

Степанов Владимир Михайлович, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой электроэнергетики Тульского государственного университета.

Пушница Константин Александрович, кандидат

технических наук, доцент кафедры электрооборудования Липецкого государственного технического университета.

e-mail: kaf-eo@stu.lipetsk.ru, energy@tsu.tula.ru.

Адрес: г. Липецк, ул. Московская, 30,  
г. Тула, пр. Ленина, 92.

УДК 537.612.4

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ОБЪЁМЕ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ШАРА ПРИ НАГРЕВЕ В ИНДУКТОРЕ

Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева

О.В. Фёдоров, С.С. Титов

В последние годы вышел ряд публикаций, затрагивающих вопросы симметричного индукционного нагрева под термообработку металлоизделий шарообразной формы на заданную глубину и температуру токами повышенной частоты. В связи с особой актуальностью разрабатываемой технологии для современного промышленного комплекса РФ (горно-обогатительное производство, строительная отрасль, машиностроение) возникает потребность в исследовании распределения энергии электромагнитного поля в объёме металлического шара при нагреве в установке индукционного нагрева (УИН).

Last few years there have been a number of publications about the question of symmetric induction heating for heat treatment of metal spherical shape to a predetermined depth with use of currents of increased frequency. Due to the special relevance of the developed technology for modern industrial complex of the Russian Federation (mining and processing production, the construction industry, mechanical engineering) there is a need for analysis of the energy distribution of the electromagnetic field in volume of the metal sphere in induction heating equipment (IHE).

Металлоизделия шарообразной формы (металлические шары) являются электропроводящими, поэтому при их нахождении в индукторе токов повышенной частоты свободные электроны материала шара образуют замкнутые токи Фуко [1], взаимодействующие с переменным электромагнитным полем индуктора. Эти токи распределены вблизи поверхности шара (поверхностный эффект) [2], что приводит к распределению энергии электромагнитного поля индуктора в объёме тела и, как следствие, к нагреву.

Актуальной видится задача о нахождении закона о распределении температуры  $T$  ( $K^0$ ) в любой точке объёма шара, вызванной вследствие передачи энергии электромагнитного поля в зависимости от:

- времени нагрева  $t$  (с);
- координаты точки в объёме шара (в силу придания осевой симметрии нагрева

шара целесообразно ввести сферические координаты и говорить о глубине слоя, характеризуя его параметром  $r$  (м) – длина радиус-вектора, проведённого из центра шара);

– параметров электромагнитного поля, создаваемого в установке индукционного

нагрева (УИН):  $H$  ( $\frac{A}{M}$ ) – напряжённость магнитного поля;  $E$  ( $\frac{B}{M}$ ) – напряжённость электрического поля;  $f$  (Гц) – частота электромагнитного поля;

– физических свойств материала шара:

$\mu$  ( $\frac{H}{M}$ ) – магнитная проницаемость;  $\rho$  (Ом·м)

– удельное электрическое сопротивление;  $\lambda$

( $\frac{Bt}{M \cdot ^0C}$ ) – коэффициент теплопроводности;



$c_v (\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}})$  – удельная теплоёмкость;  $\xi (\frac{\text{кг}}{\text{м}^3})$

– плотность материала шара.

Представляется целесообразным нахождение зависимости  $T=w(t,r,a,W_1)$ , где

$a = \frac{\lambda}{c_v \cdot \xi}$  – коэффициент температуропроводности среды;  $W_1$  – совокупный параметр, характеризующий величину переданной энергии электромагнитного поля УИН в шар, определяется согласно выражениям (1) или (2), которые были выведены и проанализированы в диссертационном исследовании С.С. Титова «Разработка и исследование электротехнического комплекса для симметричного индукционного нагрева металлоизделий шарообразной формы». В случае достаточно малых частот, если  $u^4 R^4 \ll 1$  ( $R$  – радиус шара;  $u = \frac{1}{\delta}$  – величина, обратная «глубине проникновения» токов в металл):

$$W_1 = \frac{1}{30} \omega u^2 H_0^2 R^5. \quad (1)$$

В случае же очень высоких частот, если  $e^{uR} \gg e^{-uR}$ :

$$W_1 = \frac{3\omega}{8u^2} H_0^2 R(uR-1). \quad (2)$$

Запишем дифференциальное уравнение теплопроводности с внутренними источниками тепла [3]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{w}{c_v \xi}, \quad (3)$$

где:  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа,  $w$  – удельная мощность выделяемого тепла в единицу времени внутренними источниками ( $\frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$ ). В связи с явно выраженным skin – эффектом при поверхностном нагреве в УИН, можно считать, что всё тепло выделяется на поверхности шара. Тогда считаем:

$$w = W_1 \cdot 4\pi r^2 \cdot \sin^2(\theta) \cdot \delta(r-R) \cdot t, \quad (4)$$

где  $R$  – радиус шара;  $\delta(r-R)$  функция Дирака от аргумента  $r-R$ ;  $\theta$  – угол между радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведённым из центра сферы и вектором напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$  в УИН. В сферических координатах [4]:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta}). \quad (5)$$

Теперь можно записать уравнение (3), подставив в него выражения (4) и (5), получим:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c_v \xi} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) \frac{\partial T}{\partial \theta}) \right) + \frac{W_1 \cdot 4\pi r^2 \sin^2(\theta) \delta(r-R) t}{c_v \xi}. \quad (6)$$

Принимаем следующее начальное условие:  $T|_{t=0} = T_0$  – температура шара до начала воздействия электромагнитного поля. Граничное условие:  $\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0$  – отсутствие теплообмена с окружающей средой. Решение уравнения (6) будем искать в виде

$$T = T_0 + W, \quad (7)$$

где  $W$  – величина, учитывающая увеличение температуры шара за счёт подведения энергии электромагнитного поля. Подставляя (7) в (6), получаем дифференциальное уравнение в частных производных (8) с граничным (9) и начальным (10) условиями соответственно:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\lambda}{c_v \rho} \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial W}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \times \right. \\ \left. \times \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin(\theta) \frac{\partial W}{\partial \theta}) \right) + \frac{W_1 \cdot 4\pi r^2 \sin^2(\theta) \delta(r-R) t}{c_v \rho} \quad (8)$$

$$\frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0; \quad (9)$$

$$W|_{t=0} = 0. \quad (10)$$



Решение начально-краевой задачи дифференциального уравнения в частных производных (8) будем искать в виде [5]:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot P_n(\cos(\theta)) \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{nm}} \cdot r) \cdot T_n(t), \quad (11)$$

где  $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ ,  $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$  – функции Неймана и Бесселя [6].

Подставляя выражение (11) в уравнение (8), получим:

$$T'_n(t) = -\lambda_{nm} a T_n(t) + \frac{W_1 \cdot 4\pi \cdot t}{c_v \rho} \cdot B_n \cdot C_{nm}, \quad (12)$$

$$\text{где: } B_n = \frac{\int_{-\pi}^0 \sin^3(\theta) \cdot P_n(\cos(\theta)) d\theta}{2^{2n+1}};$$

$$C_{nm} = \frac{\int_0^R r^2 \delta(r-R) \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{nm}} \cdot r) dr}{\left\| J_{n+\frac{1}{2}} \right\|^2},$$

$\left\| J_{n+\frac{1}{2}} \right\|^2 = \int_0^R J_{n+\frac{1}{2}}^2(\sqrt{\lambda_{nm}} r) dr$ , штрих обозначает дифференцирование по времени (t).

Из уравнения (9) имеем:

$$\left( J'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{nm}} \cdot r) - \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_{nm}} \cdot r) \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{nm}} \cdot r) \right) \Big|_{r=R} = 0,$$

или:

$$J'_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{nm}} R) - \frac{1}{2}(\sqrt{\lambda_{nm}} R) \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{nm}} R) = 0, \quad (13)$$

где штрих обозначает дифференцирование по радиусу шара (r).

Решение дифференциального уравнения (12) выполнено следующим методом [8]:

$T_n = T_{00} + T_{\text{частн.}}$ , где  $T_{00}$  – общее решение соответствующего однородного уравнения;  $T_{\text{частн.}}$

– произвольное частное решение уравнения (12).

$$T_{00} = D_{nm} \cdot e^{-\lambda_{nm} a t}, \quad T_{\text{частн.}} = Et + F,$$

$$E_{nm} + \lambda a (E_{nm} + F_{nm}) = v_{nm} t, \quad v_{nm} = \frac{W_1 \cdot 4\pi}{c_v \xi} B_n C_{nm},$$

$$E_{nm} = \frac{v_{nm}}{\lambda a}, \quad F_{nm} = -\frac{v_{nm}}{(\lambda a)^2};$$

$$T_{nm} = D_{nm} e^{-\lambda_{nm} a t} + \frac{v_{nm}}{\lambda a} t - \frac{v_{nm}}{(\lambda a)^2}, \quad \text{получим:}$$

$$D_{nm} - \frac{v_{nm}}{(\lambda a)^2} = 0 \rightarrow D_{nm} = \frac{v_{nm}}{(\lambda a)^2}, \quad \text{из уравнения}$$

$$(10): D_{nm} - \frac{v_{nm}}{(\lambda a)^2} = 0 \rightarrow D_{nm} = \frac{v_{nm}}{(\lambda a)^2}, \quad \text{тогда ре-}$$

шение примет вид:

$$T = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot P_n(\cos(\theta)) \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{nm}} \cdot r) \times \\ \times \left\{ \frac{v_{nm}}{(\lambda a)^2} [e^{-\lambda_{nm} a t} - 1] + \frac{v_{nm}}{\lambda a} t \right\}, \quad \text{или окончательно:}$$

$$T = T_0 + \frac{W_1 \cdot 4\pi}{c_v \xi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot P_n(\cos(\theta)) \times \\ \times J_{n+\frac{1}{2}}(\sqrt{\lambda_{nm}} \cdot r) \cdot \left\{ \frac{B_n C_{nm}}{(\lambda a)^2} [e^{-\lambda_{nm} a t} - 1] + \frac{B_n C_{nm}}{\lambda a} t \right\} \\ , (14)$$

где  $\sqrt{\lambda_{nm}}$  – корни уравнения (13).

Анализ и расчёт нагрева металлоизделия шарообразной формы энергией электромагнитного поля по выражению (14) согласно изложенному алгоритму произведён с использованием программного продукта Wolfram Mathematica 8. Картина нагрева статического шара представлена на рис. Из данного рисунка можно отметить, что нагрев несимметричен и ярко выражены зоны неравномерного нагрева – более светлые тона соответствуют повышению температуры. Таким образом, «полюсные» части шара прогреты в большей степени по сравнению с «экваториальной» зоной.



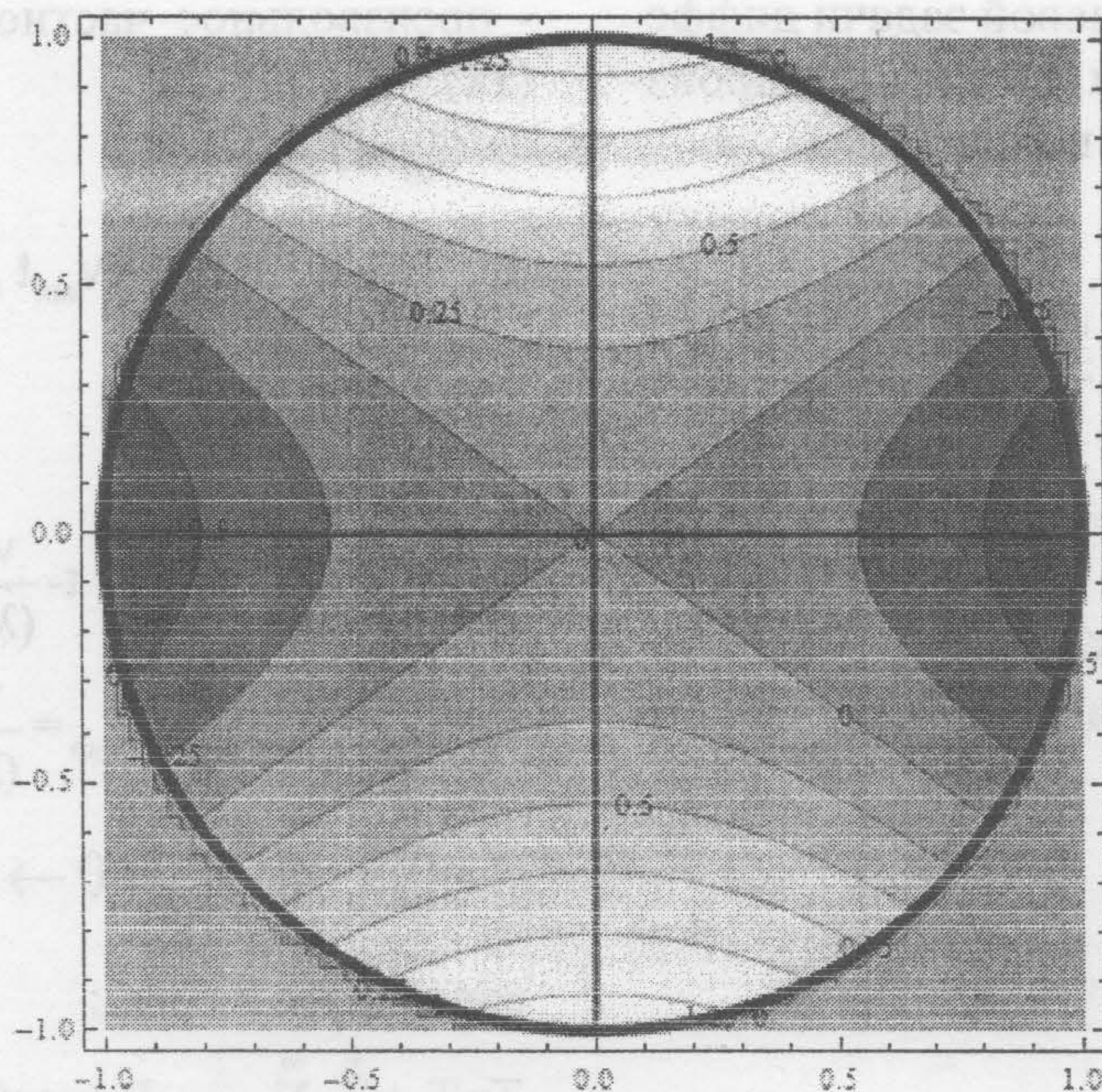


Рис. Картина нагрева статичного металлического шара энергией электромагнитного поля с использованием программного продукта Wolfram Mathematica 8

Проведённое исследование является фундаментальным с точки зрения использования его результатов при разработке электротехнического оборудования для симметричного индукционного нагрева металлоизделий шарообразной формы.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мещеряков, В.Н. Влияние температуры подката чистовой группы стана горячей прокатки на работу электропривода петледержателя [Текст] / В.Н. Мещеряков, Е.Е. Диденко // Электротехнические комплексы и системы: международный сборник научных трудов. — Магнитогорск: Изд-во МГТУ им. Г.И. Носова, 2012. — 484 с.
2. Немков, В.С. Теория и расчёт устройств индукционного нагрева [Текст] / В.С. Немков, В.Б. Демидович. — Ленинград: Энергоатомиздат, 1988. — 280 с.
3. Охотин, А.С. Теплопроводность твёрдых тел [Текст] / А.С. Охотин. — Москва: Энергоатомиздат, 1984. — 320 с.
4. Аксёнов, Е.П. Специальные функции в небесной механике [Текст] / Е.П. Аксёнов. — Москва: Наука, 1986. — 320 с.

5. Горюнов, А.Ф. Уравнения математической физики в примерах и задачах [Текст] / А.Ф. Горюнов. — Москва: МИФИ, 2008. — 616 с.

6. Корнев, Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций [Текст] / Б.Г. Корнев. — Москва: Наука, 1971. — 288 с.

7. Бугров, Я.С. Высшая математика. Том 3 [Текст] / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. — Москва: Дрофа, 2004. — 512 с.

Ключевые слова: нагрев, электромагнитное поле, металлический шар, токи Фуко, поверхностный эффект.

Keywords: heat, electromagnetic field, metal ball, eddy currents, skin-effect.

#### Сведения об авторах

Федоров Олег Васильевич, доктор технических наук, профессор кафедры управления инновационной деятельностью Нижегородского государственного технического университета имени Р.Е. Алексеева.

Титов Сергей Сергеевич, кандидат технических наук, диспетчер Управления по энергетическим рынкам ОАО «Новолипецкий металлургический комбинат».

e-mail: fov52@nm.ru, algebra934@yandex.ru.

Адрес: г. Нижний Новгород, Казанское ш., 12к6.