Tema 4 (IV) - Diagonalización de endomorfismos y sus aplicaciones

1. Las matrices siguientes representan endomorfismos de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ referidos a la base canónica. Hallar sus autovalores y los subespacios de autovectores asociados a cada autovalor. A continuación, decidir si la matriz es diagonalizable y, en caso afirmativo, diagonalizarla hallando una matriz de paso.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Hallar A^n en los casos siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 18 \\ -6 & -11 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{1}{5} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, hallar $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$.

4. Encontrar una matriz B tal que $B^3 = A$: $\quad A = \begin{pmatrix} -10 & -18 & -18 \\ 0 & -1 & 0 \\ 9 & 18 & 17 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 12 & -7 & 0 \\ -12 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

5. Usar el teorema de Cayley-Hamilton para intentar hallar A^{-1} : $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

6. Cierto tipo de ballenas habita en los mares de ambos hemisferios. Sus pautas migratorias son las siguientes: cada año, el 60 % de las ballenas que estaban en el hemisferio norte emigran al hemisferio sur y el 70 % de las que estaban en el hemisferio sur emigran al hemisferio norte. A largo plazo, ¿cuál será la proporción de ballenas que hay en cada hemisferio?

7. En un ecosistema conviven zorros y gallinas. Llamaremos z_n y g_n, respectivamente, al número de zorros y gallinas en el mes n-ésimo. Las poblaciones de zorros y gallinas están relacionadas por las ecuaciones:

$$\begin{cases} z_{n+1} = 0,6z_n + 0,5g_n \\ g_{n+1} = -0,16z_n + 1,2g_n \end{cases}$$

Inicialmente hay 100 zorros y 1000 gallinas. Probar que, a largo plazo, las poblaciones de zorros y gallinas tienden a estabilizarse y hallar las poblaciones en la posición de equilibrio.

8. *La sucesión de Fibonacci.* Definimos $f_0 = 0 \quad f_1 = 1$ y para $n \geqslant 2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

a) Hallar una fórmula cerrada para f_n.

b) Hallar $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$. $\quad$ [El límite vale $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y se conoce como ϕ , en honor de Fidias - $\Phi\epsilon\iota\delta\iota\alpha\varsigma$ -]

9. Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias.

a) $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$ con $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$.

b) $x_n = 5x_{n-1} - 2x_{n-2} - 8x_{n-3}$ con $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$.

c) $\begin{cases} u_n = u_{n-1} - v_{n-1} & u_0 = 2 \\ v_n = 2u_{n-1} + 4v_{n-1} & v_0 = 1 \end{cases}$

10. Las granjas G1, G2 y G3 abastecen a una ciudad de huevos frescos. Cada mes, cierta proporción de consumidores de una granja se pasa a otra. En la matriz adjunta, cada elemento a_{ij} representa la proporción de ciudadanos que se cambian de consumir productos de la granja j a la granja i ($Gi \Leftarrow Gj$). Inicialmente la granja G1 acapara el 40 % del mercado, la G2 el 30 % y la G3 el 30 %. Estudiar la evolución del mercado a largo plazo.

	$G1$	$G2$	$G3$
$G1$	0, 8	0, 2	0, 1
$G2$	0, 1	0, 7	0, 3
$G3$	0, 1	0, 1	0, 6

11. Colocamos un ratón al azar en uno de los módulos de una caja con tres módulos y conexiones tal como aparecen en la figura de la derecha. Supongamos que el ratón se mueve de un módulo a otro eligiendo al azar. Por ejemplo, cada cinco minutos se abren las puertas y se fuerza al ratón a que se mueva mediante una corriente en el módulo en el que se encuentre. A largo plazo, ¿cuál es la probabilidad de que el ratón se encuentre en cada módulo?