Tema 4 (III) - Aplicaciones lineales (3ª parte)

1. De la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ se sabe que $T \circ T = I$ y que $T\big(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\big) = \big(0, -\sqrt{2}\big)$.

a) Hallar la matriz de T en la base canónica.

b) Describir geométricamente T.

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $T(x, y, z) = (u, v, w)$, con $u = (m-2)x + 2y - z$, $v = 2x + my + 2z$, $w = 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z$. Probar que $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3$ salvo para ciertos valores de m que se calcularán. Para estos valores, estudiar $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

3. Hallar $T : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$ lineal y tal que $\ker(T) = \langle (-1, 0, 0, 1), (1, 3, 2, 0) \rangle$ e $\mathrm{Im}(f) = \langle (1, 1, 1), (0, -2, 1) \rangle$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x - y, x, x)$ en las bases canónicas respectivas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Consideremos las bases $\mathcal{B}_1 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B}_2 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, -1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

a) Hallar la matriz de la aplicación con respecto a $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.

b) La ecuación del subespacio H en la base $\mathcal{B}_1$ es $x - y = 0$. Hallar la ecuación de $T(H)$ en la base $\mathcal{B}_2$.

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ tal que $\ker(T) = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\}$ y $T(1, 1, 0) = (2, 2, 2)$.

a) Hallar la ecuación de T respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Encontrar una base en $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual $T(x, y, z) = (3x, 0, 0)$.

6. Sea T un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ tal que $T^2 = \mathbf{0}$, $T(1, 1, 1, 1) = (1, 1, 0, 0)$ y $T\ (1, , 1, 1, 0) = (1, 0, 0, 0)$. Hallar la matriz de T en la base canónica.

7. Sea T es un endomorfismo de $\mathbb{R}^4$. Se sabe que $\ker(T) \equiv \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ & t = 0 \end{cases}$ y que los vectores $(1, 1, 1, 0)$ y $(0, 0, 0, 1)$ se transforman es si mismos.

a) Hallar la matriz de T en la base canónica.

b) Sea $H = \{(x, y, z, t) \,|\, x - y = 0,\ x + t = 0\}$. Hallar unas ecuaciones paramétricas de $T(H)$.

c) Hallar la matriz de T en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$.

8. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$, $T : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^4$ lineal y
$$\begin{cases} T(u_1) = u_1 - 3u_2 + 2u_3 + 2u_4 \\ T(u_2) = \quad\ - 2u_2 + u_3 + 3u_4 \\ T(u_3) = 4u_1 - 2u_2 + 3u_3 - 7u_4 \\ T(u_4) = 4u_1 - 6u_2 + 5u_3 - u_4 \end{cases}$$

a) Hallar la matriz de T respecto de $\mathcal{B}$ y una base $\mathrm{Im}(T)$.

b) Hallar una base de $\ker(T)$ y sus ecuaciones implícitas.

c) Consideremos $H = \langle (1, -1, 0, 2), (-3, 4, 1, 2) \rangle$ y $K = \{(x, y, z, t) \,|\, t = 0,\ x + 2y = 0,\ x + 2z = 0\}$ (sus coordenadas están referidas a la base $\mathcal{B}$). Hallar $T(H + K)$ y $T^{-1}(K)$

9. Sea $G : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que

$$[G] = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 & 1 \\ 3 & b_2 & 0 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \qquad \ker(G) \equiv \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad \mathrm{Im}(G) \equiv x + y - 2z = 0$$

a) Responder sin hallar las incógnitas ¿Cuál es el rango de la matriz $[G]$?

b) Hallar a_1, a_3, b_2, b_4, c_1, c_2, c_3, y c_4.

c) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal definida por $\begin{cases} T(1, 1, 1) = (0, 1, 0, 1) \\ T(0, 1, -1) = (1, 1, 1, 1) \\ T(2, 3, 0) = (0, 3, 2, 5) \end{cases}$

(1) Probar que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3$.

(2) ¿Puede concluirse del apartado anterior que $\ker(G) = \ker(T \circ G)$?

(3) Hallar la matriz $[T \circ G]$ y corroborar o refutar la afirmación anterior.

(4) ¿Puede ser inyectiva la aplicación $G \circ T$?