

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Fehlerrechnung	4
4 Durchführung	5
4.1 Statische Methode	5
4.2 Dynamische Methode	5
5 Auswertung	6
5.1 Statische Methode	6
5.2 Dynamische Methode	9
6 Diskussion	14
Literatur	14

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll die Wärmeleitfähigkeit von Messing, Aluminium und Edelstahl qualitativ untersucht werden. Ferner sollen die zugehörigen stoffspezifischen Wärmeleitfähigkeiten bestimmt werden.

2 Theorie

Bei einem Temperaturunterschied in einem System gibt es drei verschiedene Möglichkeiten, um diesen auszugleichen. Diese sind Konvektion, Wärmestrahlung und Wärmeleitung. In diesem Versuch wird die Wärmeleitung bei unterschiedlichen Metallen untersucht.

Wenn der Temperaturunterschied in einem Stab betrachtet wird, also ein Ende eine höhere Temperatur als das andere hat, so fließt eine Wärmemenge dQ , die abhängig von der Stabgeometrie und den Stabeigenschaften ist, vom wärmeren zum kälteren Ende. Dabei wird die Wärmemenge mit der Formel

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad (1)$$

berechnet, wobei A die Fläche des Querschnittes des Stabes und κ die stoffspezifische Wärmeleitfähigkeit darstellt. Für die oben beschriebene Vereinbarung, dass die Wärmemenge vom wärmeren zum kälteren Ende fließt, sorgt das Minus-Zeichen in der Gleichung. Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\left(\frac{\partial Q}{\partial V}\right)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 \quad (2)$$

mit den Ausdrücken für ∂Q und \vec{j}

$$\partial Q = mc \cdot \partial T \quad \vec{j} = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x}$$

resultiert die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Dabei ist c die spezifische Wärmekapazität des Körpers und m und ρ sind die Masse beziehungsweise die Dichte des Körpers.

Bei einer periodischen Erwärmung und Abkühlung eines Körpers breitet sich in diesem eine Temperaturwelle aus. Diese wird durch

$$T(x, t) = T_{\max} \exp \left[-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x \right] \cos \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x \right) \quad (4)$$

beschrieben. T_{\max} ist die Amplitude und die Exponentialfunktion gibt den Dämpfungsfaktor an. Eben diese Dämpfung kann aus dem Amplitudenverhältnis an zwei verschiedenen Messstellen berechnet werden. Die Phasengeschwindigkeit der Welle beträgt

$$v = \sqrt{\frac{2\omega\kappa}{\rho c}}. \quad (5)$$

Mit Hilfe des Amplitudenverhältnisses und den Umformungen

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{2\pi}{T^*} & T^* &\hat{=} \text{Periodendauer} \\ \Phi &= \frac{2\pi\Delta t}{T^*} & \Phi &\hat{=} \text{Phase} \end{aligned}$$

ergibt sich die Formel

$$\kappa = \frac{\rho c(\Delta x)^2}{2\Delta t \ln\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)} \quad (6)$$

für die Wärmeleitfähigkeit.

3 Fehlerrechnung

Im Folgenden werden alle Mittelwerte mit folgender Formel bestimmt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (7)$$

Der zugehörige Fehler des Mittelwertes berechnet sich mit

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (8)$$

Werden fehlerbehaftete Größen in einer späteren Formel benutzt, so wird der neue Fehler mit Hilfe der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung angegeben:

$$\Delta f = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (\Delta x_i)^2}. \quad (9)$$

Eventuelle Ausgleichsgeraden berechnen sich über

$$y = a \cdot x + b \quad (10a)$$

$$a = \frac{\bar{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\bar{x^2} - \bar{x}^2} \quad (10b)$$

$$b = \frac{\bar{x^2y} - \bar{x}\bar{xy}}{\bar{x^2} - \bar{x}^2}. \quad (10c)$$

Die Regression sowohl von Ausgleichsgeraden als auch von anderen Polynomen, sowie die Bestimmung der zugehörigen Fehler, wird mit iPython 2.1.0 durchgeführt.

4 Durchführung

4.1 Statische Methode

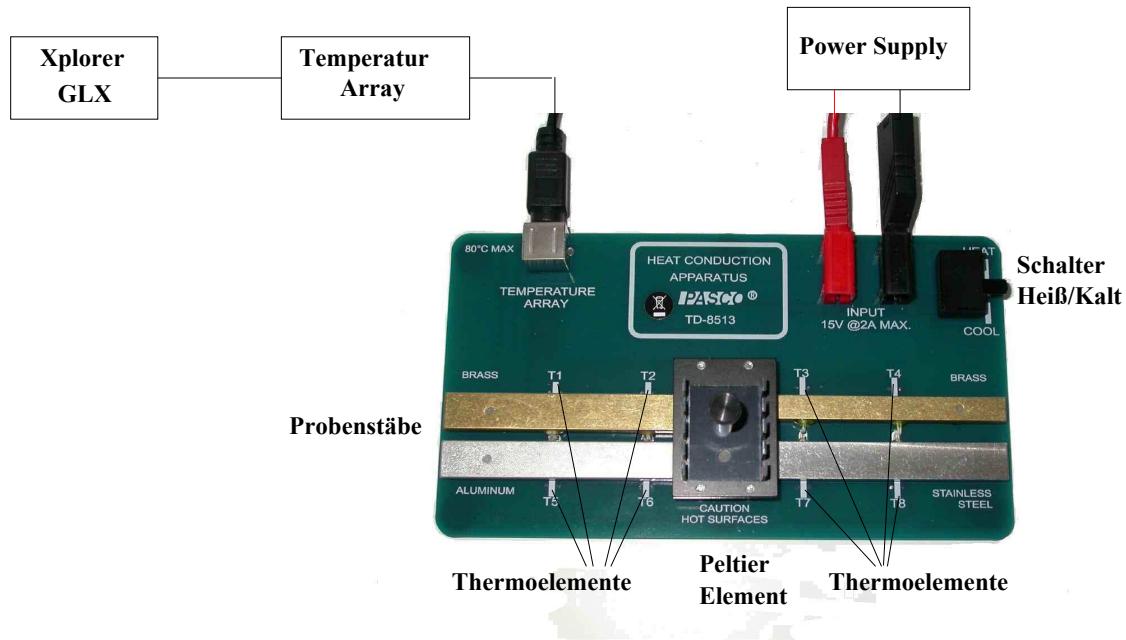


Abbildung 1: Aufbau[1, S. 3].

Zunächst werden die Abstände der einzelnen Thermoelemente zueinander gemessen. Die in Abbildung 1 zu sehende Apparatur wird auf "COOL" gestellt und an das Netzgerät angeschlossen. Das GLX wird über das Temperatur-Array ebenfalls verbunden. Es wird überprüft, ob alle Thermoelemente vom GLX erkannt werden und gegebenenfalls hinzugefügt. Die Abtastrate wird auf 5 s gesetzt. Die Spannung am Netzgerät wird auf 5 V eingestellt, während die Stromstärke maximal ist. Die Isolierungen werden auf die Probenstäbe gelegt und der Schalter der Apparatur auf "HEAT" gestellt. Nach 700 s werden die Temperaturen an den Thermoelementen T₁, T₄, T₅ und T₈ notiert. Der Heizvorgang wird solange durchgeführt bis circa 45 °C am Thermoelement T₇ gemessen werden, oder bis die Leistung zum weiteren Erhitzen nicht mehr ausreicht. Nach Abschluss der Messung wird der Schalter wieder auf "COOL" gestellt, die Isolierungen abgenommen und die Stäbe werden abgekühlt, bis die Thermoelemente nur noch maximal 30 °C anzeigen. Die gemessenen Daten werden in einem Temperatur-Zeit-Diagramm dargestellt. Weiterhin werden auch die Temperaturdifferenzen von T₇ – T₈ und T₂ – T₁ graphisch dargestellt.

4.2 Dynamische Methode

Bei der dynamischen Methode wird die Abtatsrate auf 2 s gesetzt. Die Spannung am Netzgerät wird auf 8 V eingestellt, wobei auch hier die Stromstärke wieder maximal ist.

Die Isolierungen werden auf die Probenstäbe gelegt und die Messung wird gestartet. Dazu werden die Stäbe 40 s lang aufgeheizt und direkt danach wieder für 40 s gekühlt. Dieser Vorgang wird mindestens 10 Mal durchgeführt. Die gemessenen Daten werden erneut graphisch ausgegeben und die Stäbe werden erneut auf eine Maximaltemperatur von 30 °C abgekühlt. Dieser Vorgang wird nun mit einer Periodendauer von 200 s wiederholt, das heißt, dass die Stäbe jeweils für 100 s geheizt beziehungsweise gekühlt werden. Dies wird solange durchgeführt, bis ein Thermoelement 80 °C anzeigt oder mindestens 10 Perioden gemessen wurden. Abschließend werden die Ergebnisse graphisch ausgegeben.

5 Auswertung

5.1 Statische Methode

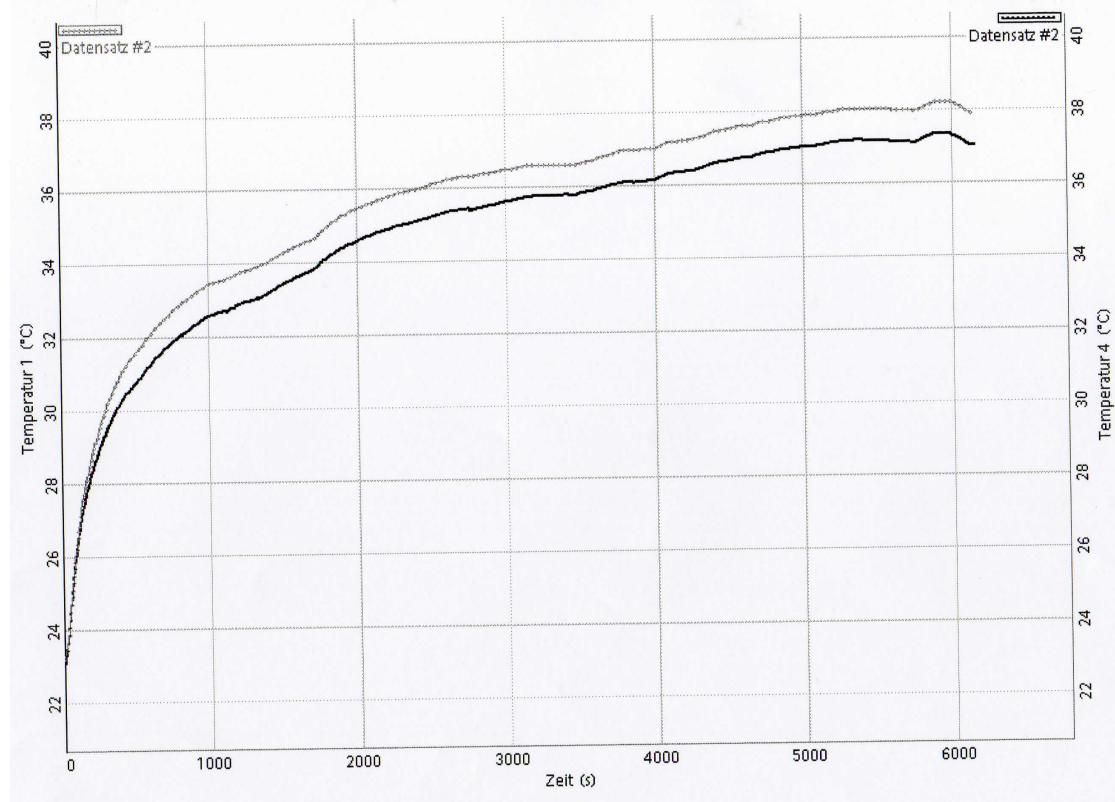


Abbildung 2: Temperaturverlauf bei Messingstäben von unterschiedlicher Breite (heller Graph → breiter Stab; dunkler Graph → schmaler Stab).

Die Graphen der vom Peltier-Element weiter entfernten Thermoelemente sind in den Abbildungen 2 und 3 dargestellt. Alle Graphen zeigen einen exponentiellen Anstieg der Temperatur, der ab jeweils 1000 s anfängt deutlich abzuflachen. Vor allem in diesen ersten 1000 s steigen die Temperaturen unterschiedlich stark an. Im weiteren Verlauf zeigt sich,

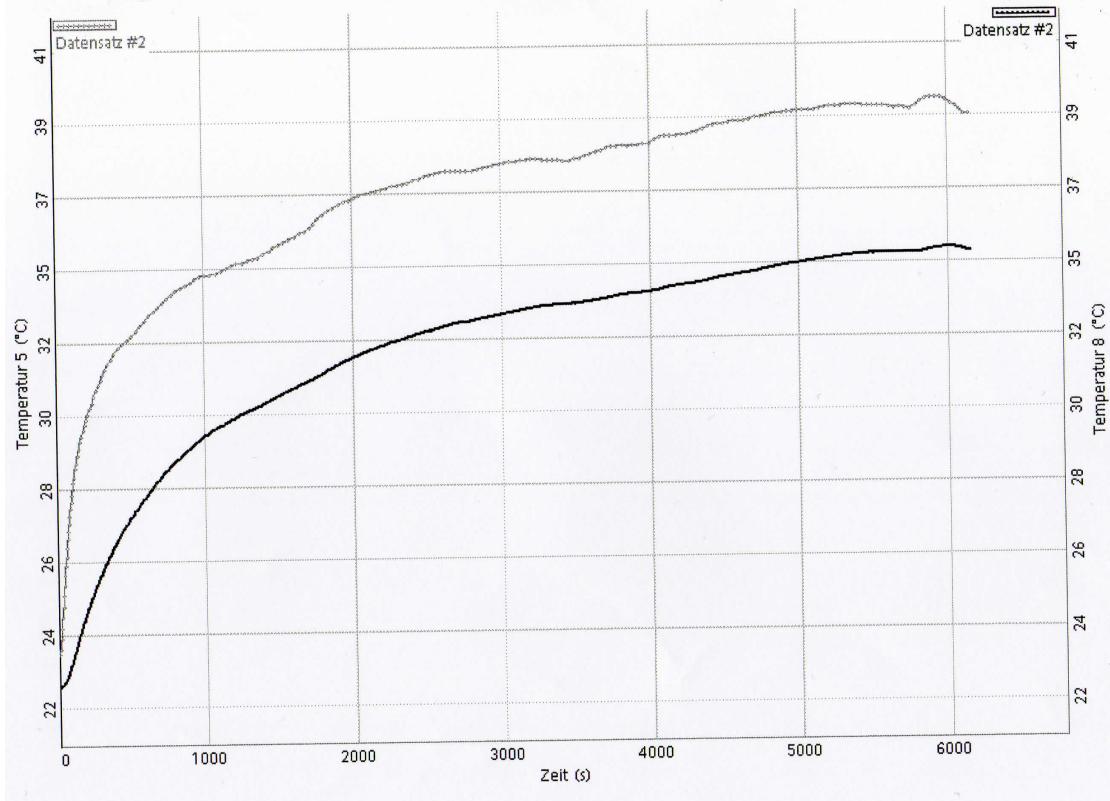


Abbildung 3: Temperaturverlauf bei Aluminium- und Edelstahlstäben (heller Graph →Aluminiumstab; dunkler Graph →Edelstahlstab).

dass die vier Graphen gegen unterschiedlich hohe Temperaturen streben.

Aus den nach 700 s gemessenen Temperaturen

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 305,68 \text{ K} \\
 T_4 &= 304,82 \text{ K} \\
 T_5 &= 306,68 \text{ K} \\
 T_8 &= 306,01 \text{ K}
 \end{aligned}$$

zeigt sich, dass am Thermoelement T_5 die höchste Temperatur erreicht wurde. Dieses Thermoelement misst die Temperatur des Aluminiumstabes. Da alle Stäbe am Anfang der Messung Zimmertemperatur hatten, kann darauf geschlossen werden, dass Aluminium die beste Wärmeleitung besitzt.

Zur Bestimmung der Wärmeströme pro Zeit zu verschiedenen Zeitpunkten, werden nach fünf verschiedenen Messzeiten die Temperaturdifferenzen zwischen den nahen und fernen Thermoelementen benötigt. Die Wärmeströme pro Zeit werden dann nach (1) bestimmt. Dabei sind die Werte von κ aus der Literatur[2] und die Fläche A der Querschnitte aus der Versuchsanleitung[1, S. 2] entnommen, die Entfernung Δx der Thermo-

elemente wurde gemessen:

$$\kappa_{\text{Messing}} = 109 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$A_{\text{Messing, breit}} = 48 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\Delta x_{\text{Messing, breit}} = (0,03 \pm 0,00) \text{ m}$$

$$\kappa_{\text{Edelstahl}} = 16 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$$

$$A_{\text{Edelstahl}} = 48 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$\Delta x_{\text{Edelstahl}} = (0,03 \pm 0,00) \text{ m}$$

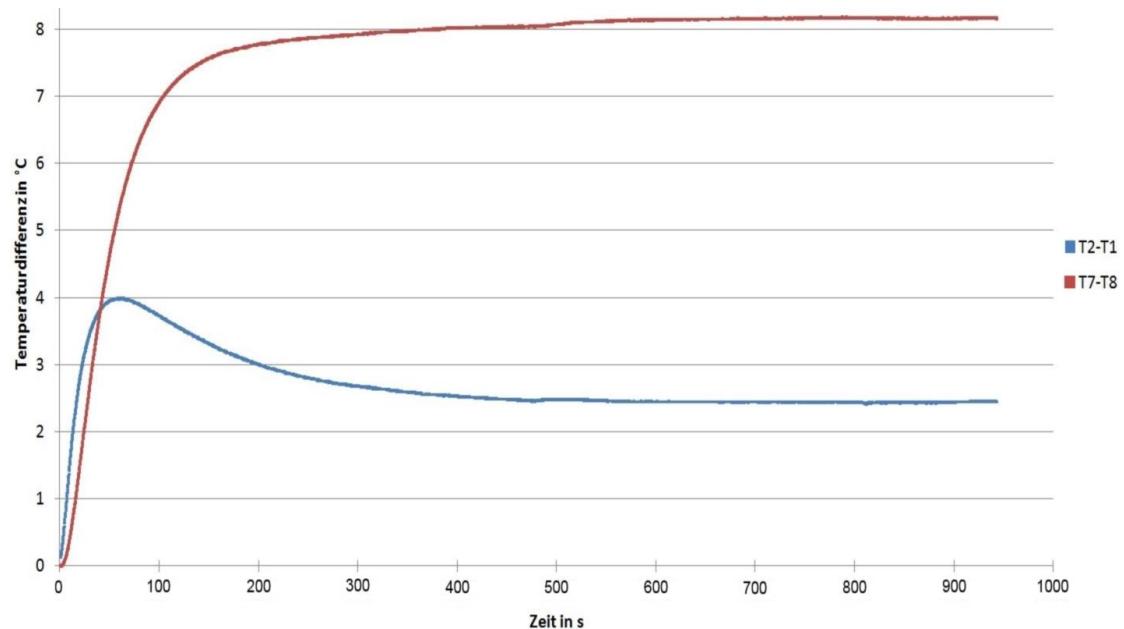


Abbildung 4: Temperaturdifferenzen des breiten Messingstabes ($T_2 - T_1$) und des Edelstahlstabes ($T_7 - T_8$).

Tabelle 1: Temperaturdifferenzen des breiten Messingstabes ($T_2 - T_1$) und des Edelstahlstabes ($T_7 - T_8$)

Messzeit t / s	$(T_2 - T_1)$ / K	$\frac{\Delta Q_{21}}{\Delta t}$ / W	$(T_7 - T_8)$ / K	$\frac{\Delta Q_{78}}{\Delta t}$ / W
100	3,7	-0,65	7,0	-0,18
200	3,0	-0,52	7,8	-0,20
400	2,6	-0,45	8,0	-0,20
600	2,5	-0,44	8,2	-0,21
800	2,4	-0,42	8,2	-0,21

Bei der Betrachtung der Graphen 4 für die Temperaturdifferenzen ist auffällig, dass beide Graphen zunächst ähnlich steil anwachsen. Eine weitere Gemeinsamkeit ist, dass beide Kurven relativ schnell gegen eine Grenztemperaturdifferenz laufen. Die Unterschiede sind die Höhe dieser Grenztemperaturdifferenz und der Fakt, dass die Temperaturdifferenz am Messingstab zunächst ein Maximum annimmt. Die unterschiedlichen Verläufe lassen sich durch die großen Unterschiede bei den Werten für die jeweiligen κ 's erklären. Je höher der Wert ist, desto niedriger ist die Grenztemperaturdifferenz, da sich die Wärme schneller gleichmäßig im Stab verteilt. Das Maximum lässt sich dadurch erklären, dass die Temperaturdifferenz für die niedrige Grenztemperaturdifferenz anfangs zu schnell ansteigt und damit kurzzeitig über den Endwert hinaus stößt.

5.2 Dynamische Methode

In diesem Auswertungsteil werden die Werte für das jeweilige κ der Materialien bestimmt. Für Messing wird dabei der Temperaturverlauf am breiten Stab mit einer Heizperiode von 80 s benutzt. Der Temperaturverlauf in Abbildung 5 des Thermoelementes, das nah am Peltier-Element liegt, ist durch die helle Kurve, der des fernen Thermoelementes durch die dunkle Kurve dargestellt. Um die Wärmeleitfähigkeit zu bestimmen, wird Formel (6) benutzt und die Amplituden und Phasendifferenzen der Perioden werden aus den Graphen abgelesen. Die abgelesenen Daten befinden sich in Tabelle 2. Die Werte für die Phasendifferenz und den natürlichen Logarithmus des Verhältnisses der Amplituden werden nach Formel (7) gemittelt. Der zugehörige Fehler bestimmt sich durch Formel (8). Zudem werden die Materialkonstanten[1, S. 2] ρ und c und der Abstand Δx der Thermoelemente benötigt:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}} \right) &= 0,82 \pm 0,02 \\ \Delta t &= (16,1 \pm 0,6) \text{ s} \\ \rho &= 8520 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ c &= 385 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \\ \Delta x &= (0,03 \pm 0,00) \text{ m.} \end{aligned}$$

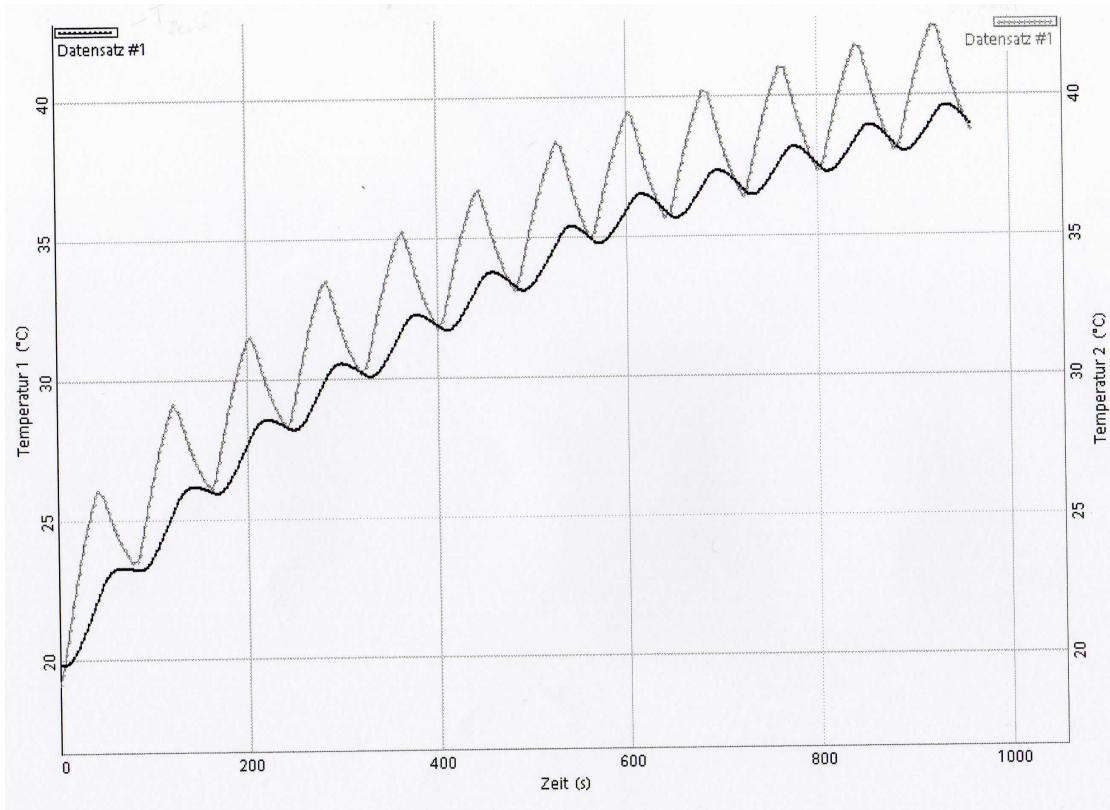


Abbildung 5: Temperaturverlauf bei dem breiten Messingstab; Periodendauer 80 s.

Für κ ergibt sich dann:

$$\kappa_{\text{Messing}} = (112 \pm 5) \frac{\text{W}}{\text{m K}},$$

wobei der Fehler nach (9) bestimmt wurde.

Tabelle 2: Zur Berechnung von κ gemessene Daten (breiter Messingstab)

$A_{\text{nah}} / \text{K}$	$A_{\text{fern}} / \text{K}$	$\ln\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)$	Phasendifferenz $\Delta t / \text{s}$
7,1	3,4	0,74	16
5,7	2,7	0,75	21
5,5	2,6	0,75	18
5,7	2,8	0,71	16
5,0	2,2	0,82	13
4,8	2,2	0,78	16
5,4	2,4	0,81	16
4,2	2,0	0,74	13
4,4	1,8	0,89	16
4,8	1,8	0,98	16
4,3	1,8	0,87	16
4,4	1,7	0,95	16

Für die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Aluminium benutzt man ebenfalls die Messreihe mit einer Heizperiodendauer von 80 s, die Berechnung erfolgt also entsprechend analog. Die nach (7) und (8) sich ergebenden Daten für $\ln\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)$ und Δt , sowie die

Tabelle 3: Zur Berechnung von κ gemessene Daten (Aluminiumstab)

$A_{\text{nah}} / \text{K}$	$A_{\text{fern}} / \text{K}$	$\ln\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)$	Phasendifferenz $\Delta t / \text{s}$
8,6	5,8	0,39	16
7,1	4,4	0,48	12
6,4	3,6	0,58	11
6,0	3,6	0,51	11
6,1	3,4	0,58	11
5,4	3,0	0,59	10
6,2	3,6	0,54	11
5,4	2,6	0,73	8
5,5	2,8	0,68	9
5,4	2,8	0,66	9
5,4	2,9	0,62	10
5,5	2,9	0,64	9

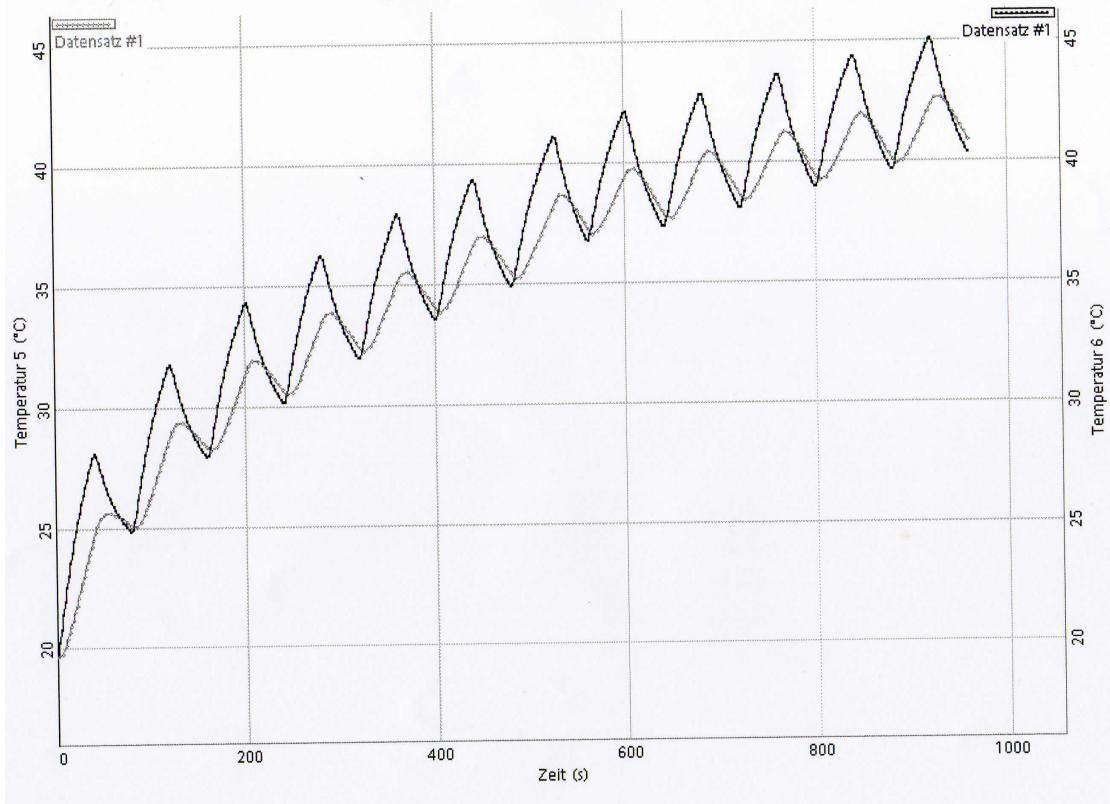


Abbildung 6: Temperaturverlauf bei dem Aluminiumstab; Periodendauer 80 s.

Materialelementenkonstanten[1, S. 2] und der Abstand der Thermoelemente lauten:

$$\ln \left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}} \right) = 0,58 \pm 0,03$$

$$\Delta t = (10,6 \pm 0,6) \text{ s}$$

$$\rho = 2800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$c = 830 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$\Delta x = (0,03 \pm 0,00) \text{ m.}$$

Nach (6) und (9) ergibt sich der Wert

$$\kappa_{\text{Aluminium}} = (170 \pm 10) \frac{\text{W}}{\text{m K}}.$$

Die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von Edelstahl erfolgt erneut analog, allerdings wird nun die Messreihe mit einer Heizperiodendauer von 200 s benutzt. Die nach (7) und (8) sich ergebenen Daten für $\ln \left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}} \right)$ und Δt , sowie die Materialelementenkonstanten[1, S. 2]

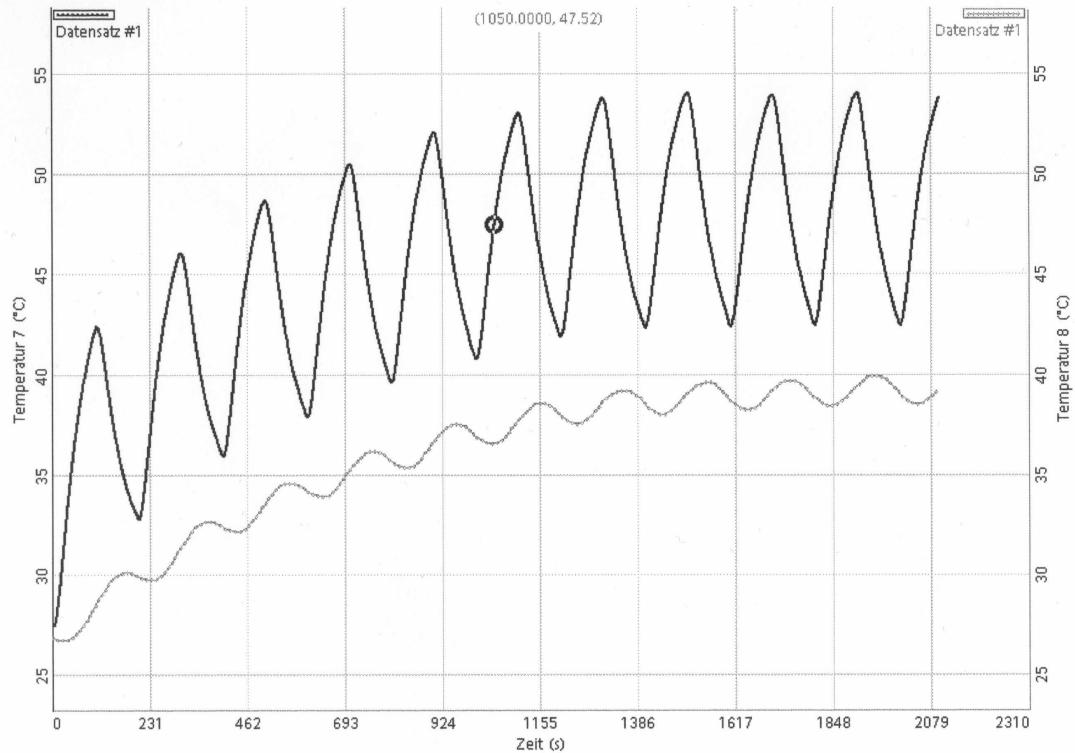


Abbildung 7: Temperaturverlauf bei dem Edelstahlstab; Periodendauer 200 s.

und der Abstand der Thermoelemente lauten:

$$\ln \left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}} \right) = 1,76 \pm 0,07$$

$$\Delta t = (61,0 \pm 0,1) \text{ s}$$

$$\rho = 8000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$c = 400 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

$$\Delta x = (0,03 \pm 0,00) \text{ m.}$$

Nach (6) und (9) ergibt sich der Wert

$$\kappa_{\text{Edelstahl}} = (13,5 \pm 0,6) \frac{\text{W}}{\text{m K}}.$$

Tabelle 4: Zur Berechnung von κ gemessene Daten (Edelstahlstab)

$A_{\text{nah}} / \text{K}$	$A_{\text{fern}} / \text{K}$	$\ln\left(\frac{A_{\text{nah}}}{A_{\text{fern}}}\right)$	Phasendifferenz $\Delta t / \text{s}$
15,0	3,4	1,48	69
11,9	3,1	1,35	64
12,9	2,6	1,60	62
12,4	1,9	1,88	62
12,5	2,3	1,69	62
12,2	2,2	1,71	63
11,8	1,6	2,00	60
11,7	1,7	1,93	58
11,6	1,6	1,98	53
11,5	1,6	1,97	53

6 Diskussion

Bei der statischen Messung ist ein Vergleich mit Literaturdaten nicht möglich, da die errechneten Wärmeströme von den jeweiligen Spannungen und Stromstärken abhängen. Die Messkurven zeigen allerdings einen logischen Trend. Zu bemängeln ist, dass die Graphen nicht "glatt" genug sind. Dies könnte daran liegen, dass das Netzgerät zu alt ist und keine konstante Leistung mehr liefern konnte. Zusätzlich könnte das Peltier-Element unregelmäßig geheizt haben. Eine Fehlerausschließung würde durch einen einfachen Austausch oder eine Überprüfung der Geräte erfolgen.

Bei der dynamischen Methode liegen nur kleine Abweichungen von den Literaturwerten[2] vor:

$$\kappa_{\text{Messing, gemessen}} = (112 \pm 5) \frac{\text{W}}{\text{m K}} \quad \kappa_{\text{Messing, Literatur}} = 109 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \\ \Rightarrow \text{relative Abweichung} \hat{=} 2,75 \%$$

$$\kappa_{\text{Aluminium, gemessen}} = (170 \pm 10) \frac{\text{W}}{\text{m K}} \quad \kappa_{\text{Aluminium, Literatur}} = 205 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \\ \Rightarrow \text{relative Abweichung} \hat{=} 17,07 \%$$

$$\kappa_{\text{Edelstahl, gemessen}} = (13.5 \pm 0.6) \frac{\text{W}}{\text{m K}} \quad \kappa_{\text{Edelstahl, Literatur}} = 16 \frac{\text{W}}{\text{m K}} \\ \Rightarrow \text{relative Abweichung} \hat{=} 15,63 \%$$

Diese Abweichungen liegen nach Beachtung der oben bereits beschriebenen möglichen Fehlerquellen im Rahmen der Messungsgenauigkeit.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Versuchsanleitung zum Versuch V204, Wärmeleitung von Metallen.* 2014.
- [2] The Engineering ToolBox. *Thermal Conductivity.* 13. Nov. 2014. eprint: http://www.engineeringtoolbox.com/thermal-conductivity-d_429.html.