Criterios generales de corrección

I - Responda a las preguntas que se le formulan. Las respuestas a preguntas no formuladas carecen de valor.

II - Las respuestas deben razonarse. La aplicación mecánica de fórmulas carece de valor (aunque el resultado sea correcto).

III - El alumno debe conocer y manejar con soltura el cálculo básico por lo que las expresiones algebraicas deben simplificarse en lo posible y las operaciones han de completarse dando las respuestas correctas.

IV - Especial atención merecerá en todo el proceso de evaluación el uso que el alumno hace del lenguaje. Esto incluye tanto a símbolos y expresiones matemáticas como al lenguaje ordinario.

V - Los resultados obtenidos deben interpretarse correctamente. En particular, si un error no detectado nos lleva a un resultado absurdo, este debe reconocerse como tal (incluso si no podemos localizar el error).

1º Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ de la cual se sabe que $\begin{cases} f(1,-1,\ \ 1) = (5,-5,-1) \\ f(0,\ \ 1,-1) = (0,\ \ 2,-2) \\ f(0,\ \ 0,\ \ 1) = (3,-3,-1) \end{cases}$

a) Hallar la matriz de f en la base canónica. [1,5p]

b) Hallar los autovalores de f. [1p]

c) ¿Es diagonalizable la matriz de f? En caso negativo explicar la razón y en caso afirmativo hallar la matriz de paso correspondiente. [1,5p]

2º Cierto tipo de ballenas habita en los mares de ambos hemisferios. Sus pautas migratorias son las siguientes: cada año, el 60 % de las ballenas que estaban en el hemisferio norte emigran al hemisferio sur y el 70 % de las que estaban en el hemisferio sur emigran al hemisferio norte. A largo plazo, ¿cuál será la proporción de ballenas que hay en cada hemisferio? [3p]

3º *a)* Hallar todas las soluciones de la ecuación diofántica $378\,x - 112\,y = 56$. [2p]

b) Resolver la congruencia $(14)^{47}x \equiv 7 \pmod{11}$ [1p]

1º Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ de la cual se sabe que $\begin{cases} f(1,-1,\ \ 1) = (5,-5,-1) \\ f(0,\ \ 1,-1) = (0,\ \ 2,-2) \\ f(0,\ \ 0,\ \ 1) = (3,-3,-1) \end{cases}$

a) Hallar la matriz de f en la base canónica. [1,5p]

b) Hallar los autovalores de f. [1p]

c) ¿Es diagonalizable la matriz de f? En caso negativo explicar la razón y en caso afirmativo hallar la matriz de paso correspondiente. [1,5p]

SOLUCIÓN:

Apartado *a)* 1,5p

Primer método

Las columnas de la matriz pedida, que llamaremos M_c, deben ser las imágenes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} f(1,0,0) = f[(1,-1,1)+(0,1,-1)] = f(1,-1,1)+f(0,1,-1) = (5,-5,-1)+(0,2,-2) = (5,-3,-3) \\ f(0,1,0) = f[(0,1,-1)+(0,0,1)] \quad = f(0,1,-1)+f(0,0,1) \quad = (0,2,-2)+(3,-3,-1) = (3,-1,-3) \\ f(0,0,1) = (3,-3,-1) \end{cases}$$

$$M_c = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Segundo método

El conjunto $\mathcal{B} = \{(1,-1,1),\ (0,1,-1),\ (0,0,1)\}$ es obviamente una base de $\mathbb{R}^3$ y las matrices

$$M_{bc} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad P_{bc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

son, respectivamente, la matriz de f considerando en origen la base $\mathcal{B}$ y en destino la base canónica y la matriz de paso de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica. Así pues, la matriz pedida será $M_c = M_{bc} \cdot P_{bc}^{-1}$. En primer lugar, calcularemos P_{bc}^{-1}.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \mapsto F_3+F_2} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \mapsto F_2+F_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$M_c = M_{bc} \cdot P_{bc}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Apartado *b)* 1p

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -1-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \{F_1 \mapsto F_1 + F_3\} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 2-\lambda \\ -3 & -1-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -1-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} F_2 \mapsto F_2 + 3F_1 \\ F_3 \mapsto F_3 + 3F_1 \end{Bmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)^2(1+\lambda) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{cases} \lambda = \ \ 2 \ \text{(doble)} \\ \lambda = -1 \end{cases}}$$

Apartado *b)* 1p

La matriz de f es diagonalizable si (y sólo si) podemos encontrar una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores. Eso, en particular, significa que debería haber dos autovectores linealmente independientes asociados al autovalor $\lambda = 2$. Para buscar dichos autovectores, resolveremos la ecuación vectorial $(A - 2I)\vec{v} = \vec{0}$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - 2I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0 \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, los vectores $\vec{v}_1 = (1, -1, 0)$ y $\vec{v}_2 = (1, 0, -1)$ son autovectores asociados al autovalor $\lambda = 2$ y son linealmente independientes. Ya sabemos que la matriz es diagonalizable [¿Por qué?]. Queda ahora hallar un autovector correspondiente al autovalor $\lambda = -1$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A + I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La primera fila es menos la suma de las dos siguientes de modo que el sistema es equivalente a:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así pues, el conjunto $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1), (1, -1, -1)\}$ es una base formada por autovectores por lo que la matriz es diagonalizable. La matriz de paso es la matriz cuyas columnas son las coordenadas de esos vectores. En otras palabras (el lector comprobará el cálculo de P^{-1}):

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

El lector puede comprobar ahora que se verifica la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & -3 \\ -3 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2º Cierto tipo de ballenas habita en los mares de ambos hemisferios. Sus pautas migratorias son las siguientes: cada año, el 60 % de las ballenas que estaban en el hemisferio norte emigran al hemisferio sur y el 70 % de las que estaban en el hemisferio sur emigran al hemisferio norte. A largo plazo, ¿cuál será la proporción de ballenas que hay en cada hemisferio? [3p]

SOLUCIÓN:

Supongamos que inicialmente la proporción de ballenas (tanto por uno) que hay en el hemisferio norte es N_0 y la proporción correspondiente al hemisferio sur es S_0 (obsérvese que necesariamente debe ser $N_0 + S_0 = 1$). Al cabo de un año, las proporciones N_1 y S_1 serán:

$$\begin{cases} N_1 = 0,4N_0 + 0,7S_0 \\ S_1 = 0,6N_0 + 0,3S_0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} N_1 \\ S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,7 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ S_0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} N_n \\ S_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,7 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} N_0 \\ S_0 \end{pmatrix}$$

Como es natural, N_n y S_n representan las respectivas proporciones al cabo de n años. La cuestión es averiguar qué ocurre cuando $n \to +\infty$. Intentaremos primero diagonalizar la matriz de transición.

$$0 = \left| \begin{pmatrix} 0,4 & 0,7 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 0,4 - \lambda & 0,7 \\ 0,6 & 0,3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 0,7\lambda - 0,3 \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -0,3 \end{cases}$$

La matriz es diagonalizable pues hay dos autovalores diferentes. Hallaremos una base formada por autovectores.

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}0,4 & 0,7\\0,6 & 0,3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,6 & 0,7\\0,6 & -0,7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}0,7\\0,6\end{pmatrix}$$

Para proceder al cálculo de otro autovector, procedemos de forma similar.

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}0,4 & 0,7\\0,6 & 0,3\end{pmatrix}-(-0,3)\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,7 & 0,7\\0,6 & 0,6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\Longrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

La matriz de paso es $P=\begin{pmatrix}0,7 & 1\\0,6 & -1\end{pmatrix}$ y un cálculo sencillo muestra que $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{10}{13} & \frac{10}{13}\\\frac{6}{13} & \frac{-7}{13}\end{pmatrix}$. Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}N_n\\S_n\end{pmatrix}=\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}0,4 & 0,7\\0,6 & 0,3\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}N_0\\S_0\end{pmatrix}=\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix}0,7 & 1\\0,6 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n & 0\\0 & (-0,3)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{10}{13} & \frac{10}{13}\\\frac{6}{13} & \frac{-7}{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_0\\S_0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0,7 & 1\\0,6 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{10}{13} & \frac{10}{13}\\\frac{6}{13} & \frac{-7}{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_0\\S_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{13} & \frac{7}{13}\\\frac{6}{13} & \frac{6}{13}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_0\\S_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{13}(N_0+S_0)\\\frac{6}{13}(N_0+S_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{13}\\\frac{6}{13}\end{pmatrix}$$

En definitiva, a largo plazo no importa la distribución inicial. Si las condiciones ambientales permanecen estables, las proporciones en cada hemisferio tienden a estabilizarse; las 7 treceavas partes estarán en el hemisferio norte y las 6 treceavas partes en el hemisferio sur

---

3º *a)* Hallar todas las soluciones de la ecuación diofántica $378\,x-112\,y=56$. [2p]

b) Resolver la congruencia $(14)^{47}x\equiv 7 \pmod{11}$ [1p]

SOLUCIÓN:

Apartado *a)* 2p

En primer lugar, hallaremos m.c.d.$(378,112)$ con el algoritmo de Euclides extendido.

$$\begin{array}{lcl}
378=112\times 3+42 & \longrightarrow & 42=378\times 1-112\times 3\\
112=42\times 2+28 & \longrightarrow & 28=-42\times 2+112\times 1\\
 & & \quad =-(378\times 1-112\times 3)\times 2+112\times 1\\
 & & \quad =378\times(-2)+112\times 7\\
42=28\times 1+14 & \longrightarrow & 14=-28\times 1+42\\
 & & \quad =-(378\times(-2)+112\times 7)\times 1+(378\times 1-112\times 3)\\
 & & \quad =378\times 3-112\times 10\\
28=14\times 2 \ \boxed{\text{FIN}} & &
\end{array}$$

Por tanto, se tiene que m.c.d.$(378,112)=14$ y $14=378\times 3-112\times 10$. Puesto que $14\,|\,56$, la ecuación original tiene solución. Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{56}{14}=4$, obtenemos que:

$$378\times(3\times 4)-112\times(10\times 4)=14\times 4=56\quad\Longrightarrow\quad 378\times 12-112\times 40=56$$

El par $\boxed{x_0=12\ ,\ y_0=40}$ es una solución particular. Resolveremos ahora la ecuación homogénea.

$$378\,x-112\,y=0\Longrightarrow\frac{378}{14}\,x-\frac{112}{14}\,y=27\,x-8\,y=0\Longrightarrow 27\,x=8\,y\Longrightarrow\boxed{x_h=8n\quad y_h=27n\quad n\in\mathbb{Z}}$$

La solución general de la ecuación diofántica original es: $\boxed{x=12+8n\quad y=40+27n\quad n\in\mathbb{Z}}$

Apartado *b)* 1p

	$14\equiv 3 \pmod{11}$	$3^5\equiv 1 \pmod{11}$	$5\times 9\equiv 1 \pmod{11}$
$(14)^{47}x\equiv 7 \pmod{11}$	$(3)^{47}x\equiv 7 \pmod{11}$	$3^2x\equiv 7 \pmod{11}$	$x\equiv 35\equiv 2 \pmod{11}$

$$\boxed{x=2+11n\quad n\in\mathbb{Z}}$$