Lema 1 (Teorema del conjunto generador) - *Sean $u_1, u_2, \cdots, u_p$ vectores de un espacio vectorial V. Si u_1 depende linealmente del conjunto $\{u_2, \cdots, u_p\}$, entonces $\langle u_1, u_2, \cdots, u_p \rangle = \langle u_2, \cdots, u_p \rangle$.*

Demostración:

Es obvio que $\langle u_2, \cdots, u_p \rangle \subseteq \langle u_1, u_2, \cdots, u_p \rangle$. Veamos la inclusión contraria.

Si $u \in \langle u_1, u_2, \cdots, u_p \rangle$, existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ tales que $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p$ y como u_1 depende linealmente de los demás, existirán $\beta_2, \cdots, \beta_p$ tales que $u_1 = \beta_2 u_2 + \cdots \beta_p u_p$. Sustituyendo esta expresión en la anterior, obtenemos:

$$u = \alpha_1(\overbrace{\beta_2 u_2 + \cdots + \beta_p u_p}^{u_1}) + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2)u_2 + \cdots + (\alpha_1\beta_p + \alpha_p)u_p$$

En otras palabras, $u \in \langle u_2, \cdots, u_p \rangle$ lo cual implica que $\langle u_1, u_2, \cdots, u_p \rangle \subseteq \langle u_2, \cdots, u_p \rangle$ ■

Sean dos subespacios vectoriales U y V, en un espacio vectorial definido sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Considérense las bases

- $B_1 = \{a_1, \ldots, a_r, u_1, \ldots, u_p\}$
- $B_2 = \{a_1, \ldots, a_r, v_1, \ldots, v_q\}$
- $B_3 = \{a_1, \ldots, a_r\}$
- $B_4 = \{a_1, \ldots, a_r, u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q\}$

de modo que se cumpla $U \cap V = \operatorname{gen}(B_3)$, entonces $U = \operatorname{gen}(B_1)$ y $V = \operatorname{gen}(B_2)$, basta completar B_3 con los vectores correspondientes.[Nota 1] Además, como $B_4 = B_1 \cup B_2$, se tiene $U + V = \operatorname{gen}(B_4)$.[Nota 2]

Es necesario demostrar primero que el sistema B_4 es efectivamente una base, para esto basta con que sus vectores sean linealmente independientes, ya que generan al subespacio suma $U + V$.

Independencia entre los vectores de B_4	[mostrar]

Según las propiedades de la suma,

$$p + q + r = (p + r) + (q + r) - r$$

pero esto equivale a

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

Teorema 2 - *Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \longmapsto W$ lineal. Son equivalentes:*

(1) - *T es inyectiva.*

(2) - $\ker(T) = \{\vec{\mathbf{0}}_V\}$.

(3) - $\dim(V) = \dim(\operatorname{Im}(T))$.

(4) - *T transforma las bases de V en bases de* $\operatorname{Im}(T)$.

(5) - *T conserva la independencia lineal.*

Demostración:

(1) $\Rightarrow$ (2) Es inmediato pues $T(\vec{\mathbf{0}}_V) = \vec{\mathbf{0}}_W$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Es una consecuencia del teorema 1.

(3) $\Rightarrow$ (4) Si $\mathcal{B}_V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base de V, entonces $T(\mathcal{B}_V) = \{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ es un sistema generador de $\operatorname{Im}(T)$. Si fuera L.D., podríamos obtener una base de $\operatorname{Im}(T)$ con menos de n elementos de modo que sería $\dim(\operatorname{Im}(T)) < n = \dim(V)$!! En consecuencia, $T(\mathcal{B}_V)$ debe ser una base de $\operatorname{Im}(T)$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Si $\{v_1, \cdots, v_q\}$ es L.I. en V, completamos este conjunto hasta obtener una base de V. Sea $\mathcal{B}_V = \{v_1, \cdots, v_q, v_{q+1}, \cdots, v_n\}$ dicha base. Entonces, $T(\mathcal{B}_V) = \{T(v_1), \cdots, T(v_q), T(v_{q+1}), \cdots, T(v_n)\}$ es una base de $\operatorname{Im}(T)$ lo que implica, en particular, que $\{T(v_1), \cdots, T(v_q)\}$ es L.I. en W.

(5) $\Rightarrow$ (1) Resulta fácil probar que $v \neq \vec{\mathbf{0}}_V$ si y sólo si $\{v\}$ es L.I. Así pues, si $v \neq \vec{\mathbf{0}}_V$, entonces $\{T(v)\}$ es L.I. lo cual, implica que $T(v) \neq \vec{\mathbf{0}}_W$.

Finalmente, si $v_1 \neq v_2$, esto es, $v_1 - v_2 \neq \vec{\mathbf{0}}_V$, se tiene que $T(v_1 - v_2) = T(v_1) - T(v_2) \neq \vec{\mathbf{0}}_W$, esto es, $T(v_1) \neq T(v_2)$. ■

Lema 2 - *Si el conjunto $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ es una base de V y el conjunto $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ es linealmente independiente, entonces $m \leqslant n$.*

Demostración:

Supongamos que $m > n$. Tendríamos entonces $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1}, \cdots, v_m\}$

– Puesto que $\mathcal{B}$ es una base y $v_1 \neq \vec{\mathbf{0}}$, existen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ no todos nulos, tales que

$$v_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Podemos suponer (reordenando si fuera necesario) que $\alpha_1 \neq 0$ y despejando e_1 en la ecuación anterior,

$$e_1 = \left(\tfrac{1}{\alpha_1}\right)v_1 + \left(\tfrac{-\alpha_2}{\alpha_1}\right)e_2 + \cdots + \left(\tfrac{-\alpha_n}{\alpha_1}\right)e_n$$

lo cual, combinado con el lema 1, implica que

$$V = \langle e_1, e_2, \cdots, e_n \rangle = \langle v_1, e_1, e_2, \cdots, e_n \rangle = \langle v_1, e_2, \cdots, e_n \rangle$$

– Puesto que $V = \langle v_1, e_2, \cdots, e_n \rangle$ y $v_2 \neq \vec{\mathbf{0}}$, existen $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ no todos nulos, tales que

$$v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n$$

Si fuese $\beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$, entonces el conjunto $\{v_1, v_2\}$ sería linealmente dependiente. Podemos pues suponer (reordenando si fuera necesario) que $\beta_2 \neq 0$. Despejando e_2 en la ecuación anterior,

$$e_2 = \left(\tfrac{-\beta_1}{\beta_2}\right)v_1 + \left(\tfrac{1}{\beta_2}\right)v_2 + \cdots + \left(\tfrac{-\beta_n}{\beta_2}\right)e_n$$

lo cual, combinado con el lema 1, implica que:

$$V = \langle v_1, e_2, \cdots, e_n \rangle = \langle v_2, v_1, e_2, \cdots, e_n \rangle = \langle v_1, v_2, \cdots, e_n \rangle$$

Continuando el proceso, obtenemos que $V = \langle v_1, v_2, \cdots, v_n \rangle$. Pero esto es absurdo pues implica que los vectores $v_{n+1}, \cdots, v_m$ dependen linealmente del conjunto $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ lo cual, contradice el hecho de que $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_n, v_{n+1}, \cdots, v_m\}$ es linealmente independiente. Así pues, $m \leqslant n$. ■

Teorema 1 - *Si V y W son espacios vectoriales de dimensión finita y $T : V \longmapsto W$ es lineal, entonces:*

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T))$$

Demostración:

Sea $n = \dim(V)$.

- El caso $\dim(\ker(T)) = n$ es trivial pues en ese caso T es la aplicación nula y $\dim(\operatorname{Im}(T)) = 0$.

- Así pues, asumiremos que $\dim(\ker(T)) < n$.

Supondremos, en primer lugar, que $\dim(\ker(T)) = p \geqslant 1$.

(1) - Sea $\mathcal{B}_k = \{v_1, \cdots, v_p\}$ una base de $\ker(T)$.

(2) - Completamos $\mathcal{B}_k$ hasta obtener una base de V. Sea $\mathcal{B}_V = \{v_1, \cdots, v_p, v_{p+1}, \cdots, v_n\}$ una base completada. Es evidente que $\ker(T) \cap \langle v_{p+1}, \cdots, v_n \rangle = \langle v_1, \cdots, v_p \rangle \cap \langle v_{p+1}, \cdots, v_n \rangle = \{\vec{\mathbf{0}}_V\}$ $(*)$

(3) - $T(\mathcal{B}_V) = \{T(v_1), \cdots, T(v_p), T(v_{p+1}), \cdots, T(v_n)\}$ es un sistema generador de $\operatorname{Im}(T)$ y, dado que $T(v_1) = \cdots = T(v_p) = \vec{\mathbf{0}}_W$, el conjunto $\{T(v_{p+1}), \cdots, T(v_n)\}$ también es un sistema generador de $\operatorname{Im}(T)$. Probaremos que este conjunto es L.I.

(4) - Si $\lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ son tales que $\lambda_{p+1}T(v_{p+1}) + \cdots + \lambda_n T(v_n) = \vec{\mathbf{0}}_W$, se tiene que:

$$\vec{\mathbf{0}}_W = T(\lambda_{p+1}v_{p+1} + \cdots + \lambda_n v_n) \implies \lambda_{p+1}v_{p+1} + \cdots + \lambda_n v_n \in \ker(T) \cap \langle v_{p+1}, \cdots, v_n \rangle \overset{(*)}{=} \{\vec{\mathbf{0}}_V\}$$

En otras palabras, $\lambda_{p+1}v_{p+1} + \cdots + \lambda_n v_n = \vec{\mathbf{0}}_V$ y como el conjunto $\{v_{p+1}, \cdots, v_n\}$ es L.I. (es parte de una base), necesariamente debe ser $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$ lo que prueba que el conjunto $\{T(v_{p+1}), \cdots, T(v_n)\}$ es L.I. y, en consecuencia, es una base de $\operatorname{Im}(T)$.

En resumidas cuentas, hemos probado que $\dim(\operatorname{Im}(T)) = n - p$, lo que unido al hecho de que $\dim(\ker(T)) = p$ prueba el teorema.

- Finalmente, si $\dim(\ker(T)) = 0$, esto es $\ker(T) = \{\vec{\mathbf{0}}_V\}$, podemos proceder de igual forma que en el caso anterior cambiando sólo algunos detalles. Dejamos al lector dichos detalles. ■

El teorema de la proyección

Teorema de la proyección - *Sean H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B}_H = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_p\}$ una base ortonormal de H. Definimos la proyección sobre H, $\mathsf{P}_H : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ por*

$$\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p$$

(1) - *P_H es lineal, $\operatorname{Im}(\mathsf{P}_H) = H$ y $\mathsf{P}_H^2 = \mathsf{P}_H$.*

(2) - *Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se verifica que $\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x}) \in H^\perp$.*

(3) - $\ker(\mathsf{P}_H) = H^\perp$.

(4) - *Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in H$ y $\mathbf{u} \neq \mathsf{P}_H(\mathbf{x})$, entonces $\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\| > \|\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})\|$.*

(5) - *$\mathsf{P}_H(\mathbf{x})$ no depende de la base $\mathcal{B}_H$ elegida.*

Demostración:

(1) - Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. El que P_H es lineal se prueba con un simple cálculo.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}_H(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) &= \big((\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}_1\big)\mathbf{u}_1 + \cdots\cdots + \big((\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) \cdot \mathbf{u}_p\big)\mathbf{u}_p \\
&= \big(\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1) + \mu(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1)\big)\mathbf{u}_1 + \cdots\cdots + \big(\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_p) + \mu(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p)\big)\mathbf{u}_p \\
&= \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \mu(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots\cdots + \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p + \mu(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p \\
&= \lambda\big[(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p\big] + \mu\big[(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p\big] \\
&= \lambda\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) + \mu\mathsf{P}_H(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

Si $\mathbf{u} \in H$, entonces $\mathbf{u} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p \implies \mathsf{P}_H(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ y puesto que $\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) \in H$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\operatorname{Im}(\mathsf{P}_H) = H$ y que $\mathsf{P}_H^2 = \mathsf{P}_H$.

(2) - Hay que probar que si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u} \in H$, entonces $(\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{u} = 0$ lo cual, es lo mismo, que probar que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \mathsf{P}_H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \big((\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p\big) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1) + \cdots + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_p)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_p)$$

$$\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = \big((\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p\big) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_1)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_1) + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_p)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_p)$$

(3) - Si $\mathbf{x} \in \ker(\mathsf{P}_H)$, entonces $\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) = \vec{\mathbf{0}} \implies \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x}) \in H^\perp \implies \ker(\mathsf{P}_H) \subseteq H^\perp$

- Si $\mathbf{x} \in H^\perp \implies \overbrace{\mathsf{P}_H(\mathbf{x})}^{\in H} = \overbrace{\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) - \mathbf{x}}^{\in H^\perp} + \overbrace{\mathbf{x}}^{\in H^\perp} \implies \mathsf{P}_H(\mathbf{x}) \in H \cap H^\perp = \{\vec{\mathbf{0}}\} \implies \mathbf{x} \in \ker(\mathsf{P}_H)$

(4) - Sean $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{u} \in H$ tales que $\mathbf{u} \neq \mathsf{P}_H(\mathbf{x})$.

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|^2 &= \|\overbrace{\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})}^{\in H^\perp} + \overbrace{\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) - \mathbf{u}}^{\in H}\|^2 \\
&= \{\text{Teorema de Pitágoras}\} = \|\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})\|^2 + \|\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) - \mathbf{u}\|^2 > \|\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})\|^2
\end{aligned}$$

(5) - Sea $\mathcal{B}'_H = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \cdots, \mathbf{u}'_p\}$ otra base ortonormal de H. Igual que en el caso anterior, podemos definir la proyección $\mathsf{P}'_H : \mathbb{R}^n \longmapsto H$ haciendo

$$\mathsf{P}'_H(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}'_1)\mathbf{u}'_1 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}'_2)\mathbf{u}'_2 + \cdots + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}'_p)\mathbf{u}'_p$$

Obviamente, se pueden reproducir todas las demostraciones anteriores para P'_H. Probaremos ahora que $\mathsf{P}'_H = \mathsf{P}_H$. Supongamos que para algún $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\mathsf{P}'_H(\mathbf{x}) \neq \mathsf{P}_H(\mathbf{x})$:

- La demostración anterior, para P_H, prueba que $\|\mathbf{x} - \mathsf{P}'_H(\mathbf{x})\| > \|\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})\|$

- La demostración anterior, para P'_H, prueba que $\|\mathbf{x} - \mathsf{P}'_H(\mathbf{x})\| < \|\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x})\|$

La contradicción anterior prueba que $\mathsf{P}'_H(\mathbf{x}) = \mathsf{P}_H(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. ■