Criterios generales de corrección

I - Responda a las preguntas que se le formulan. Las respuestas a preguntas no formuladas carecen de valor.

II - Las respuestas deben razonarse. La aplicación mecánica de fórmulas carece de valor (aunque el resultado sea correcto).

III - El alumno debe conocer y manejar con soltura el cálculo básico por lo que las expresiones algebraicas deben simplificarse en lo posible y las operaciones han de completarse dando las respuestas correctas.

IV - Especial atención merecerá en todo el proceso de evaluación el uso que el alumno hace del lenguaje. Esto incluye tanto a símbolos y expresiones matemáticas como al lenguaje ordinario.

V - Los resultados obtenidos deben interpretarse correctamente. En particular, si un error no detectado nos lleva a un resultado absurdo, este debe reconocerse como tal (incluso si no podemos localizar el error).

NO ESTÁ PERMITIDO EL USO DE CALCULADORAS

1º Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, hallar $C = A \times B$ y, a continuación,

a) Expresar las columnas de la matriz C como combinación lineal de las columnas de A, indicando la procedencia de los coeficientes de dicha combinación. [0,5p]

b) Expresar las filas de la matriz C como combinación lineal de las filas de B. [0,5p]

2º Hallar la forma escalonada reducida de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ [1p]

3º Usar la descomposición LU para resolver el sistema $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -3 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$ [1,5p]

4º Probar los siguientes teoremas:

a) Sean $u_1, u_2, \cdots, u_p$ vectores de un espacio vectorial V. Si u_1 depende linealmente del conjunto $\{u_2, \cdots, u_p\}$, entonces $\langle u_1, u_2, \cdots, u_p \rangle = \langle u_2, \cdots, u_p \rangle$. [1p]

b) Si el conjunto $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ es una base de V y el conjunto $A = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ es linealmente independiente, entonces $m \leqslant n$. [1,5p]

c) Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos. [0,5p]

5º Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$, $H = \langle (1,2,3,-1), (0,-1,2,-1) \rangle$ y $K \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y - z - t = 0 \end{cases}$,

a) Hallar unas ecuaciones implícitas de $H + K$. [1p]

b) Hallar una base de $H \cap K$. [0,5p]

6º En $\mathbb{R}^4$ consideramos la base $\mathcal{B} = \{(1,0,-1,2), (-2,1,0,-1), (3,-1,1,0), (0,1,-1,2)\}$ y el subespacio H cuyas ecuaciones referidas a la base $\mathcal{B}$ son $\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ y + z - t = 0 \end{cases}$.

a) Hallar las ecuaciones implícitas de H referidas a la base canónica. [1,5p]

b) Hallar una base de un subespacio K tal que $H \oplus K = \mathbb{R}^4$. [0,5p]

1º Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, hallar $C = A \times B$ y, a continuación,

a) Expresar las columnas de la matriz C como combinación lineal de las columnas de A, indicando la procedencia de los coeficientes de dicha combinación. [0,5p]

b) Expresar las filas de la matriz C como combinación lineal de las filas de B. [0,5p]

SOLUCIÓN:

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 5 & -6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Apartado *a)* 0,5p

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Los coeficientes de la combinación lineal del primer vector columna de C son los elementos de la primera columna de B y los del segundo de la segunda.

Apartado *b)* 0,5p

$$\begin{cases} (-1,0) &= \ \ 2\,(1,-2) - 1\,(3,-4) \\ (5,-6) &= -1\,(1,-2) + 2\,(3,-4) \\ (-3,2) &= \ \ 3\,(1,-2) - 2\,(3,-4) \end{cases}$$

Las filas de A son los coeficientes de las combinaciones lineales.

2º Hallar la forma escalonada reducida de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ [1p]

SOLUCIÓN:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2 \mapsto F_2 - 2F_1 \\ F_3 \mapsto F_3 - 3F_1 \\ F_4 \mapsto F_4 + 2F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_2 \mapsto -F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4 \mapsto F_4 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 \mapsto F_1 - F_2 \\ F_3 \mapsto F_3 + 2F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3º Usar la descomposición LU para resolver el sistema $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -3 & -12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix}$ [1,5p]

SOLUCIÓN:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\qquad \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 2 \\ 6 & 3 & -3 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \xrightarrow[F_3 \mapsto F_3 - 3F_1]{F_2 \mapsto F_2 + 2F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & -12 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \xrightarrow{F_3 \mapsto F_3 + 3F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 8 \\ w = 12 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(y - 3z) = \frac{1}{2}(6 + 6t - 12 - 6t) = -3 \\ y = -\frac{1}{2}(8 - 5z - 2t) = -\frac{1}{2}(8 - 20 - 10t - 2t) = 6 + 6t \\ z = \frac{1}{3}(12 + 6t) = 4 + 2t \\ t \text{ libre} \quad \uparrow \quad \text{Despejamos sustituyendo hacia arriba.} \end{cases}$$

4º `Esta pregunta versa sobre contenidos teóricos explicados en clase.` [3p]

5º Dados los subespacios de $\mathbb{R}^4$, $H = \langle (1,2,3,-1), (0,-1,2,-1) \rangle$ y $K \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + y - z - t = 0 \end{cases}$,

a) Hallar unas ecuaciones implícitas de $H + K$. [1p]

b) Hallar una base de $H \cap K$. [0,5p]

SOLUCIÓN:

Apartado *a)* 1p

Hallaremos, en primer lugar, una base de K.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \mapsto F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \mapsto \frac{1}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1 \mapsto F1 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3}\mu \\ y = \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3}\mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases}$$

Haciendo $\lambda = 3 \quad \mu = 0$ y $\lambda = 0 \quad \mu = 3$, obtenemos que $\boxed{K = \langle (1,1,3,0), (1,1,0,3) \rangle}$

El resultado anterior implica que $\boxed{H + K = \langle (1,2,3,-1), (0,-1,2,-1), (1,1,3,0), (1,1,0,3) \rangle}$

– Es evidente que $\dim(H) = \dim(K) = 2$ y que $H \neq K$. Así pues, sólo hay dos alternativas:

(1) - $H + K$ podría ser todo $\mathbb{R}^4$ y el problema habría terminado pues el teorema de Grassmann aseguraría entonces que $H \cap K$ sería el vector nulo.

(2) - $\dim(H + K) = 3$ y $\dim(H \cap K) = 1$.

Ahora estamos en condiciones de hallar las ecuaciones implícitas de $H+K$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow[F_5 \mapsto F_5 - x\,F_1]{\substack{F_3 \mapsto F_3 - F_1 \\ F_4 \mapsto F_4 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & -2x+y & -3x+z & x+t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_5 \mapsto F_5 + (-2x+y)F_2]{\substack{F_3 \mapsto F_3 - F_2 \\ F_4 \mapsto F_4 - F_2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -7x+2y+z & 3x-y+t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \mapsto -\frac{1}{2}F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & -7x+2y+z & 3x-y+t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_5 \mapsto F_5 + (7x-2y-z)F_3]{F_4 \mapsto F_4 + 5F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4x+y+z+t \end{pmatrix}$$

La ecuación implícita de $H+K$ es $\boxed{-4x+y+z+t=0}$

Una base de $H+K$ es $\{(1,2,3,-1),\,(0,-1,2,-1),\,(0,0,1,-1)\}$

Apartado *b)* 0,5p

El apartado anterior prueba que $\dim(H\cap K)=1$. Para hallar un vector en este espacio, y puesto que $H=\langle\,(1,2,3,-1),\,(0,-1,2,-1)\,\rangle$, buscaremos λ y μ para que

$$\lambda(1,2,3,-1)+\mu(0,-1,2,-1)=(\lambda,\,2\lambda-\mu,\,3\lambda+2\mu,\,-\lambda-\mu)\in K\equiv\begin{cases} x-y=0 \\ 2x+y-z-t=0\end{cases}$$

Sustituyendo las coordenadas del vector genérico de H en las ecuaciones de K, obtenemos:

$$\begin{cases} \lambda-(2\lambda-\mu)=0 \\ 2\lambda+(2\lambda-\mu)-(3\lambda+2\mu)-(-\lambda-\mu)=0\end{cases} \implies \begin{aligned} -\lambda+\ \mu&=0 \\ 2\lambda-2\mu&=0\end{aligned} \implies \lambda=\mu$$

Así pues, $\boxed{H\cap K=\{(\lambda,\,\lambda,\,5\lambda,\,-2\lambda)\mid\lambda\in\mathbb{R}\}=\langle\,(1,1,5,-2)\,\rangle}$

6º En $\mathbb{R}^4$ consideramos la base $\mathcal{B}=\{(1,0,-1,2),\,(-2,1,0,-1),\,(3,-1,1,0),\,(0,1,-1,2)\}$ y el subespacio H cuyas ecuaciones referidas a la base $\mathcal{B}$ son $\begin{cases} x+2y+2z=0 \\ y+\ z-t=0\end{cases}$.

a) Hallar las ecuaciones implícitas de H referidas a la base canónica. [1,5p]

b) Hallar una base de un subespacio K tal que $H\oplus K=\mathbb{R}^4$. [0,5p]

SOLUCIÓN:

Apartado *a)* 1,5p Tenemos dos opciones:

(1) - Encontrar una base de H con sus coordenadas referidas a $\mathcal{B}$, cambiar de base esos vectores y, finalmente, hallar las ecuaciones implícitas de H usando las coordenadas de esos vectores.

(2) - Hallar la matriz del cambio de la base canónica a $\mathcal{B}$ y usarla para hallar las ecuaciones pedidas.

(1) - Hallaremos una base de H con sus coordenadas referidas a la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \mapsto F_1 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = & -2\mu \\ y = -\lambda + & \mu \\ z = \lambda & \\ t = & \mu \end{cases}$$

Por tanto, $H = \langle\, (0,-1,1,0)_{\mathcal{B}}\,,\ (-2,1,0,1)_{\mathcal{B}}\,\rangle$

– Ahora hallamos las coordenadas de los vectores anteriores en la base canónica. Puesto que la matriz cuyas columnas son los vectores de $\mathcal{B}$ cambia de la base $\mathcal{B}$ a la canónica, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{Can} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}_{Can} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Así pues, $H = \langle\, (5,-2,1,1)_c\,,\ (-4,2,1,-3)_c\,\rangle$

– Estamos ya en condiciones de hallar las ecuaciones pedidas.

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & -3 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \mapsto F_3 - \frac{x}{5}F_1]{F_2 \mapsto F_2 + \frac{4}{5}F_1} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & \frac{2}{5}x + y & -\frac{1}{5}x + z & -\frac{1}{5}x + t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \mapsto F_3 - \frac{5}{2}\left(\frac{2}{5}x + y\right)F_2} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{9}{5} & -\frac{11}{5} \\ 0 & 0 & -2x - \frac{9}{2}y + z & 2x + \frac{11}{2}y + t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{H \equiv \begin{cases} 4x + 9y - 2z & = 0 \\ 4x + 11y + 2t & = 0 \end{cases}} \qquad (*)$$

(2) - La idea, en este segundo caso, es usar la matriz del cambio de la base canónica a la $\mathcal{B}$, esto es, la inversa de la matriz cuyas columnas son los vectores de $\mathcal{B}$ (que cambia de $\mathcal{B}$ a la canónica).

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_4 \mapsto F_4 - 2F_1]{F_3 \mapsto F_3 + F_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_3 \mapsto F_3 + 2F_2 \\ F_4 \mapsto F_4 - 3F_2}]{F_1 \mapsto F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \mapsto \frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -2 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2 \mapsto F_2 + F_3 \\ F_4 \mapsto F_4 + 3F_3}]{F_1 \mapsto F_1 - F_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{F_2 \mapsto F_2 - 3F_4 \\ F_3 \mapsto F_3 - F_4}]{F_1 \mapsto F_1 - 3F_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Es claro que tenemos ahora:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{Can}$$

Puesto que las ecuaciones de H referidas a la base $\mathcal{B}$ son

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sustituyendo las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{Can} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 7 & -15 & -11 \\ 4 & 3 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}_{Can} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El hecho de que las ecuaciones sean distintas a las obtenidas en $(*)$ no tiene importancia; los sistemas son equivalentes. El cálculo siguiente demuestra esta última afirmación pues las columnas de la segunda matriz son las coordenadas en la base canónica de una base de H.

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & -15 & -11 \\ 4 & 3 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Apartado *b)* 0,5p

- Es evidente que debe ser $\dim(K) = 2$. Sea $K = \{v_1, v_2\}$ con coordenadas referidas a la base canónica.
- Para buscar el primer vector, bastará con encontrar $v_1 \notin H$, esto es, que no satisfaga las ecuaciones $(*)$. Esto puede hacerse fácilmente. Por ejemplo, haciendo $v_1 = (1, 0, 0, 0)$.
- Para el segundo vector esto no puede hacerse de forma tan automática pues el hecho de que $v_2 \notin H$ no implica que el conjunto $\{(5, -2, 1, 1), (-4, 2, 1, -3), (1, 0, 0, 0), v_2\}$ sea linealmente independiente.
- Hallaremos la ecuación implícita del subespacio $J = \{(5, -2, 1, 1), (-4, 2, 1, -3), (1, 0, 0, 0)\}$ y luego buscamos un v_2 tal que $v_2 \notin J$, esto es, que no satisfaga la ecuación de J.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & -3 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \mapsto F_4 - x\,F_1]{\substack{F_2 \mapsto F_2 - 5F_1 \\ F_3 \mapsto F_3 + 4F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & y & z & t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4 \mapsto F_4 + \frac{y}{2}F_2]{F_3 \mapsto F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{y}{2} + z & \frac{y}{2} + t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4 \mapsto F_4 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2} + z\right)F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & y + z + t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{J \equiv \ y + z + t = 0} \qquad (**)$$

Es obvio que, por ejemplo, si $v_2 = (0, 1, 0, 0)$, entonce $v_2 \notin J$ pues no se satisface $(**)$.

En consecuencia, $\boxed{K = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}}$ `[Hay muchas más soluciones]`