Var7

Monday, June 9, 2025 1:06 PM

Exercițiul 1 *Se consideră modelul matematic al răcirii corpurilor*

$$\begin{cases} T'(t) &= -k \cdot (T(t) - T_m) \\ T(0) = & T_0 \end{cases}$$

(a) **(0,5p)** *Care este semnificația parametrilor $k, T_m, T_0 \in \mathbb{R}_+$? Argumentați de ce $k > 0$.*

(b) **(0,5p)** *Determinați soluția modelului;*

(c) **(0,5p)** *Determinați soluțiile de echilibru și studiați stabilitatea acestora.*

a) T_m - temperatura mediului înconjurător

T_0 - temp. corpului la mom. inițial $t_0 = 0$

$T'(t) \leftarrow$ viteza de „răcire”

T_m - temperatura mediului înconjurător

k - constanta ,răcire

b) $$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m)$$

$$\frac{dT}{T - T_m} = -k\,dt$$

$$\ln|T - T_m| = -kt + c$$

$$|T - T_m| = e^{-kt} \cdot e^{c}$$

$$T - T_m = c \cdot e^{-kt}$$

$$T = T_m + c \cdot e^{-kt}$$

$$T(0) = T_0$$

$$T_m + c = T_0 \Rightarrow c = T_0 - T_m$$

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

Dacă $T > T_m \Rightarrow T - T_m > 0$

şi $T'(t) < 0$

$\Rightarrow -k$ trebuie să fie < 0

deci $k > 0$

Dacă $T < T_m \Rightarrow T - T_m < 0$

şi $T'(t) > 0$

$\Rightarrow -k < 0 \Rightarrow k > 0$

Def. O funcție $y \in C^n(I)$ este soluție a ec. (2) dacă:

(i) $I \subseteq \mathbb{R}$ interval nedegenerat

(ii) $(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \in D_f, \ \forall x \in I$

(iii) $y^{(n)}(x) = f((x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \ \forall x \in I$

$$\begin{cases} y \in C^1(I) \\ I \subseteq \mathbb{R} \ \dots \\ (x, y(x)) \in D_f \ \forall x \in I \\ y'(x) = f(x, y(x)) \ \forall x \in I \end{cases}$$

c) $T(t) = T_m$

$$T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt} = T_m$$

$$T(t) = T_m$$

$$(T_0 - T_m)e^{-kt} = 0$$

Exercițiul 3 *Determinați soluțiile generale pentru ecuațiile:*

0,5p (a) *(0,5p)* $y' - \frac{2}{x}y = -1$

1p (b) *(1p)* $y'' + 4y' + 5y = 2e^{-x}$

a) $y' - 2\frac{y}{x} = -1$

$y' - \frac{2}{x}y = -1$

I $y' = \frac{2y}{x}$

$\frac{dy}{\cancel{dy}} = \frac{2}{x}dx$

$\ln|y| = 2\ln|x| + c$

$y_0 = cx^2, c \in \mathbb{R}$

II $y_p = c(x)x^2$ $\frac{1}{x} \cdot x^2$

$y_p' = c'(x) \cdot x^2 + 2x \cdot c(x)$

$c'(x) \cdot x^2 + 2x \cdot c(x) - \frac{2c(x)x^2}{x} = -1$

$$c'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$c(x) = \frac{1}{x} + c \Rightarrow \frac{1}{x}$$
$$c = 0$$

$$y = cx^2 + x, \; c \in \mathbb{R}$$

(b) (1p) $y'' + 4y' + 5y = 2e^{-x}$

I. MO

$$r^2 + 4r + 5 = 0$$

$$\Delta = 16 - 25 = -9$$

$$r_{1,2} = \frac{-4 \pm 3i}{2} = -2 \pm \frac{3}{2}i$$

$$y = c_1$$

II. $y_p = a \cdot e^{rx}$

$$y_p' = r \cdot a \cdot e^{rx}$$

$$y_p'' = r^2 \cdot a \cdot e^{rx}$$

$$y_p'' = r^2 \cdot a \cdot e^{rx}$$

$$r^2 \cdot a \cdot e^{-x} + 4 \cdot r \cdot e^{-x} + 5 a e^{-x} = 2e^{-x} \,\Big|\, : e^{-x}$$

$(-1)^2$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\downarrow$ -1

$$a - 4 + 5a = 2$$

$$6a = 6$$

$$a = 1$$

$$\Rightarrow y_p = e^{-x}$$

Exercițiul 4 *(1p) Determinați soluția problemei bilocale:*

$$\begin{cases} (3x-1) \cdot y'' - 3 \cdot y' &= -3 \\ y(0) &= 0 \\ y(1) &= \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$y' = z$$

$$(3x-1) \cdot z' - 3z = -3 \quad \Big| : (3x-1),\ x \neq \frac{1}{3}$$

$$z' - \frac{3}{3x-1} z = \frac{-3}{3x-1}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3}{3x-1}(z-1)$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{3}{3x-1}(z-1)$$

$$\frac{dz}{z-1} = \frac{3}{3x-1}dx$$

$$\ln|z-1| = 3\frac{\ln|3x-1|}{3} + c$$

$$|z-1| = e^{\ln(3x-1)} \cdot e^{c}$$

$$z = c\cdot(3x-1)+1$$

$$= c\cdot(3x-1)$$

$$y = \int c\cdot(3x-1)\,dx$$

$$= c_1\cdot 3\cdot\frac{x^2}{2} - c_1\cdot x + c_2$$

$$= c_1\left(\frac{3x^2}{2} - x\right) + c_2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$y(0)=0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$y(1)=\frac{3}{2} \Rightarrow c_1\left(\frac{3}{2}-1\right) = \frac{3}{2}$$

$$c_1 = 3\cdot\cancel{2} = 3$$

$$c_1 = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = 3$$

$$y(x) = 3\left(\frac{3x^2}{2} - x\right) + 0$$

Exercițiul 5 *(1p)* *Se consideră problema Cauchy* $\begin{cases} y' &= xy \\ y(0) &= 1 \end{cases}$. *Scrieți formula lui Euler de calcul a valorilor soluției aproximante pentru o rețea de noduri echidistante. Pentru pasul* $h = 0.1$ *calculați primele trei valori aproximative ale soluției pe intervalul* $[0; 1]$.

x_0

$h = 0{,}1$
$[0, 1]$ $\Rightarrow N = 10$

$f(x, y) = xy$

$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot h$

$y_1 = y_0 + f(\underset{0}{x_0}, \underset{1}{y_0}) \cdot 0{,}1$

$y_1 = 1$

$y_2 = 1 + \underbrace{0{,}1}_{f(0{,}1;1)} \cdot 0{,}1 = 1 + 0{,}01 = 1{,}01$

$x_0 = 0$

$x_1 = 0{,}1$

$y_1 = 0,1$

$x_2 = 0,2$

$y_3 = 1,01 + (1,01 \cdot 0,2) \cdot 0,1$ $\quad = 0,0202$

$\quad + 1,01$

$\quad = 1,0302$ ✓

$$\frac{101}{100} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{202}{10000} = 0,0202$$

Exercițiul 6 *Se consideră sistemul*

$$\begin{cases} x'(t) = & y^3 - x \\ y'(t) = & x^3 - y \end{cases}$$

Se cere:

(a) *(0,5p) Să se determine punctele de echilibru*

(b) *(1p) Să se studieze stabilitatea acestora.*

$$\begin{cases} y^3 - x = 0 \\ x^3 - y = 0 \quad + \end{cases}$$

$x^3 + y^3 - (x+y) = 0$

$(x+y)(x^2 - xy + y^2) - (x+y) = 0$

$(x+y)(x^2 - xy + y^2 - 1) = 0$

$x = -y$

$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$

$\Delta = y^2 - 4y^2 + 4$

$\cancel{-4} - 3y^2$

$y^3 + y = 0$

$y(y^2+1)=0$

$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{4-3y^2}}{2}$

$\boxed{y=0=x}$ ECHILIBRU

$4-3y^2>0$

$y=\pm i, x=\mp i$

$3y^2<4$

$y \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} f_1(x,y) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} f_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 3y^2 \\ 3x^2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J_f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(\lambda I_2 - J_f(0,0)) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\det(\lambda I_2 - J_f(0,0)) = \begin{vmatrix} 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$(\lambda+1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 < 0$$

$\Rightarrow (0,0)$ local asimptotic stabil