Capítulo 8

Series numéricas

El concepto de límite juega un papel clave en todo el Cálculo Infinitesimal. En este tema se realizará en primer lugar un breve repaso de la convergencia de sucesiones numéricas.

Una importante aplicación de las sucesiones infinitas consiste en la representación de las sumas infinitas.Se analizarán las definiciones y propiedades de las series en general, pasando luego a estudiar tipos de series particulares: series de términos positivos y series alternadas. El concepto de convergencia absoluta permite abordar, en ciertos casos, el estudio de series de términos arbitrarios. Sumaremos posteriormente algunos tipos de series, de forma exacta, y daremos criterios para poder sumar series de forma aproximada (acotando el resto).

8.1. Sucesiones

Definición 8.1 (Sucesión.) *Una sucesión de números reales es una aplicación* $a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$. *Si para cada* $n \in \mathbb{N}$, $a(n) = a_n$, *la sucesión a será representada por* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *o simplemente* $\{a_n\}$.

Una sucesión puede quedar determinada

(a) dando los términos iniciales suficientes para establecer un patrón

$$1, 4, 7, 10, \ldots$$

(b) mediante una fórmula explícita para el término n-ésimo

$$a_n = 3n - 2,\ n \leq 1$$

(c) mediante una fórmula de recursión

$$a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 3,\ n \leq 2$$

Definición 8.2 (Límite de una sucesión) *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales.*

- *Se dice que un número real* L *es el límite de* $\{a_n\}$ *y se representa* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *ó* $a_n \to L$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon)\ /\ \forall n > n_0 : |\ a_n - L\ | < \varepsilon$$

- *Se dice que* $\{a_n\}$ *tiene límite* $+\infty$ *y se representa* $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *ó* $a_n \to +\infty$ *si*

$$\forall M,\ \exists n_0(M)\ /\ \forall n > n_0 :\ a_n > M$$

- *Se dice que* $\{a_n\}$ *tiene límite* $-\infty$ *y se representa* $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ *ó* $a_n \to -\infty$ *si*

$$\forall M,\ \exists n_0(M)\ /\ \forall n > n_0 :\ a_n < M$$

Definición 8.3 *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales.*

- $\{a_n\}$ *es* `convergente` *si existe* $L \in \mathbb{R}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.
- $\{a_n\}$ *es* `divergente` *si*
$$\forall M,\ \exists n_0(M)\ /\ \forall n > n_0 : \mid a_n \mid > M$$
- $\{a_n\}$ *es* `oscilante` *si no es ni convergente ni divergente.*

`Nota 1:` Si $\{a_n\}$ es una sucesión convergente, fuera del intervalo $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ hay a lo sumo n_0 términos de la sucesión.
`Nota 2:` De la definición de límite se deduce que

$$a_n \to L \iff (a_n - L) \to 0 \iff \mid a_n - L \mid \to 0$$

Teorema 8.1 *Si una sucesión* $\{a_n\}$ *tiene límite, finito o no, dicho límite es único.*

Teorema 8.2 (Propiedades de los límites) *Sean* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *sucesiones convergentes y* k *una constante. Entonces*

1. $\lim_{n\to\infty} k = k$;
2. $\lim_{n\to\infty} ka_n = k \lim_{n\to\infty} a_n$;
3. $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$;
4. $\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$;
5. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, *siempre que* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$

Teorema 8.3 *Si* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ *y existe un entero* K *fijo tal que* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *para* $n \geq K$, *entonces*

$$\lim_{n\to\infty} c_n = L$$

Teorema 8.4 *Si* $\lim_{n\to\infty} \mid a_n \mid = 0$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Definición 8.4 (Sucesión acotada) *Una sucesión* $\{a_n\}$ *es* `acotada` *si existe un número real positivo* M *tal que* $\mid a_n \mid \leq M$ *para todo* n. *Este número* M *se llama una* `cota superior` *de la sucesión.*

8.1.1. Sucesiones monótonas.

Definición 8.5 (Sucesión monótona) *Una sucesión* $\{a_n\}$ *es* `monótona` *si se verifica una de las condiciones siguientes*

$$\begin{array}{lll} a_n \leq a-n+1 & \forall n \in \mathbb{N} & \texttt{(monótona creciente)} \\ a_n \geq a-n+1 & \forall n \in \mathbb{N} & \texttt{(monótona decreciente)} \end{array}$$

Teorema 8.5 *Si una sucesión $\{a_n\}$ es monótona y acotada, entonces es convergente.*
Toda sucesión monótona y no acotada es divergente. (En caso de ser creciente tiene límite $+\infty$, y si es decreciente, tiene límite $-\infty$).

Teorema 8.6 *Toda sucesión convergente es acotada.*

`Nota:` El recíproco de este resultado no es cierto. (Ejemplo: $(-1)^n$).

Definición 8.6 (El número e) *La sucesión* $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *es monótona y acotada, por tanto es convergente. A su límite se le designa con la letra* `e`.

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

En general, se verifica que

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}(1+a_n)^{1/a_n}$$

para cualquier sucesión $\{a_n\}\to 0$ con $a_n \neq 0$ para todo n.

8.1.2. Cálculo práctico de límites de sucesiones

Indeterminaciones

Con las sucesiones convergentes se puede operar aritméticamente, obteniéndose en general, la conservación de los límites en las operaciones racionales. También es posible operar con sucesiones con límite infinito, con las interpretaciones adecuadas, salvo que se produzcan `indeterminaciones`.
Las principales indeterminaciones son las siguientes:

(a) De tipo suma: Si $a_n\to\infty$ y $b_n\to\infty$, $\{a_n-b_n\}$ es una indeterminación de tipo $\infty-\infty$.

(b) De tipo producto o cociente:

(b$_1$) Producto: Si $a_n\to 0$ y $b_n\to\pm\infty$, $\{a_n\cdot b_n\}$ es una indeterminación de tipo $0\cdot\infty$.

(b$_2$) Cociente: Si $a_n\to 0$ y $b_n\to 0$ o si $a_n\to\infty$ y $b_n\to\infty$, $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ da lugar a indeterminaciones de tipo $\dfrac{0}{0}$ y $\dfrac{\infty}{\infty}$ respectivamente.

Una indeterminación de tipo suma puede reducirse a una de tipo producto o cociente ya que

$$a_n-b_n=\frac{\left(\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{a_n}\right)}{\left(\dfrac{1}{a_n\cdot b_n}\right)}=\frac{c_n}{d_n}, \qquad \text{con} \qquad c_n\to 0 \quad \text{y} \quad d_n\to 0$$

(c) De tipo potencial-exponencial.

(c$_1$) Si $a_n\to 1$ y $b_n\to\infty$, $\left\{a_n^{b_n}\right\}$ da lugar a una indeterminación del tipo 1^∞.
`Nota:` Si $a_n=1,\forall n$ y $b_n\to\infty$, entonces $\left\{a_n^{b_n}\right\}\to 1$.

(c$_2$) Si $a_n\to 0$ y $b_n\to 0$, $\left\{a_n^{b_n}\right\}$ da lugar a una indeterminación del tipo 0^0.

(c$_3$) Si $a_n\to\infty$ y $b_n\to 0$, $\left\{a_n^{b_n}\right\}$ da lugar a una indeterminación del tipo ∞^0.

`Nota:` Tomando logaritmos las indeterminaciones de tipo potencial-exponencial se reducen a tipo producto:

$$\left\{a_n^{b_n}\right\}\to L \;\Rightarrow\; b_n\ln a_n\to\ln L$$

Infinitésimos

Definición 8.7 *Se dice que dos sucesiones* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *son infinitésimos equivalentes si* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$*, y lo representaremos por* $a_n \sim b_n$*.*

Proposición 8.1 *Sean* $\{a_n\}$*,* $\{b_n\}$ *y* $\{c_n\}$ *tres sucesiones de números reales. Si* $a_n \sim b_n$*, entonces*

(i) *Si existe* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$*, también existe* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$*, y además*

$$\lim_{n\to\infty} a_n c_n = \lim_{n\to\infty} b_n c_n$$

(ii) *Si existe* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{a_n}$*, también existe* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{b_n}$*, y además*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n}$$

`Nota:` El resultado anterior permite sustituir una sucesión por otra equivalente en el cálculo de límites de un producto o un cociente. No se puede sustituir una sucesión por otra equivalente en sumas, exponenciales, logaritmos, etc.

Tabla de infinitésimos equivalentes

1. Si $a_n \to 0$:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{sen} a_n \sim a_n \sim \operatorname{arcsen} a_n & \operatorname{tg} a_n \sim a_n \sim \operatorname{arctg} a_n & 1 - \cos a_n \sim \dfrac{a_n^2}{2} \\ (1+a_n)^\lambda - 1 \sim \lambda a_n & \mathrm{e}^{a_n} - 1 \sim a_n & \ln(1+a_n) \sim a_n \end{array}$$

2. Si $a_n \to 1$

$$\ln a_n \sim a_n - 1$$

En particular $\sqrt[n]{a} - 1 \sim \dfrac{1}{n} \ln a, \ \forall a > 0.$

3. Fórmula de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Definición 8.8 (órdenes de magnitud) *Dadas dos sucesiones divergentes* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$*, se dice que* $\{b_n\}$ *es un infinitésimo de orden superior al de* $\{a_n\}$*, y se representa por* $a_n \ll b_n$*, si* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$*.*

`Nota:` Esta definición implica que $|a_n| < |b_n|$ para n suficientemente grande.

Se verifica la siguiente jerarquía de infinitésimos

$$\ln n \ll n^p \ll a^n \ll n! \ll n^n$$

Otros criterios

Teorema 8.7 (Criterio de Stolz) *Sean* $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones. Si existe* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$*, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}$$

siempre que

(i) $\{b_n\}$ *es una sucesión monótona divergente, o bien*

(ii) $a_n \to 0,\ \{b_n\} \to 0$ *y* $\{b_n\}$ *es monótona.*

Teorema 8.8 *Si* $\{a_n\} \to L$*, entonces*

(a) $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \to L.$

(b) *Si* $a_n > 0$*, para todo* n*:* $b_n = \sqrt[n]{a_1\ a_2 \dots a_n} \to L.$

Teorema 8.9 *Para toda sucesión* $\{a_n\}$ *de números positivos se verifica*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

8.2. Series de números reales. Convergencia

El hecho de que en algunos casos la suma de infinitos términos tenga como resultado una cantidad finita es algo bien conocido. Sin embargo no podemos olvidar que durante 2000 años se ha aceptado la afirmación de Zenón (495-435 a. C.) de que un número ilimitado de cantidades positivas no puede tener suma finita.

Definición 8.9 (Serie de números reales) *Dada una sucesión de números reales* $\{a_n\}$*, se considera una nueva sucesión* $\{S_n\}$ *de la siguiente forma:*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Al par ordenado de sucesiones así construido $(\{a_n\}, \{S_n\})$ *se le llama* `serie asociada a la sucesión` $\{a_n\}$.

`Notas:`

- Los números $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ son los `términos de la serie`, y a ésta la denotaremos habitualmente por

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + \ a_n \ + \cdots \ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum a_n$$

- El término genérico a_n se llama `término general de la serie`.

- La sucesión $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ se llama `suma parcial de orden n`.

Definición 8.10 (Carácter de una serie) *Se dice que la serie* $\sum a_n$ *es* `convergente` *si la sucesión de sus sumas parciales* $\{S_n\}$ *es convergente. Es decir, si* $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$ *la serie será convergente. Al número* S *se le llama* `suma` *de la serie y se denota por* $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Definición 8.11 *Si se cumple que* $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$ o $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ *diremos que la serie es* `divergente`

Definición 8.12 *Si la serie no es convergente ni divergente diremos que es* `oscilante`.

El estudio de una serie consiste en resolver dos problemas fundamentales:

- Determinar su carácter, es decir, averiguar si es convergente, divergente u oscilante. Problema que suele abordarse por comparación con otras series patrones.
- En caso de convergencia, hallar su suma. Cuestión bastante más difícil que la primera y que sólo se abordará para determinados tipos de series, que se llaman sumables.

La serie geométrica

Una `serie geométrica` es una serie de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = 1 + r + r^2 + \cdots$.

La sucesión de sus sumas parciales será $S_n = \sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = 1 + r + r^2 + \cdots r^{n-1} = \dfrac{1-r^n}{1-r}$ siempre que $r \neq 1$.

Teniendo en cuenta que la sucesión $\{r^n\},\ r \neq 1$ es

$$\begin{array}{ll} \text{convergente a } 0 & \text{si } |r| < 1 \\ \text{divergente} & \text{si } |r| > 1 \\ \text{oscilante} & \text{si } r = -1 \end{array}$$

se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$ es

$$\begin{array}{ll} \text{convergente con suma } S = \dfrac{1}{1-r} & \text{si } |r| < 1 \\ \text{divergente} & \text{si } |r| \geq 1 \\ \text{oscilante} & \text{si } r = -1 \end{array}$$

Proposición 8.2 *Podemos suprimir o añadir un número finito de términos a una serie sin que varíe por ello su carácter. Si la serie fuera sumable, la suma de la nueva serie se diferencia con la de la primera en la suma de los términos añadidos o suprimidos.*

Proposición 8.3 *Si se modifican los valores de un número finito de términos, la serie conserva su carácter y en el caso de ser convergente la variación en la suma de la serie es la suma de las variaciones de los términos alterados.*

Definición 8.13 (Resto de una serie) *Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se denomina resto de orden k denotándose R_k, a la suma*

$$R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$$

R_k es pues la suma de todos los términos de la serie a partir del $k+1$.

`Nota:` Para cualquier serie convergente de suma S y para todo k se tiene que $R_k + S_k = S$.

Teorema 8.10 (Condición necesaria de convergencia) *Para que la serie $\sum a_n$ sea convergente es condición necesaria que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.*

La condición necesaria de convergencia es útil para probar que una serie no es convergente. Por ejemplo la serie $\sum \dfrac{n}{2n+1}$ no es convergente pues $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

La serie armónica

Es importante resaltar que la condición anterior no es suficiente para garantizar la convergencia como pone de manifiesto la `serie armónica`, cuyo término general es $a_n = \dfrac{1}{n}$.
Consideramos la serie $\sum \dfrac{1}{n} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \cdots$.
Su término general tiende a cero y sin embargo es divergente pues

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \ldots > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdots \square$$

Aplicando el criterio general de convergencia de Cauchy a la sucesión $\{S_n\}$, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 8.11 (Condiciones necesarias y suficientes de convergencia) *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente si y sólo si se verifica alguna de las condiciones siguientes*

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall p, q \geq\ n_0 \quad \Rightarrow |S_q - S_p| \leq \varepsilon \qquad (\ o \quad |x_{p+1} + x_{p+2} + \cdots + x_q| \leq \varepsilon)$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad / \quad \forall p, q \geq\ n_0 \quad \Rightarrow |R_q - R_p| \leq \varepsilon$.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

8.3. Operaciones con series

Proposición 8.4 (Suma de series) *Si* $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *son dos series convergentes de sumas* S_1 *y* S_2 *respectivamente, entonces la serie* $\sum (a_n + b_n)$ *es convergente y su suma es* $S_1 + S_2$.

Proposición 8.5 (Multiplicación por un número) *Si* $\sum a_n$ *es convergente y* $\lambda \in \mathbb{R}$ *entonces la serie* $\sum (\lambda a_n)$ *es convergente y su suma es* λS.

Proposición 8.6 (Asociatividad) *Si en una serie convergente (divergente) se agrupan términos consecutivos, la serie que resulta es también convergente (divergente) y tiene la misma suma.*

`Nota:` Las series oscilantes no poseen la propiedad asociativa.
Por ejemplo, sea la serie divergente $\sum a_n = (-1)^n\, n$
La sucesión de sumas parciales es oscilante

$$\{S_n\} = \{\ -1,\ 1,\ -2,\ 2,\ -3,\ 3,\ \ldots\}$$

Si en la serie $\sum a_n$ agrupamos los términos de dos en dos obtenemos una nueva sucesión $b_n = -1$ y la serie que se obtiene a partir de ésta es divergente. $\square$

8.4. Serie de términos positivos.

Definición 8.14 *Se dice que una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es de términos positivos (STP) si* $a_n \geq 0,\ \forall n$.

`Notas:`
- Las series de términos negativos ($a_n \leq 0, \ \forall n$) se tratan de forma análoga a las de términos positivos (basta cambiar de signo para pasar de una a otra).
- Se pueden considerar y tratar como series de términos positivos aquellas para las que $a_n \geq 0$ para todo $n \geq N_0$.
La sucesión de sumas parciales de las series de términos positivos es monótona creciente y por tanto se tiene la siguiente

Proposición 8.7 *Sea* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos.*

(i) *Si la sucesión* $\{S_n\}$ *está acotada superiormente, la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente. (*$S = \sup\{S_n\}$*).*

(ii) *Si la sucesión* $\{S_n\}$ *no está acotada superiormente, la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

(iii) *Las series de términos positivos son convergentes o divergentes pero nunca oscilantes.*

8.4.1. Criterios de convergencia.

Damos a continuación algunos métodos para estudiar el carácter de una serie.

Criterio de comparación

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos para las que $\exists \ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0, \ a_n \leq b_n$. Entonces:

- Si $\sum b_n$ es convergente entonces $\sum a_n$ es convergente.
- Si $\sum a_n$ diverge, entonces $\sum a_n$ es divergente.

La serie armónica generalizada

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ se llama `serie armónica generalizada`. Dicha serie es convergente si $\alpha > 1$ y divergente si $\alpha \leq 1$.

- Si $\alpha \leq 1$:
$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots \geq \ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$
diverge ya que supera a la serie $\displaystyle\sum \frac{1}{n}$ que es divergente.

- Si $\alpha > 1$:
$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} + \cdots \quad &< \quad 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots \\ &= \quad 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{4}{4^\alpha} + \frac{8}{8^\alpha} \cdots + \frac{2^p}{(2^p)^\alpha} + \cdots \\ &= \quad 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{4^{\alpha-1}} + \frac{1}{8^{\alpha-1}} \cdots + \frac{1}{(2^p)^{\alpha-1}} + \cdots = \\ &= \quad 1 + \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^2} + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^3} \cdots + \frac{1}{(2^{\alpha-1})^p} + \cdots\end{aligned}$$

ésta última es una serie geométrica de razón $r = \dfrac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, luego es convergente y por tanto lo es la serie dada. $\square$

Criterio de comparación por paso al límite

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos tales que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$. Entonces:

(i) Si $L \neq 0$ y $L \neq \infty$ las dos series tienen el mismo carácter, es decir convergen o divergen simultáneamente.

(ii) Si $L = 0 \left\{ \begin{array}{l} \sum b_n < \infty \quad \Rightarrow \sum a_n < \infty. \\ \sum a_n = +\infty \Rightarrow \sum b_n = +\infty \end{array} \right.$.

(iii) Si $L = +\infty \left\{ \begin{array}{l} \sum b_n = +\infty \Rightarrow \sum a_n = +\infty. \\ \sum a_n < \infty \quad \Rightarrow \sum b_n < \infty \end{array} \right.$.

Criterio del cociente o de DÁlembert.

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$

(i) Si $\lambda < 1$, la serie es convergente.

(ii) Si $\lambda > 1$, la serie es divergente.

(iii) Si $\lambda = 1$ es un caso dudoso. En este caso solo se puede asegurar que la serie diverge si existe N_0 tal que para $n > N_0$ se cumple que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$.

Criterio de la raíz.

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$.

(i) Si $\lambda < 1$, la serie es convergente.

(ii) Si $\lambda > 1$, la serie es divergente.

(iii) Si $\lambda = 1$ es un caso dudoso. En este caso solo se puede asegurar que la serie diverge si existe N_0 tal que para $n > N_0$ se cumple que $\sqrt[n]{x_n} \geq 1$.

Criterio de Pringsheim.

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y α un número real tal que $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha \cdot a_n = \lambda$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 1$, la serie es convergente.

(ii) Si $\lambda \neq 0$ y $\alpha \leq 1$, la serie diverge. (λ puede ser ∞)

Criterio de Raabe.

Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lambda$.

(i) Si $\lambda > 1$, la serie es convergente.

(ii) Si $\lambda < 1$, la serie es divergente.

(iii) Si $\lambda = 1$ es un caso dudoso.

8.5. Series de términos arbitrarios

Trataremos en esta sección el estudio de series de términos arbitrarios.

El carácter de muchas series que tienen todos sus términos, o una parte de ellos, negativos, se decide manejando los criterios conocidos de series de términos positivos. De este modo

- La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n,\ a_n \leq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, (STN) se estudia considerando $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-a_n)$, que es STP.
- Si la serie tiene un número finito de términos positivos y los restantes negativos, se suman los términos positivos y la serie se presenta como una suma finita y una STN. El carácter de esta última decide el de la serie dada.
- Análogamente, si la serie tiene un número finito de términos negativos y los restantes positivos, se suman los términos negativos y la serie se presenta como una suma finita y una STP. El carácter de esta última decide el de la serie dada.
- En el caso de que la serie tenga infinitos términos positivos e infinitos negativos, se puede expresar como suma de dos series
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$$
definidas de la forma
$$\begin{array}{ll} a_n^+ = a_n, \text{ si } a_n \geq 0, & a_n^+ = 0, \text{ si } a_n < 0 \\ a_n^- = a_n, \text{ si } a_n \leq 0, & a_n^- = 0, \text{ si } a_n > 0 \end{array}$$
De este modo se tiene $a_n = a_n^+ + a_n^-$ y si ambas series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ son convergentes, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ lo es. Además si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = S_1$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = S_2$, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S_1 + S_2$.
Cuando una de las series converge y la otra diverge, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge. Si ambas divergen no se garantiza el carácter de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, pero en muchos casos el problema se resuelve mediante la convergencia absoluta.

Definición 8.15 (Convergencia absoluta) *Decimos que una serie* $\sum a_n$, *es* `absolutamente convergente` *si es convergente la serie de los valores absolutos de sus términos, es decir si* $\sum |a_n|$ *converge.*

Teorema 8.12 *Si* $\sum a_n$ *es una serie absolutamente convergente entonces es convergente y además*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

`Notas:`

- El recíproco no es cierto. Por ejemplo, la serie $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ es convergente ya que es alternada, $|\frac{(-1)^n}{n}|$ es decreciente y cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Sin embargo la serie de sus valores absolutos es divergente pues se trata de la serie armónica. $\square$
- El teorema anterior nos da una estrategia a seguir para analizar la convergencia de una serie $\sum a_n$, estudiando previamente la serie $\sum |a_n|$, que es de términos positivos y, por tanto, tenemos más criterios para decidir su carácter.

Definición 8.16 (Serie incondicionalmente convergente) *La serie* $\sum a_n$ *es* `incondicionalmente convergente` *si es convergente y su suma no se altera al cambiar el orden de sus términos. Y se llama* `condicionalmente convergente` *si es convergente pero su suma se altera al cambiar el orden de sus términos.*

Teorema 8.13 (Teorema de Dirichlet) *Una serie* $\sum a_n$ *es absolutamente convergente si y sólo si es incondicionalmente convergente.*

Teorema 8.14 (Criterio de Abel) *La serie* $\sum a_n b_n$ *es convergente si la serie* $\sum a_n$ *es convergente y la sucesión* $\{b_n\}$ *es monótona y acotada.*

Teorema 8.15 (Criterio de Dirichlet) *Sea* $\sum a_n$ *una serie cuyas sumas parciales están acotadas y* $\{b_n\}$ *una sucesión decreciente con* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. *Entonces la serie* $\sum a_n b_n$ *es convergente.*

8.5.1. Series alternadas.

Definición 8.17 *Una serie se llama* `alternada` *si sus términos son alternativamente positivos y negativos* ($a_n a_{n+1} \leq 0$ *para todo* n*).*

`Notas:`

- Las series alternadas aparecen de dos maneras

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

donde $a_n \geq 0$.

- Una serie también puede considerarse alternada si $a_n a_{n+1} \leq 0$ para todo $n \geq N_0$.

Teorema 8.16 (Criterio de Leibnitz) *Si* $a_n \geq 0$*, las series alternadas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$$

convergen, si se verifican las siguientes condiciones

$$\text{(i)} \lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \text{(ii)}\ 0 < a_{n+1} \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Teorema 8.17 (Resto de las series alternadas) *Sea* $\sum a_n$ *una serie alternada convergente que verifica* $0 < a_{n+1} \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Entonces el resto* R_N *implicado al aproximar la suma* S *por la suma parcial* S_N *es menor en valor absoluto que el primer término despreciado. Es decir*

$$|S - S_N| = |R_N| \leq a_{N+1}$$

8.6. Series sumables.

Series geométricas.

La serie geométrica de razón r es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1}$, $r \in \mathbb{R}$. Si $|r| < 1$, la serie es convergente y su suma es $S = \dfrac{1}{1-r}$.

Series Aritmético-geométricas.

Son de la forma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, r^n$ donde $\{b_n\}$ es una progresión aritmética.
Una serie aritmético-geométrica es convergente si y sólo si el valor absoluto de la razón es menor que 1.
En efecto, aplicando DÁlembert se deduce que la serie es convergente para $|r| < 1$.

Para calcular la suma procedemos de la siguiente forma

$$\begin{array}{rcllllll}
S_n & = & rb_1 & +r^2b_2 & +r^3b_3 & +\cdots & +r^nb_n & \\
rS_n & = & & r^2b_1 & +r^3b_2 & +\cdots & +r^nb_{n-1} & +r^{n+1}b_n \\
\hline
S_n - rS_n & = & rb_1 & +(b_2-b_1)r^2 & +(b_3-b_2)r^3 & +\cdots & +(b_n-b_{n-1})r^n & -b_nr^{n+1}
\end{array}$$

Si la serie aritmética es de primer orden, $b_{i+1} - b_i = d$ y entonces nos queda

$$(1-r)S_n = b_1r + d\,(r^2 + r^3 + r^4 + \cdots + r^n) - b_nr^{n+1}.$$

Es decir,

$$S_n = \frac{1}{1-r}\left[rb_1 + d\,\frac{r^2 - r^{n+1}}{1-r} - b_nr^{n+1}\right].$$

Suponemos que $|r| < 1$.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-r}\left[rb_1 + d\frac{r^2}{1-r}\right] \Rightarrow S = \frac{d\,r^2 + rb_1(1-r)}{(1-r)^2}.$$

Si la serie aritmética fuese de orden superior, habría que reiterar el proceso anterior. ■

Series telescópicas.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es `telescópica` si a_n puede escribirse de la forma $a_n = b_n - b_{n+1}$, con lo que la suma parcial será $S_n = b_1 - bn + 1$.
La serie telescópica converge si la sucesión $\{b_n\}$ converge, y se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_n$$

Series hipergeométricas.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es `hipergeométrica` si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$ con $\alpha >=, \ \beta \neq 0$ y $\alpha + \beta - \gamma \neq 0$.
La serie hipergeométrica converge si $\alpha + \beta - \gamma < 0$ y diverge si $\alpha + \beta - \gamma > 0$.
Si converge su suma es

$$S = \frac{a_1 \gamma}{\gamma - \alpha - \beta}.$$

Suma aproximada

Para la mayoría de las series no es posible (o al menos, no es nada fácil) obtener su suma, aunque se sepa que es convergente. En tal caso, siempre se puede obtener una aproximación de dicha suma.
Teniendo en cuenta la igualdad $S = S_k + R_k, \ \forall k$, si la serie es convergente podemos aproximar la suma S evaluando S_k, siendo R_k el error de la aproximación.
Acotando el resto, se tiene una estimación de la suma de la serie.
Para acotar el resto, las técnicas más usuales son

- $|R_k| = \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} | a_n |$.
- Acotar el resto por una serie geométrica.
- Si la serie $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ es alternada y decreciente, se tiene que $|R_k| \leq a_{n+1}$.

Índice general