1. (1.5 puncte) Calculaţi aria paralelogramului construit pe vectorii $2\mathbf{m}-\mathbf{n}$ şi $4\mathbf{m}-5\mathbf{n}$, unde $\mathbf{m}$ şi $\mathbf{n}$ sunt versori care formează între ei un unghi de $45°$ $3\sqrt{2}$.

1)

$$A_{\square} = \|(2m-n)\times(4m-5n)\|$$

m, n versori $\Rightarrow |m| = |n| = 1$, $\sphericalangle(n,m) = 45^0$

2. Dacă vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ nu sunt coliniari, atunci produsul vectorial $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ este un vector astfel încât:

(a) $\boxed{\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cdot\sin\alpha,}$ unde α este unghiul dintre cei doi vectori.

- Produsul vectorial este *anticomutativ*: dacă $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$, atunci

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}.$$

- Produsul vectorial este liniar în fiecare factor: dacă $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ sunt trei vectori, iar λ şi μ sunt două numere reale, atunci

$$(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) + \mu(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

$$(2m-n)\times(4m-5n) = 8\underbrace{(m\times m)}_{0} - 10(m\times n) - 4(n\times m) + 5\underbrace{(n\times n)}_{0}$$

$$= 10(n\times m) - 4(n\times m)$$

$$= 6(n\times m)$$

$$\|6(n\times m)\| = 6\|(n\times m)\| = 6\cdot|n|\cdot|m|\cdot\sin(\sphericalangle(n,m))$$

$$= 6\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 45^0$$

$$= \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

2)

2. (1.5 puncte) Scrieţi ecuaţia dreptei paralele cu dreptele $\Delta_1: 3x-2y-1=0$ şi $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{3}$ şi care este egal depărtată de acestea $3x-2y-7=0$

$\Delta_1: 3x-2y-1=0$

$\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{3} \Rightarrow 3x-3 = 2y+10$

$3x-2y-13=0$

$d \parallel \Delta_1, \Delta_2 \Rightarrow m_d = m_{\Delta_1} = m_{\Delta_2}$

$2y = 3x-1$

$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \Rightarrow m_d = \frac{3}{2}$

$d: y - y_0 = \frac{3}{2}(x-x_0)$

$d: 2y - 2y_0 = 3x - 3x_0$

$d: 3x - 2y \underbrace{-3x_0 + 2y_0}_{\text{not. } C} = 0$

$\Rightarrow d: 3x-2y+C=0$

$$d(\Delta_1,\Delta_2) = d(A,\Delta_2) = \frac{|3\cdot 0 - 2\cdot -\frac{1}{2} - 13|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{|-13+1|}{\sqrt{9+4}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$$

pt Δ_1: $x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow A(0,-1)$

$d(\Delta_1, \Delta_2) = d(A, \Delta_2) = \frac{\dots}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} = \frac{\dots}{\sqrt{9+4}} = \frac{12}{\sqrt{13}}$

pt Δ_1:
$x=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2} \Rightarrow A(0, -\frac{1}{2})$

d egal depărtată de Δ_1, Δ_2

$\Rightarrow d(d, \Delta_1) = d(d, \Delta_2) = \frac{12}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6}{\sqrt{13}}$

pt d: $x=0 \Rightarrow y=\frac{c}{2}$

$$\begin{cases} \frac{|3\cdot 0 - 2\cdot\frac{c}{2} - 1|}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}} \\ \frac{|3\cdot 0 - 2\cdot\frac{c}{2} - 13|}{\sqrt{13}} = \frac{6}{\sqrt{13}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |-c-1| = 6 \\ |-c-13| = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |c+1| = 6 \\ |c+13| = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c+1=6 \Rightarrow c=5 \\ \boxed{\begin{array}{l} c+1=-6 \Rightarrow c=-7 \\ c+13=6 \Rightarrow c=-7 \end{array}} \Rightarrow \boxed{c=-7} \\ c+13=-6 \Rightarrow c=-19 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$d: 3x-2y-7=0$

3

3. (2 puncte) Determinaţi distanţa de la punctul $A(2,3,-1)$ până la dreapta Δ, dată de ecuaţiile $2x-2y+z+3=0$ si $3x-2y+2z+17=0$ 5.

$A(2, 3, -1)$

$$\Delta: \begin{cases} \overset{A_1}{2}x - \overset{B_1}{2}y + \overset{C_1}{z} + 3 = 0 \\ \overset{A_2}{3}x - \overset{B_2}{2}y + \overset{C_2}{2}z + 17 = 0 \end{cases}$$

$$z=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-2y=-3 \\ 3x-2y=-17 \end{cases} \; + \qquad 5x=-20 \Rightarrow x=-4$$

$2y = 2x+3 \Rightarrow y = \frac{2x+3}{2} = \frac{-8+3}{2} = -\frac{5}{2}$

$\Rightarrow P(-4, -\frac{5}{2}, 0)$

$\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4+2 = -2$

$\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3-4 = -1$

$|A_1 \; B_1| = |2 \; -2| = -4+6 = 2$

$$|C_2 \quad A_2| \quad |$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4+6=2$$

$$\Rightarrow \vec{d}\,(-2,-1,2)$$

$$\Rightarrow \Delta: \frac{x+4}{-2} = \frac{y+\frac{5}{2}}{-1} = \frac{z-0}{2}$$

$$d(A,\Delta) = \frac{\|(r_1-r_0)\times a\|}{\|a\|}, \quad a=(-2,-1,2)$$

$$r_0 = \left(-4, -\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$r_1 - r_0 = (2,3,-1) - \left(-4,-\frac{5}{2},0\right)$$
$$= \left(6, \frac{11}{2}, -1\right)$$

$$\|(r_1-r_0)\times a\| \quad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & \frac{11}{2} & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = i\cdot\begin{vmatrix} \frac{11}{2} & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - j\cdot\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + k\cdot\begin{vmatrix} 6 & \frac{11}{2} \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= i\cdot(11-1) - j\cdot(12-2) + k\cdot(-6+11)$$

$$= 10i - 10j + 5k$$

$$\|(r_1-r_0)\times a\| = \sqrt{10^2+(-10)^2+(5^2)}$$
$$= \sqrt{100+100+25} = \sqrt{225} = 15$$

$$\|a\| = \sqrt{(-2)^2+(-1)^2+(2^2)} = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\Rightarrow d(A,d) = \frac{15}{3} = 5$$

4

4. (1 punct) Se consideră vectorii $\mathbf{a}(x, x+1, x+2)$, $\mathbf{b}(x+3, x+4, x+5)$ și $\mathbf{c}(x+6, x+7, x+8)$, unde x e un număr real, iar componentele sunt relativ la baza canonică. Atunci o condiție suficientă pentru ca vectorii să fie coplanari este ca x să fie egal cu:

- 1;
- -3;
- 4;
- 0.

a, b, c coplanari $\Rightarrow (a,b,c)=0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+3 & x+4 & x+5 \\ x+6 & x+7 & x+8 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{matrix} C_1-C_2 \\ \Leftrightarrow \\ C_2-C_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 & x+2 \\ -1 & -1 & x+5 \\ -1 & -1 & x+8 \end{vmatrix} = 0 \ (A)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$C_2 - C_3 \quad \begin{vmatrix} -1 & -1 & x+5 \\ -1 & -1 & x+8 \end{vmatrix} = 0 \quad (A)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

5

○ 1; ○ −3; ○ 4; ○ 0.

5. (1 punct) Prin punctul $A(-1,-1)$ se duce o dreaptă care formează un unghi de $45°$ cu dreapta $x+2y+5=0$. Ecuaţia acestei drepte poate fi:

● $3x+y+4=0$; ○ $3x-y+5=0$; ● $x-3y-2=0$; ○ $x-4y+3=0$.

$x + 2y + 5 = 0$

$\Rightarrow 2y = -x - 5$

$\Rightarrow y = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{k_1}x - 5$

$$\left.\begin{aligned} & k_1 = -\frac{1}{2} \\ & tg\,\alpha = \pm\frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \\ & \alpha = 45^\circ \end{aligned}\right\} \Rightarrow \pm\frac{k_2 + \frac{1}{2}}{1 + k_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1$$

$$\Rightarrow \pm \frac{\frac{2k_2 + 1}{2}}{\frac{2 - k_2}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow \pm \frac{2k_2 + 1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{2 - k_2} = 1$$

$$\Rightarrow \pm \frac{2k_2 + 1}{2 - k_2} = 1 \Rightarrow$$

I $2k_2 + 1 = 2 - k_2$

$\Rightarrow 3k_2 = 1$

$\Rightarrow k_2 = \frac{1}{3}$

II $2k_2 + 1 = k_2 - 2$

$\Rightarrow k_2 = -3$

$A(-1,-1)$

$\Rightarrow d_1:\ y + 1 = \frac{1}{3}(x+1)$

$3y + 3 = x + 1 \Rightarrow \boxed{x - 3y - 2 = 0}$

$d_2:\ y + 1 = -3(x+1)$

$y + 1 = -3x - 3$

$\boxed{3x + y + 4 = 0}$

6

○ $3x+y+4=0$;

6. (1 punct) Ecuaţia unui plan care conţine dreapta $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ este

● $x+y+z=0$; ○ $4x+y-2z-7=0$; ● $3x+2y+z-1=0$; ○ $3x+2y+z=0$.

Plan: $Ax + By + Cz + D = 0$

vector director $\vec{d}\,(1, -2, 1)$

Pentru a determina ecuația unui plan care conține dreapta dată, urmăm pașii:

1. **Identificăm un punct și vectorul director al dreptei:**
   - Dreapta este dată de ecuațiile simetrice:
   $$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}$$
   - Punctul prin care trece dreapta: $P(1,-1,0)$.
   - Vectorul director al dreptei: $\mathbf{v}(1,-2,1)$.
2. **Verificăm care dintre planurile date conțin dreapta:**
   - Un plan conține dreapta dacă:
     - Punctul P satisface ecuația planului.
     - Vectorul director $\mathbf{v}$ este perpendicular pe normala planului (adică $\mathbf{v}$ este paralel cu planul). $(v \cdot n = 0)$

• $d: x+y+z=0$

$n(1,1,1)$

$P \in d \Rightarrow 1-1+0=0$ ✓

$n \cdot d = 1\cdot 1+1\cdot(-2)+1\cdot 1 = 2-2=0$ ✓ $\Big\} \Rightarrow d$ conținută în plan

• $d: 4x+y-2z-7=0$

$P \in d \Rightarrow 4-1-\underbrace{2\cdot 0}_{0}-7=0 \Rightarrow 3-7=0$ (F) ✗

• $d: 3x+2y+z-1=0$

$P \in d \Rightarrow 3-2+0-1=0 \Rightarrow 0=0$ ✓

$n(3,2,1)$

$n \cdot d = 3\cdot 1+2(-2)+1\cdot 1 = 3-4+1=0$ ✓

$\Rightarrow \Big\}$ d conținută în plan

• $d: 3x+2y+z-1=0$

$P \in d \Rightarrow 3\cdot 1+2\cdot(-1)+0-1=0 \Rightarrow 1-2-1=0$ (F) ✗

○ $x+y+z=0$; ○ $4x+y-2z-7=0$; ○ $3x+2y$ ...

7. 7. (1 punct) Lungimea perpendicularei coborâte din punctul $A(1,2,3)$ pe dreapta $\frac{x-6}{3}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-7}{-2}$ este

○ 4; ○ 5; ○ 6; ● 7.

Lungimea perpendicularei = distanța

$\Delta: \frac{x-6}{3}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-7}{-2}$, $A(1,2,3)$

$\vec{d}(3,2,-2)$

$$d(A,\Delta)=\frac{\|(r_1-r_0)\times\vec{d}\|}{\|\vec{d}\|}$$

punct pe dreaptă: $P(6,7,7)$

$r_1-r_0 = A-P = (1,2,3)-(6,7,7)$
$= (-5,-5,-4)$

$$r_1 - r_0 = A - P = (1,2,3) - (6,7,7)$$
$$= (-5,-5,-4)$$

$$(r_1 - r_0) \times \vec{d} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -5 & -5 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= i \cdot (10+8) - j \cdot (10+12) + k \cdot (-10+15)$$

$$= 18i - 22j + 5k$$

$$\begin{array}{r} \overset{6}{18} \cdot \\ 18 \\ \hline {}^{1}144 + \\ 18 \\ \hline 324 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 22 \cdot \\ 22 \\ \hline 44 + \\ 44 \\ \hline 484 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{1}324 + \\ 484 \\ \hline 808 + \\ 25 \\ \hline 833 \end{array}$$

$$\Rightarrow \| (r_1 - r_0) \times \vec{d} \| = \sqrt{833}$$

$$\| \vec{d} \| = \sqrt{3^2 + (2^2) + (-2)^2} = \sqrt{9+8} = \sqrt{17}$$

$$d(A, \Delta) = \sqrt{\frac{833}{17}} = \sqrt{49} = 7$$