Tema 4 (II) - Aplicaciones lineales (2ª parte)

1. Sea $T:\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $T(x,y)=(x+3y,0,2x-4y)$.

a) Hallar la matriz de T cuando consideramos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ sus respectivas bases canónicas.

b) Hallar la matriz de T cuando consideramos en $\mathbb{R}^3$ la base $\mathcal{B}=\{(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)\}$.

2. Sea $S:\mathbb{P}^2[x] \longmapsto \mathbb{P}^3[x]$ definida por $S\big(ax^2+bx+c\big)=\displaystyle\int_0^x \big(at^2+bt+c\big)\,dt$.

a) Probar que S es es una aplicación lineal y hallar su matriz referida a las bases $\mathcal{B}_2=\big\{x^2,x,1\big\}$ de $\mathbb{P}^2[x]$ y $\mathcal{B}_3=\big\{x^3,x^2,x,1\big\}$ de $\mathbb{P}^3[x]$.

b) ¿Es S inyectiva? ¿Es sobreyectiva?

3. El endomorfismo G de $\mathbb{R}^2$ viene dado por un giro positivo de 60° y R por la reflexión respecto del eje OX (por ejemplo, $R(1,1)=(1,-1)$). Hallar las matrices de $G\circ R$ y $R\circ G$ respecto de la base canónica.

4. De la aplicación lineal $T:\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ se sabe que $T(1,-1,1)=(5,-5,-1)$, $T(0,1,-1)=(0,2,-2)$ y $T(0,0,1)=(3,-3,-1)$. Hallar la matriz de f en la base canónica.

5. De la aplicación lineal $T:\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ se sabe que $T(1-2,-1)=(-1,0,2)$, $T(0,-1,1)=(0,-5,3)$ y $T(2,-1,1)=(5-1,3)$. Hallar la matriz de T en la base canónica.

6. De la aplicación lineal $T:\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ se sabe que $T(1,1,0)=(0,2,2)$ y $\ker(T)=\{(x,y,z)\mid x+y+z=0\}$. Hallar la matriz de T en la base canónica.

7. La matriz de la aplicación lineal $T:R^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$ respecto de las bases canónicas es $\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&2&1&2\end{pmatrix}$

a) Hallar unas ecuaciones implícitas de $\ker(T)$ y de $\operatorname{Im}(T)$.

b) Hallar unas ecuaciones implícitas de $T\big(\langle (1,-1,0,0),\ (1,0,-1,0),\ (1,0,0,-1)\rangle\big)$.

c) Hallar unas ecuaciones implícitas de $T^{-1}\big(\langle (1,2,-1),\ (-2,1,0)\rangle\big)$.

8. Hallar $T:\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ lineal tal que $\operatorname{Im}(T)\equiv\ x-y+z=0$ y $\ker(T)\equiv\begin{cases}x+2y+2z=0\\2x+\ \ y+\ \ z=0\end{cases}$

9. Dada la aplicación lineal $T:\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=(x,\ x-2y,\ x+y+z)$ y los subespacios $U=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\big\}$ y $V=\langle (1,1,-1),\ (0,1,2)\rangle$, hallar unas ecuaciones implícitas y una base de los subespacios siguientes:

a) $T(U)$, $T(V)$, $T^{-1}(U)$ y $T^{-1}(V)$.

b) $T(U+V)$, $T(U)+T(V)$, $T(U\cap V)$ y $T(U)\cap T(V)$.

10. La aplicación lineal $T:\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ está representada en la base canónica por la matriz $\begin{pmatrix}\lambda&-1&1\\2&0&-1\\1&-3&0\end{pmatrix}$

a) Hallar λ y una base de $\ker(T)$ sabiendo que $\dim\big(\ker(T)\big)=1$.

b) Dado el subespacio $H\equiv\begin{cases}x-2y+3z=0\\-3x+\ \ y+\ \ z=0\end{cases}$, hallar unas ecuaciones implícitas de $T(H)$.

11. Dada la aplicación lineal $T:\mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y)=(-7x-15y,\ 6x+12y)$, encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ de modo que respecto de esa base la matriz de T sea $\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$.

12. Dadas las aplicaciones lineales $T:\mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^4$ y $G:\mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$, definidas, respectivamente, por $T(x,y,z)=(x+y,\ y-z,\ x+y+z,\ 2x+3y)$ y $G(x,y,z,t)=(x-y,\ z+t,\ x+z)$, se pide:

a) Hallar unas ecuaciones implícitas de $\operatorname{Im}(T)$ y una base de $\ker(G)$.

b) Hallar la matriz de $T\circ G$ y la matriz de $G\circ T$.

c) Probar que $\ker(G)\subseteq\ker(T\circ G)$. Respecto de la inclusión anterior, ¿se trata de un hecho general?