Tema 5 - El espacio euclídeo $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$

1. El producto interior [1] $\cdot\,,\cdot$, y la norma euclídea, $\|\cdot\|_2$, en $\mathbb{R}^n$. `[Lay, pág 330-333]`

– Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ y $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ sus coordenadas en la base canónica.

a) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$. [Si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son vectores fila, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\times\mathbf{y}^t$]

b) $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ [Por sencillez, escribiremos $\|\mathbf{x}\|$ en vez de $\|\mathbf{x}\|_2$].

c) Distancia: $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$.

2. Las propiedades del producto interior y de la norma euclídea.

a) Bilinealidad del producto interior. `[Lay, pág 331]`

b) La desigualdad de Cauchy-Swartz. `[Apuntes de clase]`

c) Las propiedades de la norma y de la distancia. `[Apuntes de clase]`

d) **Teorema del coseno** - *Si* $\theta = \measuredangle(\mathbf{x},\mathbf{y})$, *entonces* $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\theta$. `[Lay, pág 335-336]`

Corolario - $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$ *si y sólo si* $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$ *y* $\mathbf{x}\parallel\mathbf{y}$ *si y sólo si* $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$.

e) Proyección de un vector sobre otro. `[Lay, pág 340]`

f) El teorema de Pitágoras y la identidad del paralelogramo. `[Apuntes de clase]`

g) $(*)$ Producto escalar y cambios de base. `[Apuntes de clase]`

3. Ortogonalidad. `[LAY pág. 334-339 y 345-358]`

a) Subespacio ortogonal a un conjunto de vectores. `[Apuntes de clase y LAY pág. 337 prob 30]`

b) **Lema** - $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p\}^\perp = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_p\rangle^\perp$. `[LAY pág. 337 prob 29]`

c) **Teorema** - *Para toda matriz A se verifica que* $\text{filas}(A)^\perp = \text{nulo}(A)$. `[LAY pág. 335]`

d) Conjuntos ortogonales. Independencia lineal de un conjunto ortogonal. Bases ortogonales.

e) Bases ortonormales: coordenadas de un vector respecto de una base ortonormal.

f) Matrices ortogonales.

4. El teorema de la proyección. `[Apuntes de clase y LAY pág. 350-352]`

a) **Teorema de la proyección** - *Sean H un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y $\mathcal{B}_H = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_p\}$ una base ortonormal de H. Definimos la proyección sobre H,* $\mathsf{P}_H : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ *por*

$$\mathsf{P}_H(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \cdots + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p$$

(1) - P_H *es lineal,* $\text{Im}(\mathsf{P}_H) = H$ *y* $\mathsf{P}_H^2 = \mathsf{P}_H$.

(2) - *Para todo* $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, *se verifica que* $\mathbf{x} - \mathsf{P}_H(\mathbf{x}) \in H^\perp$.

(3) - $\ker(\mathsf{P}_H) = H^\perp$.

(4) - *Si* $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}\in H$ *y* $\mathbf{u}\neq\mathsf{P}_H(\mathbf{x})$, *entonces* $\|\mathbf{x}-\mathbf{u}\| > \|\mathbf{x}-\mathsf{P}_H(\mathbf{x})\|$.

(5) - $\mathsf{P}_H(\mathbf{x})$ *no depende de la base $\mathcal{B}_H$ elegida.*

Corolario - *Si H es un subespacio de $\mathbb{R}^n$, se cumple que* $H\oplus H^\perp = \mathbb{R}^n$.

b) El proceso de *Gram-Schmidt*. `[LAY pág. 354-356]`

5. El problema de la "*mejor*" aproximación: mínimos cuadrados. `[LAY pág. 360-373]`

a) Las *ecuaciones normales* para la solución aproximada de la ecuación incompatible $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

b) Ajuste de funciones por el método de los mínimos cuadrados.

(1) - Rectas de regresión.

(2) - Ajuste polinomial.

(3) - Otros modelos funcionales.

---

[1] En muchos textos se le denomina *producto escalar* y también *producto punto*.