1. (1,5 puncte) Calculați vectorul $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\times(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AB})$, cu $A(1,2,4)$, $B(-1,3,-2)$ și $C(5,-2,3)$.

$194i - 167j + 127k$

... și este situată la distanța 1 față

1) $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)i + (y_B - y_A)j + (z_B - z_A)k$

$= (-1-1)i + (3-2)j + (-2-4)k$

$= -2i + 1j - 6k$

$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A)i + (y_C - y_A)j + (z_C - z_A)k$

$= (5-1)i + (-2-2)j + (3-4)k$

$= 4i - 4j - k$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2i - 3j - 7k$

$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B)i + (y_C - y_B)j + (z_C - z_B)k$

$= (5+1)i + (-5)j + (5)k$

$= 6i - 5j + 5k$

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6 & -5 & 5 \\ -2 & 1 & -6 \end{vmatrix} = i\cdot\begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} - j\cdot\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} + k\cdot\begin{vmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= i\cdot(30-5) - j\cdot(-36+10) + k\cdot(6-10)$

$= 25i + 26j - 4k$

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\times(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -7 \\ 25 & 26 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= i \cdot \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 26 & -4 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 25 & -4 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 25 & 26 \end{vmatrix}$$

12

$$\boxed{= 194 i - 167 j + 127 k}$$

$$\begin{array}{r} ^{4}26 \cdot \\ 7 \\ \hline 182 + \\ 12 \\ \hline 194 \end{array} \qquad -8 \qquad \begin{array}{r} ^{3}25 \cdot \\ 7 \\ \hline 175 - \\ 8 \\ \hline 167 \end{array}$$

2.

1\. (1.5 puncte) Calculați ... $194i - 167j + 127k$

2\. (1.5 puncte) Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul $M_0(2, -1)$ și este situată la distanța 1 față de punctul $A(4, 0)$. $4x - 3y - 11 = 0$

$$M_0(2, -1)$$

$$d(A, \Delta) = 1, \quad A(4, 0)$$

$$M_0 \in \Delta \Rightarrow \Delta: y + 1 = m(x - 2)$$

$$mx - y - 2m - 1 = 0$$

$$d(A, \Delta) = 1 \Rightarrow \frac{|m \cdot 4 - 1 \cdot 0 - 2m - 1|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{|2m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow |2m - 1| = \sqrt{m^2 + 1} \quad |^2$$

$$(2m - 1)^2 = m^2 + 1$$

$$4m^2-4m+1=m^2+1$$
$$3m^2-4m=0$$
$$\Rightarrow m(3m-4)=0$$
$$\Rightarrow m=0 \text{ sau } m=\frac{4}{3}$$

$$m=0 \Rightarrow \Delta: y+1=0$$

$$m=\frac{4}{3} \Rightarrow y+1=\frac{4}{3}(x-2)$$
$$3y+3=4x-8$$
$$\boxed{4x-3y-11=0}$$

3.

de punctul $A(4,0)$. $4x-3y-11=0$

3. (2 puncte) Determinaţi distanţa dintre dreptele $\Delta_1: \frac{x-5}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+2}{4}$ şi $\Delta_2: \frac{x+2}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-3}{5}$, după ce verificaţi, întâi, că dreptele sunt necoplanare. $\sqrt{6}$

$$\Delta_1: \frac{x-5}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+2}{4}$$

$$\Delta_2: \frac{x+2}{1}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-3}{5}$$

$$\begin{array}{r} 34- \\ 21 \\ \hline 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 90- \\ 56 \\ \hline 34 \end{array}$$

punct pe $\Delta_1 \Rightarrow P_1(5,4,-2)$

punct pe $\Delta_2 \Rightarrow P_2(-2,-5,3)$

$\vec{d_1}(2,-1,4)$

$\vec{d_2}(1,-2,5)$

$\vec{P_1P_2}(-7,-9,5)$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \\ -7 & -9 & 5 \end{vmatrix} = -20-36+35-56+90+5$$

$$2 \quad -1 \quad 4 \quad = -20-1+34+5$$

$M_2(-7, \ldots, 5)$

$$\begin{vmatrix} \ldots \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 1 + 34 + 5$$
$$= 13 + 5 = 18 \neq 0$$

$\Rightarrow$ dr. sunt necoplanare

$$\Rightarrow d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{\|\underbrace{(r_1 - r_0)}_{\overrightarrow{P_1P_2}} \cdot (\vec{d_1} \times \vec{d_2})\|}{\|\vec{d_1} \times \vec{d_2}\|}$$

$$\vec{d_1} \times \vec{d_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= i \cdot (-5 + 8) - j \cdot (10 - 4) + k(-4 + 1)$$

$$= 3i - 6j - 3k$$

$$= (3, -6, -3)$$

$$(-7, -9, 5) \cdot (3, -6, -3)$$
$$= -21 + 54 - 15$$
$$= 39 - 21 = 18$$

$$\begin{array}{r} 54 - \\ 15 \\ \hline 39 \end{array}$$

$$\|\vec{d_1} \times \vec{d_2}\| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + (-3)^2}$$
$$= \sqrt{18 + 36} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}$$

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|18|}{3\sqrt{6}} = \frac{18}{3\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

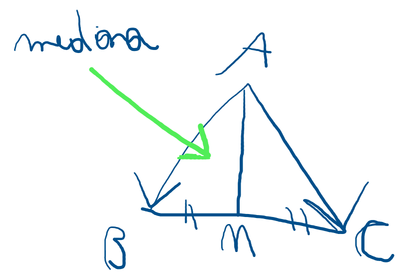
$d(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|18|}{3\sqrt{6}} = \frac{18}{3\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

4.

4. (1 punct) Dacă $\overrightarrow{AB}(-1,2,5)$ şi $\overrightarrow{AC}(5,-2,7)$ sunt laturi ale unui triunghi ABC, atunci lungimea medianei din A este egală cu:

○ $\sqrt{14}$; ● $2\sqrt{10}$; ○ $\sqrt{29}$; ○ 5.

$\overrightarrow{AB}(-1,2,5) \quad \overrightarrow{AC}(5,-2,7)$



$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

$= -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (1,-2,-5) + (5,-2,7)$

$= (6,-4,2)$

- Presupunem că A este originea sistemului de coordonate ($A(0,0,0)$). Atunci:

1. Găsește mijlocul lui BC (punctul M)

- Coordonatele lui **B** = A + AB = (0,0,0) + (-1,2,5) = **(-1, 2, 5)**
- Coordonatele lui **C** = A + AC = (0,0,0) + (5,-2,7) = **(5, -2, 7)**
- Mijlocul **M** al lui BC:

$$M = \left(\frac{-1+5}{2}, \frac{2+(-2)}{2}, \frac{5+7}{2}\right) = \boxed{(2,0,6)}$$

2. Calculează vectorul AM

- Punctul **A** este originea: (0, 0, 0).
- Vectorul **AM** = M - A = (2, 0, 6) - (0, 0, 0) = \boxed{(2, 0, 6)}.

3. Calculează lungimea medianei AM

$$\text{Lungimea lui AM} = \sqrt{2^2+0^2+6^2} = \sqrt{4+0+36} = \sqrt{40} = \boxed{2\sqrt{10}}$$

5.

5. (1 punct) Dreptele $3x+2y+1=0$, $3x+2y+5=0$ şi $2x-3y+2=0$ sunt trei laturi ale unui pătrat. Ecuaţia celei de-a patra laturi poate fi:

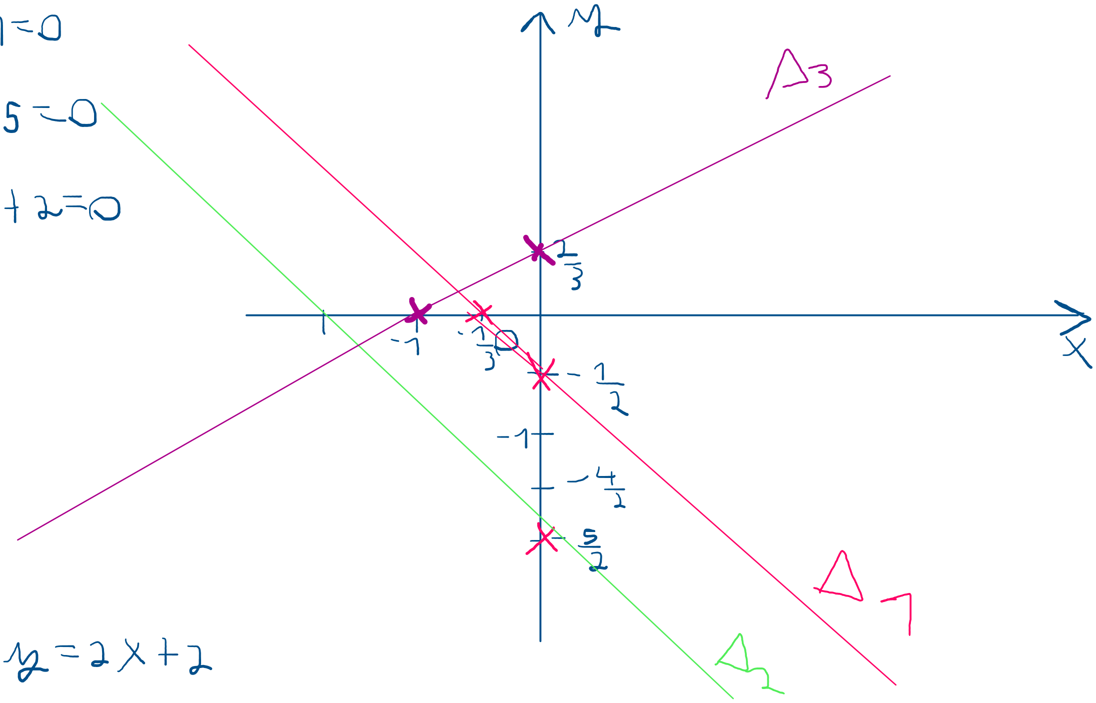
● $2x-3y+6=0$; ○ $2x+3y+8=0$; ○ $2x-3y-\sqrt{13}=0$; ● $2x-3y-2=0$.

$\Delta_1: 3x+2y+1=0$

$\Delta_1: 3x+2y+1=0$

$\Delta_2: 3x+2y+5=0$

$\Delta_3: 2x-3y+2=0$



$x=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

$y=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

$x=0 \Rightarrow y=-\frac{5}{2}$

$y=0 \Rightarrow x=-\frac{5}{3}$

$3y=2x+2$

$y=\frac{2}{3}x+2$

$x=0 \Rightarrow y=\frac{2}{3}$

$y=0 \Rightarrow x=-1$

$\Delta_4 \parallel \Delta_3, \quad m_{\Delta_3}=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow \Delta_4: \quad y-y_0=\frac{2}{3}(x-x_0)$

$\Rightarrow 3y-3y_0=2x-2x_0$

$\Rightarrow 2x-3y+C=0$

$$d(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{|5-1|}{\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{13}}$$

$$d(\Delta_4,\Delta_3)=\frac{|C-2|}{\sqrt{13}}=\frac{4}{\sqrt{13}}$$

$\Rightarrow r-2=4 \Rightarrow r=6$

$r-2=-4 \Rightarrow r=-2$

$\Rightarrow \Delta_4: \underline{2x-3y+6=0}$ sau $\underline{2x-3y-2=0}$

6.

6. (1 punct) Ecuaţia generală a planului de ecuaţie vectorială $\mathbf{r} = (1+s-3t)\mathbf{i}+(2-4s+t)\mathbf{j}+(3-2s+3t)\mathbf{k}$ este:

- ○ $10x - 3y + 11z + 37 = 0$;
- ○ $10x + 3y + 9z - 33 = 0$;
- ● $10x - 3y + 11z - 37 = 0$;
- ○ $2x - z - 5 = 0$.

$$\begin{cases} x = 1+s-3t \\ y = 2-4s+t \\ z = 3-2s+3t \end{cases}$$

$s=t=0$

$(1,2,3)$

$x+z=4-s$

$s=4-x-z$

$2x+z=5-3t \Rightarrow 3t=5-2x-z$

$t=\frac{5-2x-z}{3}$

$y=2-4(4-x-z)+\frac{5-2x-z}{3}$

$y=2-16+4x+4z+\frac{5-2x-z}{3}$

$\overset{1}{1}4$
$\frac{\cdot 3}{42}$

$y=-14+4x+4z+\frac{5-2x-z}{3}$

$3y=-42+12x+12z+5-2x-z$

$$\boxed{10x - 3y + 11z - 37 = 0}$$

sau
$$\begin{cases} x = 1 + s - 3t \\ y = 2 - 4s + t \\ z = 3 - 2s + 3t \end{cases}$$

$s = t = 0 \Rightarrow M_0(1, 2, 3)$

$u = (l_1, m_1, n_1) = (1, -4, -2)$

$v = (l_2, m_2, n_2) = (-3, 1, 3)$

Fie Π un plan în spaţiu şi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – un punct din plan. Dacă $\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1)$ şi $\mathbf{a}_2(l_2, m_2, n_2)$ sunt doi vectori necoliniari paraleli cu planul Π, atunci vectorul de poziţie $\mathbf{r}$ al unui punct oarecare $M(x, y, z)$ din plan se poate scrie sub forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a}_1 + v\mathbf{a}_2, \tag{3.1.1}$$

unde $\mathbf{r}_0$ este vectorul de poziţie al punctului M_0, iar u şi v sunt numere reale. Ecuaţia (3.1.1) se numeşte *ecuaţia vectorială a planului* Π.

Dacă proiectăm ecuaţia (3.1.1) pe axele de coordonate, obţinem *ecuaţiile parametrice ale planului* Π:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 \cdot u + l_2 \cdot v, \\ y = y_0 + m_1 \cdot u + m_2 \cdot v, \qquad u, v \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + n_1 \cdot u + n_2 \cdot v, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Ecuaţia (3.1.3) se poate rescrie, folosind expresia în coordonate a produsului mixt al trei vectori şi obţinem *ecuaţia scalară a planului care trece printr-un punct dat şi este paralel cu doi vectori (necoliniari) daţi*:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.4}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -4 & -2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

7.

~~7~~. (1 punct) Un punct de pe dreapta $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{3}$ situat la distanţa $\sqrt{6}$ faţă de origine este:

● $\left(-\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{13}{7}\right)$; ○ $(-1, -2, 1)$; ● $(-1, 2, 1)$; ○ $\left(-\frac{5}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{13}{7}\right)$.

$\Delta: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{3}$ $\qquad 10-14=-4$

• $P\left(-\frac{5}{7}, \frac{10}{7}, \frac{13}{7}\right) \in \Delta$

$$\Rightarrow \frac{-\frac{5}{7}+1}{1} = \frac{\frac{10}{7}-2}{-2} = \frac{\frac{13}{7}-1}{3}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{-4}{-2\cdot 7} = \frac{6}{7\cdot 3}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \ (A)$$

$$d(P,O) = \sqrt{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2} = \sqrt{\frac{25+100+169}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{294}{49}} = \sqrt{\frac{42}{7}} = \sqrt{6} \ ✓$$

$13 \cdot 13$, 39, 13, $169 + 25 = 294$

$294 : 7 = 42$, 28, $= 14$

• $P(-1,-2,1) \in \Delta$

$\Delta: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-1}{3}$

$$\Rightarrow \frac{-1+1}{2} = \frac{-2-2}{-2} = \frac{1-1}{3}$$

$$0 = 2 = 0 \ (F) \ ✗$$

- $P(-1, 2, 1) \in \Delta$

$$\Rightarrow \frac{-1+1}{2} = \frac{2-2}{-2} = \frac{1-1}{3}$$

$$0 = 0 = 0 \ (A)$$

$$d(P, O) = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

- $P\left(-\frac{5}{7}, -\frac{10}{7}, \frac{13}{7}\right) \in \Delta$

$$\Rightarrow \frac{2}{7} = \underbrace{\frac{-\frac{10}{7} - \overset{7/}{2}}{-2}} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{-24}{-14} = \frac{24}{14} = \frac{12}{7} \neq \frac{2}{7} \ (F)$$