Capítulo 4

Aproximación de funciones. Fórmula de Taylor

4.1. Aproximación por polinomio de Taylor

Los polinomios son funciones de fácil manejo, que son muy apropiadas para trabajar en cálculos numéricos porque sus valores se pueden obtener efectuando un número finito de adiciones y multiplicaciones. Existen muchas formas de aproximar una función dada f, por polinomios, dependiendo del uso que se quiera hacer de esta aproximación. En este caso nos interesa encontrar un polinomio que coincida con la función y algunas de sus derivadas en un entorno de un punto dado.

4.1.1. Polinomios de Taylor

Teorema 4.1 *Sea f una función con derivadas hasta de orden n en 0. Existe un polinomio P y sólo uno de grado menor o igual que n que satisface las n+1 condiciones siguientes:*

$$P(0) = f(0), \quad P'(0) = f'(0), \quad \cdots \quad P^{(n)}(0) = f^{(n)}(0).$$

Tal polinomio viene dado por la expresión:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

Si ordenamos el polinomio P según las potencias del binomio $x - x_0$, procediendo de forma análoga se tiene el siguiente

Teorema 4.2 *Sea f una función con derivadas hasta de orden n en el punto x_0. Existe un polinomio P y uno sólo de grado menor o igual que n que satisface las n+1 condiciones:*

$$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0), \quad \cdots, \quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Tal polinomio viene dado por la expresión:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Definición 4.1 (Polinomio de Taylor. Polinomio de McLaurin) *El polinomio anterior se denota por* $T_n(f, x_0)(x)$ *(o* $T_n(x)$ *si no ha lugar a confusión) y se conoce con el nombre de* `polinomio de Taylor de grado n` *generado por* f *en el punto* x_0*. Cuando* $x_0 = 0$ *se conoce como* `polinomio de McLaurin de grado n`*.*

Proposición 4.1 *Se verifican las siguientes propiedades:*

1. `Linealidad.-` *Sean* f, g *funciones con derivadas hasta de orden* n *en el punto* x_0 *y sean* C_1 *y* C_2 *constantes, entonces se verifica*

$$T_n((C_1 f + C_2 g), x_0)(x) = C_1 T_n(f, x_0)(x) + C_2 T_n(g, x_0)(x).$$

2. *Sea* $g(x) = f(x + a)$ *siendo* a *una constante y* f n *veces derivable en* $x_0 + a$*. Se tiene entonces que*

$$T_n(g, x_0)(x) = T_n(f, x_0 + a)(x + a).$$

3. *Sea* $g(x) = f(cx)$ *siendo* c *una constante y* f n *veces derivable en* cx_0*. Se tiene entonces que*

$$T_n(g, x_0)(x) = T_n(f, cx_0)(cx).$$

   En particular, cuando $x_0 = 0$ *tenemos* $T_n(g, 0)(x) = T_n(f, 0)(cx)$*.*

4. `Derivación.-` *La derivada de un polinomio de Taylor de* f *es un polinomio de Taylor de* f'*; es decir, se tiene que:*

$$T_n'(f, x_0)(x) = T_{n-1}(f', x_0)(x)$$

4.1.2. Teorema de Taylor

Teorema 4.3 *Sea* f *una función* n *veces derivable en el punto* x_0 *y sea* $T_n(f, x_0)$ *su correspondiente polinomio de Taylor. Entonces*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(f, x_0)(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Definición 4.2 (Resto de Taylor) *Si* f *es una función para la cual existe el polinomio de Taylor de grado* n *en el punto* x_0*,* $T_n(f, x_0)$*, se define el* `resto de Taylor`*, de orden* n *de* f *en* x_0 *como el error cometido al aproximar* f *mediante su polinomio de Taylor*

$$R_n(f, x_0)(x) = f(x) - T_n(f, x_0)(x)$$

`Nota:` Por el teorema anterior, $R_n(f, x_0)$ es un infinitésimo de orden superior a $(x - x_0)^n$.

Teorema 4.4 (Teorema de Taylor) *Si las funciones* $f,\ f',\ f'', \ldots, f^{(n+1)}$ *están definidas sobre* $[x_0, x]$ *(o* $[x, x_0]$*), existe* $c \in (x_0, x)$ *(o* $c \in (x, x_0)$*), tal que el resto de Taylor de orden* n *de* f *en* x_0*, viene dado por*

$$R_n(f, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Esta fórmula se conoce como `forma de Lagrange` *del resto, y con ella se puede escribir la fórmula de Taylor del siguiente modo*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \ + \ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

`Notas:`

1. Existen otras expresiones para el resto; por ejemplo, la forma de Cauchy es

$$R_n(f,x_0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n(x-x_0)$$

2. El polinomio de Taylor $T_n(f,x_0)$ es el polinomio de grado menor o igual que n que mejor aproxima a f en un entorno de x_0, pero es preciso señalar el carácter local de esta aproximación. El error $f(x) - T_n(f,x_0)$ es precisamente el resto; con frecuencia haciendo n suficientemente grande se puede conseguir que éste sea tan pequeño como se quiera, pero a veces esto no es así (por ejemplo en el caso en que el polinomio de Taylor de una función f sea idénticamente nulo).

3. Se llama `Fórmula de McLaurin` de f a la fórmula de Taylor desarrollada en el punto $x_0 = 0$, es decir

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

4. Con el siguiente resultado podemos conocer la magnitud de $R_n(f,x_0)(x)$ y tendremos una estimación del error en la fórmula de Taylor:
Si la derivada (n+1)-ésima de f satisface las desigualdades

$$m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$$

en un entorno de x_0, entonces para todo x de ese entorno tenemos las estimaciones siguientes

$$m\,\frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} \leq R_n(f,x_0)(x) \leq M\,\frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} \quad \text{si } x > x_0$$

$$m\,\frac{(x_0-x)^{(n+1)}}{(n+1)!} \leq (-1)^{(n+1)}R_n(f,x_0)(x) \leq M\,\frac{(x_0-x)^{(n+1)}}{(n+1)!} \quad \text{si } x_0 > x$$

Definición 4.3 (Contacto) *Dadas dos funciones f y g derivables en un entorno del punto x_0, si las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ se cortan en x_0 y tienen tangente común se dice que tienen un contacto de primer orden.*

Definición 4.4 (Orden de contacto) *Sean f y g las funciones derivables $n+1$ veces en un entorno del punto x_0. Se dice que f y g tienen un* `contacto de orden al menos` *n en x_0 si sus polinomios de Taylor de orden n en x_0 coinciden, es decir, si*

$$f(x_0) = g(x_0),\ f'(x_0) = g'(x_0),\ \ldots,\ f^n(x_0) = g^n(x_0)$$

el orden de contacto será exactamente n si $f^{n+1}(x_0) \neq g^n(x_0)$.

4.1.3. Series de McLaurin importantes

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{1}{1+x} & = & 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, & -1 < x < 1 \\
\mathrm{e}^x & = & 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots, & -\infty < x < \infty \\
\mathrm{sen} x & = & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, & -\infty < x < \infty \\
\cos x & = & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, & -\infty < x < \infty \\
\ln(1+x) & = & x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots, & -1 < x \leq 1 \\
\mathrm{arctg}\ x & = & x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, & -1 \leq x \leq 1 \\
(1+x)^p & = & 1 + \binom{p}{1}x + \binom{p}{2}x^2 + \binom{p}{3}x^3 + \cdots + \binom{p}{n}x^n + \cdots, & -1 < x < 1
\end{array}$$

4.1.4. Aplicación al cálculo de infinitésimos y límites

Si $f(x)$ es infinitésimo en x_0 debe ocurrir que $f(x_0)=0$ y $f(x)$ será suma de infinitésimos para x_0 pues es de la forma

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_{n,x_0}(x)$$

Por tanto, $f(x)$ será equivalente al infinitésimo de menor orden que aparece (el primer sumando no idénticamente nulo).

`Ejemplos`

- $\operatorname{sen} x$ es un infinitésimo de orden 1 pues $\operatorname{sen} x = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots$
- $\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2} = \dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots$. Por tanto $\ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ es un infinitésimo de orden 3.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\operatorname{sen} 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}+\cdots}{x(2x-\dfrac{(2x)^3}{3!}+\cdots)}=\frac{1}{4}.$ $\square$