

Исследования и разработка электро-термического оборудования непрерывного действия для симметричного индукционного нагрева под закалку мелющих шаров

Докт. техн. наук, проф.
В. Н. Мещеряков,
канд. физ.-мат. наук, доц.
В. И. Кузьменко,
аспирант С. С. Титов
Липецкий государственный
технический университет
(г. Липецк, Россия)

Анализируются и развиваются технические идеи в зарегистрированных в последние годы отечественных изобретениях, направленных на решение озаглавленной проблемы симметричного индукционного нагрева под термообработку металлоизделий шарообразной формы. Речь идет о проблеме, не нашедшей к настоящему времени научно-технического разрешения в мировой практике.

Ключевые слова: шар(ик), энергоэффективность, индуктор, желоб, спираль, вращение, анализ, исследование.

1. Актуальность и подходы к решению проблемы

Перспектива поставок мелющих шаров, закаленных с симметричного поверхностного на заданную глубину и температуру нагрева, была бы весьма привлекательна для отраслей промышленности с массовым потреблением этих металлоизделий, в первую очередь горно-обогатительной, огнеупорной, а также цементной. При условном решении этой научно-технической задачи был бы достигнут двойной эффект: повышение качества шаров с одновременным снижением отпускных цен у изготовителей. Новый уровень качества шаров предопределяется технологической возможностью оптимального сочетания высокой поверхностной твердости изделий после термообработки с вязко-пластичной

сердцевинной (противораскалываемость) без окисления и обезуглероживания поверхности, а удешевление в сфере изготовления — благодаря многократному снижению энергоемкости термообработки с индукционным нагревом в сравнении с традиционным, повсеместно практикуемым длительным сквозным нагревом — газопламенным и в электропечах сопротивления.

Более всего этой востребованной промышленностью совокупности параметров нагрева, безусловно, отвечает индукционный способ с прямым и высокоскоростным (секунды — доли секунд при поверхностном нагреве [1, с. 91]) превращением электрической энергии в тепловую, отличающуюся простотой регулирования температуры и глубины симметричного прогрева. Однако при всех известных достоинствах этого спосо-

ба применимость его с обеспечением требуемой симметричности нагрева в настоящее время ограничена в мировой практике преимущественно изделиями непрерывного сечения или близкого к таковому.

В настоящей работе анализируются технические решения обозначенной проблемы. Заметим: проблемы по актуальности и уровню новизны ее технического решения — мировой значимости.

Общей в рассматриваемых изобретениях [2, 3] идей технического решения поставленной задачи является конфигурация индуктора ТВЧ, направляющий желоб которого (или профиль замкнутого сечения) изогнут в пространственную спираль с вертикальной осью симметрии.

Кинематика движения шарика в спиральном индукторе (свободное скатывание) характеризуется двухмерным, а в другом случае при переменной кривизне витков спирали трехмерным побуждением к изменению направления его оси собственного вращения от входа в индуктор до выхода из него. Это предопределяет возможность создания установок ТВЧ непрерывного действия, обеспечивающих равномерное по плотности взаимодействие всей поверхности скатывающегося шара с электромагнитным полем в индукторе и достижение искомого симметричного нагрева на заданную глубину — скоростного и потому высокоэнергетического, без окисления и обезуглероживания. При этом использование индукционного нагрева и для скоростного отпуска в существенно меньшей степени снизило бы послезакалочную поверхностную твердость шаров с соответствующим увеличением их износостойкости [4, с. 392].

2. Направления проведенных авторами исследований в плане теоретического обеспечения создания электротермического оборудования

Сравнительный анализ двух вариантов конфигураций пространственных спиралей, по которым изогнуты направляющие профили: цилиндрической (рис. 1) и вписанной в поверхность однополостного гиперboloида или другую, схожую поверхность второго порядка (рис. 2).

Сравнительный анализ трех вариантов очертаний поперечных сечений направляющих профилей: корытообразного, кольцевого (труба) и прямоугольного.

Физико-математические исследования влияния электромагнитного поля высокой частоты на кинематику и динамику качения шаров внутри индуктора ТВЧ.

3. Сравнение вариантов геометрических конфигураций спиральных индукторов

Порядок работы установки (рис. 1). Из расходного бункера 1 шары выпускаются подбункерным питателем 2 дискретного действия (например, перепускного или маятникового типа) в составной задающий желоб 3, транспортирующий их свободным скатыванием с интервалами в прямой участок 4 — 3 направляющего спирального желоба 4 индуктора 5. Благодаря подаче шаров в

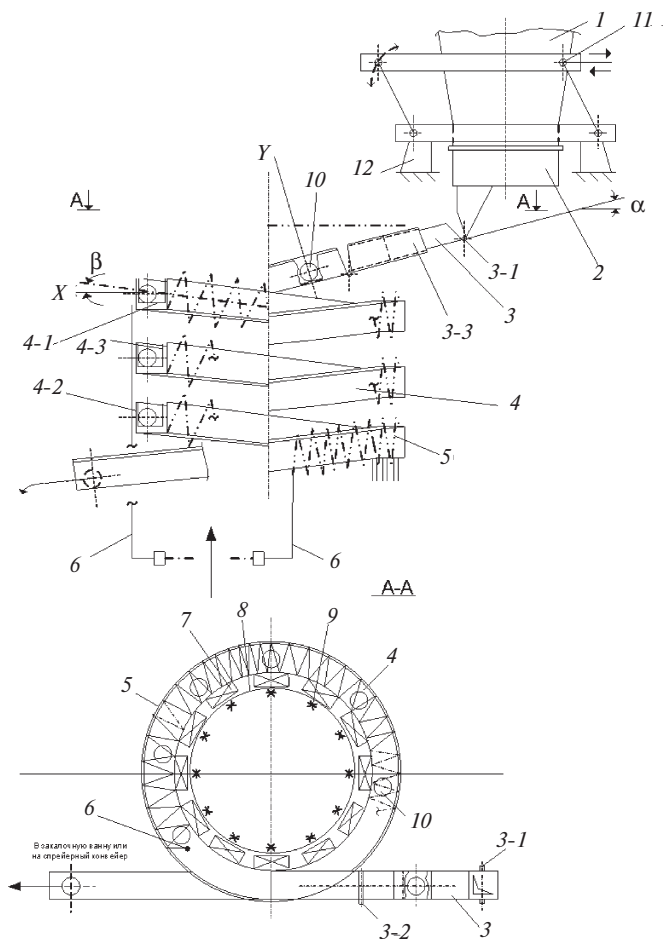


Рис. 1. Установка непрерывного действия для индукционного нагрева изделий шарообразной формы

индуктор с временными интервалами через питатель 2 они разделены между собой в движении по направляющему желобу 4 дистанциями, предотвращающими их взаимоэкранирование в электромагнитном потоке.

В начальный прямой участок 4 — 3 направляющего желоба шары скатываются с линейной скоростью V_0 (центров масс) и угловой их собственного вращения ω_X вокруг горизонтальной оси (в координате X), сообщенными за время чистого гравитационного качения с ускорением по наклонному задающему желобу 3, составному из двух частей, соединенных телескопическим сочленением 3 — 3:

$$V_0, \omega_X \rightarrow f(g, \sin \alpha, l, r, F_{\text{тр}}), \quad (1)$$

где α — регулируемый угол наклона желоба 3; l — суммарная длина желоба 3; r — радиус шара; $F_{\text{тр}}$ — сила сухого трения качения. Величины угла α и l могут регулироваться благодаря параллелограммному механизму 11 смещения положения бункера, а также шарнирным соединением 3 — 1, 3 — 2 и телескопическому сочленению 3 — 3. При вкатывании в спиральную часть желоба возникает динамический контакт шара с внутренней поверхностью желоба 4 — 2 под действием возрастающей центробежной силы $F_{\text{ц}}$, вызываемой кривизной траектории движения шара:

$$F_{\text{ц}} = mV_{\text{т}}^2 / r, \quad (2)$$

где $V_{\text{т}}$ — тангенциальная скорость центра шара в его

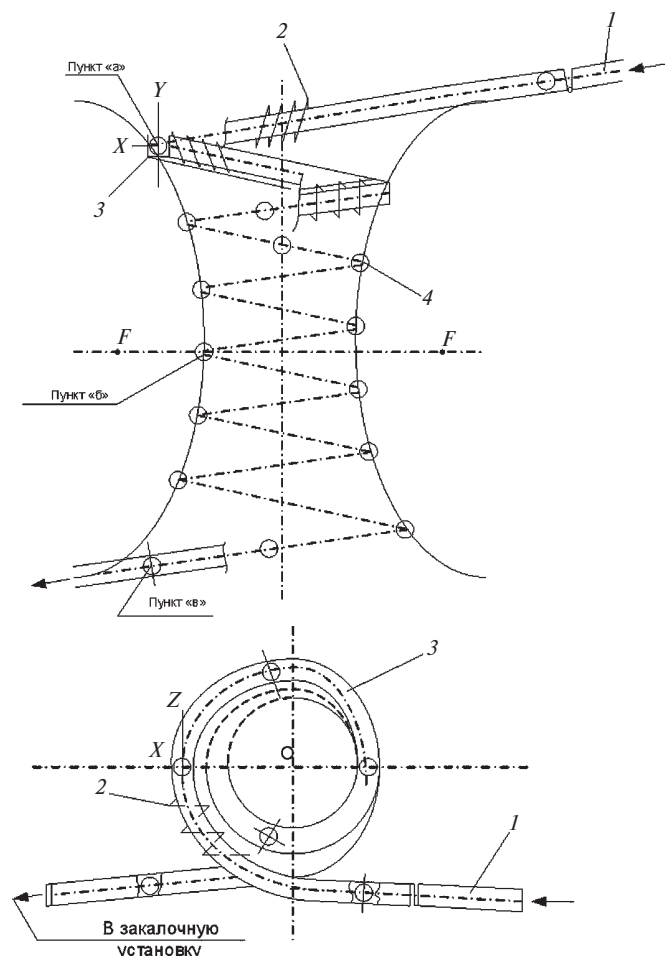


Рис. 2. Установка непрерывного действия для индукционного нагрева изделий шарообразной формы с гиперболической образующей

почти аппроксимированном планетарном движении относительно оси симметрии спирального желоба 4; r — радиус кривизны траектории движения центра шара; m — масса шара.

Далее следует сложное совокупное разнонаправленное взаимодействие четырех сил, приводящее в конечном счете к повороту направления оси собственного вращения шара на 90° (перпендикулярно поверхности беговой дорожки 4 — 1):

момент сил трения качения по беговой дорожке M_{χ}^{TP} , побуждающий вращение шара вокруг собственной горизонтальной оси в координате X ;

центробежно нарастающий момент сил трения обкатывания наружной вертикальной стенки желоба 4 — 2 M_{γ}^{TP} , побуждающий закручивание шара вокруг оси Y перпендикулярно поверхности спиральной беговой дорожки;

гироскопический момент M_{Γ} , противодействующий изменению направления движения центра масс шара в криволинейной части желоба и оси собственного вращения шара;

силы трения F_{TP} проскальзывания с верчением по вертикальной стенке и беговой дорожке желоба 4.

Кроме того на рис. 1 показаны: 6 — токоподводящие шины; 8 — распорные обручи; 9 — винты нажим-

ные; 10 — нагреваемое изделие; 11 — механизм смещения положения бункера; 12 — опорная конструкция.

Необходимость оснащения установки ТВЧ-магнитопроводами 7 может возникнуть в случае ее периодического использования для нагрева шаров разного диаметра, когда при размере изделия меньше оптимального возникает увеличенный эффективный зазор между его поверхностью и витками индуктирующего провода [4, с. 12] со стороны внутренней вертикальной стенки направляющего желоба с целью увеличения энергетического КПД магнитного потока путем его максимальной концентрации.

Порядок работы установки с индуктором согласно рис. 2 аналогичен рис. 1 в загрузочной части и далее до фокальной зоны с поворотом направления оси вращения на 90° , а ниже фокальной зоны с уменьшением влияния центробежных сил (снижение кривизны витков спирали желоба) происходит обратный процесс — опрокидывание направления оси вращения шаров до горизонтального в прямом участке желоба на выходе из индуктора.

Преимущества гиперболических индукторов, согласно рис. 2, вытекающие из переменной кривизны витков их спиральных направляющих профилей, очевидны: изменение направления осей собственного вращения скатывающихся шаров в трех координатах X , Y и Z , в отличие от двумерного в цилиндрических по рис. 1, плюс двукратное опрокидывание направления осей вращения — от горизонтального вначале до поворота на 90° в фокальной зоне и обратно, ниже фокальной плоскости до выхода из индуктора. Иллюстрации раскрытых характерных узлов А и Б на рис. 2 приводятся в разделе 4 (применительно к прямоугольному поперечному сечению направляющего профиля).

4. Сравнительный анализ вариантов очертаний поперечных сечений направляющих профилей пространственно-спиральных индукторов

Для этого исследования была избрана графоаналитическая методика наложения механико-математического сопровождения качения шара на плоскую развертку направляющего профиля, разложенную на характерные участки. Вначале без учета влияния на движение шара электромагнитного поля (как бы при обесточенном индукторе). Итоговая же оценка всех трех вариантов очертаний поперечного сечения направляющего профиля уже с учетом влияния электромагнитного поля на динамику и кинематику движения шара в индукторе представлена в разделе 5.

На рис. 3 изображена развертка корытообразного (в целях упрощения графопостроения) желоба гиперболической конфигурации согласно рис. 2, разложенная по длине на характерные участки в витках выше фокальной плоскости (ниже фокальной плоскости приблизительно зеркально обратная последовательность характерных участков). В основе своей эта развертка и приведенный анализ справедливы и для рассматриваемых ниже сечений: кольцевого и прямоугольного.

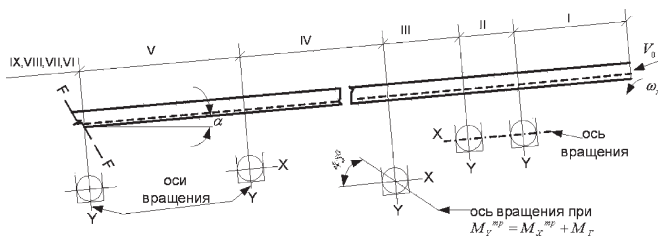


Рис. 3. Временная развертка и анализ кинематики и динамики шаров по участкам I – IX

Рассмотрим обозначения на рис. 3. V_0 , ω_x — начальные линейная и угловая скорости шаров на входе в индуктор; M_x^{tp} — момент сил сухого трения качения по беговой дорожке; M_y^{tp} — момент сил сухого трения обкатывания вертикальной стенки направляющего желоба; M_r — гироскопический момент. I — начальный прямой участок желоба индуктора. Направление оси собственного вращения шаров сохраняется на этом участке изначальным, как в задающем желобе 3 рис. 1, горизонтальным в координате X. Из четырех моментов сил здесь присутствует только M_x^{tp} :

$$M_x^{tp} = P_{\text{д}} f_{\text{д}} r = mg \cos \beta \cdot f_{\text{д}} r, \quad (3)$$

где $mg \cos \beta$ — нормальное давление шара на поверхность беговой дорожки; m — масса шара; β — угол подъема спирали желоба; $f_{\text{д}}$ — коэффициент сухого трения качения по беговой дорожке; r — радиус шара.

II — начальная дуга спирали желоба. Сохраняется горизонтальное направление оси вращения шаров параллельно образующим поверхности беговой дорожки благодаря гироскопическому противодействию (M_r) изменению, побуждаемому быстро возрастающим M_y^{tp} ($M_x^{tp} + M_r > M_y^{tp}$). Этот момент в рассматриваемой криволинейной траектории движения шара равен $M_r = J \omega_{\text{ш}} \omega_0$ [5, с. 330], где J — момент инерции шара относительно своей оси; $\omega_{\text{ш}}$ — угловая скорость собственного вращения шара; ω_0 — угловая скорость вращения центра массы шара вокруг вертикальной оси симметрии спирали желоба.

Побуждающий к повороту направления оси собственного вращения шара момент сил трения

$$M_y^{tp} = P_{\text{ц}} f_{\text{с.т}} r, \quad (4)$$

где $P_{\text{ц}}$ — нормальное давление шара на внутреннюю поверхность вертикальной стенки желоба, равное центробежной силе $F_{\text{ц}}$; $f_{\text{с.т}}$ — коэффициент сухого трения обкатывания внутренней поверхности вертикальной стенки желоба; r — радиус шара.

Участок III, в отличие от $M_x^{tp} = \text{const}$ ввиду неизменности гравитационного нормального давления P_0 быстро возрастающий центробежно M_y^{tp} , преодолевая M_x^{tp} и M_r , поворачивает направление оси собственного вращения шара до 45° ($M_y^{tp} = M_x^{tp} + M_r$).

На участке IV продолжается поворот направления осей собственного вращения шаров до 90° (в координату Y), сопровождающийся значительным возрастанием проскальзывания шаров с верчением по обеим опорным поверхностям — беговой дорожки и наружной вертикальной стенки желоба ([6, с. 42, 47 – 53].

Участок V — устойчивое движение шара в витках выше фокальной плоскости с обкатыванием вертикальной стенки желоба с направлением оси собственного вращения в координате Y при скольжении с верчением по беговой дорожке. F — F — линия пересечения желоба с фокальной плоскостью, ниже которой следует обратная последовательность характерных участков с возвращением направления оси собственного вращения шара в горизонтальное; VI — продолжение V; VII — гироскопическое удержание направления оси вращения в координате Y аналогично II; VIII — поворот направления оси собственного вращения от 90° обратно в горизонтальное в связи с уменьшающейся кривизной витков спирали и соответственно M_y^{tp} ; IX — горизонтальное направление оси вращения шаров в координате X в прямом участке желоба на выходе из индуктора. По ходу проведенного анализа авторы руководствовались тем, что ключевым фактором в достижении искомого результата исследований (формулирование условия осесимметричного нагрева шара) являются последовательность и длительность продвижения шара по указанным характерным участкам.

На рис. 4 изображен наложенный на развертку по рис. 3 график текущего времени качения шаров справа налево по характерным участкам I – V в витках выше фокальной плоскости. Ниже фокальной плоскости зеркально обратная последовательность времен с присутствием $t_y^{\text{н}}$, $t_{\text{г.у}}$, $t_{\text{п}}^{\text{н}}$ и $t_x^{\text{н}}$, где $t_x^{\text{н}}$ — продолжительность движения шара по прямому участку I выше фокальной плоскости с горизонтальным направлением оси вращения в координате X; $t_{\text{г.у}}$ — продолжительность движения шара по начальному криволинейному участку II с сохранением горизонтального направления оси собственного вращения под воздействием гироскопического момента; $t_{\text{п}}^{\text{н}}$ — продолжительность движения шара по переходным участкам III и IV с поворотом направления оси собственного вращения на 90° ; $t_y^{\text{н}}$ — продолжительность движения шара по участку V с повернутым на 90° направлением оси собственного вращения в координате Y выше фокальной плоскости; F — F — линия пересечения графика текущего времени с фокальной плоскостью; $t_y^{\text{н}}$ — продолжение $t_y^{\text{н}}$ ниже фокальной плоскости (VI); $t_{\text{г.у}}$ — гироскопическое продление $t_y^{\text{н}}$ (VII); $t_{\text{п}}^{\text{н}}$ — переходное время с поворотом направления оси вращения от 90° до горизонтального (VIII); $t_x^{\text{н}}$ — горизонтальное направление оси вращения в прямом участке IX ниже фокальной плоскости.

Формирование симметричности нагрева шара иллюстрируется рис. 5 в характерных поперечных сечениях направляющего желоба (с отклонениями от последовательности в интересах наглядности восприятия). Конфигурация площадей сечения “бочки” прогрева, суммированного по участкам I, II, IX ($t_x^{\text{н}}$, $t_{\text{г.у}}$, $t_x^{\text{н}}$), представлена на рис. 5, а в виде серповидных сегментов с криволинейными хордами, симметричных относительно оси вращения X. На рис. 5, б изображено сечение прогрева на участках V, VI, VII ($t_y^{\text{н}}$, $t_y^{\text{н}}$, $t_{\text{г.у}}$) с направлением оси вращения в координате Y (услов-

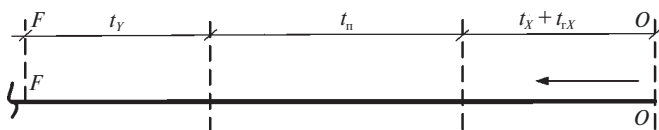


Рис. 4. Области прогрева шара в индукторе

но минуя пока суммирование с предыдущим прогревом на рис. 5, а и переходных участках III и IV с t_n^B). Произошло двукратное смещение положения “полюсов” и “экваториального пояса” шара на 90° , что является ключевым фактором достижения в конечном счете симметричного нагрева.

На рис. 5, в геометрически суммированы сегменты а и б без учета прогрева на промежуточных переходных участках. Здесь непрогретая сердцевина выглядит в сечении как нечто среднее между кругом и квадратом с ломаными стыками сторон с угловыми промежутками между ними через 45° (“недосимметричность”). Нивелируется контур этой сердцевины прогревами при непрерывно меняющемся направлении оси вращения шара на переходных участках III, IV, VIII (t_n^B и t_n^H) выше и ниже фокальной плоскости, влияние которых обозначено на рис. 5, г заштрихованной областью сечения (нивелированы стыки с одновременным некоторым увеличением глубины прогрева в целом). В итоге — искомая кольцевая в сечении (симметричная) форма прогретого слоя шара на выходе из индуктора для поверхностной закалки в охлаждающей среде.

Вытекающий из приведенных графоаналитических исследований (рис. 3 – 5) универсальный для трех исследуемых очертаний поперечного сечения направляющего профиля алгебраический алгоритм условия симметричности поверхностного нагрева представлен двумя равенствами:

$$\sum t_n = k \cdot (\sum t_X + \sum t_Y) \quad (5)$$

$$\text{при } \sum t_X = \sum t_Y, \quad (6)$$

где $\sum t_n = t_n^B + t_n^H$, $\sum t_X = t_X^B + t_{r.X} + t_X^H$, $\sum t_Y = t_Y^B + t_{r.Y} + t_Y^H$, $k > 1$ — коэффициент приоритетности $\sum t_n$ против фактора асимметричности $\sum t_X$ и $\sum t_Y$ (вернее, “недосимметричности”, см. рис. 5, в). Приведенные алгоритмы (5) и (6) справедливы и для исследуемых ниже кольцевого и прямоугольного сечений направляющего профиля.

Итоговое заключение по результатам анализа корытообразного очертания сечения направляющего профиля. Комплексный и изменчивый характер сил трения, действующих одновременно и разнонаправленно на всем пути качения шара по корытообразному спиральному направляющему желобу, делает весьма затруднительным теоретическое обоснование геометрических параметров индуктора, обеспечивающих равенства (5) и (6) для практического использования при проектировании описанного индукционного оборудования, что чревато возрастанием технических и финансовых рисков.

Причиной этих трудностей в теоретическом обеспечении проектирования и изготовления представленных индукционных установок является “одноколей-

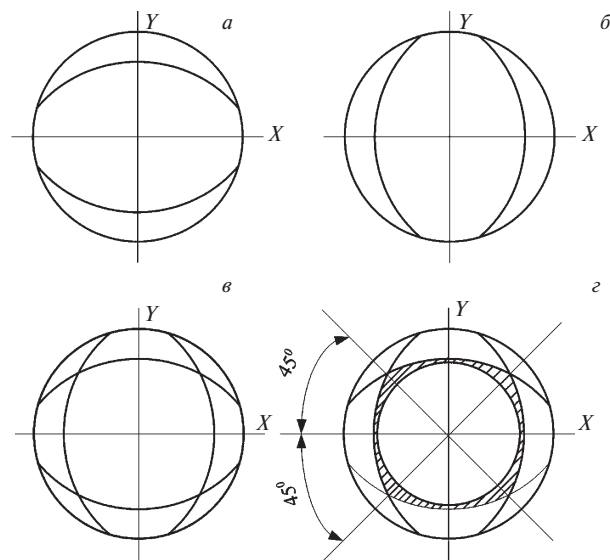


Рис. 5. Индуктор гиперболической конфигурации с обозначением характерных узлов А и Б выше фокальной плоскости

ность” направляющего желоба корытообразного сечения, предопределяющая одновременное и непрерывное по всей его длине динамическое взаимодействие поверхностей скатывающихся шаров с двумя взаимно перпендикулярными опорными поверхностями — беговой дорожки и вертикальной наружной стенки корыта (разнонаправленные на 90° моменты сил трения качения по беговой дорожке M_X^{TP} и обкатывания вертикальной стенки M_Y^{TP} , а также силы трения F_{TP} скольжения с верчением). Эта проблема побудила авторов к поиску технического решения, обеспечивающего устранение фактора скольжения с верчением путем своевременного разведения действия на шары указанных моментов сил трения M_X^{TP} и M_Y^{TP} во времени и по разным беговым дорожкам внутри индуктора с двухколейным направляющим профилем, имеющим замкнутую конфигурацию сечения.

Рассмотрение варианта направляющего профиля кольцевого сечения (решение о выдаче патента на изобретение от 01.06.11, заявка № 2010121970/02(031183)). Выработанное техническое решение в предпочтительном варианте — со спиралью направляющего профиля, вписанной в поверхность однополостного гиперболоида. Эта идея основывается на известном из дифференциальной геометрии представлении об окружности как геометрическом интеграле множества локальных элементов [7, с. 234 – 240] в виде дуг равной кривизны с единым центром кривизны — от бесконечно малых до предельных размеров в виде двух полуокружностей. Соответственно внутренняя поверхность трубы рассматривается как составленная из любого количества линейно или криволинейно, при изогнутой трубе, желобков дугообразного сечения. Применительно к рассматриваемой проблеме такими функционально задействованными желобчатыми колеями являются две:

в оси Y нижней части сечения в отсутствие M_Y^{TP} в прямых участках индуктора и частично в начальном криволинейном участке (гироскопический момент);

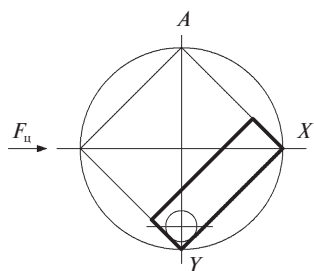


Рис. 6. Узел *A* на *n*-ном витке с расположением шара в исходной, нижней колее прямоугольного сечения

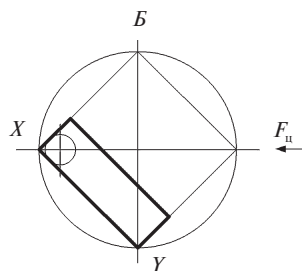


Рис. 7. Узел *B*, шар, выкатившийся под воздействием возросшей центробежной силы в верхнюю клинообразную колею с поворотом направления вращения на 90°

далее под действием возрастающей центробежной силы шар выкатывается на 90° по криволинейной траектории в другую, боковую желобчатую колею в оси *X* сечения и самоустанавливается в ней, продолжая движение по закону гипоциклоиды, с осью собственного вращения в оси *Y* — вплоть до *i*-того витка ниже фокальной плоскости, в котором он с уменьшением кривизны витков спирали направляющего профиля начнет скатываться обратно в первоначальную колею (нижнюю).

Важно заметить, что самоустановиться в колее по оси *X* еще не значит динамически стабилизироваться в траектории движения шара по этой колее. Здесь возникает ограничение по минимальному соотношению диаметров шара *d* и внутреннего диаметра *D* кольцевого сечения направляющего профиля. Экспертный анализ показывает, что это соотношение должно быть

$$d/D \geq 0,5. \quad (7)$$

Это ограничение, безусловно, негативно применительно к термообработке мелющих шаров, так как предопределяет проектирование индукционных ТВЧ-установок индивидуально на каждый типоразмер шара (в лучшем случае на два: *dy* 80/100; 100/120, возможно, и 60/80). Безусловным достоинством кольцевого сечения является простота изготовления направляющего профиля — известные, отработанные способы вальцевания труб.

Рассмотрение варианта прямоугольного сечения двухколейного направляющего профиля. На рис. 6 изображен в раскрытом виде выше фокальной плоскости обозначенный на рис. 2 узел *A* на *n*-ном витке с расположением шара в исходной, нижней колее прямоугольного сечения, а на рис. 7 — узел *B* на *i*-том витке с видом на шар, выкатившийся под воздействием возросшей центробежной силы в верхнюю клинообразную колею с поворотом направления оси собственного вращения на 90° . Ниже фокальной плоскости произойдет обратный процесс — скатывание шара в исходную колею в связи с ослаблением воздействия центробежных сил вследствие уменьшающейся кривизны витков направляющего профиля с возвратом к исходному, горизонтальному направлению оси собственного вращения вплоть до выхода из индуктора. В тонких линиях на рис. 6 и 7 показано построение равнонаклоненного под углом 45° относительно оси симметрии

индуктора прямоугольного сечения вычленением из вписанного в окружность квадрата. F_u — векторы действия центробежных сил.

5. О выводах из проведенных физико-математических исследований

При качении токопроводящих нагреваемых изделий (наличие свободных электронов) в переменном с высокой частотой электромагнитном поле индуктора на их сферических поверхностях возникают электрофизические процессы, вследствие которых у шаров появляются вращательные вибрации относительно их центров масс, существенно снижающие силы трения между динамически взаимодействующими поверхностями (шар — колея). Вытекающие из этого явления последствия применительно к трем рассмотренным выше различным конфигурациям поперечных сечений направляющих профилей:

для корытообразного сечения возникает еще один фактор неопределенности — величина снижения известных табличных коэффициентов трения, что еще более усложняет теоретические расчеты кинематики и динамики движения шаров;

применительно к кольцевому сечению эти электромагнитные вибрации шаров еще более усугубляют проблему динамической устойчивости их траектории движения по боковой колее в оси *X* и сводят такое сечение к нереконструируемому;

клиновидные очертания колеи как в нижней части прямоугольного сечения согласно рис. 6, так и сбоку (рис. 7) гарантируют динамическую устойчивость траектории движения шаров в обеих колеех. Такое очертание колеи в значительной степени обеспечит компенсацию снижения коэффициента трения благодаря тому, что шар при качении динамически взаимодействует с колеей одновременно по двум опорным поверхностям, а также наличию распорного фактора, усиливающего нормальное давление *P* на эти поверхности. Все это в совокупности обосновывает вывод о несомненной предпочтительности прямоугольной конфигурации поперечного сечения направляющего профиля.

Библиографический список

1. Слухоцкий А. Е., Рыскин С. Е. Индукторы для индукционного нагрева. — М.: Энергия, Ленинградское отделение, 1974. — 263 с.
2. Пат. № 2316603 РФ. Установка непрерывного действия для индукционного нагрева изделий шарообразной формы / Башилов Н. М., Титов С. С.; опубл. 10.02.2008, Бюл. № 4.
3. Пат. № 2370550 РФ. Индуктор непрерывного действия для нагрева изделий шарообразной формы «Гиперболоид — Липецк» / Башилов Н. М., Титов С. С.; опубл. 20.10.2009, Бюл. № 29.
4. Спришевский А. И. Подшипники качения. — М.: Машиностроение, 1969. — 632 с.
5. Явленский А. К., Явленский К. Н. Теория динамики и диагностики систем трения качения. — Л.: изд-во ЛГУ, 1978. — 184 с.
6. Старостин В. Ф. Движение шарика в радиально-упорном подшипнике // Труды института ВНИПП. № 1 (45). 1966.
7. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике, изд. 10-е. — М.: Наука, 1964. — 608 с.