El teorema de la proyección

Teorema de la proyección - *Sean H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B}_H = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_p\}$ una base ortonormal de H. Definimos la proyección sobre H, $\mathsf{P}_H : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ por*

$$\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p$$

(1) - P_H *es lineal,* $\mathrm{Im}(\mathsf{P}_H) = H$ *y* $\mathsf{P}_H^2 = \mathsf{P}_H$.

(2) - *Para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, *se verifica que* $\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x}) \in H^\perp$.

(3) - $\ker(\mathsf{P}_H) = H^\perp$.

(4) - *Si* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in H$ *y* $\mathbf{u} \neq \mathsf{P}_H(\mathbf{x})$, *entonces* $\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| > \|\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})\|$.

(5) - $\mathsf{P}_H(\mathbf{x})$ *no depende de la base* $\mathcal{B}_H$ *elegida.*

Demostración:

(1) - Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. El que P_H es lineal se prueba con un simple cálculo.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_H(\lambda\,\mathbf{x} + \mu\,\mathbf{y}) &= \big((\lambda\,\mathbf{x} + \mu\,\mathbf{y})\cdot\mathbf{u}_1\big)\mathbf{u}_1 + \cdots\cdots + \big((\lambda\,\mathbf{x} + \mu\,\mathbf{y})\cdot\mathbf{u}_p\big)\mathbf{u}_p \\
&= \big(\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_1) + \mu(\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1)\big)\mathbf{u}_1 + \cdots\cdots + \big(\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_p) + \mu(\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_p)\big)\mathbf{u}_p \\
&= \lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \mu(\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots\cdots + \lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p + \mu(\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p \\
&= \lambda\big[(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p\big] + \mu\big[(\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{y}\cdot\mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p\big] \\
&= \lambda\,\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) + \mu\,\mathsf{P}_H(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

Si $\mathbf{u} \in H$, entonces $\mathbf{u} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p \implies \mathsf{P}_H(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ y puesto que $\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) \in H$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\mathrm{Im}(\mathsf{P}_H) = H$ y que $\mathsf{P}_H^2 = \mathsf{P}_H$.

(2) - Hay que probar que si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u} \in H$, entonces $\big(\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})\big)\cdot\mathbf{u} = 0$ lo cual, es lo mismo, que probar que $\mathbf{x}\cdot\mathbf{u} = \mathsf{P}_H(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u}$

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{x}\cdot\big((\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p\big) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_1)(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_1) + \cdots + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_p)(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_p)$$

$$\mathsf{P}_H(\mathbf{x})\cdot\mathbf{u} = \big((\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p\big)\cdot\mathbf{u} = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_1)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_1) + \cdots + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_p)(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}_p)$$

(3) - Si $\mathbf{x} \in \ker(\mathsf{P}_H)$, entonces $\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{0}} \implies \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x}) \in H^\perp \implies \ker(\mathsf{P}_H) \subseteq H^\perp$

- Si $\mathbf{x} \in H^\perp \implies \overbrace{\mathsf{P}_H(\mathbf{x})}^{\in H} = \overbrace{\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) - \mathbf{x}}^{\in H^\perp} + \overbrace{\mathbf{x}}^{\in H^\perp} \implies \mathsf{P}_H(\mathbf{x}) \in H \cap H^\perp = \{\vec{\mathbf{0}}\} \implies \mathbf{x} \in \ker(\mathsf{P}_H)$

(4) - Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u} \in H$ tales que $\mathbf{u} \neq \mathsf{P}_H(\mathbf{x})$.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2 &= \|\overbrace{\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})}^{\in H^\perp} + \overbrace{\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) - \mathbf{u}}^{\in H}\|^2 \\
&= \{\text{Teorema de Pitágoras}\} = \|\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})\|^2 + \|\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) - \mathbf{u}\|^2 > \|\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})\|^2
\end{aligned}$$

(5) - Sea $\mathcal{B}'_H = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \cdots, \mathbf{u}'_p\}$ otra base ortonormal de H. Igual que en el caso anterior, podemos definir la proyección $\mathsf{P}'_H : \mathbb{R}^n \longmapsto H$ haciendo

$$\mathsf{P}'_H(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}'_1)\mathbf{u}'_1 + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}'_2)\mathbf{u}'_2 + \cdots + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}'_p)\mathbf{u}'_p$$

Obviamente, se pueden reproducir todas las demostraciones anteriores para P'_H. Probaremos ahora que $\mathsf{P}'_H = \mathsf{P}_H$. Supongamos que para algún $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\mathsf{P}'_H(\mathbf{x}) \neq \mathsf{P}_H(\mathbf{x})$:

- La demostración anterior, para P_H, prueba que $\|\mathbf{x} - \mathsf{P}'_H(\mathbf{x})\| > \|\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})\|$

- La demostración anterior, para P'_H, prueba que $\|\mathbf{x} - \mathsf{P}'_H(\mathbf{x})\| < \|\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})\|$

La contradicción anterior prueba que $\mathsf{P}'_H(\mathbf{x}) = \mathsf{P}_H(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. ■

Corolario - *Si H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, se cumple que* $H \oplus H^\perp = \mathbb{R}^n$.

Demostración:

Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, entonces $\mathbf{x} = \overbrace{\mathsf{P}_H(\mathbf{x})}^{\in H} + \overbrace{\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})}^{\in H^\perp} \implies \mathbf{x} \in H \oplus H^\perp$ ■