Tema-6-Ejercicios.pdf

CarlosGarSil98

Modelos Avanzados de Computacion

4º Grado en Ingeniería Informática

Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Huelva

Universidad de Huelva

Modelos Avanzados de Computación

Ejercicios del Tema 6

Considere el modelo de computación de las funciones recursivas. Asuma que las siguientes funciones ya han demostrado ser recursivas primitivas: Suma(x,y), Producto(x,y), Potencia(x,y), Decremento(x), RestaAcotada(x,y), Signo(x), SignoNegado(x), Factorial(x), Min(x,y), Max(x,y), And(x,y), Or(x,y), Not(x), Mayor(x,y), Menor(x,y), MayorOIgual(x,y), MenorOIgual(x,y).

Ejercicio 6.1

Demuestre que la función *Eq*(x,y) es primitiva recursiva.

$$Eq(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x = y \\ 0 & si \quad x \neq y \end{cases}$$

Eq(x,y) = And(MayorOIgual(x,y), MenorOIgual(x,y))
= Composición(And, MayorOIgual, MenorOIgual)

Ejercicio 6.2

Demuestre que la función *Sqrt*(x), que devuelve la parte entera de la raiz cuadrada, es primitiva recursiva.

$Sqrt(0) = f() = Z_0$

$Sqrt(s(n)) = g(\underbrace{Sqrt(n)}_{U_1^2}, \overbrace{n}^{U_2^2})$

natural	Raiz
$\boxed{0}$	$\boxed{0}$ caso base
1	1
2	1
3	1
4	2 ← conocemos Sqrt(4)=2, Para Sqrt(5) → mantenemos valor = 2 / → Pasamos al siguiente = 3;(2+1)
$\boxed{5}$	$\boxed{2}$
6	2
7	2
8	2
9	3

$$Sqrt(s(n)) \begin{cases} Sqrt(n) \equiv U_1^2 \\ s(Sqrt(n)) \equiv C(s, U_1^2) \end{cases}$$

If $(Sqrt(n)+1) * (Sqrt(n)+1) == s(n)$ → $s(Sqrt(n))$ / → $Sqrt(n)$

$If(Eq(Prod(s(U_1^2), s(U_1^2)), s(U_2^2)), s(U_1^2), U_1^2)$

$R = (Z_0, C(If,$
$C(Eq, C(Prod, C(s, U_1^2), C(s, U_1^2)), C(s, U_2^2)),$
$C(s, U_1^2),$
$U_1^2)$

Ejercicio 6.3

Demuestre que la función *Mod3*(x) es primitiva recursiva.

$$Mod3(x) = Resto(x, 3) = x \% 3$$

natural	Resto (mod3)	
0	0	caso base
1	1	
2	2	
3	0	
4	1	
5	2	
6	0	
7	1	
8	2	
9	3	

$Mod3(0) = f() = Z_0$

$Mod3(S(n)) = g(Mod3(n), n)$

$$Mod3(S(n)) \begin{cases} S(Mod3(n)) \equiv S(U_1^2) \\ Z \to \text{if}(Eq(Mod3(n), 2) \\ \quad \equiv If(Eq(U_1^2, 2) \end{cases}$$

$2 \equiv S(S(Z))$

$g = If(Eq(U_1^2, S(S(Z)), Z, S(U_1^2))$

$R = (Z_0, C(If,$

$\quad C(Eq, U_1^2, C(S, C(S, Z_2))),$

$\quad Z_2,$

$\quad C(S, U_1^2))$

2, por la aridad de g()

Ejercicio 6.4

Demuestre que la función *Div*(x,y), que calcula la división entera, es primitiva recursiva.

$$Div(x,y) = x / y$$

Ejemplo

x	$Div(x,4)$	
0	0	Caso base
1	0	
2	0	
3	0	
4	1	
5	1	
6	1	
7	1	
8	2	
9	2	

Caso base: $Div(0,y) = f(y) = 0 = Z_1$

Caso general: $Div(S(x),y) = g(Div(x,y),x,y)$

$If(\ .\ ,\ S(U_1^3),\ U_1^3)$

Ejemplo: Queremos $Div(8,4)$, conocemos $Div(7,4)=1$

$(Div(7,4)+1)\cdot 4 \leq 8$ → $Div(8,4) = Div(7,4)+1$; → $Div(8,4) = Div(7,4)$

condición: $MenorOigual(Producto(S(U_1^3), U_3^3), U_2^3)$

$R = (Z_1,\ C(If,$
$\quad C(MenorOigual(C(Producto, C(S, U_1^3), U_3^3), U_2^3),$
$\quad C(S, U_1^3),$
$\quad U_1^3)$

Ejercicio 6.5

Demuestre que la función *Raiz*(*x*,*n*), que calcula la raíz n-esima de un número entero, es una función primitiva recursiva.

$$Raiz(x, n) = \lfloor \sqrt[n]{x} \rfloor = y \mid y^n \leq x < (y+1)^n$$

$Raiz(x, n) \longrightarrow$ $Raiz(0, n) = f(n) = \emptyset = Z_1$

$Raiz(S(x), n) = g(\underbrace{Raiz(x,n)}_{U_1^3}, x, \underbrace{n}_{U_3^3})$

Ejemplo

x	$\sqrt[3]{x}$
0	0
1	1
2	1
3	1
4	1
5	1
6	1
7	1
8	2
9	2

caso base

$If(\ldots, S, U_1^3, U_1^3)$

condición: $(U_1^3 + 1)^n == x$

$If(Eq(Potencia(U_1^3+1, U_3^3), U_2^3), S(U_1^3+1), U_1^3)$

$R = (Z_1, \; C(If,$
$\quad C(Eq, C(Potencia, C(S, U_1^3), U_3^3), U_2^3),$
$\quad C(S, U_1^3),$
$\quad U_1^3)$

Ejercicio 6.6

Demuestre que la función $Log2(x+1)$, que calcula el logaritmo en base 2 de un número entero, es una función primitiva recursiva.

NOTA: El logaritmo está definido para números mayores o iguales a 1. Al utilizar el argumento $(x+1)$ el caso base de la recursión es $x=0$.

$$Log2(x+1) = y \mid 2^y \leq x+1 < 2^{y+1}$$

Ejemplo

x	Log2(x+1)
0	0
1	1
2	1
3	2
4	2
5	2
6	2
7	3
8	3
9	3

caso base $\longrightarrow$ $log2(x+1) = f() = Z_0$

caso general: $g(\overbrace{Log2(s(x))}^{U_1^2}, \underbrace{s(x)}_{U_2^2})$

$If(\ldots, Log2(s(x))+1, Log2(s(x)))$

condición: $Mayor(Potencia(2, s(U_1^2)), U_2^2)$

$\hookrightarrow s(s(Z)) \longrightarrow$ Aridad $g()$; Z_2

$R = (Z_0, C(If,$
$\quad C(Mayor, C(Potencia, C(s, C(s, Z_2)),$
$\quad\quad C(s, U_1^2), U_2^2),$
$\quad C(s, U_1^2),$
$\quad U_1^2)$