Algorithm Design and Analysis

บทที่ 10

Network flow Part I

อ. ดร. จักริน ชวชาติ
อ. เบญจมาศ ปัญญางาม

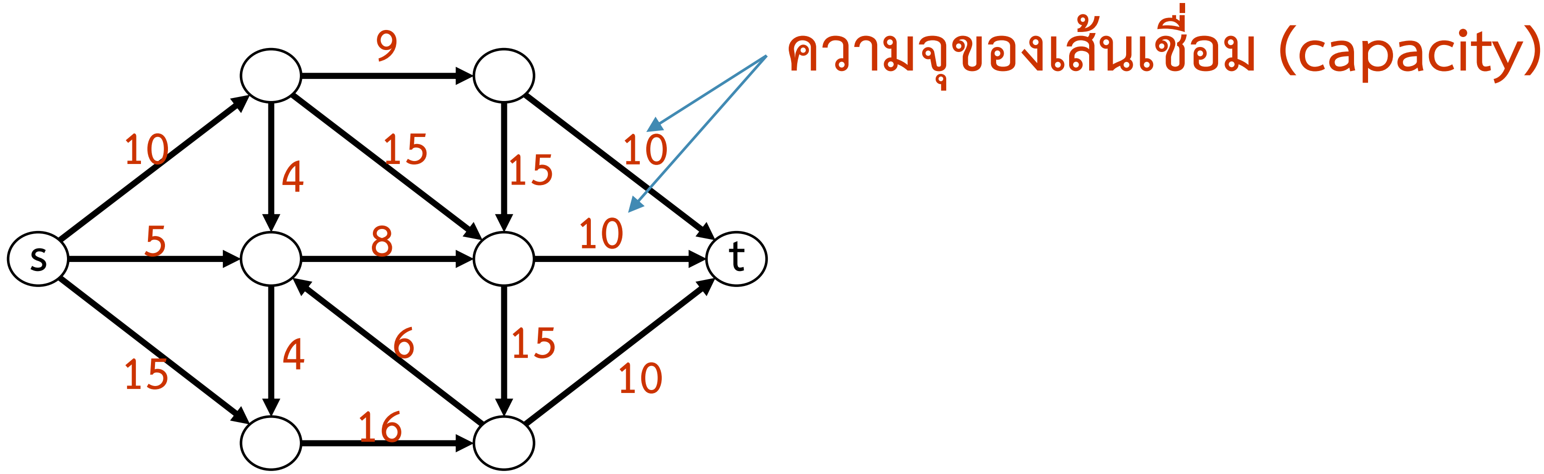
Network Flow Problem

ในทฤษฎีกราฟนั้น เครือข่ายการไหล หรือ Flow network อาจจะรู้จักในชื่อ Transportation network คือ กราฟแบบมีทิศทาง (Directed graph) ที่แต่ละเส้นเชื่อมจะมีความจุ (Capacity) โดยที่แต่ละเส้นเชื่อมจะรองรับ การไหลหรือ flow โดยปริมาณของ flow บนเส้นเชื่อมจะไม่สามารถเกินความจุของเส้นเชื่อม

Directed graph ของปัญหานี้จะถูกเรียกว่า network ซึ่ง network เป็นการจำลองโมเดลของการจราจรบนถนน, การไหลของน้ำในท่อ, กระแสไฟฟ้าในวงจร เป็นต้น

Flow network

- เป็นการจำลองการไหลของวัตถุผ่านเส้นเชื่อม
- เป็นกราฟแบบมีทิศทาง Digraph $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ ที่
  - มีโหนด source $\boldsymbol{s} \in \boldsymbol{V}$ และ sink $\boldsymbol{t} \in \boldsymbol{V}$ (ไม่มีเส้นเชื่อมคู่ขนาน ไม่มีเส้นเชื่อมเข้า s และไม่มีเส้นเชื่อมออกจาก t)
  - มีความจุ capacity $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{e})$ ของแต่ละเส้นเชื่อม $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}$ และเป็นค่าความจุที่ไม่ติดลบ

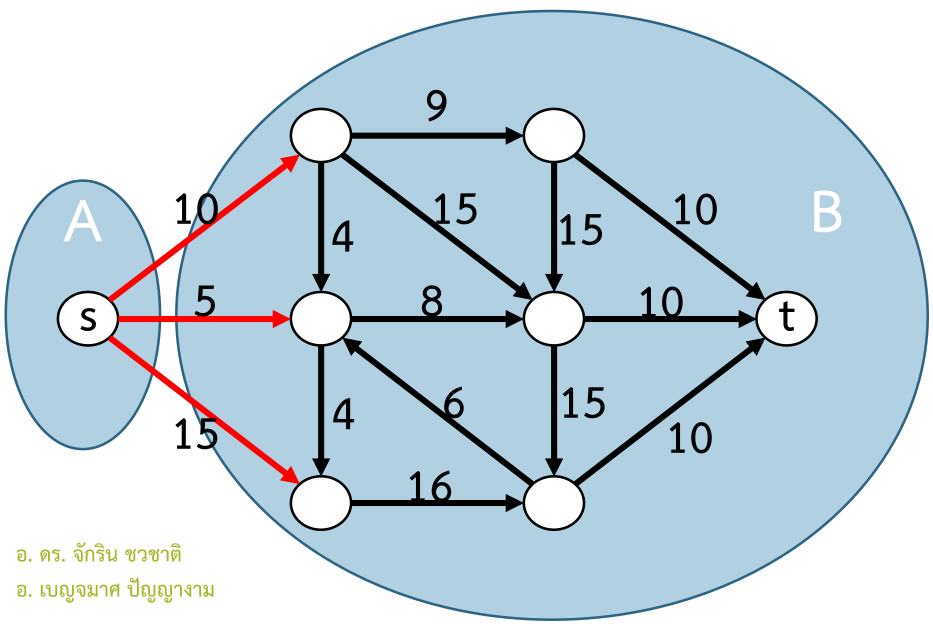


Minimum cut problem

<u>นิยาม</u> st-cut (cut) เป็นการแบ่งโหนดออกเป็นเซต (A,B) ที่มี $s \in A$ และ $t \in B$

<u>นิยาม</u> ความจุของ cut คือผลรวมความจุของเส้นเชื่อมที่ออกจาก A ไป B

$$cap(A,B) = \sum_{e\ out\ of\ A} c(e)$$



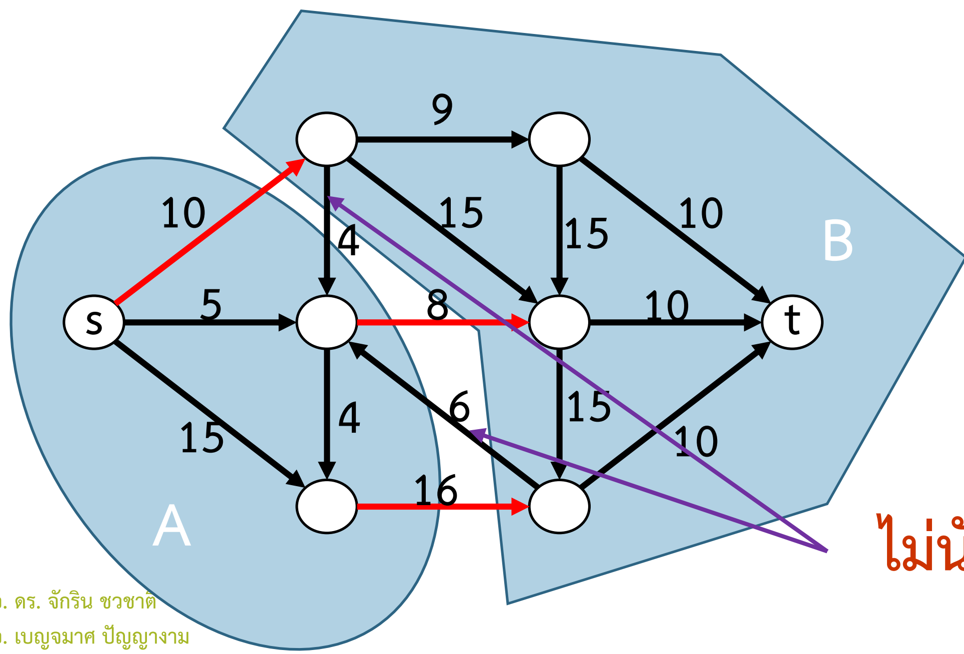
capacity=10+5+15=30

Minimum cut problem

<u>นิยาม</u> st-cut (cut) เป็นการแบ่งโหนดออกเป็นเซต (A,B) ที่มี $s \in A$ และ $t \in B$

<u>นิยาม</u> ความจุของ cut คือผลรวมความจุของเส้นเชื่อมที่ออกจาก A ไป B

$$cap(A, B) = \sum_{e \text{ out of } A} c(e)$$



capacity=10+8+16=34

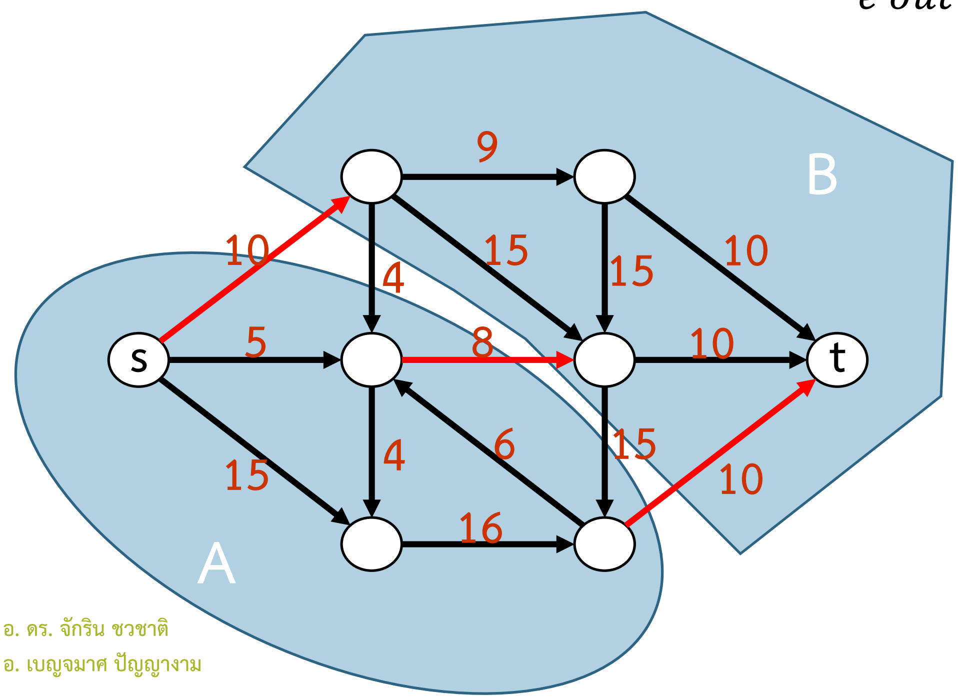
ไม่นับเส้นเชื่อมจาก B ไป A

Minimum cut problem

<u>**นิยาม**</u> st-cut (cut) เป็นการแบ่งโหนดออกเป็นเซต (A,B) ที่มี $s \in A$ และ $t \in B$

<u>**นิยาม**</u> ความจุของ cut คือผลรวมความจุของเส้นเชื่อมที่ออกจาก A ไป B

$$cap(A,B) = \sum_{e \text{ out of } A} c(e)$$



capacity=10+8+10=28

Maximum flow problem

<u>นิยาม</u> st-flow (flow) f คือฟังก์ชัน VxV->R ที่สอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

- สำหรับแต่ละเส้นเชื่อม $e \in E$:

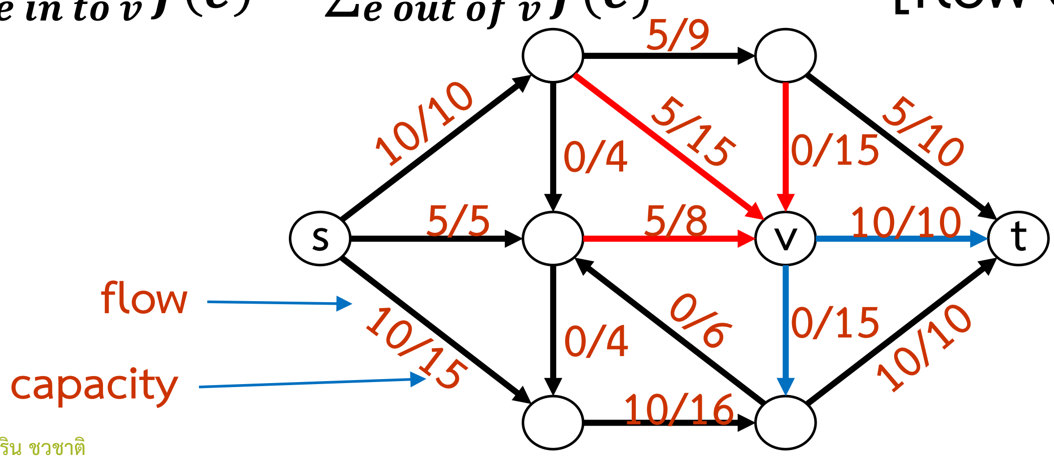
$$0 \le f(e) \le c(e)$$ [capacity]

- สำหรับแต่ละเส้นเชื่อม $e \in E$:

$$f(u,v) = -f(v,u)$$ [skew symmetry]

- สำหรับแต่ละโหนด $v \in V - \{s,t\}$:

$$\sum_{e \text{ in to } v} f(e) = \sum_{e \text{ out of } v} f(e)$$ [flow conservation]

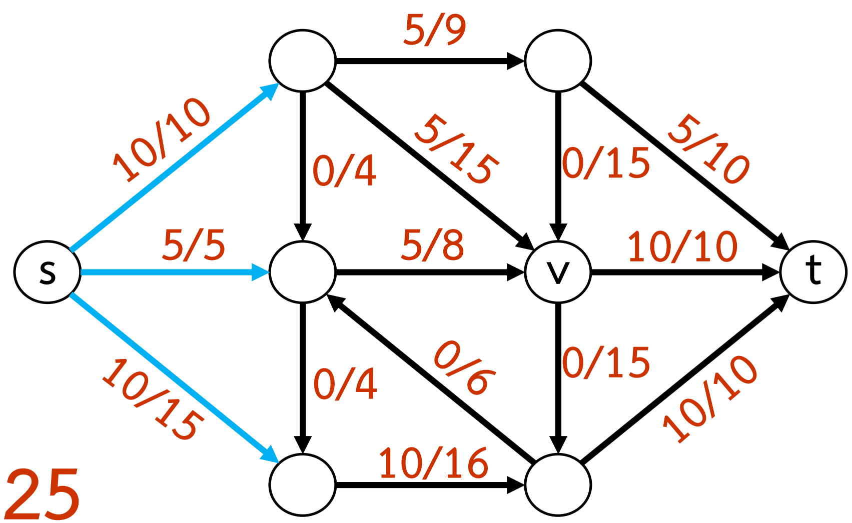


inflow at v = 5+5+0 = 10

outflow at v = 10+0 = 10

Maximum flow problem

<u>นิยาม</u> ค่าของ flow f คือ $val(f) = \sum_{e \text{ out of } s} f(e)$

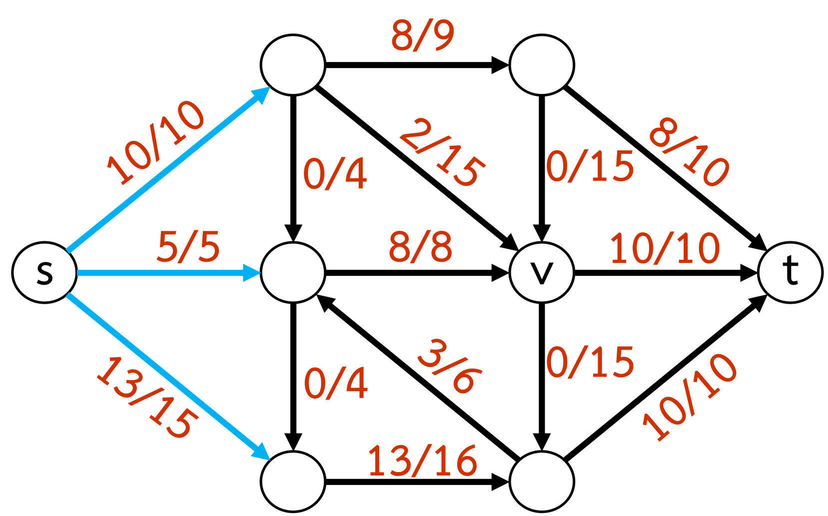


value=5+10+10=25

Maximum flow problem

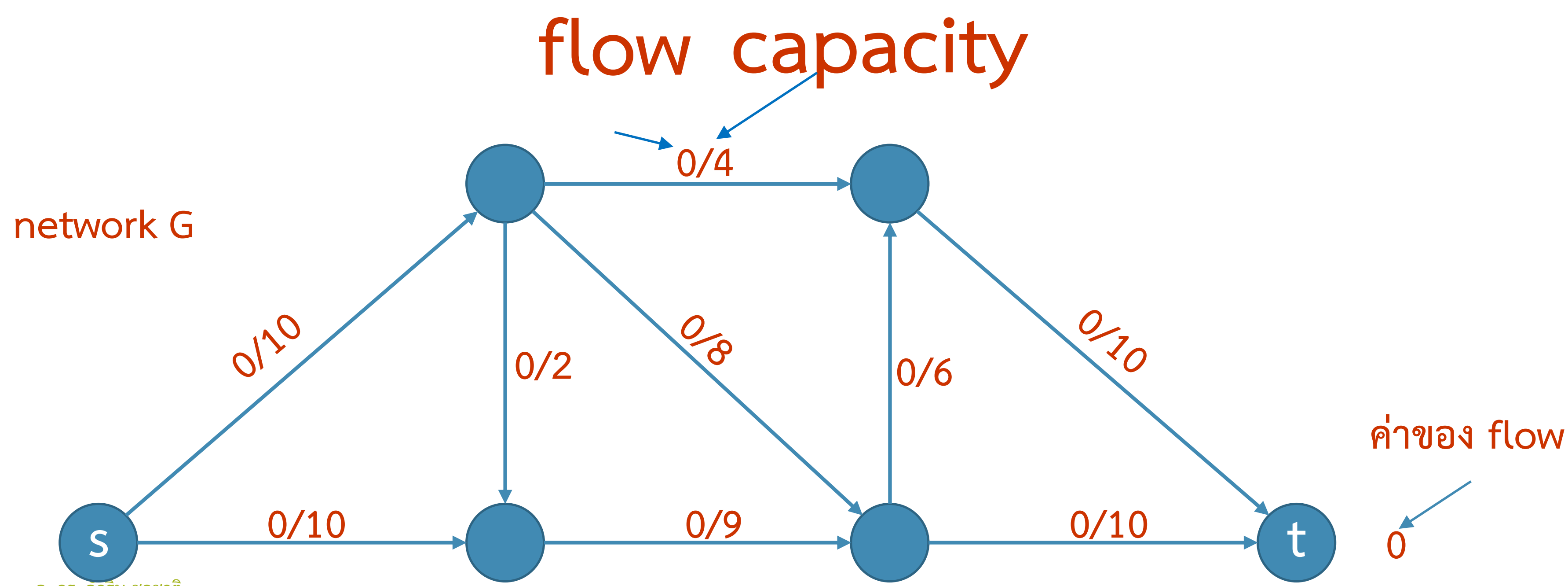
Max-flow problem หา flow ที่มีค่ามากที่สุด

value=5+10+13=28



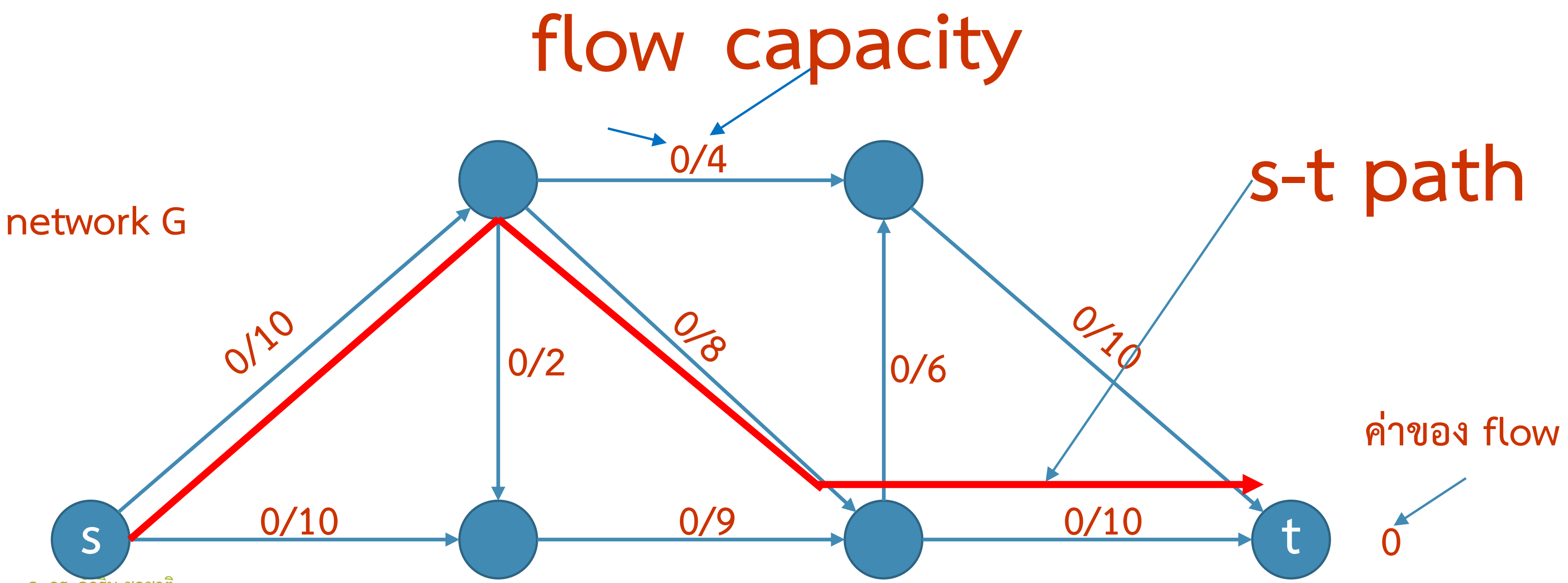
Greedy algorithm (ลอง)

- เริ่มต้นให้ทุกเส้นเชื่อม $e \in E$ มีค่า f(e) = 0
- หา s-t path P ที่แต่ละเส้นเชื่อมมี $f(e) < c(e)$
- เพิ่ม (augment) flow ไปตามเส้นทาง P
- ทำซ้ำจนทำไม่ได้



Greedy algorithm (ลอง)

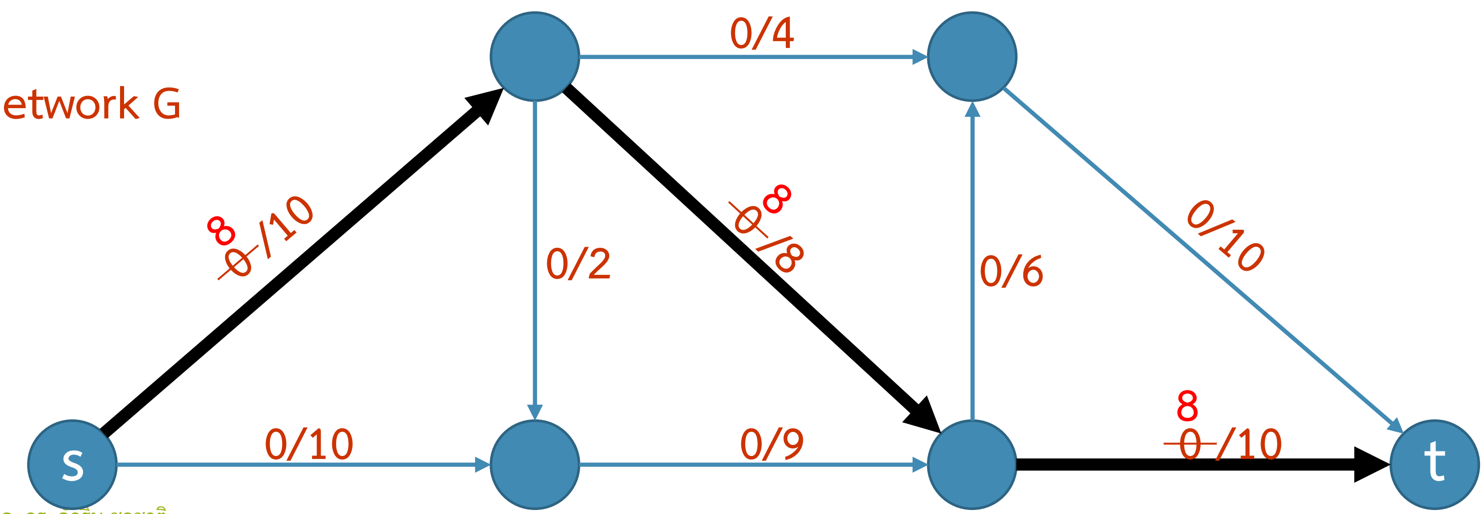
- เริ่มต้นให้ทุกเส้นเชื่อม $e \in E$ มีค่า f(e) = 0
- หา s-t path P ที่แต่ละเส้นเชื่อมมี $f(e) < c(e)$
- เพิ่ม (augment) flow ไปตามเส้นทาง P
- ทำซ้ำจนทำไม่ได้



Greedy algorithm (ลอง)

- เริ่มต้นให้ทุกเส้นเชื่อม $e \in E$ มีค่า f(e) = 0
- หา s-t path P ที่แต่ละเส้นเชื่อมมี $f(e) < c(e)$
- เพิ่ม (augment) flow ไปตามเส้นทาง P
- ทำซ้ำจนทำไม่ได้

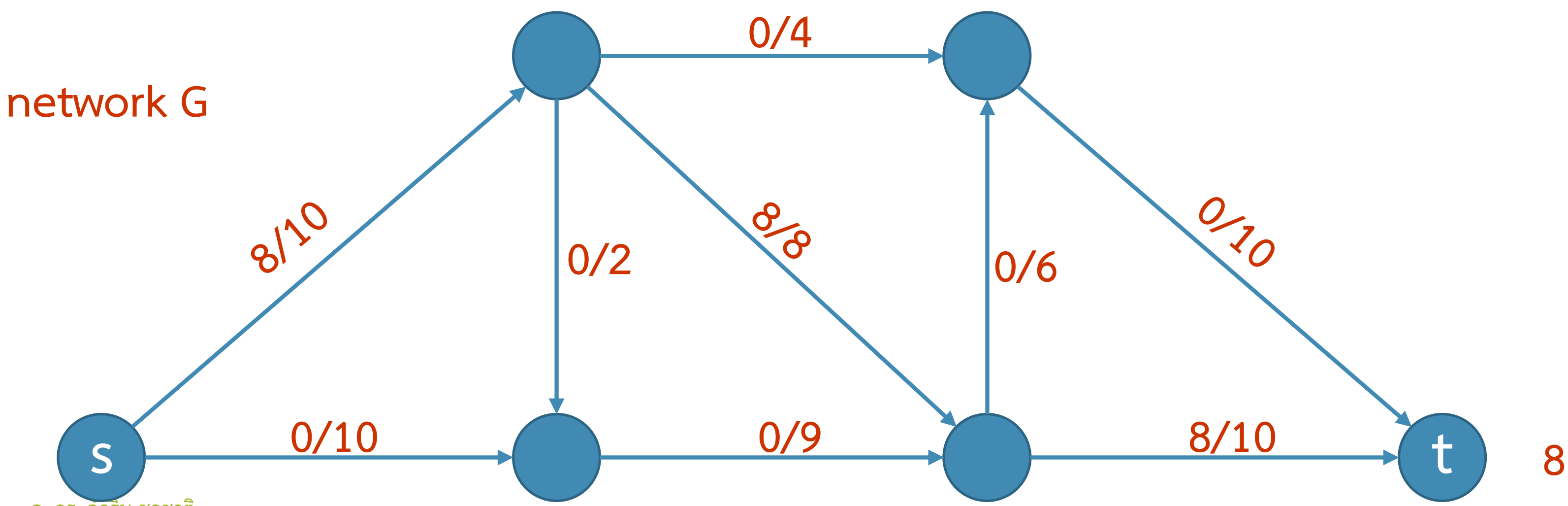
network G



0+8=8

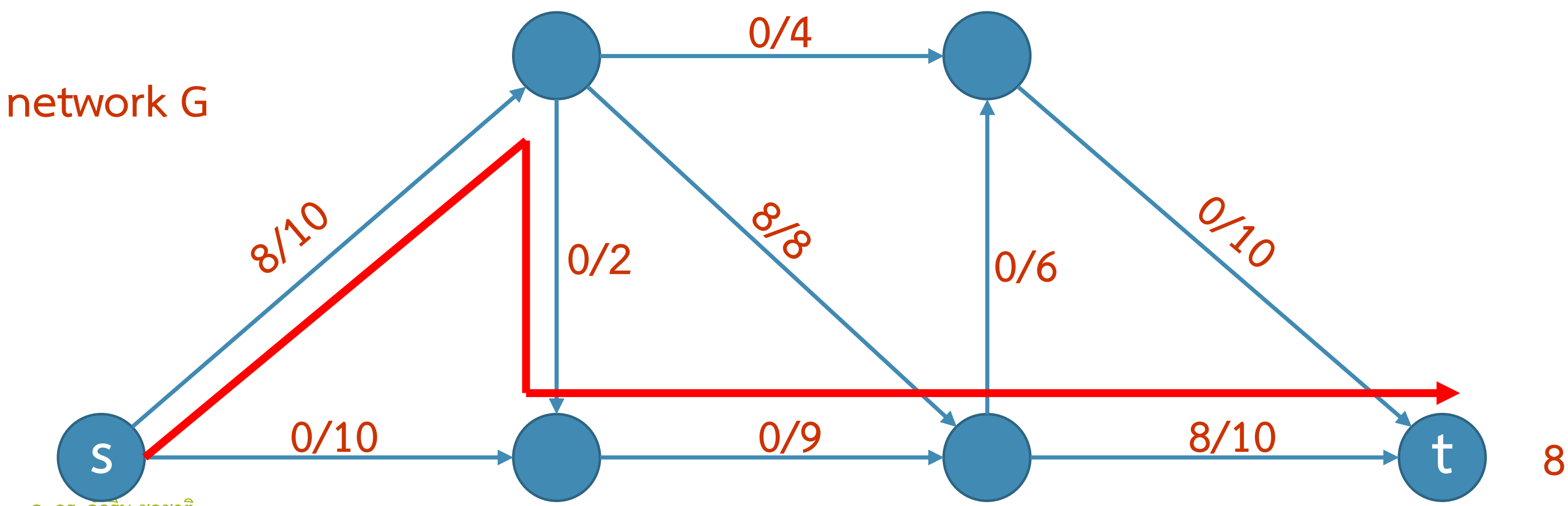
Greedy algorithm (ลอง)

- เริ่มต้นให้ทุกเส้นเชื่อม $e \in E$ มีค่า f(e) = 0
- หา s-t path P ที่แต่ละเส้นเชื่อมมี $f(e) < c(e)$
- เพิ่ม (augment) flow ไปตามเส้นทาง P
- ทำซ้ำจนทำไม่ได้



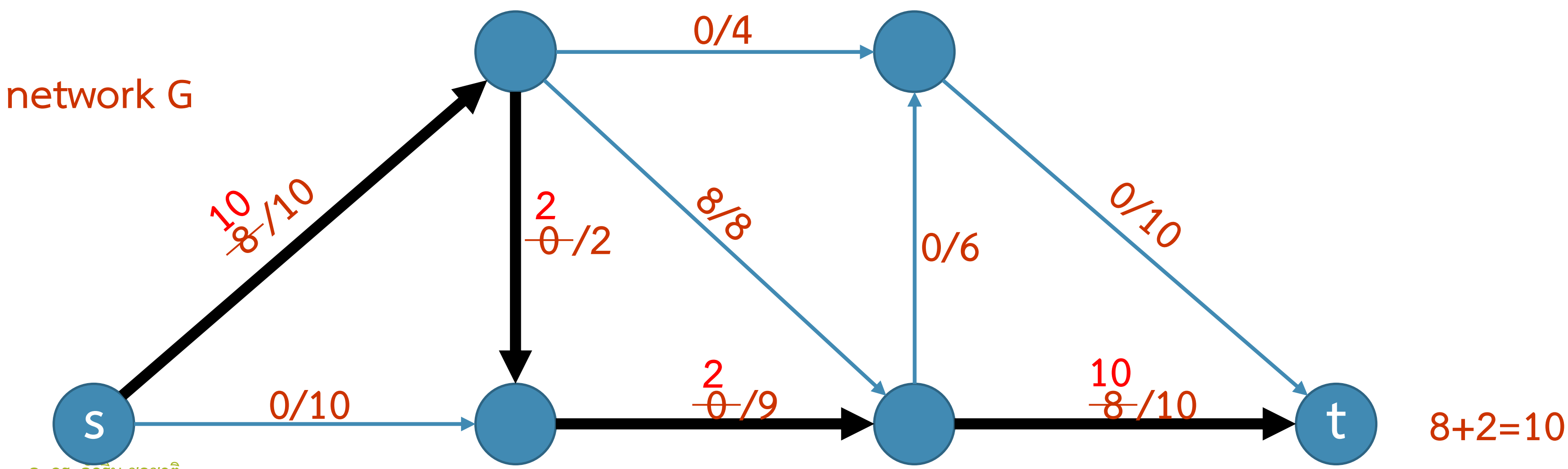
Greedy algorithm (ลอง)

- เริ่มต้นให้ทุกเส้นเชื่อม $e \in E$ มีค่า f(e) = 0
- หา s-t path P ที่แต่ละเส้นเชื่อมมี $f(e) < c(e)$
- เพิ่ม (augment) flow ไปตามเส้นทาง P
- ทำซ้ำจนทำไม่ได้



Greedy algorithm (ลอง)

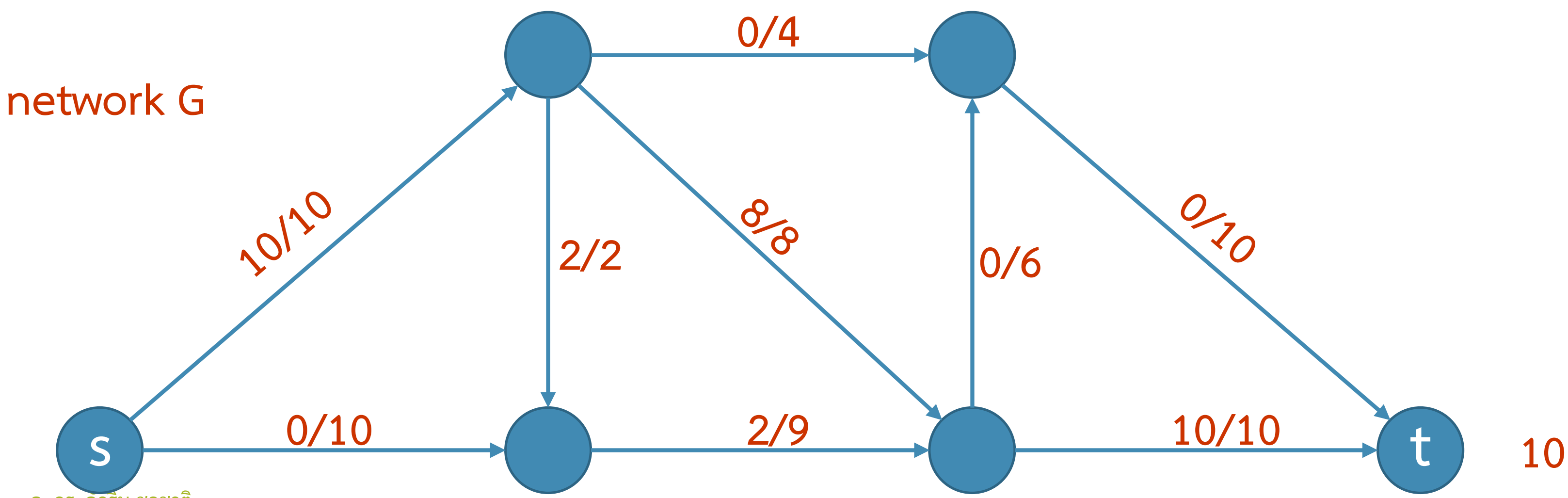
- เริ่มต้นให้ทุกเส้นเชื่อม $e \in E$ มีค่า f(e) = 0
- หา s-t path P ที่แต่ละเส้นเชื่อมมี $f(e) < c(e)$
- เพิ่ม (augment) flow ไปตามเส้นทาง P
- ทำซ้ำจนทำไม่ได้



อ. ดร. จักริน ชวชาติ
อ. เบญจมาศ ปัญญางาม

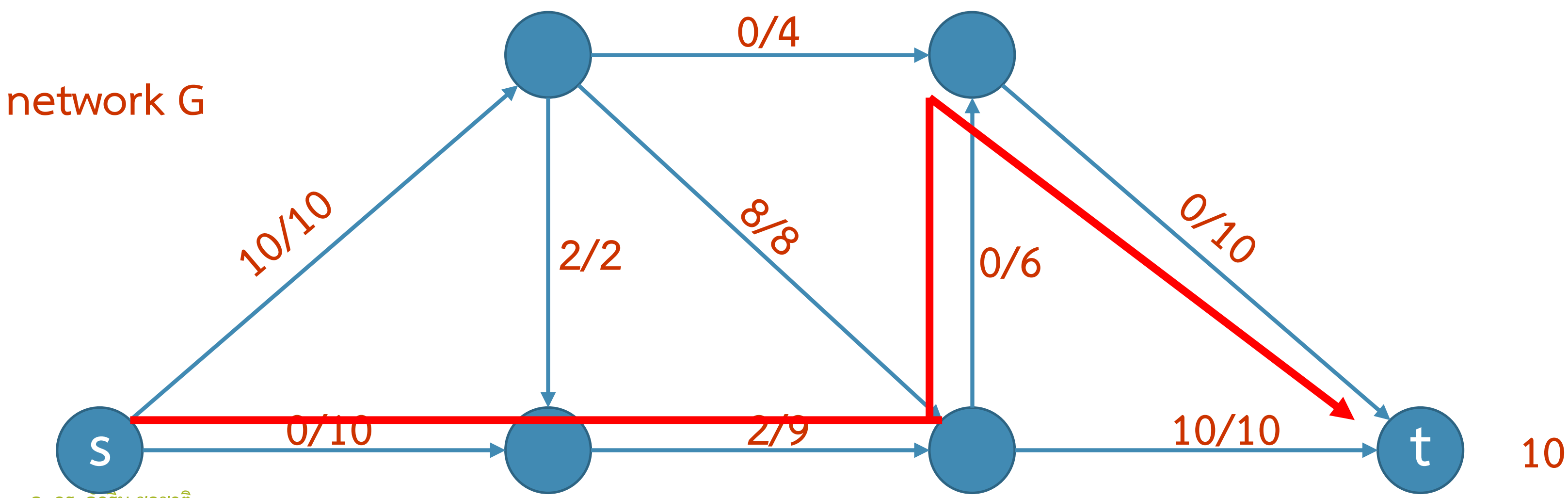
Greedy algorithm (ลอง)

- เริ่มต้นให้ทุกเส้นเชื่อม $e \in E$ มีค่า f(e) = 0
- หา s-t path P ที่แต่ละเส้นเชื่อมมี $f(e) < c(e)$
- เพิ่ม (augment) flow ไปตามเส้นทาง P
- ทำซ้ำจนทำไม่ได้



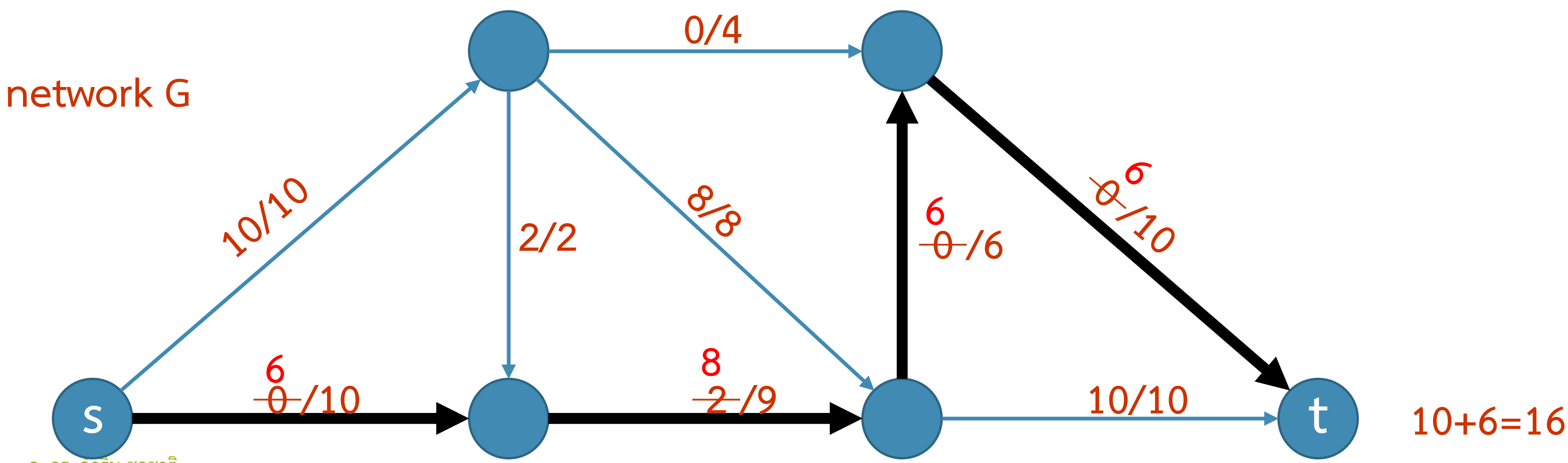
Greedy algorithm (ลอง)

- เริ่มต้นให้ทุกเส้นเชื่อม $e \in E$ มีค่า f(e) = 0
- หา s-t path P ที่แต่ละเส้นเชื่อมมี $f(e) < c(e)$
- เพิ่ม (augment) flow ไปตามเส้นทาง P
- ทำซ้ำจนทำไม่ได้



Greedy algorithm (ลอง)

- เริ่มต้นให้ทุกเส้นเชื่อม $e \in E$ มีค่า f(e) = 0
- หา s-t path P ที่แต่ละเส้นเชื่อมมี $f(e) < c(e)$
- เพิ่ม (augment) flow ไปตามเส้นทาง P
- ทำซ้ำจนทำไม่ได้

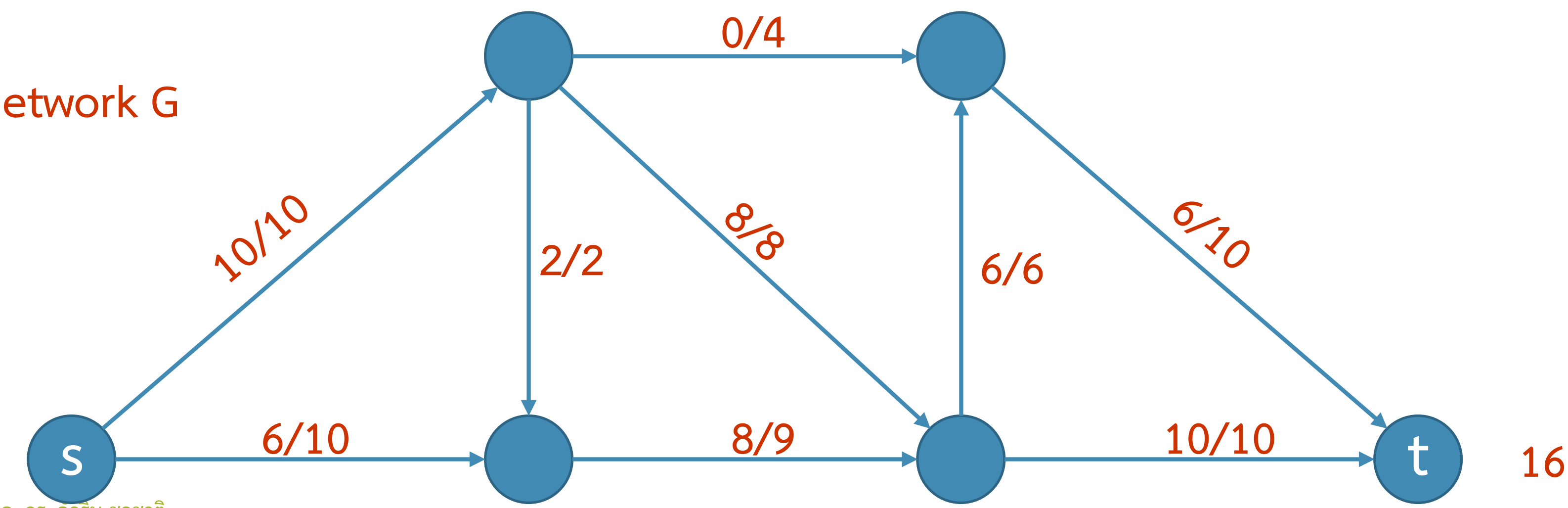


Greedy algorithm (ลอง)

- เริ่มต้นให้ทุกเส้นเชื่อม $e \in E$ มีค่า f(e) = 0
- หา s-t path P ที่แต่ละเส้นเชื่อมมี $f(e) < c(e)$
- เพิ่ม (augment) flow ไปตามเส้นทาง P
- ทำซ้ำจนทำไม่ได้

ทำเสร็จด้วย flow = 16

network G

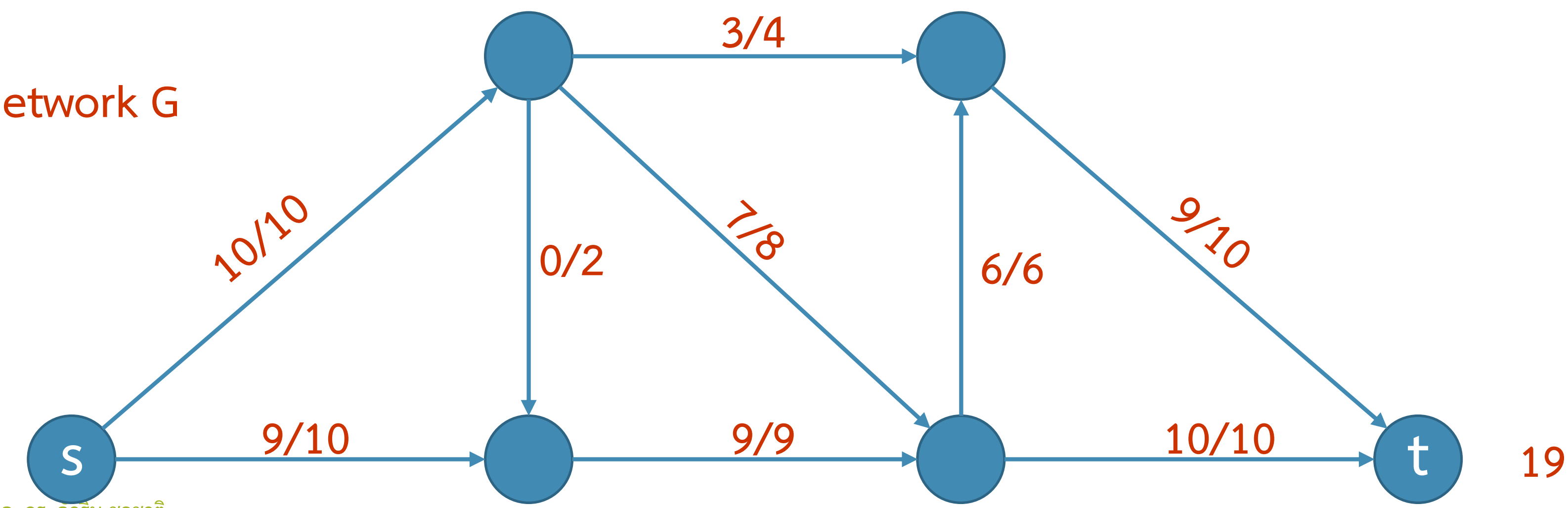


Greedy algorithm (ลอง)

- เริ่มต้นให้ทุกเส้นเชื่อม $e \in E$ มีค่า f(e) = 0
- หา s-t path P ที่แต่ละเส้นเชื่อมมี $f(e) < c(e)$
- เพิ่ม (augment) flow ไปตามเส้นทาง P
- ทำซ้ำจนทำไม่ได้

แต่ max-flow = 19

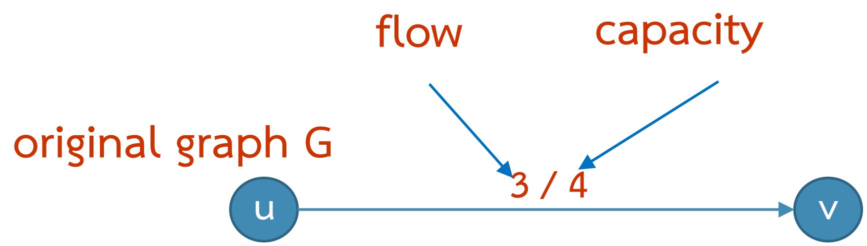
network G



Residual graph

Original edge: $e = (u, v) \in E$

- Flow $f(e)$
- Capacity $c(e)$

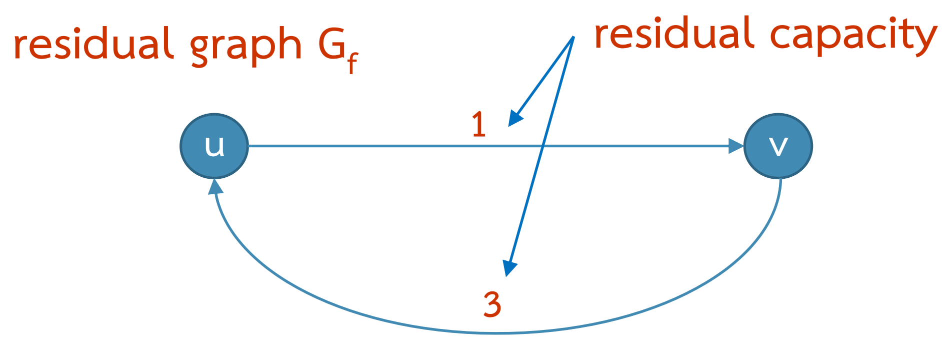


Residual edge ย้อนกลับกับ flow ที่ถูกส่ง

- $e = (u, v)$ และ $e^R = (v, u)$

- Residual capacity:

$$c_f(e) = \begin{cases} c(e) - f(e) & if\ e \in E \\ f(e) & if\ e^R \in E \end{cases}$$



Greedy

หา st-path ที่แต่ละเส้นเชื่อมมี Flow $f(e) \leq$ Capacity $c(e)$ จากนั้นaugment flow ตาม path นั้น

ลักษณะการทำงานของ Greedy คือ ทำซ้ำจนหา path เพิ่มไม่ได้

ข้อเสียคือ หากเลือกเส้นทางผิด ย้อนกลับไม่ได้ เลือกแล้วเลือกเลยซึ่งการที่จะทำให้ได้ดีที่สุดต้องย้อนกลับหรือยกเลิกเส้นทางเดิมได้ (backtrack)

Residual graph

Residual graph: $G_f = (V, E_f)$

- Residual edge มีค่าเป็น residual capacity ที่เป็นบวก
- $E_f = \{e: f(e) < c(e)\} \cup \{e^R: f(e) > 0\}$

Augmenting path

นิยาม augmenting path คือ simple s-t path P ใน residual graph G_f

นิยาม bottleneck capacity ของ augmenting P คือ minimum residual capacity ของเส้นเชื่อมใดๆ ใน P

คุณสมบัติที่สำคัญ: ให้ f เป็น flow และให้ P เป็น augmenting path ใน G_f แล้ว f' เป็น flow และ $val(f') = val(f) + bottleneck(G_f, P)$

$$
\begin{aligned}
&AUGMENT(f, c, P)\\
&b = bottleneck\ capacity\ of\ path\ P\\
&FOREACH\ edge\ e \in P\\
&\qquad IF(e \in E)\ \ f(e) = f(e) + b\\
&\qquad ELSE\qquad f(e^R) = f(e^R) - b\\
&RETURN\ f
\end{aligned}
$$

Ford-Fulkerson algorithm

Ford-Fulkerson augmenting path algorithm

- เริ่มต้นด้วย $f(e) = 0$ สำหรับทุกเส้นเชื่อม $e \in \mathrm{E}$
- หา augmenting path P ใน residual graph G_f
- Augment (เติม) flow ไปตาม path P
- ทำซ้ำจนทำไม่ได้

FORD-FULKERSON(G,s,t,c)

FOREACH edge $e \in \mathrm{E}$: $f(e) = 0$

G_f = residual graph

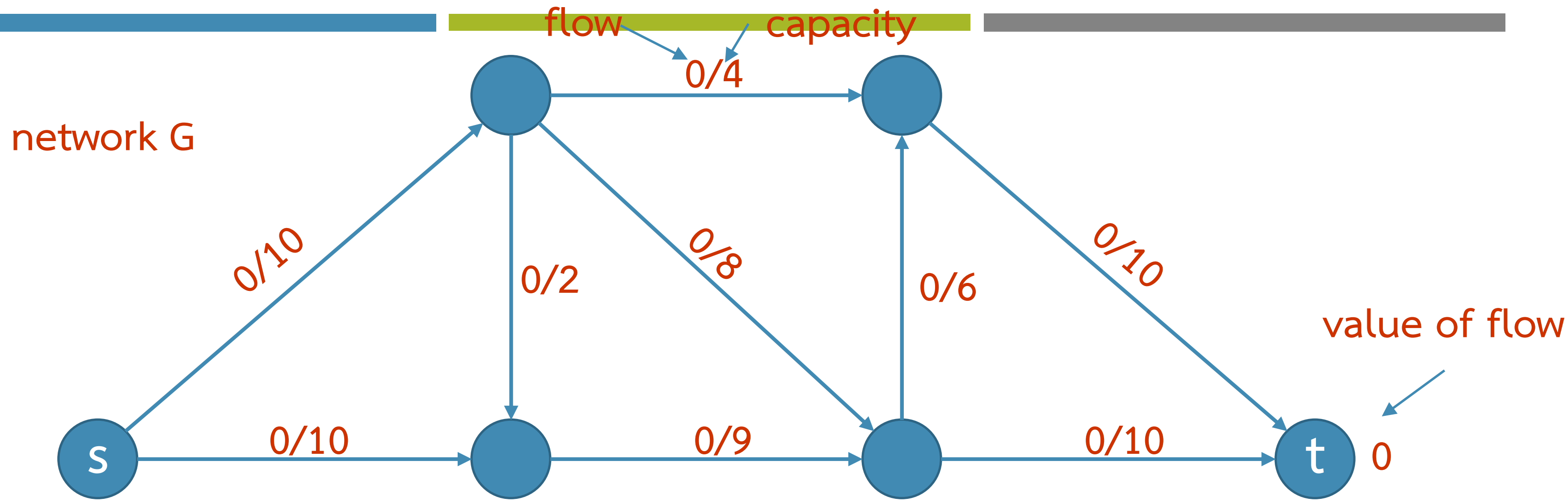
while(there exists an augmenting path P in G_f

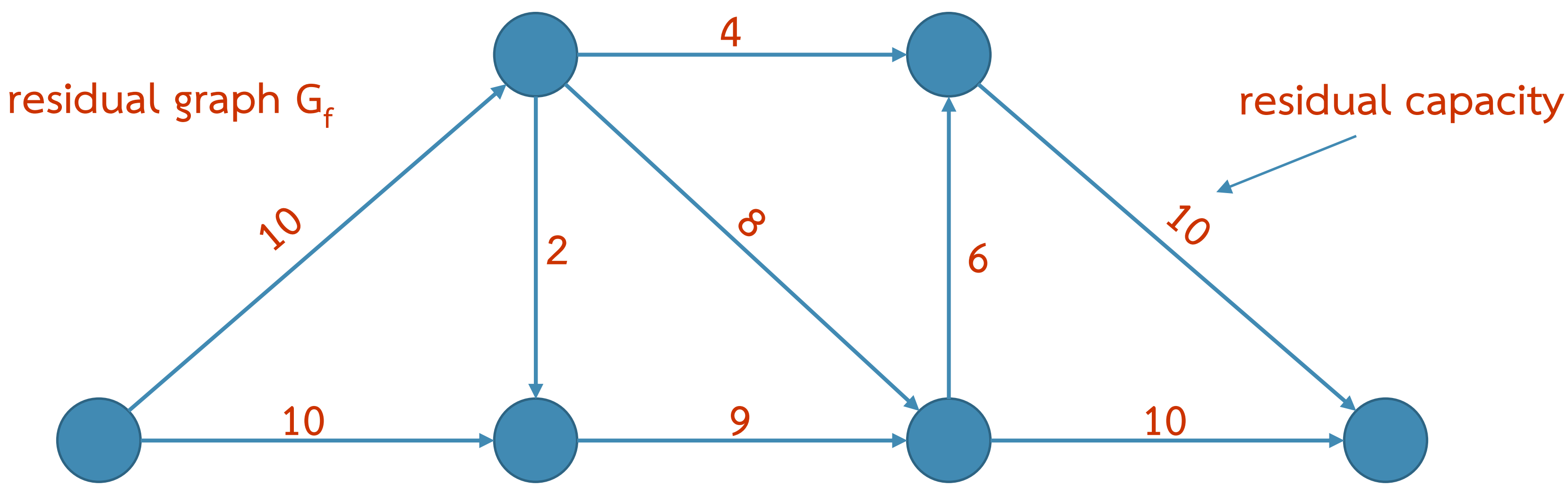
f = AUGMENT(f,c,P)

Update G_f

return f

Ford-Fulkerson algorithm demo

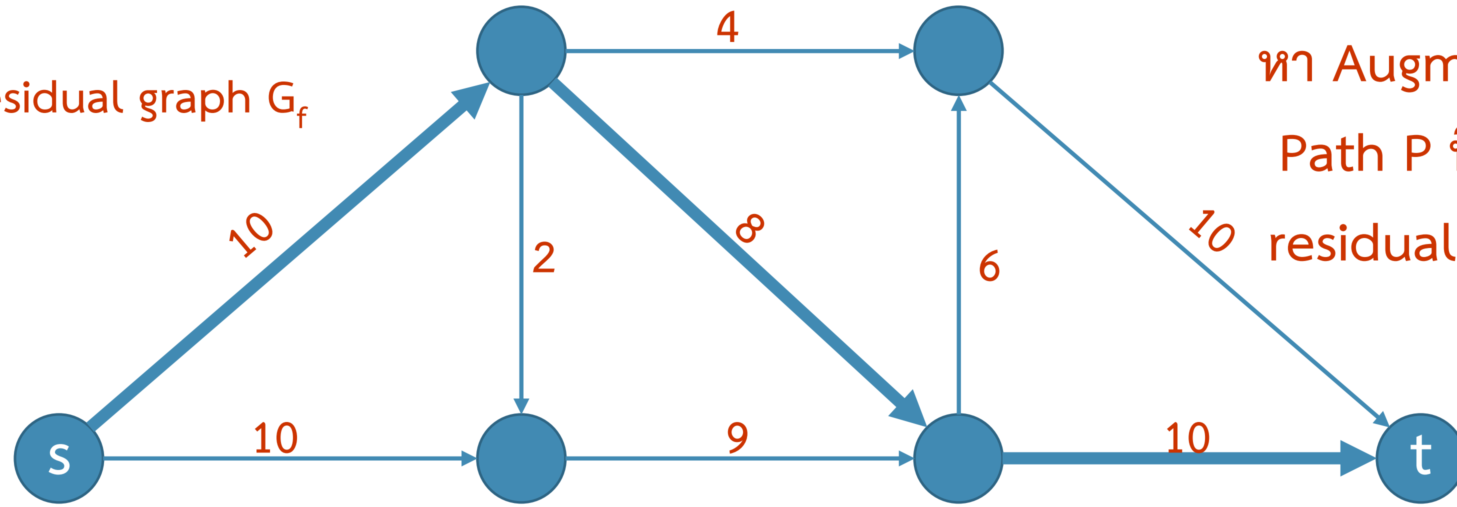




Ford-Fulkerson algorithm demo

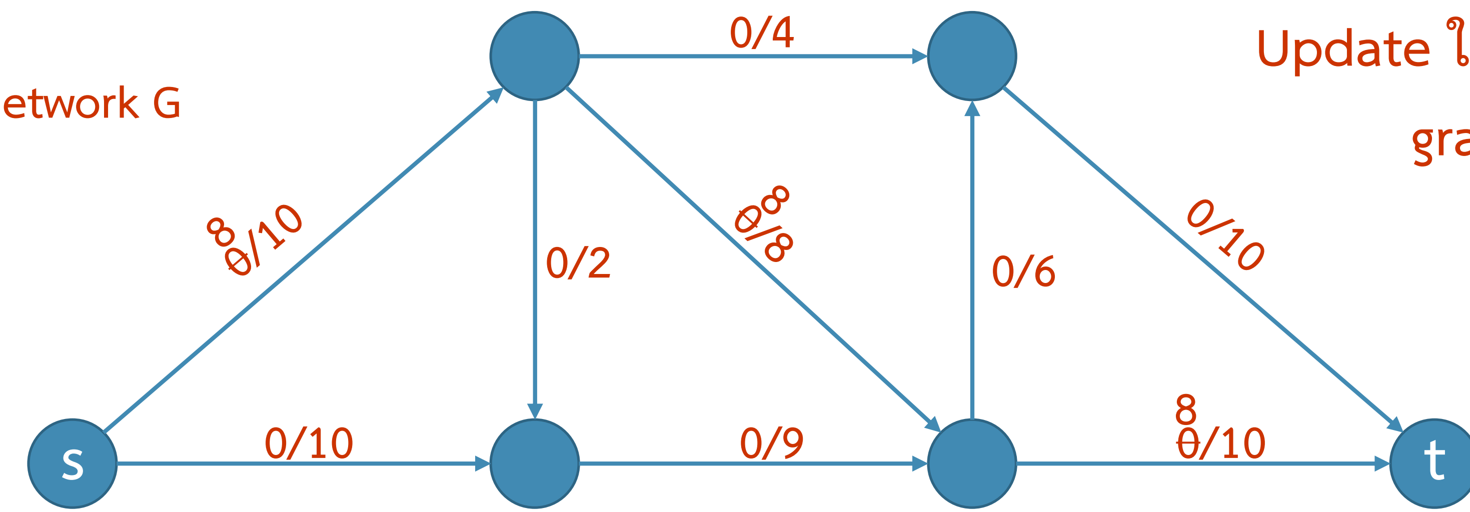
residual graph G_f

หา Augmenting Path P ที่ 1 ใน residual graph



network G

Update ใน Original graph

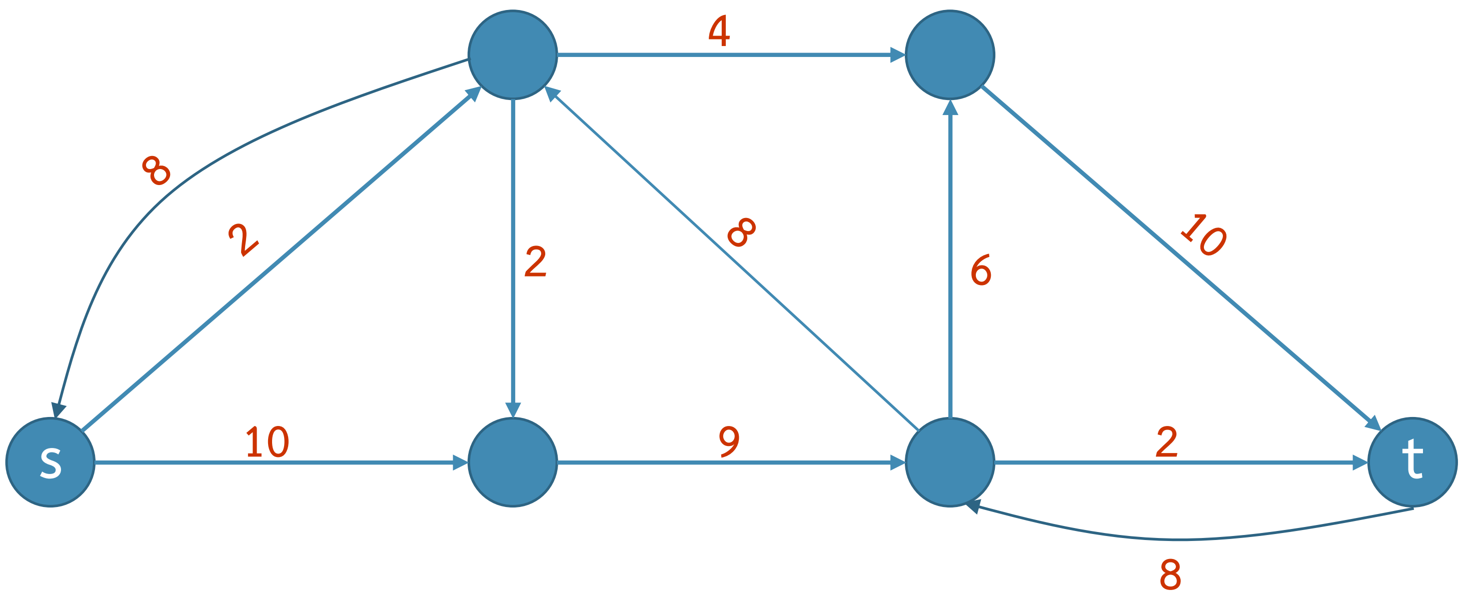


0+8=8

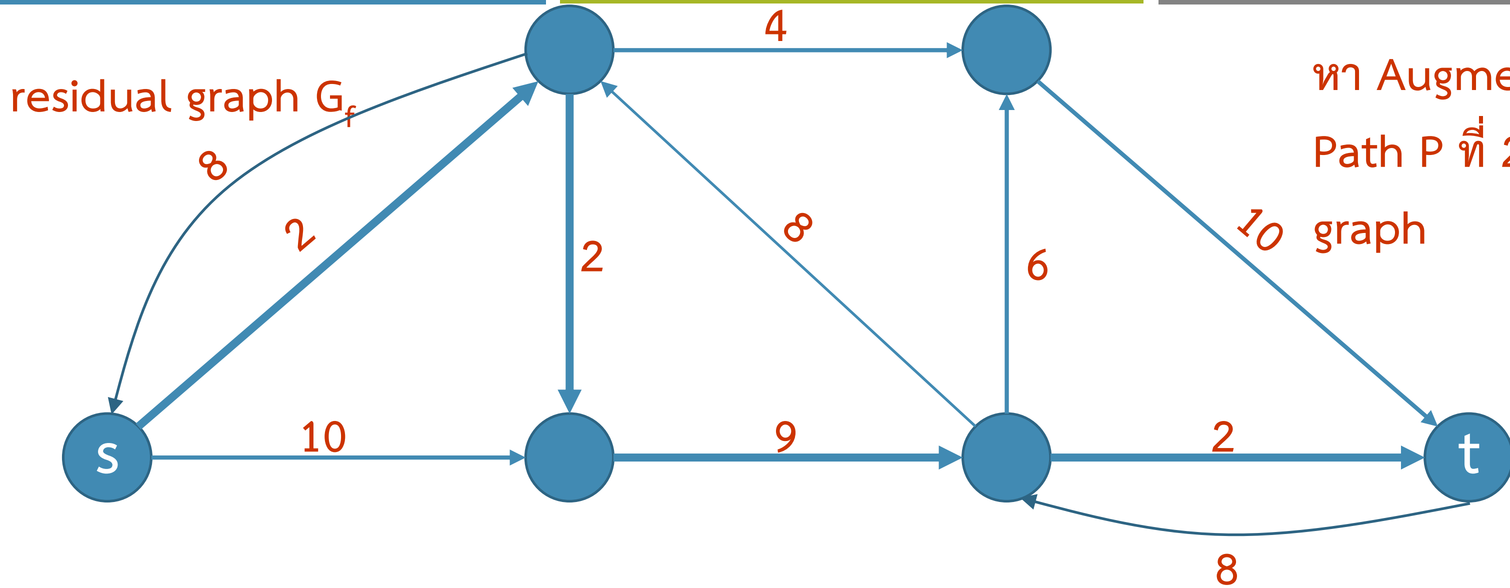
Ford-Fulkerson algorithm demo

- หลังจากการเลือกเส้นทาง ที่ 1 จะได้ residual graph G_f ที่ปรับปรุงแล้วดังนี้

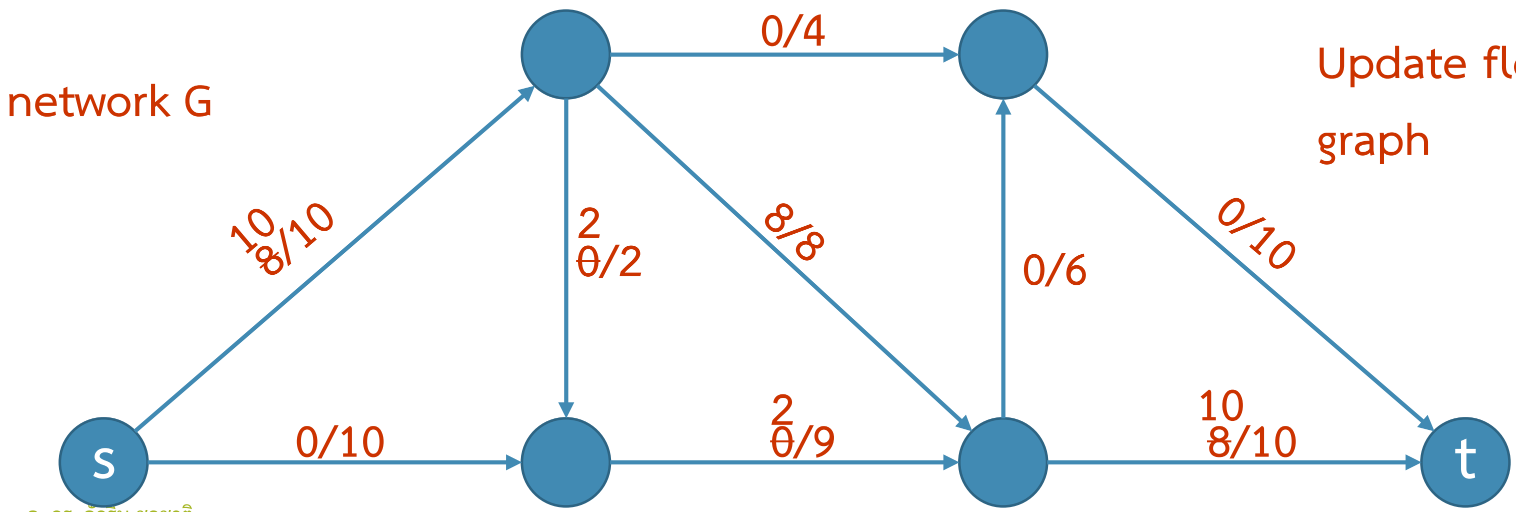
residual graph G_f



Ford-Fulkerson algorithm demo



หา Augmenting Path P ที่ 2 ใน Residual graph



Update flow ใน Original graph

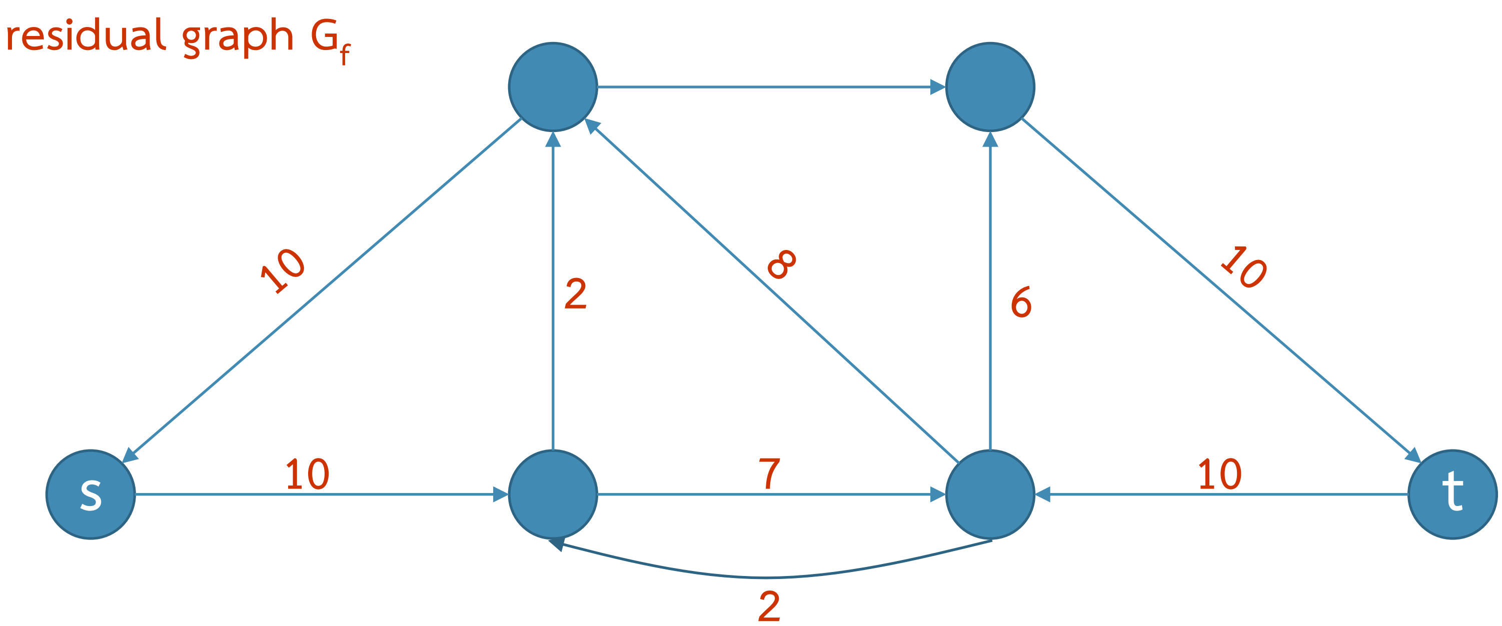
8+2=10

อ. ดร. จักริน ชวชาติ

อ. เบญจมาศ ปัญญางาม

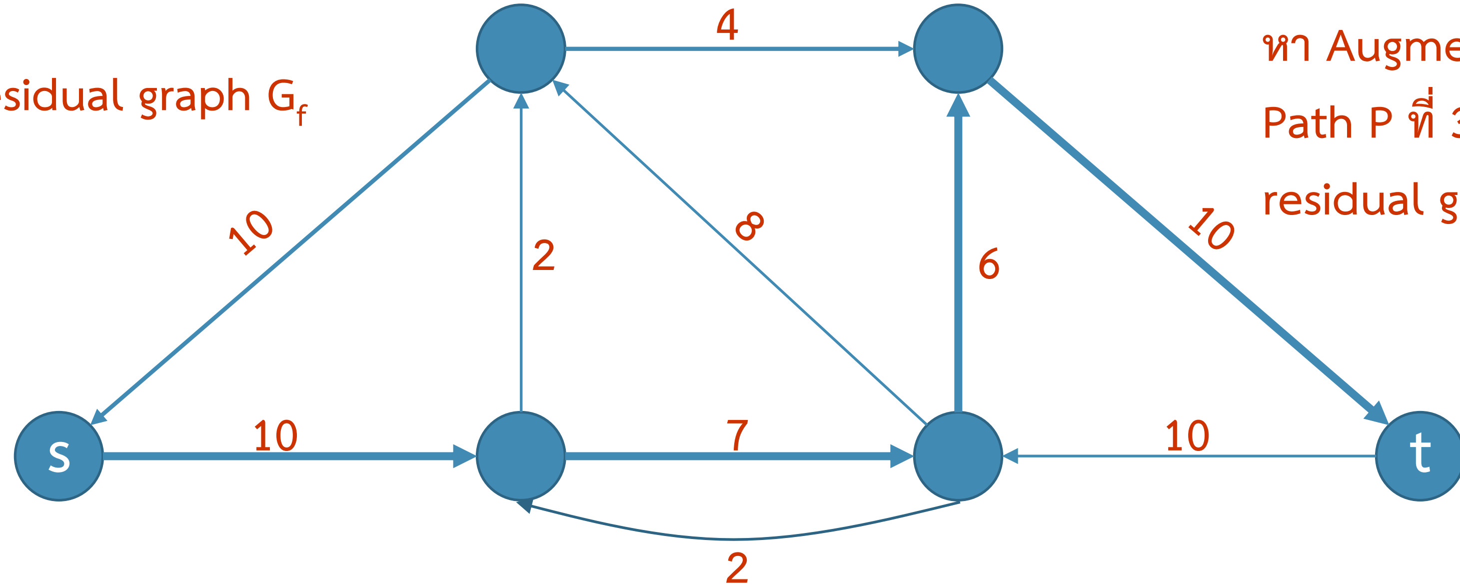
Ford-Fulkerson algorithm demo

- หลังจากการเลือกเส้นทาง ที่ 2 จะได้ residual graph G_f ที่ปรับปรุงแล้วดังนี้



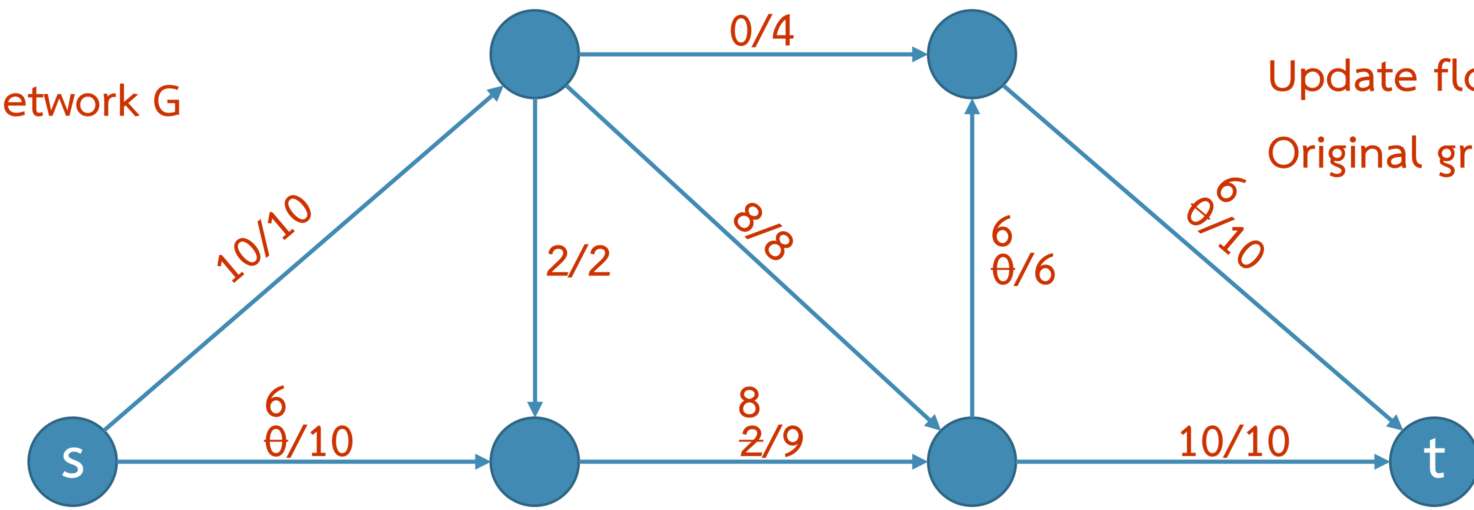
Ford-Fulkerson algorithm demo

residual graph G_f



หา Augmenting Path P ที่ 3 ใน residual graph

network G



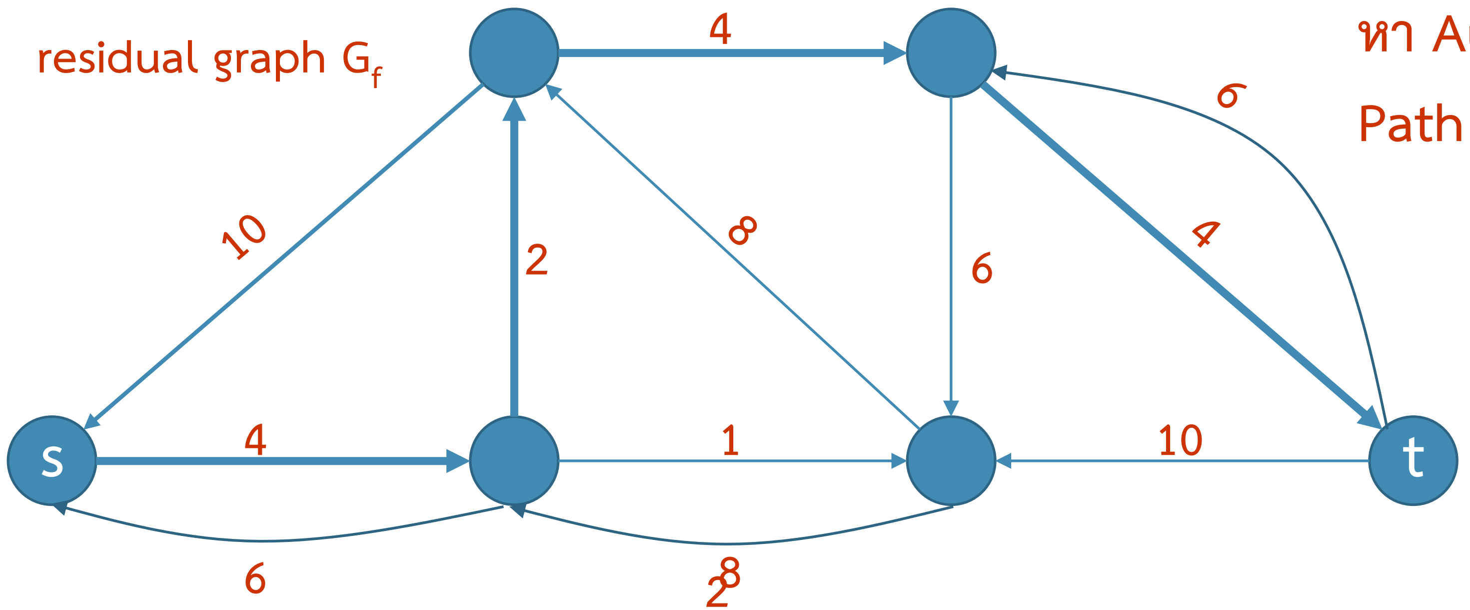
Update flow ใน Original graph

10+6=6

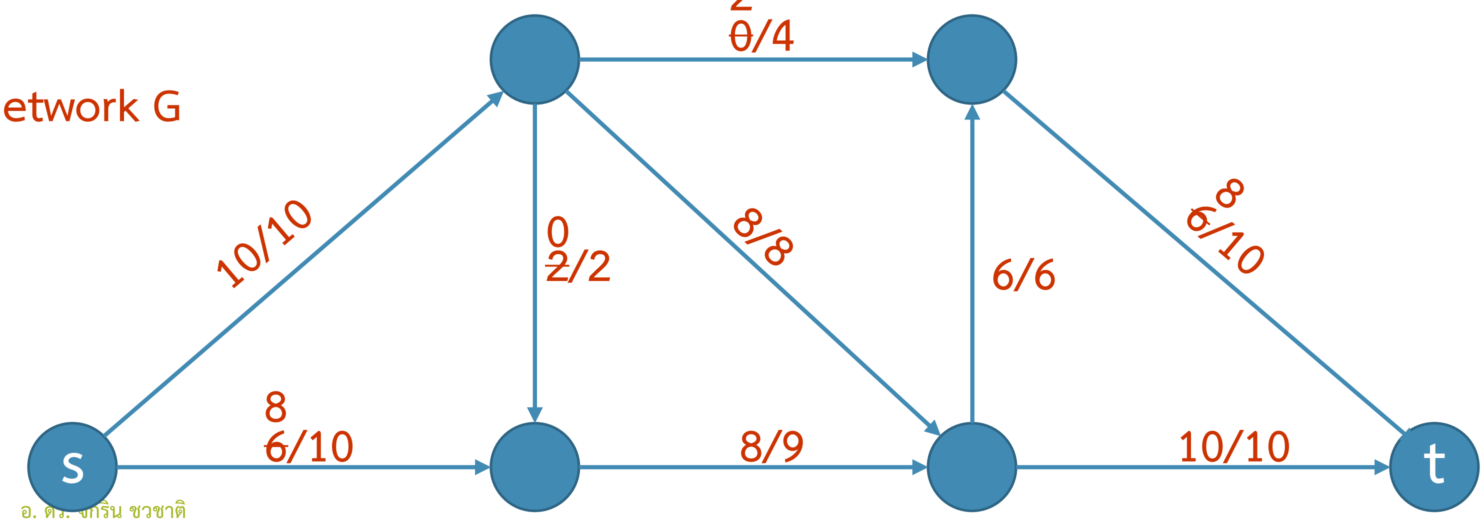
Ford-Fulkerson algorithm demo

residual graph G_f

หา Augmenting Path P ที่ 4



network G

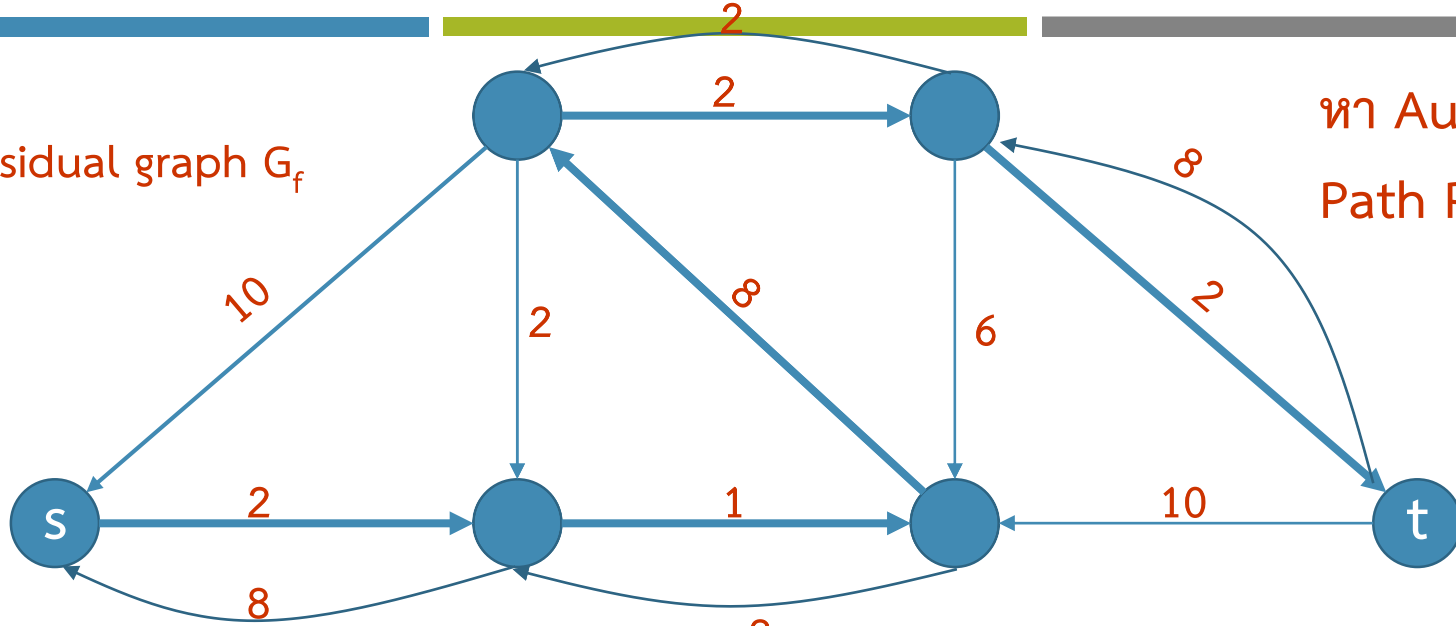


16+2=18

อ. ดร. จักริน ชวชาติ
อ. เบญจมาศ ปัญญางาม

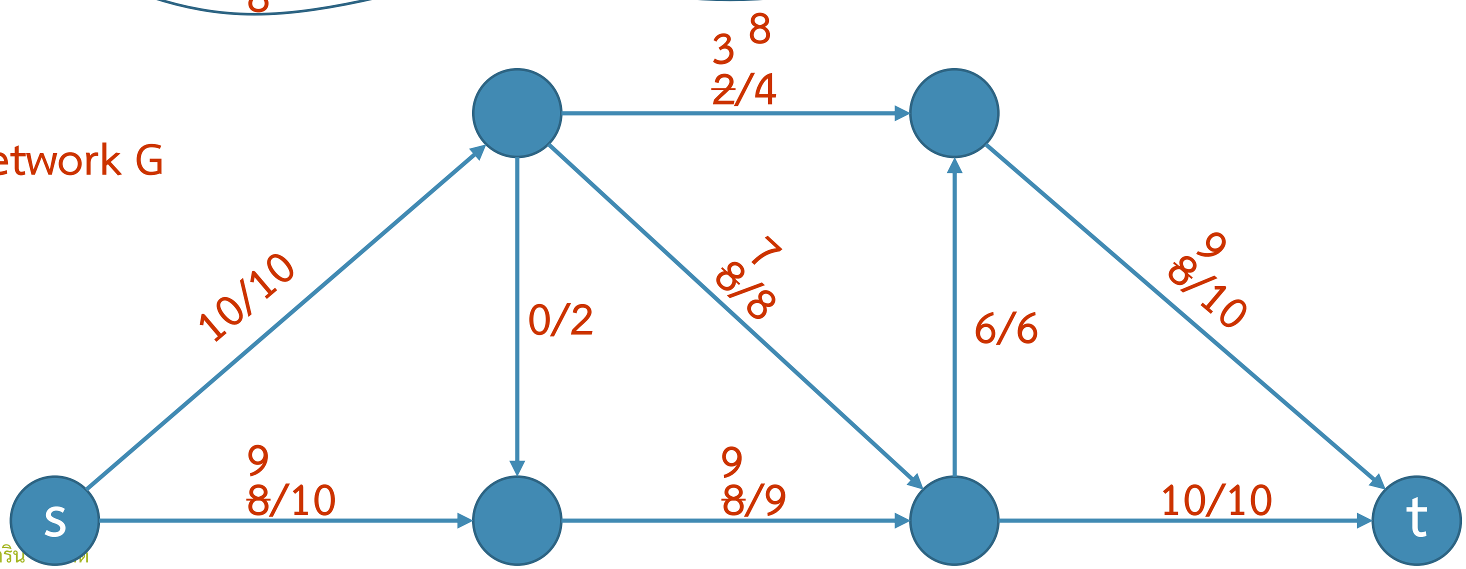
Ford-Fulkerson algorithm demo

residual graph G_f



หา Augmenting Path P ที่ 5

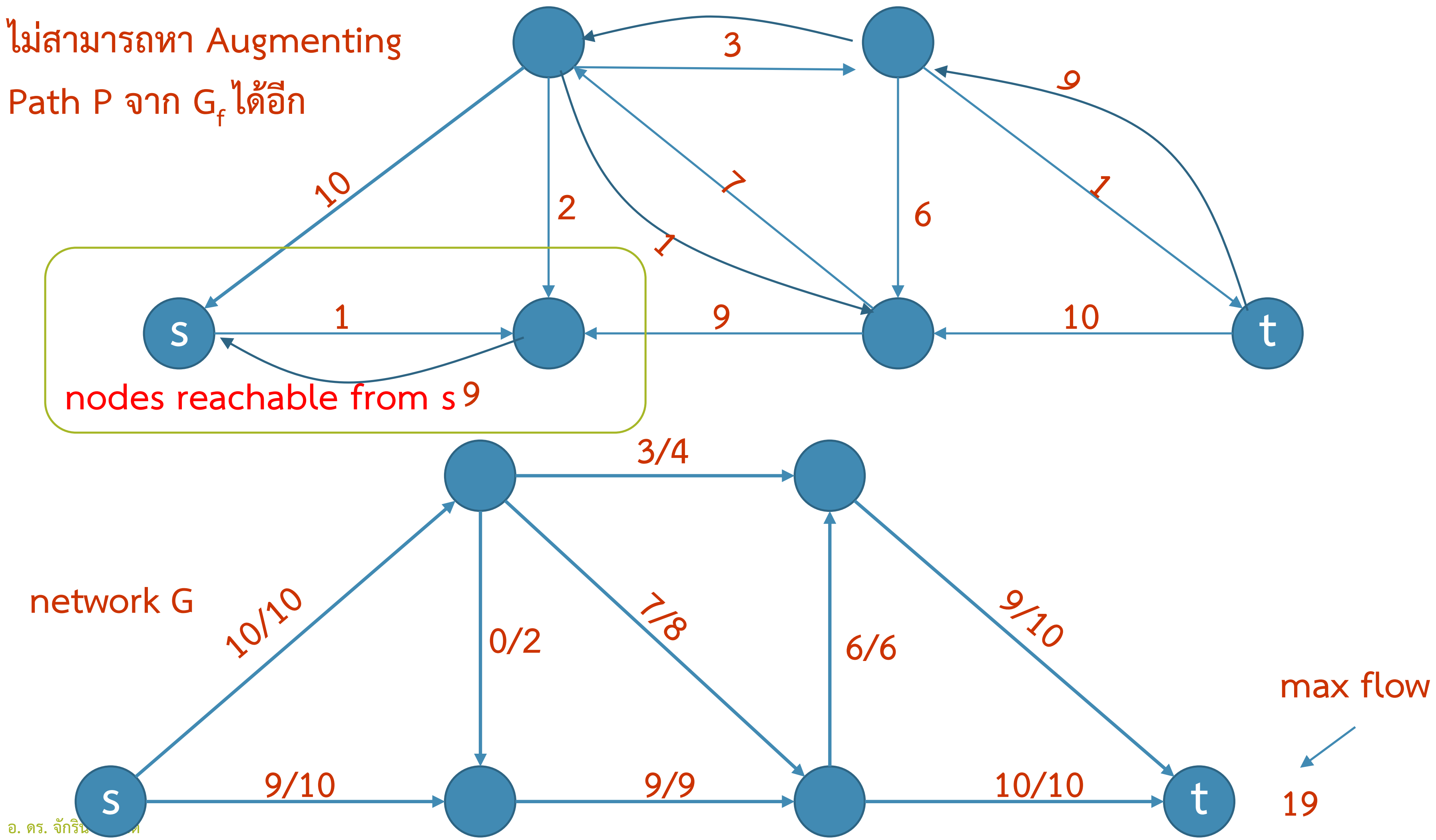
network G



18+1=19

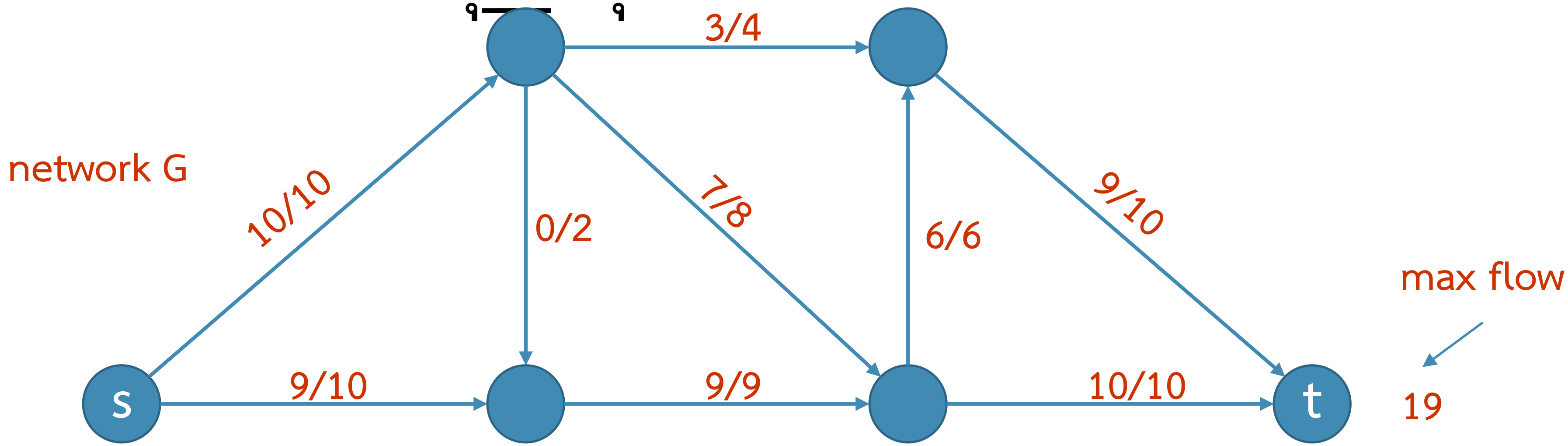
Ford-Fulkerson algorithm demo

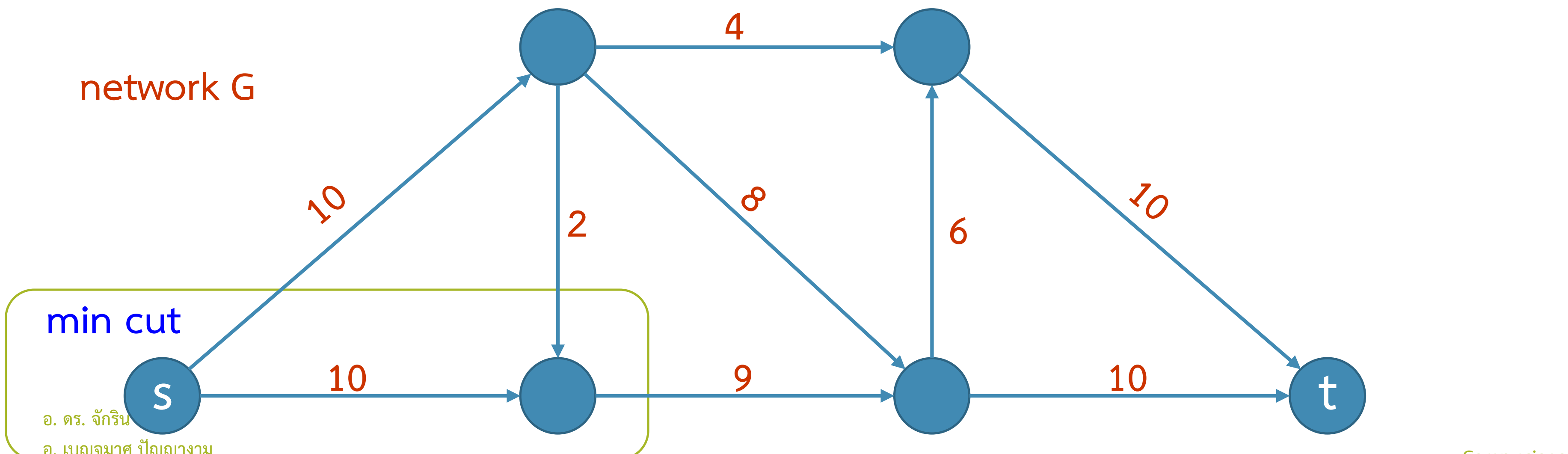
- residual graph G_f ที่ปรับปรุงแล้วดังนี้



Max-flow min-cut Theorem

จงหา cut ที่มีความจุต่ำที่สุด ของกราฟ G





อ. ดร. จักริน
อ. เบญจมาศ ปัญญางาม

Max-flow min-cut Theorem

Augmenting path theorem: flow f จะเป็น maximum flow ก็ต่อเมื่อไม่มี augmenting paths

Max-flow min-cut theorem: ค่าของ max-flow = ความจุของ min-cut

เงื่อนไข 3 ข้อต่อไปนี้เทียบเท่ากันสำหรับ flow f ใดๆ

- จะมี cut(A,B) ที่ cap(A,B) = val(f)
- f เป็น max-flow
- ไม่มี augmenting path เมื่อเทียบกับ f