Exercițiul 2 *Determinați soluțiile generale pentru ecuațiile:*

(a) **(0.5p)** $x + y - (x - y) \cdot y' = 0$

$(x-y)\,y' = x+y \,\Big|\, : x$

$\left(1-\frac{y}{x}\right) y' = 1+\frac{y}{x}$

$\frac{y}{x} = t$

$y = t \cdot x \Rightarrow y' = t' \cdot x + t$

$(1-t)(t' \cdot x + t) = 1+t$

$t' \cdot x + \cancel{t} - t \cdot t' \cdot x - t^2 = 1 + \cancel{t}$

$t'(x - xt) = 1+t^2$

$t' \cdot x(1-t) = 1+t^2$

$t' = \frac{1+t^2}{1-t} \cdot \frac{1}{x}$

$\frac{dt}{dx} = \frac{1+t^2}{1-t} \cdot \frac{1}{x}$

$\frac{1-t}{1+t^2}\,dt = \frac{dx}{x}$

$\int \frac{1\,dt}{1+t^2} - \int \frac{t}{1+t^2}\,dt$

Exercițiul 3 *(1p) Determinați soluția problemei bilocale:*

$$\begin{cases} y'' - \dfrac{6x}{(3x^2-2)} \cdot y' &= e^{-2x} \cdot \dfrac{(-6x^2-6x+4)}{(3x^2-2)} \\ y(0) &= -\frac{1}{2}e^{-2} \\ y(1) &= -e^{-2} \end{cases}$$

$z = y'$

$z' - \frac{6x}{(3x^2-2)} z = e^{-2x} \left(\frac{-6x^2-6x+4}{3x^2-2}\right)$

$z^2 - \frac{6x}{3x^2-2} z = 0$

$z' = \frac{6x}{3x^2-2} z$

$\frac{dz}{dx} = \frac{6x}{3x^2-2} z$

$3x^2-2 = t$

$6x\,dx = dt$

$\frac{dz}{z} = \frac{6x}{3x^2-2}\,dx$

$\ln|z| = \ln|3x^2-2| + c$

$|z| = |3x^2-2| \cdot e^c$

$z = c \cdot (3x^2-2)$

$z_p = c(x)(3x^2-2)$

$z_p' = c'(x)(3x^2-2) + c(x)(6x)$

$$c'(x)(3x^2-2)+\cancel{c(x)(6x)}-\cancel{6x)c(x)}=e^{-2x}\,\frac{(-6x^2-6x+4)}{3x^2-2}$$

$$c'(x)=e^{-2x}\cdot\frac{-6x^2-6x+4}{(3x^2-2)^2}$$

$$=\frac{-(6x^2+6x-4)}{e^{2x}\cdot(3x^2-2)^2}$$

$$\left[(3x^2-2)^2\right]'=2(3x^2-2)\cdot 6x$$

$$=(6x^2-4x)\,6x$$

$$\left(\frac{e^{-2x}}{3x^2-2}\right)'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{\qquad}{g^2}$$

$$c(x)=\frac{e^{-2x}}{3x^2-2}$$

$$z=e^{-2x}+(3x^2-2)\cdot c_1$$

$$\boxed{y=\frac{e^{-2x}}{-2}+(x^3-2x)c_1+c_2}$$

Exerciţiul 5 ***(0.5p)*** *Determinaţi ecuaţia orbitelor din portretul fazic, situate în cadranul pozitiv, pentr sistemul:*

$$\begin{cases} x'(t) = & -2xy \\ y'(t) = & -y+3xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-2xy \\[2ex] \dfrac{dy}{dt}=-y+3xy; \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-2xy}{-y+3xy}=\frac{\cancel{y}(-2x)}{\cancel{y}(-1+3x)}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-2x}{-1+3x}$$

$$\frac{1-3x}{2x}\,dx = dy$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\ln|x| - \frac{3}{2}x = y + C}$$ ec. orbitelor

Exercițiul 5 *(0.5p) Determinați ecuația orbitelor din portretul fazic, situate în cadranul pozitiv, pentr sistemul:*

$$\begin{cases} x'(t) = & -2xy \\ y'(t) = & -y + 3xy \end{cases}$$

Exercițiul 1 *Se consideră modelul logistic (Verhulst) de creștere a unei populații*

$$\begin{cases} x'(t) = & r_0 \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right) = 0 \\ x(0) = & x_0 \end{cases}$$

Se cere:

- (a) **(0,5p)** *Care este semnificația parametrilor r_0 și K?*
- (b) **(0,5p)** *Determinați soluția modelului;*
- (c) **(0,5p)** *Determinați soluțiile echilibru și stabilitatea acestora.*

b) $$\frac{dx}{dt} = r_0 \cdot x\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

$$\frac{dx}{x\left(1-\frac{x}{K}\right)} = r_0\,dt$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx + \int \frac{k \cdot \frac{1}{k}}{k-x}\,dx = r_0 \cdot t + C$$

$$A + \left(B - \frac{A}{k}\right)x = 1 + 0 \cdot x$$

$$\ln|x| - \ln|k-x| = r_0 t + C$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{1-\frac{x}{k}} = A - A\frac{x}{k} + Bx = 1$$

$$\ln\left|\frac{x}{k-x}\right| = r_0 t + C$$

$$A = 1$$

$$\left(-\frac{A}{k} + B\right) = 0 \Rightarrow B - \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow B = \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{x\left(1-\frac{x}{k}\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-\frac{x}{k}} \quad \Big| \cdot x\left(1-\frac{x}{k}\right)$$

$$\left|\frac{\cancel{k}}{k-x}\right| = e^{r_0 t} \cdot e^{C}$$

$(1 - \frac{x}{k})$ $\quad k \quad$ $\left|\frac{x}{k-x}\right| = e^{r_0 t}\cdot e^{c}$

$1 = A\left(1-\frac{x}{k}\right) + Bx$ $\qquad$ $\frac{x}{k-x} = c\cdot e^{r_0 t}$

$1 = A - \frac{Ax}{k} + Bx$ $\qquad$ $x = -c\cdot e^{r_0 t}\cdot x + kce^{r_0 t}$

$$x\left(1+ce^{r_0 t}\right) = +kce^{r_0 t}$$

$$x(t) = \frac{ck\cdot e^{r_0 t}}{1+ce^{r_0 t}}$$

$x(t)$

$$x(0)=x_0 \Rightarrow \frac{ck}{1+c} = x_0$$

$$ck = x_0 + x_0 c$$

$$c(k-x_0) = x_0$$

$$c = \frac{x_0}{k-x_0}$$

$x(t) =$

(c) (0,5p) Determinaţi soluţiile echilibru şi stabilitatea acestora.

$x' = f(x)$

$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ pct. echilibru

$f(0)$ soluție echilibru

$$x(t) = \frac{\boxed{x_0 \cdot k} \cdot e^{r_0 t}}{x - x_0 + \boxed{x_0} e^{r_0 t}} = 0 \quad k$$

$$= k$$

$$\underbrace{x_0 \cdot k \cdot e^{r_0 \cdot t}}_{\neq 0} = 0$$

$$x(t) = 0$$
$$x(t) = k$$

Exercițiul 1 *Se consideră modelul pradă-prădător*

$$\begin{cases} x'(t) = & ax - bxy \\ y'(t) = & -cy + dxy \end{cases}$$

(a) **(0,5p)** *Care este semnificația parametrilor $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$?*
(b) **(0,5p)** *Determinați punctele de echilibru și studiați stabilitatea acestora;*
(c) **(0,5p)** *Determinați ecuația orbitelor din portretul fazic.*

Exercițiul 1 *Se consideră modelul pradă-prădător*

$$\begin{cases} x'(t) = & ax - bxy \\ y'(t) = & -cy + dxy \end{cases}$$

(a) **(0,5p)** *Care este semnificația parametrilor $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$?*
(b) **(0,5p)** *Determinați punctele de echilibru și studiați stabilitatea acestora;*
(c) **(0,5p)** *Determinați ecuația orbitelor din portretul fazic.*

$$r_0 x \left(1 - \frac{x}{k}\right) = 0$$

$$r_0 x - \frac{x^2}{k} \cdot r_0 = 0 \;\Big|\cdot k$$

$$-r_0 x^2 + k r_0 x = 0$$

$$x(-r_0 x + k r_0) = 0$$

I $x = 0$

$$-r_0 x = -k r_0$$

II $x = k$

Exercițiul 1 *Un corp cu temperatura de 15°C este introdus într-o camera cu temperatura de 40°C. După 1 oră temperatura corpului crește la 25°C.*

(a) **(0.5p)** *Care este modelul matematic conform căruia se modifică temperatura corpului? Găsiți soluția corespunzătoare în acest caz.*

(b) **(0.5p)** *Cât timp trebuie așteptat pentru ca temperatura corpului să crească la 30°C?*

$$\begin{cases} T'(t) = -k\left(T(t) - T_m\right) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

$$T_m = 40^\circ$$

$$T(0) = 15^\circ$$

$$T(1) = 25^\circ$$

$$T(t) = (T_0 - T_m)\cdot e^{-kt} + T_m$$

$$T(t) = (15 - 40)\cdot e^{-kt} + 40^\circ$$

$$= -25e^{-kt} + 40$$

$$T(0) = 15 = 15 \text{ (A)}$$

$$T(1) = -25e^{-k} + 40 = 25$$

$$-25e^{-k} = -15$$

$$e^{-k} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$-k = \ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$k = -\ln\left(\frac{3}{5}\right) = \ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$\boxed{T(t) = -25e^{\ln\left(\frac{3}{5}\right)\cdot t} + 40} = 30$$

$$\cancel{-}25e^{\ln\left(\frac{3}{5}\right)\cdot t} = \cancel{-}10$$

$$e^{\ln\left(\frac{3}{5}\right)\cdot t} = \frac{2}{5}$$

$$\ln\left(\frac{3}{5}\right)\cdot t = \ln\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{\ln\left(\frac{3}{5}\right)} = \log_{\frac{3}{5}}$$

$$\log_{a} b = \log_{a,c} b$$

(5)

$\log_a b = \log_c b$

Exercițiul 7 *(1p) Se consideră problema Cauchy*

$$\begin{cases} y' &= -4x^3 + 3xy^2 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$

Scrieți ecuația integrală Volterra echivalentă cu problema Cauchy, formula șirului aproximațiilor succesive și pentru funcția de start $y_0(x) \equiv 1$ calculați primele două aproximații succesive.

$f(x,y) = -4x^3 + 3xy^2$ $= 1 + \int_0^x (-4s^3 + 3s)\, ds = 1 + -4\frac{s^4}{4}\Big|_0^x + 3\frac{s^2}{2}\Big|_0^x$

$x_0 = 0$

$y_0 = 1$

$y_1 = y_0 + \int_0^x -4s^3 + 3s \cdot \underbrace{y_0^2(s)}_{1}\, ds$

$= 1 - x^4 + \frac{3x^2}{2}$

$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))\, ds$

$= 1 + \int_0^x -4s^3 + 3s \cdot y^2(s)\, ds$

Exercițiul 1 *(0,5p) Se consideră modelul lui Malthus de creștere a unei populații*

$$\begin{cases} x'(t) = & r \cdot x \\ x(0) = & x_0 \end{cases}$$

Determinați rata de creștere r știind că mărimea populației la momentul inițial este $x_0 = 1000$ iar după 10 ani mărimea populației este $x_1 = 50000$.

$\begin{cases} x'(t) = r \cdot x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$

$x(0) = 1000$

$x(10) = 50000$

$\frac{dx}{dt} = rx$

$\frac{dx}{x} = r\,dt$

$\ln|x| = rt + c$

$x = c \cdot e^{rt}$

$x(0) = c = 1000$

$\Rightarrow x(t) = 1000 \cdot e^{r \cdot t}$

$x(10) = 1\cancel{000} \cdot e^{r \cdot 10} = 50\cancel{000}$

$e^{10r} = 50$

$10r = \ln 50$

$$r = \frac{\ln 50}{10}$$

Exercițiul 1 *Se consideră modelul pradă-prădător*

$$\begin{cases} x'(t) = & ax - bxy \\ y'(t) = & -cy + dxy \end{cases}$$

(a) **(0,5p)** *Care este semnificația parametrilor $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$?*

(b) **(0,5p)** *Determinați punctele de echilibru și studiați stabilitatea acestora;*

(c) **(0,5p)** *Determinați ecuația orbitelor din portretul fazic.*

$$\begin{cases} ax - bxy = 0 \\ -cy + dxy = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(a - by) = 0 \\ y(-c + dx) = 0 \end{cases}$$

$a, b, c, d > 0$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{a}{b} \\ x = \frac{c}{d} \end{cases}$$

Exercițiul 1 ***(0,5p)*** *Se consideră modelul dezintegrării radioactive:*

$$\begin{cases} x'(t) & = -k \cdot x(t) \\ x(0) & = x_0 \end{cases}$$

Determinați timpul de înjumătățire al unei substanțe radioactive știind că 10 Kg din această substanță scade în 5 ani la 2 Kg.

$x(0) = 10$

$x(5) = 2$

$x(t) = x_0 \cdot e^{-kt}$

$x(t) = 10 e^{-kt}$

$x(5) = 10 e^{-5k} = 2$

$e^{-5k} = \frac{1}{5}$

$-5k = -\ln 5$

$5k = \ln 5$

$k = \frac{\ln 5}{5}$

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k}$$

$$= \frac{\ln(2) \cdot 5}{\ln(5)}$$

$x' = ax + by$

$y' = cx + dy$

$$\begin{cases} x'(t) = r_0 \cdot x\left(1 - \frac{x}{K}\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

$$\frac{dx}{x\left(1-\frac{x}{K}\right)} = r_0\, dt$$

$$\frac{k}{x(k-x)}\, dx = r_0\, dt$$

$$\frac{1}{x(k-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{k-x} \Big| \cdot (x(k-x))$$

$$1 = Ak - Ax + Bx$$

$$A = \frac{1}{k}$$

$$B = A = \frac{1}{k}$$

$$k \cdot \int \frac{\frac{1}{k}}{x} dx + \int \frac{\frac{1}{k}}{k-x} dx$$

$$\ln|x| - \ln|k-x| = r_0 t + C$$

$$\ln\left|\frac{x}{k-x}\right| = r_0 t + c$$

$$\frac{x}{k-x} = c \cdot e^{r_0 t}$$

$$x = k \cdot c \cdot e^{r_0 t} - x \cdot c \cdot e^{r_0 t}$$

$$x(\qquad = k \cdot c \cdot e^{r_0 t}$$

$$x(t) = \frac{k \cdot c \cdot e^{r_0 t}}{1 + c e^{r_0 t}}$$

$$x(0) = x_0$$

$$\Rightarrow \frac{k \cdot c}{1 + c} = x_0$$

$$k c = x_0 + y_0 c$$

$$c(k - x_0) = x_0$$

$$c = \frac{x_0}{k - x_0}$$

$$x(t) = \frac{\dfrac{k x_0 e^{r_0 t}}{k - x_0}}{\dfrac{k - x_0}{1} + \dfrac{x_0 e^{r_0 t}}{k - x_0}}$$

$$= \frac{k x_0 e^{r_0 t}}{k - x_0 + x_0 e^{r_0 t}}$$

$$T'(t) = -k \cdot (T(t) - T_m)$$

$$T'(t) = -k \cdot (T(t) - T_m)$$

$\parallel$

0

$k = 0$

oon

$T(t) = T_m$

$y' = x^2 + y^2$

$y(0) = 0$

$y'(x) = x^2 + (y^2(x))$