Grado en Ingeniería Informática

Examen de Matemáticas III (Convocatoria de septiembre)

Ejercicio 1: (1 pto) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0.5$ y $P(A \cup B) = 0.7$.

a) (0.25 pto) Calcular $P(B)$ supuesto que A y B son independientes.

b) (0.25 pto) Calcular $P(B)$ supuesto que A y B son incompatibles.

c) (0.5 pto) Calcular $P(B)$ supuesto que $P(A|_{\overline{B}}) = 0.55$.

Ejercicio 2: Una fábrica produce un tipo de componente electrónico en dos calidades diferentes. El 60% de la producción es de calidad A y el resto de calidad B. La duración X de un componente de calidad A sigue una distribución normal de media 5 años y desviación típica 2, mientras que la duración de los componentes de calidad B es una variable aleatoria Y que sigue una distribución normal de media 2 años y desviación típica 0.5.

(a) (1 pto) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente dure más de 3 años si es de calidad A?¿Y si es de calidad B?

(b) (0.5 pto) Si tomamos un componente de calidad A y otro de calidad B, ¿cuál es la probabilidad de que sólo el de calidad A dure más de 3 años?

(c) (0.75 pto) Se toma un componente al azar de toda la producción y se observa que dura más de 3 años. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de calidad A?

Ejercicio 3: El tiempo de vida (en meses) de cierto tipo de circuitos es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si} \quad x \in (0,2) \\ \frac{1}{100}x - \frac{1}{50} & \text{si} \quad x \in (2,12) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Un proveedor, que en cada circuito vendido gana inicialmente 10 euros, se compromete a lo siguiente: si el circuito se avería antes del primer mes devuelve al comprador 6 euros. Si se avería entre el primer y el tercer mes le devuelve 3 euros. Si se avería más tarde no le devuelve nada.

(a) (1 pto) Calcular la ganancia esperada por circuito.

(b) (1 pto) Determinar la probabilidad de que un circuito elegido al azar dure a lo sumo seis meses. Si se venden 250 circuitos, determinar la probabilidad de que en los primeros seis meses se averíen al menos 160.

Ejercicio 4: Se ha llevado a cabo un estudio para determinar la relación entre el número de años de experiencia (x) y el salario mensual en miles de euros(y) de los programadores de cierta empresa. De una muestra de 6 programadores se obtuvieron los siguientes datos:

x	8	20	4	13
y	1.6	2.2	1.2	1.9

a) (1 pto) Utilizar el método de los mínimos cuadrados para ajustar a los datos una curva del tipo $y = \alpha x^{\beta}$, dando una estimación de los parámetros α y β.

b) (0.75 pto) Calcular e interpretar una medida de la bondad del ajuste realizado.

Ejercicio 5: Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{\theta^{3/2}\sqrt{\pi}} \cdot x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{\theta}} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\theta > 0$ es un parámetro desconocido. Se sabe que $E(X) = 2\sqrt{\theta/\pi}$ y que $Var(X) = (\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4})\theta$. Consideremos el estadístico $T(X_1, \ldots, X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

a) (0.75 pto) Construir la función de densidad conjunta de la muestra y demostrar que T es suficiente para estimar el parámetro θ?

b) (0.75 pto) ¿Es T un estimador insesgado de θ? En caso negativo obtener, a partir de T, un estimador insesgado de θ.

Ejercicio 6: En la fabricación de chips para circuitos integrados hay una variable, denominada *amplitud de ventana*, que está relacionada con los procedimientos de interconexión entre los circuitos. Se desea esudiar el efecto que tiene sobre la amplitud de ventana una determinada reacción química que se produce durante la fabricación de los chips. Para ello se toma una muestra de la amplitud de ventana en 10 chips, sin la reacción química, obteniéndose los siguientes resultados (en milimicras):

tamaño muestral	media	desviación típica
10	2.385	0.380

Se recoge posteriormente una muestra de la amplitud de ventana en 8 chips, tras la reacción química, resultando

tamaño muestral	media	desviación típica
8	3.376	0.603

Supuesto que las variables bajo estudio siguen distribuciones normales independientes,

a) (0.75 pto) Contrastar la igualdad de varianzas poblacionales. (Tómese $\alpha = 0.05$).

b) (0.75 pto) ¿Se puede afirmar, al 5% de significación, que después de la reacción aumenta la amplitud de ventana media en más de 0.5 milimicras? (Plantear y resolver un contraste de hipótesis adecuado con $\alpha = 0.05$).

14 de septiembre de 2016

DURACIÓN: HASTA LAS 12:50H.

Ejercicio 1

a) Dados dos sucesos A y B se verifica que $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

Por otra parte, por ser A y B independientes, $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A)\cdot P(B)$. Sustituyendo, en esta igualdad los datos del problema obtenemos que

$$0'7 = 0'5 + P(B) - 0'5\cdot P(B) \Rightarrow \left[P(B) = \frac{0'7-0'5}{0'5} = 0'4\right]$$

b) Si A y B son incompatibles, entonces $P(A\cap B) = 0$, luego

$$\underbrace{P(A\cup B)}_{0'7} = \underbrace{P(A)}_{0'5} + P(B) - \underbrace{P(A\cap B)}_{0}$$

y, por tanto, $0'7 = 0'5 + P(B) \Rightarrow \boxed{P(B) = 0'2}$

c) $0'55 = P(A|_{\bar{B}}) = \dfrac{P(A\cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \dfrac{P(A\cup B) - P(B)}{1-P(B)}$. Sustituyendo los datos del problema, $0'55 = \dfrac{0'7 - P(B)}{1-P(B)} \Rightarrow 0'55 - 0'55\cdot P(B) = 0'7 - P(B)$

$$\Rightarrow \boxed{P(B) = \frac{1}{3}}$$

Ejercicio 2:

$$\left.\begin{array}{l} X \sim N(5, 2^2) \\ Y \sim N(2, 0'5^2) \end{array}\right\} \rightarrow \text{Independientes}$$

a) $P(X>3) = 1 - P(X\le 3) = 1 - P\left(\dfrac{X-5}{\sqrt{4}} \le \dfrac{3-5}{\sqrt{4}}\right) = 1 - P(Z \le -1) = 1 - P(Z \ge 1) =$
$Z\sim N(0,1)$

$= 1 - (1 - P(Z\le 1)) = P(Z\le 1) \underset{\text{Tabla}}{=} 0'8413$

$P(Y>3) = 1 - P(Y\le 3) = 1 - P\left(\dfrac{Y-2}{\sqrt{0'25}} \le \dfrac{3-2}{\sqrt{0'25}}\right) = 1 - P(Z \le 2) = 1 - 0'9772 = 0'0228$
$Z\sim N(0,1)$

b) $P(X>3 \cap Y\leq 3) = P(X>3)\cdot P(Y\leq 3) = 0'8413\cdot(1-0'0228) = 0'8221$.

X, Y independientes

c) Consideremos las variables D = duración de un componente elegido al azar.

A: un componente elegido al azar es de calidad A.

B: " " " " " " " B.

Teor. de Bayes

$$P(A|_{D>3}) = \frac{P(A\cap(D>3))}{P(D>3)} = \frac{P(D>3|_A)\cdot P(A)}{P(D>3|_A)\cdot P(A)+P(D>3|_B)\cdot P(B)} =$$

$$= \frac{P(X>3)\cdot P(A)}{P(X>3)\cdot P(A)+P(Y>3)\cdot P(B)} = \frac{0'8413\cdot 0'6}{0'8413\cdot 0'6+0'0228\cdot 0'4} \simeq 0'9823$$

Ejercicio 3:

Consideramos las variables aleatorias

X = durción de un circuito.

Y = ganancia obtenida con un circuito.

La variable Y se define como:

$$Y = \begin{cases} 4 & \text{si } X<1 \\ 7 & \text{si } 1<X<3 \\ 10 & \text{si } X>3 \end{cases}$$

Entonces $E(Y) = 4\cdot P(X<1) + 7\cdot P(1<X<3) + 10\cdot P(X>3)$

- $P(X<1) = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}$

- $P(1\leq X\leq 3) = \int_1^3 f_X(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{4}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{100}\cdot x - \frac{1}{50}\,dx = \left[\frac{1}{4}x\Big|_1^2\right] + \left[\frac{1}{200}x^2 - \frac{1}{50}x\Big|_2^3\right] =$

$$= \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{9}{200} - \frac{3}{50} - \frac{4}{200} + \frac{2}{50} = \frac{51}{200}$$

- $P(X>3) = 1-P(X\leq 3) = 1-\left(P(X<1)+P(1\leq X\leq 3)\right) = 1-\frac{1}{4}-\frac{51}{200} = \frac{99}{200}$

Por tanto, la ganancia esperada es:

$$E(Y) = 4\cdot\frac{1}{4} + 7\cdot\frac{51}{200} + 10\cdot\frac{99}{200} = \frac{1547}{200} \simeq 7'735 \text{ euros/circuito.}$$

b) $P(X\leq 6)=\int_{-\infty}^{6} f(x)\,dx=\int_{0}^{2}\frac{1}{4}\,dx+\int_{2}^{6}\frac{1}{100}\cdot x-\frac{1}{50}\cdot dx=\frac{29}{50}=0'58$

Consideramos ahora la variable

W = número de circuitos, de los 250, que se averían en los primeros seis meses.

Entonces $W\sim B(\underbrace{250}_{n},\underbrace{0'58}_{p})$ y tenemos que calcular $P(W\geq 160)$.

$p=0'58>0'5$; $n\cdot q=250\cdot(1-0'58)=105>5$. Aproximaremos la probabilidad anterior mediante una variable $M\sim N(250\cdot 0'58,\ 250\cdot 0'58\cdot 0'42)$
$=N(145,\ 60'9)$

Al ser $p>0'5$ y $n\cdot q>5$, el resultado obtenido será una buena aproximación a la probabilidad buscada.

Entonces, $P(W\geq 160)=1-P(W<160)=1-P(W\leq 159)\simeq 1-P(M\leq 159)=$

$$=1-P\left(\frac{M-145}{\sqrt{60'9}}\leq\frac{159-145}{\sqrt{60'9}}\right)=1-P(Z\leq 1'79)=1-0'9633=0'0367$$

Ejercicio 4:

a) Tenemos que ajustar una curva del tipo $y=\alpha\cdot x^{\beta}$. Tomando logaritmo neperiano a ambos lados de la igualdad resulta $\ln y=\ln\alpha+\beta\ln x$.
Si $Y=\ln y$ y $X=\ln x$ tenemos que realizar un ajuste de regresión lineal simple entre las variables X e Y. Los datos correspondientes a estas variables aparecen en la siguiente tabla:

x	8	20	4	13
y	1'6	2'2	1'2	1'9
$X=\ln x$	2'0794	2'9957	1'3863	2'5649
$Y=\ln y$	0'4700	0'7885	0'1823	0'6418

$\overline{X}=2'2566$ $\quad S_X^2=0'3575$

$\overline{Y}=0'5206$ $\quad S_Y^2=0'0509$

$S_{XY}=\frac{5'2383}{4}-2'2566\cdot 0'5206=0'1348$

Así, la recta de regresión entre $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ viene dada por:

$$\mathbb{Y}-\overline{\mathbb{Y}} = \frac{S_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}}{S_{\mathbb{X}}^2}\cdot(\mathbb{X}-\overline{\mathbb{X}}) \rightarrow \mathbb{Y}-0'5206 = \frac{0'1348}{0'3575}\cdot(\mathbb{X}-2'2566)$$

$$\boxed{\mathbb{Y} = -0'3303 + 0'3771\cdot\mathbb{X}}$$

El ajuste realizado es $\mathbb{Y} = \ln\alpha + \beta\cdot\mathbb{X}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln\alpha = -0'3303 \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{\alpha = e^{-0'3303} = 0'7187} \\ \beta = 0'3771 \end{cases}$$

Por tanto, la curva buscada es $\boxed{y = 0'7187\cdot x^{0'3771}}$

b) Calculamos ahora el coeficiente de determinación, R^2.

x_i	8	20	4	13
y_i	1'6	2'2	1'2	1'9
$\hat{y}_i = 0'7187\cdot x_i^{0'3771}$	1'5744	2'2242	1'2122	1'8907

Al tratarse de un ajuste de regresión no lineal, calculamos el coeficiente R^2 mediante la expresión $R^2 = 1-\frac{SS_{Res}}{SS_{Tot}}$

$$SS_{Tot} = n\cdot S_y^2 = 4\cdot 0'0509 = 0'2036$$

$$SS_{Res} = \sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2 = (1'6-1'5744)^2 + \ldots + (1'9-1'8907)^2 = 0'00147793$$

Entonces $R^2 = 1-\frac{0'00147793}{0'2036} = 0'9927$.

El valor del coeficiente R^2 se encuentra muy próximo a 1 por lo que podemos decir que el ajuste realizado es muy bueno. La curva ajusta bien a la nube de puntos

Ejercicio 5:

a) La función de densidad conjunta de la muestra viene dada por:

$$f(x_1,\dots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^n f_X(x_i;\theta)=\prod_{i=1}^n\left(\frac{4}{\theta^{3/2}\cdot\sqrt{\pi}}\cdot x_i^2\cdot e^{-\frac{x_i^2}{\theta}}\right)=$$

$$=\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\theta^{3/2}\right)^n\cdot\left(\prod_{i=1}^n x_i^2\right)\cdot e^{-\frac{1}{\theta}\cdot\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

Por otra parte, $T=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n x_i^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2=n\cdot T$. Sustituyendo en la expresión de la función de densidad conjunta resulta:

$$f(x_1,\dots,x_n;\theta)=\left(\prod_{i=1}^n x_i^2\right)\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\theta^{3/2}\right)^n\cdot e^{-\frac{1}{\theta}\cdot\sum_{i=1}^n x_i^2}=$$

$$=\underbrace{\left(\prod_{i=1}^n x_i^2\right)}_{h(x_1,\dots,x_n)}\cdot\underbrace{\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}\cdot\theta^{3/2}\right)^n\cdot e^{-\frac{nT}{\theta}}}_{g(T,\theta)}$$

Por tanto, T es suficiente para estimar θ.

b) $$E(T)=E\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n X_i^2\right)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n E(X_i^2)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n E(X^2)=\frac{1}{n}\cdot n\cdot E(X^2)=E(X^2)$$

$E(X_i^2)=E(X)$ porque $X_1,\dots,X_n$ es una muestra aleatoria simple de X

Por otra parte, $Var(X)=E(X^2)-E^2(X)\Rightarrow E(X^2)=Var(X)+E^2(X)$

Entonces $E(X^2)=\left(\frac{3}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\theta+\left(2\sqrt{\theta/\pi}\right)^2=\frac{3}{2}\theta-\frac{\pi}{4}\cdot\theta+\frac{4\theta}{\pi}=\frac{6\pi-\pi^2+16}{4\pi}\cdot\theta.$

Por tanto, $E(T)=\frac{6\pi-\pi^2+16}{4\pi}\cdot\theta\neq\theta$, luego T no es un estimador insesgado de θ.

Calculamos ahora un estimador insesgado de θ:

$$E(T)=\frac{6\pi-\pi^2+16}{4\pi}\cdot\theta\Rightarrow\frac{4\pi}{6\pi-\pi^2+16}\cdot E(T)=\theta\Rightarrow E\Big(\overbrace{\frac{4\pi}{6\pi-\pi^2+16}\cdot T}^{T^*}\Big)=\theta$$

Así, un estimador insesgado de θ viene dado por:

$$\boxed{T^*(X_1,\dots,X_n)=\frac{4\pi}{6\pi-\pi^2+16}\cdot T(X_1,\dots,X_n)=\frac{4\pi}{6\pi-\pi^2+16}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

Ejercicio 6: Consideramos las variables

X_A = amplitud de ventana, sin reacción química.

X_B = " " " , con reacción química.

$X_A \sim N(\mu_A, \sigma_A^2)$; $X_B \sim N(\mu_B, \sigma_B^2)$; X_A, X_B independientes

De los datos del problema,

$$n_A = 10,\ \bar{x}_A = 2'385,\ S_A = 0'38 \Rightarrow S_{CA}^2 = \frac{n_A}{n_A - 1} \cdot S_A^2 = \frac{10}{9} \cdot 0'38^2 = 0'160\overline{4}$$

$$n_B = 8,\ \bar{x}_B = 3'376,\ S_B = 0'603 \Rightarrow S_{CB}^2 = \frac{n_B}{n_B - 1} \cdot S_B^2 = \frac{8}{7} \cdot 0'603^2 = 0'415553$$

a) Resolvemos el contraste $\begin{cases} H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \\ H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2 \end{cases}$ con $\alpha = 0'05$

Rechazaremos H_0 si $\frac{S_{CA}^2}{S_{CB}^2} \geq f_{n_A-1, n_B-1, 1-\alpha/2}$ o bien $\frac{S_{CA}^2}{S_{CB}^2} \leq \frac{1}{f_{n_B-1, n_A-1, 1-\alpha/2}}$

Esto es, rechazaremos H_0 si

$$\frac{S_{CA}^2}{S_{CB}^2} \geq \underbrace{f_{9,7,0'975}}_{\text{tablas}} = 4'823 \quad \text{o bien} \quad \frac{S_{CA}^2}{S_{CB}^2} \leq \frac{1}{f_{7,9,0'975}} = \frac{1}{4'197} = 0'2382$$

Puesto que $\frac{S_{CA}^2}{S_{CB}^2} = \frac{0'160\overline{4}}{0'415553} = 0'38609$, no se verifica la regla de rechazo, por lo que no podemos afirmar que las varianzas sean distintas.

b) Tenemos que resolver el contraste $\begin{cases} H_0 : \mu_B = \mu_A + 0'5 \\ H_1 : \mu_B > \mu_A + 0'5 \end{cases}$ (con $\alpha = 0'05$)

que podemos escribirlo como $\begin{cases} H_0 : \mu_A - \mu_B = -0'5 \\ H_1 : \mu_A - \mu_B < -0'5 \end{cases}$

Teniendo en cuenta el resultado obtenido en el apartado a), se trata de un contraste sobre la diferencia de medias de dos poblaciones normales con varianzas desconocidas pero iguales.

Por tanto, se rechazará Ho si $\bar{X}_A - \bar{X}_B \leq \mu_0 - S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}} \cdot t_{n_A+n_B-2,\,1-\alpha}$

Siendo $S_p^2 = \dfrac{(n_A-1)\cdot S_{cA}^2 + (n_B-1) S_{cB}^2}{n_A + n_B - 2} = \dfrac{n_A \cdot S_A^2 + n_B \cdot S_B^2}{n_A + n_B - 2} = \dfrac{10 \cdot 0'38^2 + 8 \cdot 0'603^2}{10+8-2} = 0'2720545$

Entonces, se rechazará Ho si

$$\bar{X}_A - \bar{X}_B \leq -0'5 - \sqrt{0'2720545} \cdot \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}} \cdot \underbrace{t_{16,0'95}}_{1'746} = -0'93198$$

Puesto que $\bar{X}_A - \bar{X}_B = 2'385 - 3'376 = -0'991$, tenemos evidencia significativa para rechazar Ho y afirmar que la reacción química aumenta la amplitud de ventana en más de 0'5 milimicras.