Geometrie: Lucrarea de control I (Model)

1. (0.5 puncte) Fie $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ trei vectori coplanari şi P, Q, R trei puncte astfel încât vectorii lor de poziţie faţă de un punct O sunt $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\overrightarrow{OQ} = 2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ şi $\overrightarrow{OR} = -\mathbf{b} - t\mathbf{c}$, unde t este un număr real. Dacă punctele P, Q şi R sunt coliniare, atunci valoarea lui t este

○ -2; ○ $-1/2$; ○ $1/2$ ● 2.

1. P, Q, R - coliniare

$$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = k \cdot \overrightarrow{QR}, \ k \in \mathbb{R}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = -(a+b-c) + 2a + 3b$$
$$= -a - b + c + 2a + 3b$$
$$= a + 2b + c$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR} = -\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = -(2a+3b) + (-b - tc)$$
$$= -2a - 3b - b - tc$$
$$= -2a - 4b - tc$$

$$\overrightarrow{PQ} = k \cdot \overrightarrow{QR}$$

$$a + 2b + c = k(-2a - 4b - tc)$$

$$1 \cdot a + 2b + 1c = -2k \cdot a + (-4k) \cdot b + (-tk) \cdot c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = -2k \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \\ 2 = -4k \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \\ 1 = -tk \Rightarrow 1 = -t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{t}{2} \Rightarrow \boxed{t = 2 \in \mathbb{R}}$$

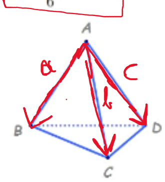
2. 2. (1 punct) Fie $ABCD$ un tetraedru cu vârfurile $A(1-6, 10)$, $B(-1, -3, 7)$, $C(5, -1, a)$ şi $D(7, -4, 7)$, unde a este un număr real. Dacă volumul tetraedrului este egal cu 11, atunci valoarea lui a poate fi:

● -1; ○ 1; ○ -7; ● 7.

$A(1, -6, 10)$
$B(-1, -3, 7)$
$C(5, -1, a), \ a \in \mathbb{R}$
$D(7, -4, 7)$

2. Volumul tetraedrului construit pe trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ este dat de

$$\boxed{V = \frac{1}{6} |(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|}$$



$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$
$$= (-1-1)\vec{i} + (-3+6)\vec{j} + (7-10)\vec{k}$$
$$= -2\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{AB}(-2, 3, -3)$$

$$\overrightarrow{AC}(5-1, -1+6, a-10) \Rightarrow \overrightarrow{AC}(4, 5, a-10)$$

$$\overrightarrow{AD}(7-1, -4+6, 7-10) \Rightarrow \overrightarrow{AD}(6, 2, -3)$$

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\begin{vmatrix}-2 & 3 & -3\\ 4 & 5 & a-10\\ 6 & 2 & -3\end{vmatrix}\right| = 11 \text{ (din enunț)}$$

$$\begin{vmatrix}-2 & 3 & -3\\ 4 & 5 & a-10\\ 6 & 2 & -3\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ -2 & 3 & -3\\ 4 & 5 & a-10\end{matrix} = 30-24+18a-180+90+4a-40+36$$

$$= 6+22a-90-4$$

$$= 22a-94+6$$

$$= 22a-88$$

$$\frac{1}{6}\cdot|22a-88| = 11$$

$$|22a-88| = 66 \quad |:2$$

$$\Rightarrow |11a-44| = 33 \Rightarrow$$

I $11a-44=33$

$\Rightarrow 11a = 77$

$\Rightarrow \boxed{a=7\in\mathbb{R}}$

II $11a+44=33$

$11a=-11$

$\boxed{a=-1\in\mathbb{R}}$

3. 3. (0.5 puncte) Fie $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ doi vectori necoliniari. Vectorul $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ este:

● perpendicular pe $\mathbf{a}$; ○ perpendicular pe $\mathbf{b}$; ○ perpendicular şi pe $\mathbf{a}$ şi pe $\mathbf{b}$.

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}.$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a}$$

1. **Aplicăm identitatea dublului produs vectorial:**

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}$$

   - $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}$ este un scalar (pătratul lungimii lui $\mathbf{a}$).
   - $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ este un scalar (produsul scalar al lui $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$).

2. **Analizăm direcția vectorului rezultat:**
   - Primul termen $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}$ este un vector coliniar cu $\mathbf{b}$.
   - Al doilea termen $-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}$ este un vector coliniar cu $\mathbf{a}$.
   - Prin urmare, vectorul rezultat $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ este o combinație liniară a vectorilor $\mathbf{a}$ și $\mathbf{b}$, deci se află în planul determinat de aceștia.

3. **Verificăm perpendicularitatea:**
   - Produsul vectorial $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ este perpendicular atât pe $\mathbf{a}$, cât și pe $\mathbf{b}$.
   - Apoi, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ este perpendicular pe $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$, dar nu este neapărat perpendicular pe $\mathbf{a}$ sau $\mathbf{b}$.
   - Din identitatea de mai sus, observăm că vectorul rezultat nu este perpendicular pe $\mathbf{a}$ (deoarece conține o componentă coliniară cu $\mathbf{a}$), dar este perpendicular pe $\mathbf{b}$ doar dacă $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, ceea ce nu este garantat în general.

Concluzie:

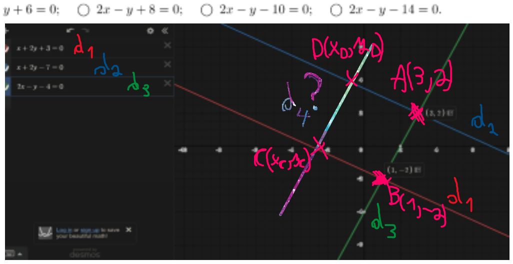
Vectorul $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$ este **perpendicular pe $\mathbf{a}$** deoarece produsul vectorial dintre $\mathbf{a}$ și orice vector (în acest caz, $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$) este întotdeauna perpendicular pe $\mathbf{a}$.

Răspuns final:

○ perpendicular pe $\mathbf{a}$.

4. 4. (1 punct) Dreptele $\underbrace{x+2y+3=0}_{d_1}$, $\underbrace{x+2y-7=0}_{d_2}$ şi $\underbrace{2x-y-4=0}_{d_3}$ sunt laturi ale unui pătrat. Ecuaţia celei de-a patra laturi poate fi:

● $2x-y+6=0$; ○ $2x-y+8=0$; ○ $2x-y-10=0$; ○ $2x-y-14=0$.



$$d_2\cap d_3 \Rightarrow \begin{cases} x+2y-7=0\\ 2x-y-4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4x-8-7=0 \Rightarrow 5x=15 \Rightarrow x=3\\ y=2x-4 \Rightarrow y=2\cdot 3-4=2\end{cases}$$

$\Rightarrow A(3,2)$

$$d_1\cap d_3 \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3=0\\ 2x-y-4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4x-8+3=0 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1\\ y=2x-4\end{cases}$$

$d_1 \cap d_3 \Rightarrow \begin{cases} x+2y+3=0 \\ 2x-y-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+4x-8+3=0 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1 \\ y=2x-4 \qquad \Rightarrow y=-2 \end{cases} \Rightarrow B(1,-2)$

$A(3,2)$

$(d_4 \parallel d_3)$

$d_4: \; y - y_C = m_{d_3}(x - x_C)$

sau

$y - y_D = m_{d_3}(x - x_D)$

$d_3: \; 2x - y - 4 = 0$

$y = 2x - 4$

$\downarrow$

$m_{d_3} = 2$

$C \in d_1 \Rightarrow x_C + 2y_C + 3 = 0$

$\Rightarrow x_C = -2y_C - 3$

$\Rightarrow C(x_C, y_C) \Leftrightarrow C(-2y_C - 3, y_C)$

$B(1,-2)$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}$$

$$= \sqrt{(-2y_C - 3 - 1)^2 + (y_C + 2)^2}$$

$$= \sqrt{(-2y_C - 4)^2 + y_C^2 + 4y_C + 4}$$

$$= \sqrt{4y_C^2 + 16y_C + 16 + y_C^2 + 4y_C + 4}$$

$$= \sqrt{5y_C^2 + 20y_C + 20}$$

$$= \sqrt{5} \cdot \sqrt{y_C^2 + 4y_C + 4} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{(y_C + 2)^2}$$

$$= \sqrt{5}\,|y_C + 2|$$

$$\left.\begin{aligned} A_{\square} &= l^2 = BC^2 = \left(\sqrt{5}\,|y_C+2|\right)^2 = 5 \cdot (y_C + 2)^2 \\ &= AB^2 = (2\sqrt{5})^2 = 4 \cdot 5 = 20 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 5 \cdot (y_C + 2)^2 = 20$$

$\Rightarrow (y_C + 2)^2 = 4$

$\Rightarrow y_C + 2 = \pm 2$

$x_C = -2y_C - 3$

$\Rightarrow$ I $\; y_C + 2 = 2$

$\Rightarrow y_C = 0 \Rightarrow x_C = -3$

II $\; y_C + 2 = -2$

$\Rightarrow y_C = -4 \Rightarrow x_C = 5$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (-2-2)^2}$$

$A(3,2)$

$B(1,-2)$

$$= \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$\Rightarrow \boxed{C_1(-3, 0)}$ ✓

sau

$\Rightarrow C_2(5, -4)$ (nu convine, din d...)

d_4:

$y - y_C = m_{d_3}(x - x_C)$

d4:

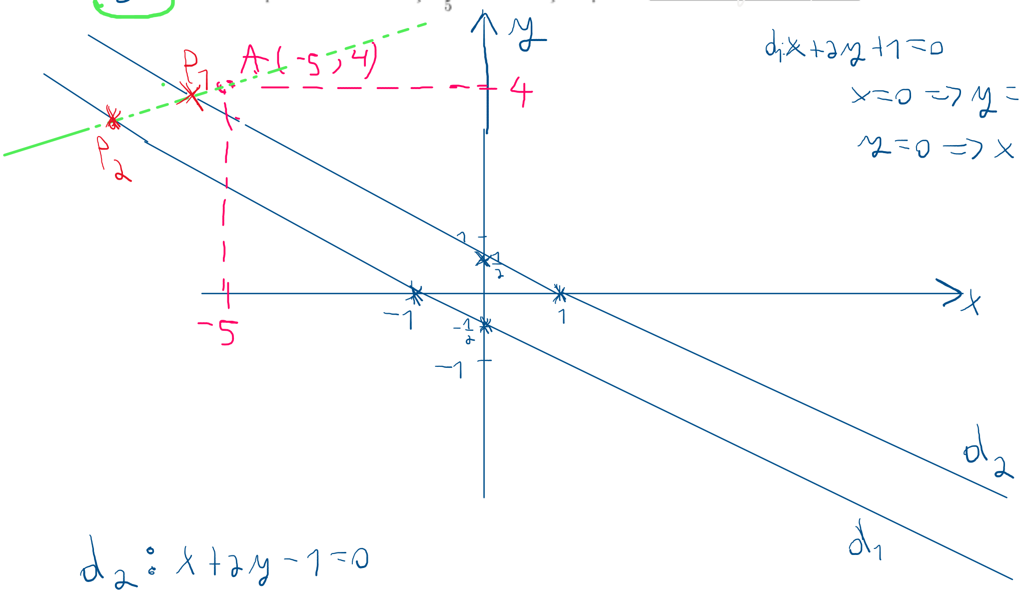
$y - y_C = m_{d_3}(x - x_C)$

sau

$\Rightarrow C_2(5,-4)$ (nu convine, din desen)

$\Rightarrow y - 0 = 2(x+3) \Rightarrow y = 2x+6 \Rightarrow \boxed{2x - y + 6 = 0}$ ✓

5. 5. (1.5 puncte) O dreaptă trece prin punctul $A(-5,4)$ şi taie dreptele paralele $x+2y+1=0$ şi $x+2y-1=0$ în puncte situate la distanţa $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. Atunci ecuaţia dreptei este $2x-y+14=0$.



$d_1: x+2y+1=0$

$x=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

$y=0 \Rightarrow x=-1$

$d_2: x+2y-1=0$

$x=0 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$

$y=0 \Rightarrow x=1$

$d(P_1,P_2) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$d_3 = ?$

$$d(d_1,d_2) = \frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \frac{|-1-1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\Downarrow$

$d_1: a_1x+b_1y+c_1=0$

$d_2: a_2x+b_2y+c_2=0$

orice puncte dintre cele 2 drepte au dist. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(dist dintre puncte = perpendiculara

$\Downarrow$

$d_3 \perp d_1/d_2$

d_3 trece prin $A(-5,4)$

$\Rightarrow y-4 = m(x+5)$

$\Rightarrow y = mx+5m+4$

vector director $\vec{d_1}(1,2)$

$\vec{d_2}(1,2)$

$mx - 1y + 5m + 4 = 0$, with $m \to a_3$ and $-1 \to b_3$

$1\cdot x + 2y + 1 = 0$, with $1 \to a_1$ and $2 \to b_1$

$d_3 \perp d_1, d_2 \Rightarrow \vec{d_3} \cdot \vec{d_1} =$

Dreapta Δ (d_3) trebuie să aibă panta m astfel încât să fie perpendiculară pe $\vec{n}$:

$$m \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1 \implies m \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \implies m = 2.$$

$d_3 \perp d_1 \Rightarrow a_3 \cdot b_3 + b_1 \cdot a_1 = 0$

$m \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 0$

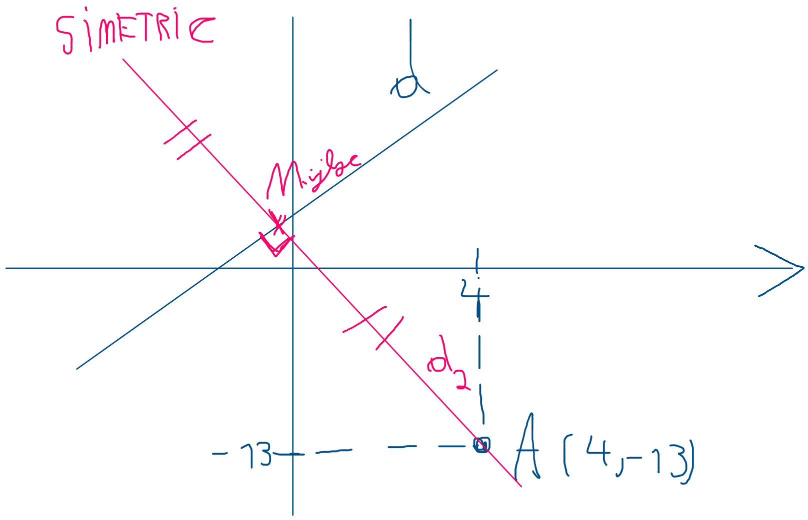
$-m = -2 \Rightarrow m = 2$

$\Rightarrow d_3 : 2x - y + 14 = 0$ ✓

6.

6. (1 punct) Simetricul punctului $A(4, -13)$ relativ la dreapta $5x + y + 6 = 0$ este:

● $(-1, -14)$; ○ $(3, 4)$; ○ $(1, 2)$; ○ $(-4, 13)$.



$13 \cdot 5 = 65$

$d_2 : y + 13 = \frac{1}{5}(x - 4) \Rightarrow 5y + 65 = x - 4 \Rightarrow x - 5y - 69 = 0$

$m_{d_2} \cdot m_d = -1 \Rightarrow m_{d_2} = -\frac{1}{m_d} = \frac{1}{5}$

$(d_2 \perp d)$

$d : 5x + y + 6 = 0$

$d: 5x+y+6=0$

$y=-5x-6$

$\Rightarrow m_d=-5$

$$\text{Mijloc}=\begin{cases}5x+y+6=0 \Rightarrow y=-6-5x\\ x-5y-69=0\end{cases}$$

$x-5(-6-5x)-69=0$

$x+30+25x-69=0$

$26x-39=0$

$x=\frac{39}{26}\Big|:13=\frac{3}{2}$

$y=-6-\frac{15}{2}=-\frac{27}{2}$

$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2},-\frac{27}{2}\right)$

$\frac{x_S+x_A}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow x_S+x_A=3 \Rightarrow x_S=3-4=-1$

$\frac{y_S+y_A}{2}=-\frac{27}{2} \Rightarrow y_S+y_A=-27 \Rightarrow y_S=-27+13=-14$

$\Rightarrow S(-1,-14)$ ✓

7. (1 punct) Distanţa de la punctul $A(-2,3,1)$ până la dreapta Δ care trece prin punctul $P(-3,5,2)$ şi care face unghiuri egale cu axele de coordonate este:

○ $\frac{2}{\sqrt{3}}$; ● $\sqrt{\frac{14}{3}}$; ○ $\frac{16}{\sqrt{3}}$; ○ $\frac{5}{\sqrt{3}}$.

1. Determinarea vectorului director al dreptei Δ:

Dreapta Δ face unghiuri egale cu axele de coordonate, deci cosinusurile directoare ale vectorului director $\vec{d}$ sunt egale:

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma.$$

Cum $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, rezultă:

$$3\cos^2\alpha = 1 \implies \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Astfel, vectorul director al dreptei Δ este:

$$\vec{d} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{sau orice multiplu al acestuia, de exemplu} \quad \vec{d} = (1,1,1).$$

$x = x_0 + l \cdot t$ $\qquad l, n, m = 1$

$y = y_0 + n \cdot t$ $\qquad (x_0, y_0, z_0) = P(-3, 5, 2)$

$z = z_0 + m \cdot t$

$$\Rightarrow \underset{\text{dreapta}}{\Delta} = \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 5 + t \\ z = 2 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

$d(A, \Delta)$

Distanța de la un punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$ la o dreaptă Δ, care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și are vectorul director $\mathbf{a}$, este dată de formula

$$d(M_1, \Delta) = \frac{\|(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \times \mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}, \tag{3.1.29}$$

unde $\mathbf{r}_0$, respectiv $\mathbf{r}_1$ sunt vectorii de poziție ai punctelor M_0, respectiv M_1.

$A(-2, 3, 1) \to r_1$

$P(-3, 5, 2) \to r_0$

$$r_1 - r_0 = (-2+3, 3-5, 1-2) = (1, -2, -1)$$

$a = (1, 1, 1)$

$$(r_1 - r_0) \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= i \cdot (-2+1) - j(1+1) + k(1+2)$$

$$= -i - 2j + 3k$$

$= -i - 2j + 3k$

$\|(r_1 - r_0) \times a\| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

$\|a\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow d(A, \Delta) = \sqrt{\frac{14}{3}}$ ✓

8.

8. (1 punct) Dreptele $\Delta_1\colon \frac{x-5}{0} = \frac{y}{3-a} = \frac{z}{-2}$ şi $\Delta_1\colon \frac{x-a}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2-a}$, unde a este un număr real, sunt coplanare. Atunci a poate fi egal cu

● 1; ○ 2; ○ 3; ● 4.

drepte coplanare => vectori directori coplanari + încă un vector

punct pe dreapta Δ_1: $P_1(5, 0, 0)$

punct pe dreapta Δ_2: $P_2(a, 0, 0)$

$\vec{d_1}(0, 3-a, -2)$

$\vec{d_2}(0, -1, 2-a)$

$\to a, b, c$ copl $\Leftrightarrow (a \times b) \cdot c = 0 \,/\, (a, b, c) = 0$

$\vec{P_1P_2}$ d_1 d_2

$\vec{P_1P_2}(a-5, 0, 0)$

$$(d_1, d_2, P_1P_2) = \begin{vmatrix} 0 & 3-a & -2 \\ 0 & -1 & 2-a \\ a-5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a-5) \cdot \begin{vmatrix} 3-a & -2 \\ -1 & 2-a \end{vmatrix}$$

$$= (a-5) \cdot [(3-a)(2-a) - 2]$$

$$=(a-5)\cdot[6-3a-2a+a^2-2]=0$$

$\Rightarrow$ I $a=5$

II $a^2-5a+4=0$

$\Delta=25-16=9$

$a_1=\frac{5+3}{2}=4$

$a_2=\frac{5-3}{2}=1$

9.

9. (1.5 puncte) Proiecţia punctului $A(1,6,3)$ pe dreapta $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$ este punctul de coordonate (1,3,5).

Proiecţia unui punct pe o dreaptă în spaţiu

Proiecţia unui punct $M_1(x_1, y_1, z_1)$ pe o o dreaptă

$$\Delta: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

este punctul însuşi, dacă el aparţine dreptei, sau piciorul perpendicularei coborâte din punct pe dreaptă, dacă punctul nu aparţine dreptei. În cel de-al doilea caz, coordonatele proiecţiei se obţin rezolvând sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}, \\ (x-x_1)\cdot l+(y-y_1)\cdot m+(z-z_1)\cdot n=0. \end{cases} \qquad (3.1.51)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}=t \\ (x-1)\cdot 1+(y-6)\cdot 2+(z-3)\cdot 3=0 \end{cases}$$

$x=t$

$y=2t+1 \Rightarrow t-1+(2t-5)\cdot 2+(3t-1)\cdot 3=0$

$z=3t+2$

$t-1+4t-10+9t-3=0$

$14t-14=0 \Rightarrow t=1$

$\Rightarrow$ $x=1$

$y=3 \Rightarrow$ Proiecţia $=(1,3,5)$

$\Rightarrow$

$y = 3 \Rightarrow$ Proiecția $= (1, 3, 5)$

$z = 5$