Sunday, May 25, 2025 7:05 PM

Numele şi grupa:

Geometrie: Lucrarea de control II (Grupa 213, R2)

La problemele 1–5 bifaţi răspunsul corect. Unele dintre problemele din grilă pot avea mai multe răspunsuri corecte. Aceste probleme vor fi corectate cu algoritmul aplicat la admitere. La problemele 6 şi 7 prezentaţi soluţia completă (cu calculele duse până la capăt!).

1. (1 punct) Care dintre matricile de mai jos corespunde transformării tridimensionale $\mathrm{Rot}(O, \mathbf{k}, \pi/4) \circ \mathrm{Scale}(O, 3, 1, 2)$?

○ $\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ○ $\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ○ $\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; ● $\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

... plane este tangent la hiperboloidul cu două pânze $3x^2 - 12y^2 - z^2 - 3 = 0$ şi ... $- 1 = 0$.

1. $\mathrm{Rot}(O, k, \frac{\pi}{4})$

Rotaţia

$$\mathrm{Rot}(Q, \mathbf{u}, \theta) = \begin{pmatrix} \mathrm{Rot}(\mathbf{u}, \theta) & (I_3 - \mathrm{Rot}(\mathbf{u}, \theta)) \cdot \mathbf{Q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

unde

$$\mathrm{Rot}(\mathbf{u}, \theta) = \cos\theta \cdot I_3 + (1 - \cos\theta)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \sin\theta \cdot (\mathbf{u} \times -) \quad \text{şi} \quad \mathbf{u} \times - = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 \end{pmatrix},$$

iar în spaţiu

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 \\ a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

$$k \times - = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$

$k = (0, 0, 1)$

$$\mathrm{Rot}(O, k, \tfrac{\pi}{4}) = \begin{pmatrix} \mathrm{Rot}(k, \frac{\pi}{4}) & [I_3 - \mathrm{Rot}(k, \frac{\pi}{4})] \cdot O \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Rot}(k, \tfrac{\pi}{4}) = \cos\tfrac{\pi}{4} \cdot I_3 + (1 - \cos\tfrac{\pi}{4})(k \otimes k) + \sin\tfrac{\pi}{4} \cdot (k \times -)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k \otimes k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot e & a\cdot f & a\cdot g \\ b\cdot e & b\cdot f & b\cdot g \\ c\cdot e & c\cdot f & c\cdot g \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Rot\left(O, k, \frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Scale(O, 3, 1, 2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Scalarea neuniformă

$$\mathrm{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & (1-s_x)\cdot q_x \\ 0 & s_y & 0 & (1-s_y)\cdot q_y \\ 0 & 0 & s_z & (1-s_z)\cdot q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Rot\left(O, k, \frac{\pi}{4}\right) \cdot Scale(O, 3, 1, 2) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (1 punct) Care dintre următoarele plane este tangent la hiperboloidul cu două pânze $3x^2 - 12y^2 - z^2 - 3 = 0$ şi este paralel cu planul $2x - z + 11 = 0$?
○ $2x - z + \sqrt{11} = 0$; ○ $2x - z + \sqrt{31} = 0$; ● $2x - z - 1 = 0$.
● $2x - z + 1 = 0$;

2.

$$3x^2 - 12y^2 - z^2 - 3 = 0 \quad | : 3$$

$$x^2 - 4y^2 - \frac{z^2}{3} = 1$$

6.1.4 Hiperboloidul cu două pânze

Hiperboloidul cu două pânze este mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un reper ortonormat verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \qquad (6.1.14)$$

Planul tangent la un hiperboloid cu două pânze

Ecuaţia planului tangent la hiperboloidul cu două pânze, într-un punct al său, de coordonate (x_0, y_0, z_0), se obţine prin dedublare, adică este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = -1,$$

$(x_0, y_0, z_0) \in$ plan tangent

$$xx_0 - 4yy_0 - \frac{zz_0}{3} = 1$$

plan paralel cu $2x - z + 11 = 0$

trebuie să coincidă

$$\Rightarrow \quad 2x - z + D = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_0}{2} = \frac{-\frac{z_0}{3}}{-1} = \frac{-1}{D} = k$$

$y_0 = 0$

$x_0 = 2k$

$z_0 = 3k$

$D = -\frac{1}{k}$

$$x_0^2 - 4y_0^2 - \frac{z_0^2}{3} = 1$$

3

$$4k^2 - 4\cdot 0 - \frac{9k^2}{3} = 1$$

$$4k^2 - 3k^2 = 1 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm 1$$

$$\Rightarrow D = \pm 1$$

$$\Rightarrow 2x - z + 1 = 0 \text{ și } 2x - z - 1 = 0$$

2. (1 punct) Care dintre urm... este paralel cu planul $2x - z + 11 = 0$?
○ $2x - z + 1 = 0$; ○ $2x - z + \sqrt{11} = 0$; ○ $2x - z + \sqrt{31} = 0$; ○

3. (0.5 puncte) Intersecția dintre cuadrica $x^2/2 - y^2/2 + z^2 = 1$ și planul $y + 2 = 0$ este:
○ o parabolă; ○ o hiperbolă; ● o elipsă; ○ mulțimea vidă.

4. (1 punct) Produsul distanțelor de la punctul $M(0,3)$ de pe hiperbola $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ la as...

3.

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + z^2 = 1 \qquad y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$$

$$1 \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} + z^2 = 1$$

$$\frac{x^2}{2} + z^2 - 2 = 1$$

$$\frac{x^2}{2} + z^2 = 3 \quad \Big| :3$$

$$\frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{3} = 1$$

4.1 Elipsa

Ecuația canonică

Elipsa este locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanțelor la două puncte fixe din plan, F_1 și F_2, numite *focare*, situate la distanța $2c$ unul de altul, este o lungime constantă, egală cu $2a$. Dacă alegem sistemul de coordonate astfel încât axa Ox să treacă prin cele două focare, iar axa Oy să fie mediatoarea segmentului determinat de focare, atunci ecuația elipsei se poate scrie sub forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (4.1.1)$$

este paralel cu p... ○ $2x - z + \sqrt{11} = ...$ ... și planul y ...
○ $2x - z + 1 = 0$; ○ $2x - z + \sqrt{11} = ...$

3. (0.5 puncte) Intersecția dintre cuadrica $x^2/2 - y^2/2 + z^2 = 1$ și planul y ...
○ o parabolă; ○ o hiperbolă; ○ o elipsă; ○ mulțimea vidă.

4. (1 punct) Produsul distanțelor de la punctul $M(0,3)$ de pe hiperbola $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ la asimptotele hiperbolei este egal cu
... 2 ○ $\frac{2\sqrt{3}}{...}$; ○ $\frac{2\sqrt{6}}{6}$.
... hiperbola $x^2/4 - y^2/9 = 1$ pentru:

este paralel cu ...

○ $2x - z + 1 = 0$; ○ $2x - z + \sqrt{11} = 0$; ...

3. (0.5 puncte) Intersecţia dintre cuadrica $x^2/2 - y^2/2 + z^2 = 1$ şi planul y ...
○ o parabolă; ○ o hiperbolă; ○ o elipsă; ○ mulţimea vidă.

4. (1 punct) Produsul distanţelor de la punctul $M(0,3)$ de pe hiperbola $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ la asimptotele hiperbolei este egal cu
● 6; ○ $\frac{2}{3}$; ○ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; ○ $\frac{2\sqrt{6}}{6}$.

... Dreapta $2x + y + \lambda = 0$ este tangentă la hiperbola $x^2/4 - y^2/9 = 1$ pentru:
... $\lambda = \pm\sqrt{13}$; ○ $\lambda = \pm\sqrt{3}$.

... care se sprijină pe dreapta $x = 2, y$ ...

$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2}$

④ $M(0,3)$

$$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$$

4.1.2 Hiperbola

Ecuaţia canonică

Hiperbola este locul geometric al punctelor din plan pentru care modulul diferenţei distanţelor la două puncte fixe din plan, F_1 şi F_2, numite *focare*, situate la distanţa $2c$ unul de altul, este o lungime constantă, egală cu $2a$. Dacă alegem sistemul de coordonate astfel încât axa Ox să treacă prin cele două focare, iar axa Oy să fie mediatoarea segmentului determinat de focare, atunci ecuaţia elipsei se poate scrie sub forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.1.10}$$

$$\frac{x^2}{(\sqrt{6})^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$$

Asimptotele hiperbolei

Spre deosebire de elipsă, hiperbola este o curbă nemărginită. Ea este alcătuită din două ramuri. Curba are două asimptote. Fiecare este asimptotă pentru ambele ramuri, pentru una dintre ele la $+\infty$, pentru cealaltă la $-\infty$. Ecuaţiile asimptotelor sunt

$$y = \pm\frac{b}{a}x. \tag{4.1.13}$$

$\Rightarrow a = \sqrt{6}$

$b = \sqrt{3} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}x$

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$$

$d_1: \frac{1}{\sqrt{2}}x - y = 0$

$d_2: \frac{1}{\sqrt{2}}x + y = 0$

$$d(M, d_1) = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0 + 3\cdot(-1) + 0\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$= 3\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}{3}$$

$$= \sqrt{6}$$

$\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$$d(M, d_2) = \frac{\left|\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 0 + 3 \cdot (1) + 0\right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (1)^2}} = \sqrt{6}$$

$$d(M, d_1) \cdot d(M, d_2) = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} = 6$$

egal cu

○ 6; ○ $\frac{2}{3}$; ○ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; ○ $\frac{2\sqrt{6}}{6}$.

5. (1 punct) Dreapta $2x + y + \lambda = 0$ este tangentă la hiperbola $x^2/4 - y^2/9 = 1$ pentru:

○ $\lambda = \pm\frac{2}{3}$; ● $\lambda = \pm\sqrt{7}$; ○ $\lambda = \pm\sqrt{13}$; ○ $\lambda = \pm\sqrt{3}$.

...ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dreaptă care se spri... $x^2 ... + \frac{z^2}{...} = 1, y = 2$. (Se cer calcule c...

5. $2x + y + \lambda = 0$

Tangentele la hiperbolă paralele cu o direcţie dată

Dacă direcţia dată nu este verticală şi ea este identificată printr-o pantă k, atunci există două tangente cu această pantă, date de ecuaţiile

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 - b^2}. \tag{4.1.16}$$

Există două tangente verticale, date de ecuaţiile

$$x = \pm a. \tag{4.1.17}$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$y = -2x - \lambda$$

$$\Rightarrow k = -2$$

$$y = -2x \pm \sqrt{4 \cdot 4 - 9} = -2x \pm \sqrt{7}$$

$$\Rightarrow 2x + y \mp \sqrt{7} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \pm\sqrt{7}}$$

5. (1 p...

○ $\lambda = \pm\frac{2}{3}$; ○ $\lambda = \pm\sqrt{7}$; ○ ...

6. (2 puncte) Să se determine ecuaţia suprafeţei conoide generată de o dr... (Se cer calcule complete.);
0, este paralelă cu planul xOy şi întâlneşte elipsa $\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1, y = 2$.

7. (2.5 puncte) Determinaţi imaginea pătratului $ABCD$, cu $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$ printr-o translaţie d[e] vector $\mathbf{w}(2,1)$, urmată de o rotaţie de unghi $45°$ relativ la $Q(1,2)$. Reprezentaţi, pe acelaşi sistem de axe, pătrat[ul] iniţial şi imaginea sa prin transformarea compusă.

7.