразование Фурье (БПФ)

Можно заметить, что вычисление всех отсчетов дискретного преобразования Фурье (ДПФ) непосредственно по формуле

$$X[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N}\right)$$

в случае последовательностей  $x[k]$  большой длительности  $N$  требует значительного времени вычислений. Это связано с тем, что такой алгоритм требует  $N^2$  комплексных умножений и  $N^2 - N$  комплексных сложений. С ростом  $N$  мы получаем квадратичный рост числа операций, что делает такой алгоритм не применимым на практике.

Однако число операций можно значительно сократить, воспользовавшись алгоритмом быстрого преобразования Фурье (БПФ, также FFT – от англ. Fast Fourier transform). Построение таких алгоритмов рассматривается или будет рассмотрено в лекционном курсе «Дискретные преобразования сигналов». Пока лишь подчеркнем, что для случая, когда  $N$  является степенью двух ( $N = 2^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ), асимптотическая сложность алгоритма БПФ будет  $O(N \log_2 N)$ .

Вычисление по алгоритму БПФ для одномерной последовательности отсчетов производится с помощью функции `fft`. Если она принимает на вход одно значение `fft(x)`, то в

результате получится ДПФ той же размерности, что и сам сигнал. Если используется и второй аргумент `fft(x, n)`, то зависимости от `n` возможны следующие ситуации.

а) `n` меньше длины вектора `x`. В таком случае ДПФ определяется для сигнала, состоящего из `n` первых отсчетов вектора `x`.

б) `n` равно длине вектора `x`. Этот случай эквивалентен `fft(x)`. Размерность ДПФ совпадает с длиной вектора входных данных.

в) `n` больше длины вектора `x`. Это означает, что будет определено ДПФ для последовательности `x`, дополненной нулевыми отсчетами справа до размера `n`. При таком дополнении спектр (ДВПФ) последовательности не изменяется, а размерность ДПФ (число отсчетов на периоде) становится равной `n`.

Обратное преобразование выполняется с помощью вызова `ifft(x)` или `ifft(x, n)`, где второй аргумент функции определяется аналогичным образом. Если требуется определить ДПФ, нормированное на число отсчетов,

$$\tilde{X}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \exp\left(-j2\pi \frac{nk}{N}\right)$$

что нужно, например, при анализе периодических последовательностей, то необходимо разделить вектор, описывающий результат, поэлементно на `N`.

Далее приведен пример кода для построения графика модуля отсчетов ДПФ с нормирующим множителем для последовательности отсчетов, записанной в векторе `x`.

```
N=64;
k=0:1:N-1;
x=cos(2*pi*25/N*k);
Xn=fft(x)/length(x); % вычисляем ДПФ и нормируем результат
stem([0:(length(Xn)-1)], abs(Xn)); % строим график модуля отсчетов ДПФ
xlabel('n');
ylabel('|X[n]| / N');
```

Заметим, что в Matlab индексы массивов нумеруются с единицы. Так, например, отсчету ДПФ `X[11]` соответствует `Xn(11+1)`.

### Дискретное во времени преобразование Фурье

Эффективный способ вычисления ДВПФ на равномерной сетке в диапазоне частот основан на вычислении БПФ и использовании связи  $X(v)|_{v=n/N} = X[n]$ . Приведем пример вычисления с построением графика модуля ДВПФ.

```
M=2^12; %число точек сетки частот
nu=(0:(M-1))/M-0.5;
Wn=fftshift(fft(w, M)) % вычисление ДВПФ в M точках на [-0.5; 0.5)
```

```
plot(nu, abs(Yn));
ylabel("|Y(\nu)|");
xlabel("\nu");
```

В приведенном примере  $M$  — число точек в диапазоне частот  $\nu \in [-0,5; 0,5]$ , в которых вычисляется ДВПФ. Функция `fftshift` позволяет перейти от диапазона  $\nu \in [0; 1]$  к  $\nu \in [-0,5; 0,5]$  (выполняет соответствующий циклический сдвиг массива). `nu` — точки, в которых мы вычисляем ДВПФ.

### Оконные функции

Приведем примеры кода, возвращающего последовательности отсчетов оконных функций.

<code>rectwin(N)</code>	Прямоугольное окно длиной $N$ .
<code>bartlett(N)</code>	Окно Бартлетта длиной $N$ .
<code>hann(N, 'periodic')</code>	Окно Ханна длиной $N$ .
<code>hamming(N, 'periodic')</code>	Окно Хэмминга длиной $N$ .
<code>blackman(N, 'periodic')</code>	Окно Блэкмана длиной $N$ .
<code>flattopwin(N, 'periodic')</code>	Окно с плоской вершиной длиной $N$ .
<code>kaiser(N, beta)</code>	Окно Кайзера длиной $N$ с параметром $\beta$ .
<code>chebwin(N, r)</code>	Окно Чебышева длиной $N$ с уровнем боковых лепестков $r$ (в дБ относительно главного)

Параметр `'periodic'` означает, что используется версия окна, в которой  $w[N-1] = w[1]$ . Как правило, именно такая форма окна используется для спектрального анализа. Если указать `'symmetric'` (по умолчанию), то  $w[N-1] = w[0]$ . Симметричная на интервале  $[0, N-1]$  форма окна используется, например, для синтеза КИХ-фильтров оконным методом.

Приведем пример построения графика АЧХ оконной функции в дБ.

```
N=32; % определяем длину окна
w=rectwin(N); % задаем прямоугольное окно длиной N
M=2^12; %число точек сетки частот
nu=(0:(M-1))/M-0.5;
Wn=fftshift(fft(w, M)); % вычисляем ДВПФ в 2^12 точках на [-0.5; 0.5)
plot(nu, 20*log10(abs(Wn)/max(abs(Wn))));
title('АЧХ в дБ');
ylabel("20lg|W(\nu) / W(0)|");
xlabel("\nu");
ylim([-120, 10]);
```

Отметим, что в Octave потребуется загрузка пакета `signal` (`pkg load signal`). Поточечное перемножение сигнала и ооконоой функции можно записать как `w.*x`

**Кратковременное дискретное преобразование Фурье (STFT)**

Приведем пример вычисления кратковременного дискретного преобразования Фурье.

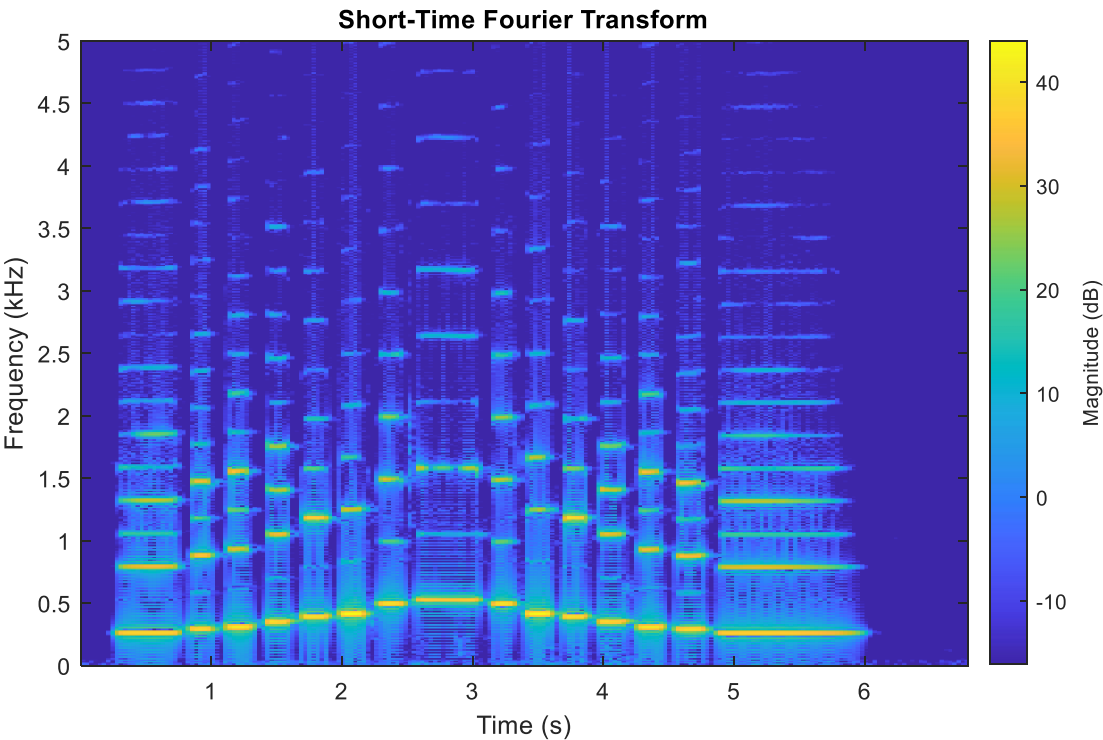
**Пример на Matlab**

```
[[x, fs] = audioread('dataset\clarinet_minor.wav');  
  
set(gca, 'FontSize', 18)  
  
stft(x, fs, 'Window', kaiser(2^11, 2), 'OverlapLength', 2^9, 'FFTLength', 2^12,  
      'FrequencyRange', "onesided");  
  
ylim([0, 5]);
```

Перечислим параметры функции `stft`.

<code>x</code>	Анализируемая последовательность отсчетов
<code>fs</code>	Частота дискретизации
<code>'Window', kaiser(2^11, 2)</code>	Окно Кайзера с параметром $\beta = 2$ и длиной окна $M = 2^{11}$
<code>'OverlapLength', 2^9</code>	Перекрытие $L = 2^9$ точек.
<code>'FFTLength', 2^12</code>	Размерность ДПФ для сегментов $N_{FFT} = 2^{12}$
<code>'FrequencyRange', "onesided"</code>	Вывод спектрограммы только для положительных частот $[0; f_d / 2]$

Функция `ylim([0, 5]);` ограничивает рассматриваемый диапазон интервалом от 0 до 5 кГц.



## Пример на Octave

Функция stft для Octave имеет отличный от Matlab синтаксис.

В Octave построение графика кратковременного дискретного преобразования Фурье доступно с помощью функций stft и specgram. Приведем пример, в котором две эти функции приведут к построению одинаковых графиков.

```
clear all;
pkg load signal;
[x, fs] = audioread('dataset\clarinet_minor.wav');
nfft=2^11;
window_size=512;
overlap=256;
[S, f, t] = specgram (x, nfft, fs, window_size, overlap);
figure(1);
specgram (x, nfft, fs, window_size, overlap);
figure(2);
Xm=stft(x=x, win_size=window_size, inc=window_size-overlap, num_coef=nfft/2,
win_type=1);
f=(0:ceil(size(Xm) (1)-1))/size(Xm) (1) * fs/2;
t=(0:size(Xm) (2))*(window_size-overlap)/fs;
max_Xm=max(abs(Xm(:)));
imagesc(t, f, 20*log10(abs(Xm)/max_Xm));
set (gca, "ydir", "normal");
xlabel('t, c');
ylabel('f, Гц');
```

nfft	Размерность ДПФ для сегментов $N_{FFT}$ .
num_coef	Число коэффициентов ДПФ для интервала $[0; f_d / 2]$ (половина nfft).
x	Анализируемая последовательность отсчетов.
fs	Частота дискретизации.
win_size window_size	Длина окна.
overlap	Перекрытие $L$ точек.
inc=window_size-overlap	Шаг $R = M - L$ .
win_type	Тип окна. Окно Ханна win_type = 1. Окно Хэмминга win_type = 2. Прямоугольное окно win_type = 3.
max_Xm=max(abs(Xm(:))) 20*log10(abs(Xm)/max_Xm)	Нормировка на максимум в спектре при построении спектрограммы в дБ.
set (gca, "ydir", "normal");	Требуется для того, чтобы направить ось ординат вверх.
pkg load signal;	Загрузка пакета signal.

### Приложение 3. Сводная таблица основных характеристик различных оконных функций.

название окна	ширина главного лепестка на нулевом уровне (в бинах ДПФ)	уровень максимального бокового лепестка относительно главного (дБ)	скорость спада боковых лепестков (дБ / октава)	коэффициент паразитной амплитудной модуляции $K_{\text{мод}}$ (дБ)
прямоугольное	2	-13,3	6	-3,92
Бартлетта	4	-26,5	12	-1,82
Ханна	4	-32	18	-1,42
Хэмминга	4	-42	6	-1,78
Блэкмана	6	-58,1	18	-1,10

название окна	полоса по уровню –3 дБ (в бинах ДПФ)	полоса по уровню –6 дБ (в бинах ДПФ)	Когерентное усиление в единицах $W(0) / N$
прямоугольное	0,89	1,20	1
Бартлетта	1,28	1,78	0,5
Ханна	1,44	2,00	0,5
Хэмминга	1,33	1,82	0,54
Блэкмана	1,64	2,30	0,42