Capítulo 1

Números complejos

Al resolver una ecuación tan simple como $x^2 + 1 = 0$ nos encontramos con que esta ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$ ya que no existe un número $x \in \mathbb{R} \ / \ x^2 = -1$.
Igual ocurre con otras muchas ecuaciones polinómicas con coeficientes reales que no se pueden resolver en $\mathbb{R}$.
He aquí una de las necesidades de ampliar el cuerpo de los números reales a otro donde estas ecuaciones tengan solución. Lo que haremos es construir un cuerpo que contenga a un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}$ y en el que la ecuación anterior tenga solución.

1.1. El cuerpo de los números complejos.

Definición 1.1 *En* $\mathbb{R}^2$ *definimos las siguientes operaciones:*

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \\ (x, y) \cdot (x', y') &= (x \cdot x' - y \cdot y', x \cdot y' + y \cdot x').\end{aligned}$$

Respecto a estas operaciones el conjunto $\mathbb{R}^2$ *tiene estructura de cuerpo. A este cuerpo lo llamamos* **cuerpo de los números complejos** *y lo denotamos por* $\mathbb{C} = (\mathbb{R}^2; +, \cdot)$.

Lo que diferencia $\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{C}$ es la estructura algebraica.
Consideremos el conjunto $\mathbb{C}^0 = \{(x, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$, con las operaciones definidas en $\mathbb{C}$. Se tiene que $\mathbb{C}^0$ es un subcuerpo de $\mathbb{C}$.
Además la aplicación

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto f(x) = (x, 0). \end{aligned}$$

es un isomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}^0$, y por tanto $\mathbb{C}$ se puede considerar como una ampliación de $\mathbb{R}$ ya que $\mathbb{R} \approx \mathbb{C}^0 \subset \mathbb{C}$.

Definición 1.2 *Definimos la* **unidad imaginaria** *como el número complejo* $(0,\ 1)$ *y la representaremos por* i.

Nota: Se cumple que $(0, 1) \cdot (0, 1) = -1$, o sea, $i^2 = -1$. Esto nos permite resolver la ecuación planteada al principio pues ya tenemos un número cuyo cuadrado es -1. A la vista de esta propiedad, veremos que es imposible definir una relación de orden en $\mathbb{C}$ compatible con los axiomas de cuerpo ordenado.

Definición 1.3 (Parte real. Parte imaginaria) *Sea* $z = (x, y)$ *un número complejo, a* x *le llamamos* `parte real` *y se denota* $x = \mathrm{Re}(z)$ *, a* y *le llamamos* `parte imaginaria` *y se denota* $y = \mathrm{Im}(z)$.

$\mathbb{C}$ **es un cuerpo no ordenado**, pues es imposible definir una relación de orden en $\mathbb{C}$. Si así fuera, puesto que el cuadrado de un número es positivo, dado $i \in \mathbb{C}, i^2 = -1 > 0$ es decir $0 > 1$ (esto, en principio, no supone contradicción pues aún no hemos definido una relación de orden concreta en $\mathbb{C}$).
Ahora bien, por otra parte: $1^2 = 1 > 0$ que se contradice con el resultado anterior.

1.1.1. Expresiones de los números complejos.

Definición 1.4 *Todo número complejo* $z = (x, y)$ *puede expresarse de la forma* $z = x + iy$ *llamada* **forma binómica**. *Veámoslo:*

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy = \mathrm{Re}\,(z) + i\,\mathrm{Im}\,(z).$$

Definición 1.5 *Llamamos* **conjugado** *de* $z = x+iy$ *y lo representamos por* $\overline{z}$ *al número complejo* $\overline{z} = x-iy$ *.*

Proposición 1.1 *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$,
2. $z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)i$,
3. $z \cdot \overline{z} = [\mathrm{Re}\,(z)]^2 + [\mathrm{Im}\,(z)]^2$,
4. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$,
5. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$,
6. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

De la misma forma que los números reales se pueden representar sobre una recta, es natural asociar el número complejo $z = x + yi$ con un punto del plano cuyas coordenadas rectangulares son x e y. El número z puede pensarse como el vector que va desde el origen hasta el punto (x, y). El punto $P = (x, y)$ que representa al número $z = x + iy$ se llama `afijo` de z. Cuando se utiliza a efectos de representar geométricamente los números $z = x + yi$, el plano xy se llama `plano complejo` o `plano` z. El eje x se llama `eje real`, y el eje y se llama `eje imaginario`.

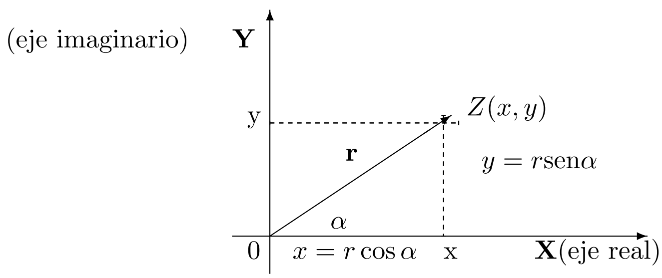
Definición 1.6 *Se llama* **módulo** *de* $z = x+iy$*, al número real positivo* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ *y se representa* $r = |z|$.

Proposición 1.2 *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $|z| \geq 0$,
2. $|z| = 0 \iff z = 0$,
3. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$,
4. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$,
5. $|z| = |-z|$,
6. $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|},\ z \neq 0$,
7. $||\, z \,| - |\, z' \,|| \leq |z - z'|$,
8. $|z|^2 = z\,\overline{z}$.

Definición 1.7 *Se llama* `argumento principal` *de un número complejo* $z = x + iy$ *y se denota* $\mathrm{Arg}(z)$ *al ángulo* $\alpha \in (-\pi, \pi]$ *que determina el semieje positivo* OX *con el vector* $\overrightarrow{OZ}$*, siendo* $Z(x, y)$ *su afijo. En general, se llama* `argumento` *de* z *a* $\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$.

Definición 1.8 *Consideramos el número* $z = x + iy$*. Tomando el módulo* r *del vector* $\overrightarrow{OZ}$ *y el ángulo* α *que forma* OX *con dicho vector, tenemos que* $x = r\cos\alpha$ *e* $y = r\mathrm{sen}\alpha$*, con lo que podemos adoptar esta otra forma de expresar un número complejo, llamada* `trigonométrica`*,* $z = r\cos\alpha + i\,r\mathrm{sen}\alpha$.
Si abreviamos esta expresión en la forma $z = r\,(\cos\alpha + i\mathrm{sen}\alpha) = r_\alpha$*, se dice que el número está escrito en* **forma polar**.



Representación polar de un número complejo

Para pasar un complejo de forma binómica a forma polar calculamos: $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\alpha = \text{arctg}\dfrac{y}{x}$, de los dos posibles valores de α comprendidos entre $-\pi$ y π tomaremos el que se encuentra en el cuadrante que corresponda, examinando los signos de x e y.

1.2. Operaciones con números complejos

1.2.1. Suma, producto y cociente.

Operaciones en forma binómica

Para operar con los números complejos utilizaremos una u otra forma según convenga. Para sumar y restar se hace imprescindible el utilizar la forma binómica, para el producto y el cociente se puede utilizar tanto la forma polar como la binómica. La suma y el producto en forma binómica ya lo definimos al principio del capítulo, veamos primeramente el inverso de un número complejo.

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Por tanto:

$$\frac{a+bi}{c+di} = (a+bi)\,\frac{1}{(c+di)} = \frac{(a+bi)\,(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,i.$$

Operaciones en forma polar

Para multiplicar dos números complejos en forma polar se multiplican los módulos y se suman los argumentos $r_\alpha \cdot r_\beta{}' = (r\,r')_{\alpha+\beta}$. Efectivamente:

$$\begin{aligned} r_\alpha \cdot r_\beta{}' &= (r\,\cos\alpha + i\ r\,\text{sen}\alpha)\cdot(r'\,\cos\beta + i\ r'\,\text{sen}\beta) \\ &= r\,r'(\cos(\alpha+\beta) + i\ \text{sen}(\alpha+\beta)) = (r\,r')_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

El cociente de dos complejos en forma polar es otro complejo en forma polar de módulo el cociente de los módulos y de argumento la diferencia de los argumentos:

$$\frac{r_\alpha}{r'_\beta} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\beta}.$$

Basta aplicar que $\dfrac{1}{r'_\beta} = \left(\dfrac{1}{r'}\right)_{-\beta}$ y multiplicar.

1.2.2. Ecuaciones de giro

Según las definiciones que hemos dado del producto, podemos observar que si multiplicamos un número complejo en forma polar r_α por otro número complejo 1_β el resultado que obtendríamos sería $r_{\alpha+\beta}$ lo que equivale a efectuar un giro de centro el origen y ángulo β del afijo del complejo r_α. Las coordenadas del afijo después de girarlo serán:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x' & = & x\cos\beta - y\,\mathrm{sen}\beta \\ y' & = & x\,\mathrm{sen}\beta + y\cos\beta \end{array}}.$$

Como casos particulares podemos considerar los giros de ángulo $\frac{\pi}{2}$, π y $\frac{3\pi}{2}$ que equivaldrían a multiplicar el complejo $x+iy$, respectivamente, por i, -1 y $-i$.

1.2.3. Potencias y raíces.

Vamos a considerar en este apartado las potencias y las raíces de los números complejos pero de exponente e índice entero, el caso de exponente complejo lo consideraremos más adelante.

Potencias de exponente entero. Fórmula de Moivre.

Dado un número complejo en forma binómica se utiliza la fórmula del binomio de Newton. En este caso hará falta calcular las sucesivas potencias de la unidad imaginaria:

$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1$$

En general

$$i^n = i^{4k+r} = i^r, \; r = 0, 1, 2, 3.$$

Si el complejo viene dado en forma polar, $z = r_\alpha$ y $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = r_\alpha \cdots r_\alpha = (r \cdot r \cdot r \cdots r)_{\alpha+\alpha+\cdots+\alpha} = {r^n}_{n\alpha}.$$

Si se expresa z en forma trigonométrica obtendremos el siguiente resultado:

$$[r(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i\mathrm{sen}n\alpha).$$

Cuando en la fórmula anterior consideramos el caso particular en que $|z| = 1$ se tiene la `fórmula de Moivre`:

$$\boxed{(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\alpha)^n = \cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}n\alpha}.$$

Todo lo anterior se extiende a exponentes negativos sin mas que considerar el inverso, $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$.

Proposición 1.3 *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $z^n \cdot z^m = z^{n+m}$,
2. $\dfrac{z^n}{z^m} = z^{n-m}$,
3. $\left(z^n\right)^m = z^{n\,m}$.

Raíces de índice natural.

Dado un número complejo $z = R_\alpha$ se trata de calcular $\sqrt[n]{R_\alpha}$; es decir, encontrar un complejo r_β tal que al elevarlo a la potencia enésima dé como resultado R_α,

$$\left(\sqrt[n]{R_\alpha}\right)^n = (r_\beta)^n \Rightarrow R_\alpha = r^n{}_{n\beta}.$$

$$\left\{\begin{array}{l} R = r^n \\ \alpha + 2\,k\pi = n\,\beta \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt[n]{R} \\ \beta = \dfrac{\alpha + 2k\pi}{n} \end{array}\right. \qquad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

De la definición se observa que un número complejo tiene n raíces enésimas, que se obtienen al tomar k los valores $0, 1, \cdots, n-1$.

$$\sqrt[n]{R_\alpha} = \left(\sqrt[n]{R}\right)_{\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Además se cumple que los afijos de las raíces n-simas de un número complejo son los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen.

1.2.4. Exponencial y logaritmos complejos.

Exponencial de base e.

Definición 1.9 *Se define* $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\alpha$.
Si el exponente no es imaginario puro basta con descomponerlo de la siguiente forma:

$$\mathrm{e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x\,(\cos y + i seny)}.$$

Con esta definición son ya posibles las potencias de cualquier base real y exponente complejo.

$$x^w = \mathrm{e}^{\ln \mathrm{x}^\mathrm{w}} = \mathrm{e}^{\mathrm{w} \ln \mathrm{x}}$$

Proposición 1.4 *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha+\beta)}$,
2. $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}| = 1$,
3. $\mathrm{e}^{\mathrm{z}+\mathrm{z}'} = \mathrm{e}^{\mathrm{z}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{z}'}$,
4. $\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2}$,
5. $\mathrm{sen}\alpha = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{2\,i}$.

Logaritmos neperianos de los números complejos.

Nos referimos exclusivamente a logaritmos neperianos, ya que el logaritmo en cualquier otra base siempre se podrá obtener a partir de éstos, $\log_a z = \dfrac{\ln z}{\ln a}$.
Sea el número complejo r_α y queremos calcular $\ln r_\alpha$; supongamos que dicho logaritmo sea el número complejo $z = x + iy$ tendremos entonces:

$$\ln r_\alpha = x + iy \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^{x+iy} = r_\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i\ \mathrm{sen} y) = r_\alpha.$$

Si establecemos la igualdad entre los módulos y argumentos llegaremos a que :

$$\begin{cases} e^x = r \;\Leftrightarrow\; x = \ln r \\ \\ y = \alpha + 2k\pi, \;\; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Se tiene por tanto que $\ln r_\alpha = \ln r + (\alpha + 2k\pi)\, i, \quad k \in \mathbb{Z}$.
Resulta entonces que el logaritmo de un número complejo tiene infinitas soluciones; de entre ellas la que corresponde a $k = 0$ la llamaremos `logaritmo principal`.

Potencias de base y exponente complejos.

Vamos a considerar ahora el caso más general de base y exponente complejo y como caso particular el de base real y exponente complejo. Tomamos logaritmos neperianos:

$$z^w \;=\; {r_\alpha}^{x+yi} \;=\; e^{(x+yi)\ln r_\alpha} \;=\; e^{(x+yi)[\ln r \;+\; (\alpha+2k\pi)i]}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si desarrollamos el exponente y separamos el módulo del resto obtendremos:

$${r_\alpha}^{x+iy} = \; e^{x\ln r \;-\; y(\alpha+2k\pi)} \cdot e^{i(y\ln r + x(\alpha+2k\pi))}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Como acabamos de ver, las potencias, raíces y logaritmos de los números reales son siempre posibles de obtener en el marco más amplio de los números complejos, aunque se pierde la unicidad del resultado. Surge la pregunta si será posible la resolución de cualquier ecuación algebraica en el cuerpo $\mathbb{C}$. La respuesta es afirmativa y aunque no haremos la demostración enunciaremos el teorema siguiente:

Teorema 1.1 (Teorema fundamental del álgebra) *Todo polinomio*

$$P(z) = a_0 \;+\; a_1 z \;+\; \ldots \;+\; a_n z^n, \qquad (a_n \neq 0)$$

de grado n ($n \geq 1$) con coeficientes complejos tiene al menos una raíz en el cuerpo $\mathbb{C}$.

1.3. Aplicaciones geométricas

1.3.1. Lugares geométricos

Muchos de los lugares geométricos conocidos pueden ver simplificadas sus ecuaciones utilizando números complejos.

Circunferencia

Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Sea z_0 el afijo del centro de la circunferencia, r su radio y z un punto cualquiera de ella. Entonces, la ecuación de la circunferencia viene dada por

$$|z - z_0| = r.$$

Mediatriz de un segmento

Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los puntos extremos de un segmento.

Sean z_1, z_2 los afijos de los puntos extremos. La ecuación de la mediatriz es

$$|z - z_1| = |z - z_2|.$$

Elipse

Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es una cantidad constante.

Sean z_1, z_2 los afijos de los focos de la elipse y a una constante tal que $a > |z_1 - z_2|$ (para que exista la elipse). La ecuación de la elipse es

$$|z - z_1| + |z - z_2| = a.$$

Hipérbola

Lugar geométrico de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es una cantidad constante.

Sean z_1, z_2 los afijos de los focos de la hipérbola y a una constante tal que $a < |z_1 - z_2|$ (para que exista la hipérbola). La ecuación de la hipérbola es

$$|z - z_1| - |z - z_2| = a.$$

Tanto en la circunferencia como en la elipse, si consideramos en vez de igualdad, la desigualdad ($<$, *ó* $>$), tendremos el interior (exterior) de la circunferencia o elipse. A veces, se suele trasladar este concepto de interior y exterior a la hipérbola.

1.3.2. Cálculo analítico de polígonos regulares

Para el cálculo analítico de polígonos regulares supondremos conocidos:

1. El centro del polígono y uno de sus vértices.
2. Dos vértices diametralmente opuestos.
3. Dos vértices consecutivos y el ángulo central que formarían.

Estos tres casos se reducen al caso 1. Veamos cómo calcular el resto de los vértices.

Sabemos que en un polígono regular, un vértice se obtiene a partir del anterior sin mas que girar el segmento $\overline{z_0 z_k}$ un ángulo de $\frac{2\pi}{n}$ radianes, donde z_0 es el centro del polígono y z_k uno de sus vértices).
Supuestos conocidos z_0 y z_1, el centro y el primer vértice, los demás se obtienen por la fórmula

$$|z_{k+1} - z_0| = |z_1 - z_0|\, \mathrm{e}^{\frac{2k\pi\, i}{n}} \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1$$