Criterios generales de corrección

I - Responda a las preguntas que se le formulan. Las respuestas a preguntas no formuladas carecen de valor.

II - Las respuestas deben razonarse. La aplicación mecánica de fórmulas carece de valor (aunque el resultado sea correcto).

III - El alumno debe conocer y manejar con soltura el cálculo básico por lo que las expresiones algebraicas deben simplificarse en lo posible y las operaciones han de completarse dando las respuestas correctas.

IV - Especial atención merecerá en todo el proceso de evaluación el uso que el alumno hace del lenguaje. Esto incluye tanto a símbolos y expresiones matemáticas como al lenguaje ordinario.

V - Los resultados obtenidos deben interpretarse correctamente. En particular, si un error no detectado nos lleva a un resultado absurdo, este debe reconocerse como tal (incluso si no podemos localizar el error).

NO ESTÁ PERMITIDO EL USO DE CALCULADORAS

1º *a)* Enunciar el teorema de *Rouché-Frobenius*. [1p]

b) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + 3z + t = 4 \\ 4x - 2y + 4z + 2t = 3 \\ -2x + y + z - t = 6 \end{cases}$, se pide:

(1) Usar transformaciones elementales para probar que es compatible. [0,5p]

(2) Usar el teorema de *Rouché-Frobenius* para hallar la solución general. [1p]

2º *a)* Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \longmapsto W$ una aplicación lineal.

(1) Probar que si H es un subespacio de V, entonces $T(H)$ es un subespacio de W. [0,5p]

(2) Probar que T es inyectiva si y sólo si $\ker(T) = \{\vec{\mathbf{0}}_V\}$. [0,5p]

b) $G : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ está definida por $G(v) =$ vector v girado 30° en el sentido de las agujas del reloj.

(1) Hallar las coordenadas del vector $G(-2, 6)$ en la base canónica. [1p]

(2) Describir la aplicación $S = G \circ G \circ G$ y hallar su matriz en la base canónica. [0,5p]

3º Dado el sistema de ecuaciones en diferencias $\begin{cases} x_n = -x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = -3x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{cases}$ para $n \geqslant 1$ y $\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ y_0 = 1 \end{array}$,

a) Expresar el problema de forma matricial y diagonalizar la matriz que se obtiene. [1,5p]

b) Usar la diagonalización obtenida para hallar fórmulas cerradas para x_n e y_n. [1p]

4º *a)* Probar la desigualdad de Cauchy-Swartz. [0,5p]

b) Sea $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ un conjunto de $\mathbb{R}^n$ cuyos vectores son no nulos y ortogonales dos a dos. Probar que A es linealmente independiente. [0,5p]

c) Dado el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por $H \equiv x - y + z + 3t = 0$, se pide:

(1) Hallar una base ortogonal de H. [1p]

(2) Hallar la matriz de la proyección P_H sobre H. [0,5p]

1º *a)* Enunciar el teorema de *Rouché-Frobenius*. [1p]

b) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x - y + 3z + t = 4 \\ 4x - 2y + 4z + 2t = 3 \\ -2x + y + z - t = 6 \end{cases}$, se pide:

(1) Usar transformaciones elementales para probar que es compatible. [0,5p]

(2) Usar el teorema de *Rouché-Frobenius* para hallar la solución general. [1p]

SOLUCIÓN:

Apartado *a)* (1) 1p

`Se refiere a contenidos teóricos. Consultar apuntes y/ó bibliografía.`

Apartado *b)* (1) 0,5p

Hallaremos la forma escalonada (no necesariamente reducida) de la matriz ampliada del sistema.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 4 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -1 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \mapsto F_3 + F_1]{F_2 \mapsto F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \mapsto F3 + 2F_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A la vista del resultado, es evidente que el rango de la matriz ampliada es 2, que es también el rango de la matriz de coeficientes. El sistema es pues compatible con un grado de libertad.

Apartado *b)* (2) 1p

Ahora que sabemos que el rango es 2, resulta fácil localizar un menor principal. El primero de ellos es el menor formado por las filas 1 y 2 y las columnas 2 y 3 (el primero de la esquina izquierda NO es un menor principal). En resumidas cuentas, el sistema es equivalente a:

$$\begin{aligned} -y + 3z &= 4 - 2x - t \\ -2y + 4z &= 3 - 4x - 2t \end{aligned} \implies \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 2x - t \\ 3 - 4x - 2t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 - 2x - t \\ 3 - 4x - 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 - 2x - t \\ 3 - 4x - 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} + 2x + t \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

O bien, si se prefiere,
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \dfrac{7}{2} + 2\lambda + \mu \\ z = \dfrac{5}{2} \\ t = \mu \end{cases}$$

2º *a)* Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \longmapsto W$ una aplicación lineal.

(1) Probar que si H es un subespacio de V, entonces $T(H)$ es un subespacio de W. [0,5p]

(2) Probar que T es inyectiva si y sólo si $\ker(T) = \{\vec{\mathbf{0}}_V\}$. [0,5p]

b) $G : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ está definida por $G(v)$ = vector v girado 30° en el sentido de las agujas del reloj.

(1) Hallar las coordenadas del vector $G(-2, 6)$ en la base canónica. [1p]

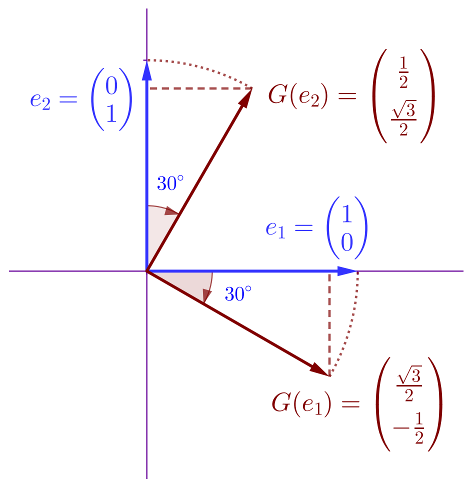
(2) Describir la aplicación $S = G \circ G \circ G$ y hallar su matriz en la base canónica. [0,5p]

SOLUCIÓN:

Apartado *a)* (1) y (2) 0,5p + 0,5p

`Ambos apartados se refieren a contenidos teóricos. Consultar apuntes y/ó bibliografía.`

Apartado *b)* (1) 1p



En primer lugar, hallaremos la matriz de G en la base canónica. Si $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ y $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, entonces, la proyección del vector $G(e_1)$ sobre el eje OX es $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y sobre el eje OY es $-\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$. Análogamente, la proyección $G(e_2)$ sobre el eje OX es $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ y sobre el eje OY es $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. En otras palabras,

$$G(e_1) = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix} \quad G(e_2) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad [G] = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

Se tiene ahora que:

$$G\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3-\sqrt{3}\\ 1+3\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

Apartado *b)* (2) 0,5p

Si aplicamos a un vector tres giros seguidos de 30°, obtenemos un giro de 90°. Así pues, $S(v)$ = vector v girado 90° en el sentido de las agujas del reloj. Resulta evidente ahora que:

$$S\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \qquad S\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad [S] = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

El lector puede considerar que $[S] = [G]^3$. Esto es correcto y, como se comprueba fácilmente,

$$[G]^3 = \begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = [S]$$

3º Dado el sistema de ecuaciones en diferencias $\begin{cases} x_n = -\ x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = -3x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{cases}$ para $n \geqslant 1$ y $\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ y_0 = \ \ 1 \end{array}$,

a) Expresar el problema de forma matricial y diagonalizar la matriz que se obtiene. [1,5p]

b) Usar la diagonalización obtenida para hallar fórmulas cerradas para x_n e y_n. [1p]

SOLUCIÓN:

Apartado *a)* 1,5p

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\implies \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la potencia n-ésima de la matriz hallada, empezaremos por intentar su diagonalización. Para el cálculo de los autovalores, hallaremos y resolveremos la ecuación característica.

$$0 = \left| \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \implies \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Dado que los dos autovalores son diferentes, la matriz es diagonalizable. Busquemos una base formada por autovectores. Los sistemas correspondientes se resuelven con facilidad.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Así pues, se tiene que

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Apartado *b)* 1p

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right]^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \cdot 2^n - 5 \\ 6 \cdot 2^n - 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4º *a)* Probar la desigualdad de Cauchy-Swartz. [0,5p]

b) Sea $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_p\}$ un conjunto de $\mathbb{R}^n$ cuyos vectores son no nulos y ortogonales dos a dos. Probar que A es linealmente independiente. [0,5p]

c) Dado el subespacio de $\mathbb{R}^4$ definido por $H \equiv\; x - y + z + 3t = 0$, se pide:

(1) Hallar una base ortogonal de H. [1p]

(2) Hallar la matriz de la proyección P_H sobre H. [0,5p]

SOLUCIÓN:

Apartados *a)* y *b)* 0,5p + 0,5p

`Se refieren a contenidos teóricos. Consultar apuntes y/ó bibliografía.`

Apartado *c)* (1) 1p

Hallaremos primero una base cualquiera de H. La solución del sistema es casi obvia:

$$\begin{cases} x = \lambda - \mu - 3\nu \\ y = \lambda \\ z = \mu \\ t = \nu \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Usamos el procedimiento de Gram-Schmidt para ortogonalizar la base hallada.

$$u_1 = (1, 1, 0, 0)$$

$$u_2 = (-1, 0, 1, 0) - \frac{(-1,0,1,0)\cdot(1,1,0,0)}{(1,1,0,0)\cdot(1,1,0,0)}(1, 1, 0, 0) = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$u_3 = (-3, 0, 0, 1) - \left[\frac{(-3,0,0,1)\cdot(1,1,0,0)}{(1,1,0,0)\cdot(1,1,0,0)}(1, 1, 0, 0) + \frac{(-3,0,0,1)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)}{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)}\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 0\right)\right] = (-1, 1, -1, 1)$$

Apartado *c)* (2) 0,5p

$$\mathsf{P}_H\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{(1,0,0,0)\cdot(1,1,0,0)}{(1,1,0,0)\cdot(1,1,0,0)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(1,0,0,0)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)}{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(1,0,0,0)\cdot(-1,1,-1,1)}{(-1,1,-1,1)\cdot(-1,1,-1,1)}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{12} \\ \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} \\ -\frac{3}{12} \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{P}_H\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{(0,1,0,0)\cdot(1,1,0,0)}{(1,1,0,0)\cdot(1,1,0,0)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(0,1,0,0)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)}{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(0,1,0,0)\cdot(-1,1,-1,1)}{(-1,1,-1,1)\cdot(-1,1,-1,1)}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} \\ \frac{11}{12} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{3}{12} \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{P}_H\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{(0,0,1,0)\cdot(1,1,0,0)}{(1,1,0,0)\cdot(1,1,0,0)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(0,0,1,0)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)}{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(0,0,1,0)\cdot(-1,1,-1,1)}{(-1,1,-1,1)\cdot(-1,1,-1,1)}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{11}{12} \\ -\frac{3}{12} \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{P}_H\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{(0,0,0,1)\cdot(1,1,0,0)}{(1,1,0,0)\cdot(1,1,0,0)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(0,0,0,1)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)}{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,0\right)}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(0,0,0,1)\cdot(-1,1,-1,1)}{(-1,1,-1,1)\cdot(-1,1,-1,1)}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{12} \\ \frac{3}{12} \\ -\frac{3}{12} \\ \frac{3}{12} \end{pmatrix}$$

$$[\mathsf{P}_H] = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 11 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 11 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 11 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$