Tema 2 - Espacios vectoriales

1. Espacios vectoriales. Subespacios. `[LAY, pág. 190-201]`

a) Espacios vectoriales: definición y ejemplos. Álgebra vectorial.

b) Subespacios vectoriales: definición e interpretación geométrica en el caso $V = \mathbb{R}^n$.

c) Espacio generado por un conjunto de vectores: sistemas generadores.

d) Espacios de dimensión finita.

e) Idea sobre los espacios de dimensión infinita. Ejemplos [1].

2. Dependencia e independencia lineal. Bases. `[LAY, pág. 208-211, 216-221]`

a) Conjuntos de vectores linealmente independientes y conjuntos linealmente dependientes.

b) El teorema del conjunto generador. Bases. `[LAY, pág. 210-211]`

c) Coordenadas de un vector respecto de una base: unicidad de las coordenadas.

d) Ecuaciones paramétricas de un subespacio respecto de una base dada. `[Apuntes de clase]`

e) Eliminación de parámetros: ecuaciones implícitas.

f) Espacio nulo de una matriz.

3. La dimensión de un espacio vectorial. `[LAY, pág. 225-227]`

a) **Teorema de la base** (Steinitz) - *Todas las bases de un espacio vectorial de dimensión finita tienen el mismo número de elementos.* [Llamamos a ese número dimensión del espacio].

b) Subespacios: el teorema de la base incompleta.

c) Cambios de base. `[LAY, pág. 240-242]`

4. Intersección y suma de subespacios. `[Apuntes de clase y LAY, pág. 197 prob. 32,33 y 34]`

a) Intersección y suma de subespacios.

b) **Teorema de la dimensión** (Grassmann) - *Si V es un espacio vectorial y H y K son subespacios de V, entonces* $\dim(H+K) = \dim(H) + \dim(K) - \dim(H \cap K)$.

c) Suma directa. Espacios suplementarios.

5. Rango de un conjunto de vectores y rango de una matriz. `[Apuntes de clase]`

a) Rango de un conjunto de vectores: $\operatorname{rango}\big(\{v_1, v_2, \cdots, v_p\}\big) = \dim\big(\langle v_1, v_2, \cdots, v_p \rangle\big)$.

b) El *espacio filas* de una matriz. Rango por filas de una matriz.

c) El *espacio columnas* de una matriz. Rango por columnas de una matriz.

d) **Teorema** - *En cualquier matriz, su rango por filas es igual a su rango por columnas.*
Corolario - *Si A y B son matrices multiplicables,* $\operatorname{rango}(A \cdot B) \leqslant \min\{\operatorname{rango}(A), \operatorname{rango}(B)\}$.

6. El rango de una matriz y las relaciones con su forma escalonada. `[Apuntes de clase]`

a) **Lema** - $\langle v_1, v_2, \cdots, v_p \rangle = \langle v_1, \lambda v_1 + v_2, \cdots, v_p \rangle$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) **Teorema** - *En cualquier matriz, las transformaciones elementales por filas no alteran su* espacio filas *y mantienen las relaciones de dependencia e independencia lineal de sus columnas (aunque, en general, alteran el* espacio columnas*).*

c) Uso de la forma escalonada reducida para obtener bases del *espacio filas* y del *espacio columnas*.

d) Uso de la forma escalonada reducida para obtener unas ecuaciones implícitas de un subespacio.

---

[1] Estos espacios se citan sólo como ilustración; limitaremos nuestro estudio a los espacios de dimensión finita.