Capítulo 3

Función real de variable real. Derivabilidad

3.1. Derivada de una función en un punto.

Con la creación de la geometría analítica por René Descartes y Pierre Fermat, muchos de los problemas geométricos se volvieron a plantear en términos de expresiones algebraicas y se determinaron nuevas clases de curvas empleando ecuaciones algebraicas en vez de condiciones geométricas. El concepto de derivada evolucionó en este nuevo contexto al intentar resolver problemas que en un principio no parecían guardar relación alguna, como el problema clásico de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado, el de encontrar los valores máximos y mínimos de una función, el problema de la velocidad, (en general tasas de cambio) y, por último, el problema del cálculo de áreas.

El concepto de derivada no aparece hasta el siglo XVII, cuando el matemático Pierre de Fermat observó que, en los puntos donde una curva tiene un máximo o un mínimo, la tangente a la curva ha de ser horizontal. Por lo tanto, el problema de determinar estos valores extremos se reduce al de la localización de tangentes horizontales.

Esto conduce a la cuestión más general de la determinación de la dirección de la tangente en un punto arbitrario de una curva. Aunque soluciones parciales del problema las fueron dando Fermat (1601-1655), Descartes (1596-1650), Huygens (1629-1695) y Barrow (1630-1677), Newton (1642-1727) y Leibnitz (1646-1716), independientemente el uno del otro, fueron, en gran parte, los responsables del desarrollo de las ideas básicas del Cálculo Diferencial, además de establecer la relación con la otra gran rama del Cálculo, el Cálculo Integral.

Definición 3.1 (Función derivable en un punto) *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *, decimos que* f *es* `derivable` *en* $x_0 \in D$ *si existe y es finito el siguiente límite:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Al valor del límite se le llama `derivada de` f *en* x_0 *y lo denotamos por* $f'(x_0)$*.*

De forma equivalente, la derivada de una función en un punto se puede expresar como el límite siguiente:

$$f'(x_0) \; = \; \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La unicidad del límite implica la unicidad de la derivada de una función en un punto.
Se observa que la existencia del límite exige la igualdad entre los límites laterales

$$f'(x_0^+) \; = \; \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{y} \qquad f'(x_0^-) \; = \; \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

que se denominan, `derivadas laterales por la izquierda` y `por la derecha` en el punto x_0, respectivamente. Cuando ambas derivadas son iguales, la función es derivable en dicho punto; si las derivadas laterales existen pero son distintas, la función f no es derivable en dicho punto.

Interpretación geométrica de la derivada

La noción de Euclides de una tangente, como una recta que toca a una curva en un solo punto es totalmente correcta para círculos, pero puede no ser satisfactoria para otras curvas. El concepto de límite proporciona una manera de obtener una mejor definición.

Sea P un punto en una curva y Q un *punto móvil* cercano a P en esa curva. Se considera la recta que pasa por P y Q, llamada `recta secante`. La `recta tangente` en P es la posición límite (si ésta existe) de la recta secante cuando Q se mueve hacia P a lo largo de la curva.

Supongamos que la curva es la gráfica de la función $y = f(x)$. Entonces P tiene coordenadas $(x_0, f(x_0))$, Q tendrá coordenadas $(x_0 + h, f(x_0 + h)))$ y la recta secante que pasa por P y Q tiene pendiente m_{sec} dada por

$$m_{\text{sec}} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Definición 3.2 *La* `recta tangente` *a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$ es aquella recta que pasa por P con pendiente*

$$m_{\tan} = \lim_{h\to 0} m_{\text{sec}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

siempre y cuando este límite exista.

Es decir, la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de dicha función en el punto. La ecuación de la recta tangente t será, entonces:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

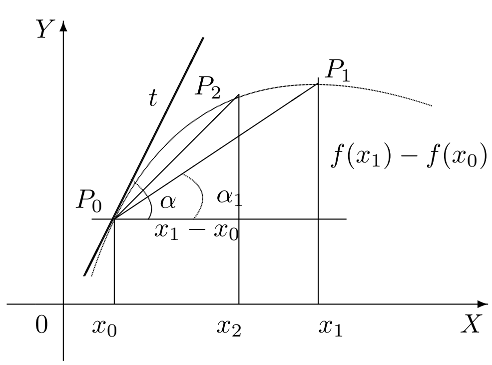


Figura 3.1: Interpretación geométrica de la derivada

Si f es continua en x_0 y

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty,$$

la función no es derivable aunque sí tiene tangente vertical en x_0.

La derivada de una función en un punto tiene también la siguiente interpretación física. Si $s = s(t)$ es la función que nos da la posición de un objeto en movimiento rectilíneo, la velocidad instantánea del objeto en el instante t viene dada por el incremento en la posición del objeto dividido por el tiempo en que realiza dicho incremento cuando éste es infinitamente pequeño, es decir

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t},$$

pero este límite no es sino la derivada de la función de posición del objeto, es decir,

$$v(t) = s'(t).$$

3.1.1. Relación entre continuidad y derivabilidad

Teorema 3.1 (Relación entre continuidad y derivabilidad) *Si f es derivable en x_0, entonces f es continua en x_0.*

En cambio, la continuidad no asegura la derivabilidad. Para demostrarlo basta poner como ejemplo la función $f(x) = \mid x \mid$ que como sabemos, es continua en el 0 y sin embargo las derivadas laterales son $f'(0^+) = 1$ y $f'(0^-) = -1$, por lo que la función no es derivable en 0.
Podemos concluir, por tanto, que la continuidad de una función en un punto no es condición suficiente de derivabilidad de la función en dicho punto.

3.2. Función derivada

Definición 3.3 (Función derivable en un conjunto) *Si una función $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es derivable en todo $x \in A \subset \overset{o}{D}$, diremos que f es* `derivable` *en A.*

Definición 3.4 (Función derivada) *Si f es derivable en A, llamamos* `función derivada` *a la aplicación $f' : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que a cada $x \in A$ le hace corresponder $f'(x)$.*

El proceso de encontrar la derivada de una función de manera directa a través de la definición, puede ser un proceso largo y tedioso. Vamos a desarrollas algunas herramientas que nos permitan acortar este proceso.

Recordamos que la derivada de una función f es otra función f'. Cuando realizamos la derivada de f, decimos que estamos `derivando` o `diferenciando` f. La derivada `opera` sobre f para producir f'. Con frecuencia se suele utilizar el símbolo D_x para indicar la operación de diferenciación. El símbolo D_x indica que estamos tomando derivada de lo que sigue. Este D_x es un ejemplo de un `operador`. Un operador es una función cuya entrada es una función y cuya salida es otra función.

Proposición 3.1 (álgebra de funciones derivables) *Sean f y g dos funciones derivables en un $D \subseteq \mathbb{R}$ y sea $\lambda \in \mathbb{R}$, se verifica:*

a) $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$,

b) $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$,

c) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,

d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, con $g(x) \neq 0$.

Teorema 3.2 (Derivada de la función compuesta. Regla de la cadena) *Sean* $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ *y* $g \in \mathcal{F}(B,\mathbb{R})$, *con* $g(B) \subseteq D$. *Si* g *es derivable en* $x \in \overset{o}{B}$ *y* f *es derivable en* $g(x) \in D$, *entonces* $f \circ g$ *es derivable en* $x \in \overset{o}{D}$ *y dicha derivada es:*

$$(f \circ g)'(x) \;=\; f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Corolario 3.3 (Derivada de la función inversa) *Sea* $f :\; D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *, continua e inyectiva. Si* f *es derivable en* $\overset{o}{D}$ *y* $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overset{o}{D}$, *entonces* $\forall y \in f(D)$ *se verifica:*

$$f^{-1} \quad \text{es derivable en } f(D) \qquad \text{y} \qquad \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\left(f' \circ f^{-1}\right)(y)} = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Las condiciones establecidas en el teorema 3.1 determinan que D_x es un `operador lineal` (Un operador L es lineal si para todas las funciones f y g se verifica que $L(kf) = kL(f)$ y $L(f+g) = L(f) + L(g)$).

3.2.1. Derivadas de las funciones elementales

A continuación damos una relación de las funciones derivadas de las funciones elementales.

Función	**Derivada**	**Función**	**Derivada**
x^n	nx^{n-1}	a^x	$a^x \ln a$
$\mathrm{sen} x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\mathrm{sen} x$
$\mathrm{tg}\, x$	$\sec^2 x$ $= 1 + \mathrm{tg}^2\, x$	$\mathrm{cotg} x$	$-\mathrm{cosec}^2 x$ $= -(1 + \mathrm{cotg}^2 x)$
$\mathrm{arcsen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mathrm{arccos} x$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$

Aplicando la regla de la cadena y las propiedades de la derivada, se obtienen las derivadas de funciones más generales.

3.2.2. Derivación logarítmica

Dada la función $y = h(x)$, la derivación logarítmica consiste en tomar logaritmos neperianos en ambos miembros de la igualdad y derivar; este método se usa algunas veces cuando la complejidad de la función así lo requiere y se hace imprescindible cuando queremos hallar la derivada de las funciones exponenciales. Veamos este caso:

$$y = [f(x)]^{g(x)}; \quad \ln y \;=\; \ln\,[f(x)]^{g(x)} \;=\; g(x)\ln f(x).$$

Ahora derivamos en ambos miembros, teniendo en cuenta que y es una función:

$$\frac{y'}{y} \;=\; g'(x)\;\ln f(x) \;+\; g(x)\frac{1}{f(x)}\;f'(x),$$

como lo que queremos calcular es y', nos queda:

$$y' \;=\; [f(x)]^{g(x)}\left\{g'(x)\ln f(x) \;+\; g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}.$$

Los casos particulares en los que el exponente o la base sean una constante están contemplados en la tabla dada anteriormente.

3.2.3. Notación de Leibnitz

La notación de Leibnitz para la derivada es muy utilizada aún, especialmente en campos como física, química y economía.

Incrementos

Si el valor de una variable x cambia de x_1 a x_2, entonces $x_2 - x_1$, se denomina un `incremento` de x y por lo general se denota Δx.

Consideremos la función $y = f(x)$. Si x cambia de x_1 a x_2, entonces y cambia de $y_1 = f(x_1)$ a $y_2 = f(x_2)$. Así, al incremento $\Delta x = x_2 - x_1$ corresponde un incremento en y dado por

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1).$$

La notación de Leibnitz

Supongamos que la variable independiente varía de x a $x + \Delta x$. El cambio correspondiente de la variable dependiente y, será

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

y la razón

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

representa la pendiente de una recta secante que pasa por $(x, f(x))$. Cuando $\Delta x \to 0$, la pendiente de esta recta secante tiende a la de la recta tangente, y para esta última pendiente, Leibnitz utilizó la notación dy/dx. Por tanto

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

La notación dy/dx es un símbolo estándar para la derivada, donde d/dx es un símbolo con el mismo significado que D_x.

Otra forma de la regla de la cadena

Sean $y = f(u)$ y $u = g(x)$. Con la notación de Leibnitz, la regla de la cadena adquiere una forma particularmente elegante

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

3.2.4. Derivadas de orden superior. Fórmula de Leibnitz

Si la función f' es derivable, su derivada se denota por f'' y se denomina `función derivada segunda` de f; si podemos proceder de esta manera n veces, obtendremos la `derivada n-ésima` de la función f, que denotaremos por $f^{(n)}$.

Cuando una función admite función derivada en un intervalo, y ésta a su vez también es derivable y así sucesivamente, obtenemos las derivadas primera, segunda, tercera, etc. de la función, decimos entonces que éstas son las derivadas sucesivas de la función y las expresamos

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x),\ \cdots f^{(n)}(x).$$

En la siguiente tabla recogemos las distintas expresiones de las derivadas sucesivas según las diferentes notaciones que hemos utilizado.

Derivada Derivada	**Notación** f'	**Notación** y'	**Notación D**	**Notación de Leibnitz**
Primera	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\dfrac{dy}{dx}$
Segunda	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n-ésima	$f^{(n)}$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\dfrac{d^ny}{dx^n}$

El siguiente teorema nos da la expresión de la derivada $n-$ésima del producto de funciones.

Teorema 3.4 (Fórmula de Leibnitz) *Sean f y g dos funciones n veces derivables en D, entonces también es n veces derivable su producto $h = f \cdot g$, y su derivada n-ésima es para cada $x \in \overset{o}{D}$:*

$$h^{(n)}(x) = (f \cdot g)^{(n)}(x) \ = \ \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x),$$

siendo $f^{(0)} = f$ y $g^{(0)} = g$.

3.2.5. Derivación implícita

Hasta ahora, nuestras ecuaciones en dos variables se expresaban generalmente de `forma explícita` $y = f(x)$. Es decir, una de las dos variables está dada explícitamente en función de la otra. No obstante, muchas funciones vienen de `forma implícita` por una expresión de la forma $F(x, y) = 0$. Si queremos hallar dy/dx en una ecuación dada implícitamente, la primera idea que se ocurre es tratar de despejar y, y derivar la forma explícita obtenida. Pero este método sólo funciona si la y es fácil de despejar, algo que no siempre es posible.

En este caso se utiliza un procedimiento denominado `derivación implícita`, procedimiento que supone que y es una función derivable de x.

Para entender cómo hallar dy/dx implícitamente, debemos observar que la derivación se efectúa *respecto de* x. Ello quiere decir que, cuando derivemos términos que sólo contienen a x, podemos actuar como de costumbre, pero cuando derivamos términos que contienen a y, hemos de aplicar la regla de la cadena porque estamos suponiendo que y está definida implícitamente como una función de x.

Ilustraremos el procedimiento con un ejemplo:
Se trata de calcular dy/dx sabiendo que $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$.

1. En primer lugar, se derivan los dos miembros de la ecuación respecto de x:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[y^3 + y^2 - 5y - x^2] &= \frac{d}{dx}[-4] \\ \frac{d}{dx}[y^3] + \frac{d}{dx}[y^2] - 5\frac{d}{dx}[y] - \frac{d}{dx}[x^2] &= \frac{d}{dx}[-4] \\ 3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - 2x &= 0 \end{aligned}$$

2. A continuación se agrupan los términos con dy/dx en la izquierda de la ecuación y todos los demás a la derecha:

$$\begin{aligned} 3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} &= 2x \\ (3y^2 + 2y - 5)\frac{dy}{dx} &= 2x \end{aligned}$$

3. Finalmente se despeja dy/dx:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}$$

Observamos que en la expresión obtenida de dy/dx aparecen tanto x como y. Pero si sólo deseamos determinar la pendiente en un punto en donde conocemos ambas coordenadas, esto no es dificultad. Por ejemplo, la pendiente de la gráfica en el punto (1,-3), será 1/8.

La derivación implícita nos permite extender la fórmula de derivación de una función potencial x^n para exponentes racionales.

Teorema 3.5 *Sea* $y = x^r,\ x > 0,\ r \in \mathbb{Q}$*, entonces* $y' = rx^{r-1}$.

Razones o tasas de cambio relacionadas

Si una variable y depende del tiempo t, entonces su derivada dy/dt se denomina `razón de cambio con respecto al tiempo` o sólo `razón de cambio`. Si y se da de forma explícita en términos de t, el problema es sencillo; basta derivar y y evaluar la derivada en el instante requerido.

Puede ser que en vez de conocer y de manera explícita en función de t, conozcamos una relación entre y y otra variable x, y que también conozcamos algo acerca de dy/dx. Aún podemos ser capaces de encontrar dy/dt, ya que dy/dt y dx/dt son `tasas de cambio relacionadas` o `razones relacionadas`. Por lo general esto requiere derivación implícita.

Un procedimiento para resolver razones relacionadas, se puede esquematizar de la siguiente forma

1. Asignar símbolos a las cantidades dadas y a las cantidades a determinar y escribir una ecuación que ligue a las variables cuyas razones están dadas o han de determinarse.

2. Usando la regla de la cadena, derivar implícitamente ambos miembros de la ecuación respecto de t.
3. Sustituir en la ecuación resultante todos los valores conocidos de las variables y sus razones de cambio. Deducir entonces la razón de cambio requerida.

3.2.6. Diferencial de una función

La notación de Leibnitz dy/dx ha sido utilizada para la derivada de y con respecto a x, en el sentido de que d/dx es un operador sinónimo de D_x. Es decir, hasta ahora, hemos tratado dy/dx como un sólo símbolo y no hemos tratado de dar significados separados a dy y dx. En esta sección daremos significado a dx y dy.

Sea f una función derivable. Sea $P(x_0, y_0)$ un punto en la gráfica de $y = f(x)$. Por ser f derivable

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Así, si Δx es pequeño, el cociente $[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)]/\Delta x$ será aproximadamente $f'(x_0)$, de modo que

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx \Delta x f'(x_0)$$

El lado izquierdo de esta expresión se denomina Δy o bien $\Delta f(x_0, \Delta x)$ y representa el cambio *real* en y cuando x cambia de x_0 a $x_0 + \Delta x$. El lado derecho se denomina dy, y sirve como una aproximación para Δy.

Si f es continua en x_0 e Δx se acerca a cero, $\Delta f(x_0, \Delta x)$ también lo hace.

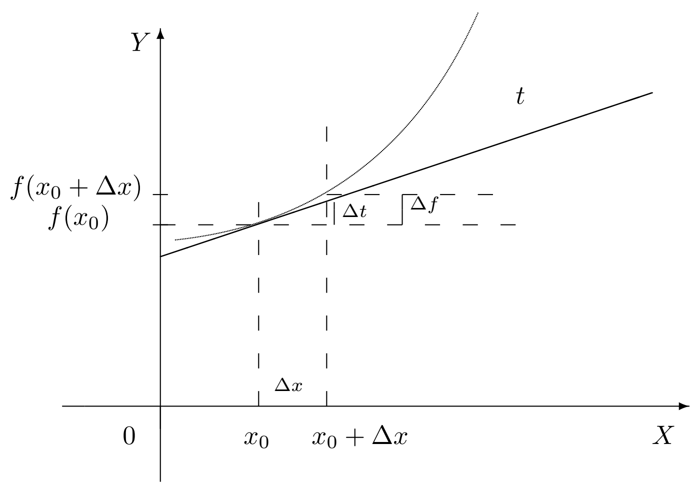


Figura 3.2: Incremento de la función y de la función tangente en un punto.

Teorema 3.6 *Sean f una función derivable en el punto x_0 y t la tangente a f en el punto x_0. Entonces*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0,\, \Delta x) - \Delta t(x_0,\, \Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Demostración
La tangente en x_0 viene dada por $t(x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$$\Delta t(x_0,\, \Delta x) = t(x_0 + \Delta x) - t(x_0) = f'(x_0)\, \Delta x.$$

Por tanto,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0 + \Delta x) - \Delta t(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot \Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = 0. \blacksquare$$

El teorema anterior nos dice que $\Delta f(x_0, \Delta x) - \Delta t(x_0, \Delta x)$ es un infinitésimo de orden superior a Δx, y por ello, el error al aproximar $\Delta f(x_0, \Delta x)$ por $\Delta t(x_0, \Delta x)$ es menor que Δx.

Así pues, para Δx pequeño, $\Delta t(x_0, \Delta x)$ es una buena aproximación del incremento de la función y por tanto

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x$$

Definición 3.5 (Diferencial de una función en un punto) *Se llama* `diferencial` *de f en el punto x_0 a la función incremental de la tangente en dicho punto. Esto es:*

$$df(x_0,\, \Delta x) = \Delta t(x_0,\, \Delta x) = f'(x_0)\, \Delta x$$

En el caso particular en que $f(x) = x$, se tiene $df = dx = \Delta x$. Por ello, la definición anterior suele expresarse como:

$$df(x_0,\, \Delta x) = f'(x_0)\, dx.$$

Para cada x fijo la diferencial de f es lineal en dx.

Definición 3.6 (Función diferencial) *Sea f una función cuyo dominio de derivabilidad, D, es no vacío; se llama* `función diferencial` *de f a la aplicación*

$$\begin{array}{ll} D \times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,\, dx) & \longrightarrow f'(x)\, dx \end{array}.$$

Normalmente lo expresaremos como $df = f'(x)dx$.

La función diferencial depende de x y de dx; es, pues, una función de dos variables. Naturalmente, para un x fijo depende de dx. Es, recordemos, una "buena" aproximación lineal de Δf y por tanto sirve para aproximar el valor de f en $x_0 + \Delta x$.
Este hecho es muy útil en ciencia e ingeniería, donde suelen aparecer fórmulas complicadas con las que resulta bastante difícil trabajar, y es frecuente, en estos casos, intentar linealizar el problema.
Las reglas para hallar la diferencial de una función son las mismas que las del cálculo de derivadas.

Ejemplo: El período de un péndulo viene dado por $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, donde l es la longitud del péndulo y g es la aceleración de la gravedad. Si el péndulo se ha calentado de manera que su longitud a crecido un $0,4\,\%$, calcular el porcentaje de cambio del período.

Para calcular el porcentaje de cambio tenemos que calcular el cociente $\dfrac{\Delta T}{T}$, siendo ΔT el incremento que experimenta el período del péndulo con el cambio de temperatura. Para calcular ΔT, tenemos en cuenta que $T = f(l)$ y entonces $\Delta T = f'(l)\Delta l$.

$$\Delta T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \frac{1}{2\sqrt{l}} \Delta l$$

Como $\Delta l = 0,004\, l$, resulta $\dfrac{\Delta T}{T} = \dfrac{\Delta l}{2\, l} = \dfrac{0,004\, l}{2\, l} = 0,002$ que es un $0,2\,\%$. $\square$

3.3. Teoremas fundamentales del Cálculo Diferencial

Anteriormente se ha estudiado la noción de derivabilidad de una función en un punto, que tiene, como la continuidad en un punto, un carácter local, porque en ella se hacen intervenir solamente los valores que toma la función en un entorno del punto en cuestión. A continuación se estudiarán algunas propiedades de carácter global de las funciones derivables.

3.3.1. Estudio local de funciones derivables.

Crecimiento de una función en un punto

Una forma equivalente de definición de función creciente es la siguiente

Definición 3.7 *Sea* $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in D$. *Se dice que* f *es* `creciente` *en* x_0, *si*

$$\textit{existe} \quad \delta > 0 \quad / \quad \textit{para} \quad \textit{cada} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Análogamente diremos que f *es* `decreciente` *en* x_0, *si*

$$\textit{existe} \quad \delta > 0 \quad / \quad \textit{para} \quad \textit{cada} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\} \qquad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

A partir de esta definición es inmediato demostrar las proposiciones siguientes

Proposición 3.2 *Sea* $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivable en* x_0. *Se verifica que*

1. *Si* f *es creciente en* x_0, *entonces* $f'(x_0) \geq 0$
2. *Si* f *es decreciente en* x_0, *entonces* $f'(x_0) \leq 0$

Proposición 3.3 *Sea* $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *derivable en* x_0. *Se verifica que*

1. *Si* $f'(x_) > 0$ *entonces* f *es creciente en* x_0.
2. *Si* $f'(x_) < 0$ *entonces* f *es decreciente en* x_0.

Si $f'(x_0) = 0$, no se puede afirmar nada acerca de la monotonía de la función f, solo podemos asegurar que en x_0 la tangente a la curva es horizontal.

Extremos relativos

Definición 3.8 (Extremo) *Sea* $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función y* $x_0 \in D$. *Se dice que*

(i) x_0 *es un* `máximo local o relativo` *de* f *en* S, *si existe un entorno de* x_0, $E(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, *tal que*
$$f(x) \leq f(x_0), \ \forall x \in E(x_0)$$

(ii) x_0 *es un* `mínimo local o relativo` *de* f *en* S, *si existe un entorno de* x_0, $E(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, *tal que*
$$f(x) \geq f(x_0), \ \forall x \in E(x_0)$$

(iii) $f(x_0)$ *es un* `extremo relativo` *de* f *en* S, *si es un máximo o un mínimo relativo.*

Teorema 3.7 *Sea* $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y* $x_0 \in D$. *Si* f *tiene un extremo relativo en* x_0 *y* f *es derivable en* x_0, *entonces* $f'(x_0) = 0$.

Es decir, en el punto x_0, la tangente a la gráfica de la función es horizontal.

`Notas:`

1. La función puede tener extremos relativos en puntos donde no es derivable. ($f(x) = |x|$, en $(-1, 1)$.)

2. La condición es necesaria pero no suficiente. ($f(x) = x^3$ en $x_0 = 0$.)

Se pueden obtener condiciones suficientes sobre la existencia de extremos relativos estudiando el comportamiento de la función en u entorno de x_0, o también aplicando el siguiente resultado

Proposición 3.4 *Sea f una función tal que f' es derivable en x_0 y con $f'(x_0) = 0$, entonces*

- *Si $f''(x_0) > 0$, f tiene un mínimo relativo en x_0.*

- *Si $f''(x_0) < 0$, f tiene un máximo relativo en x_0.*

Concavidad, convexidad, puntos de inflexión

Definición 3.9 *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, derivable en x_0. Decimos que f es* `cóncava` *(*`convexa`*) en el punto x_0, si existe un entorno de x_0, $E(x_0)$ en el $\forall x_1, x_2 \in E(x_0)$, el segmento rectilíneo que une x_1 con x_2 queda por encima (debajo) de la gráfica de la función.*

Proposición 3.5 *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en x_0. Se verifica que*

1. *Si f es cóncava en x_0, entonces $f''(x_0) \geq 0$*

2. *Si f es convexa en x_0, entonces $f''(x_0) \leq 0$*

Proposición 3.6 *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable en x_0 y tal que existe $f''(x_0)$. Se verifica que*

1. *Si $f''(x_) > 0$ entonces f es cóncava en x_0.*

2. *Si $f''(x_) < 0$ entonces f es convexa en x_0.*

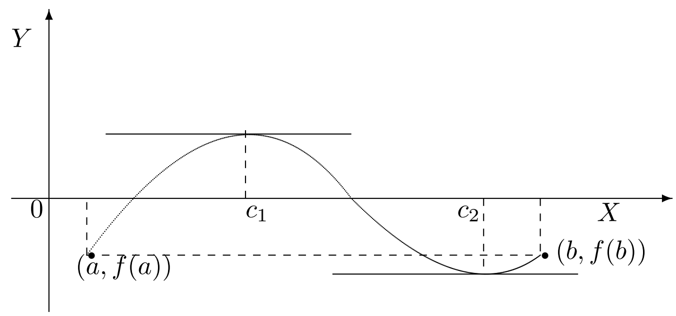
Definición 3.10 *Los puntos donde la función cambia de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman* `puntos de inflexión`.

Teorema 3.8 *Si x_0 es un punto de inflexión de f y f' es derivable en x_0, entonces $f''(x_0) = 0$.*

El recíproco no es cierto.

3.4. Teoremas sobre funciones derivables

Teorema 3.9 (Teorema de Rolle) *Sea $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b] \subset D$, derivable en (a, b) y tal que $f(a) = f(b)$. Entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*



Notas

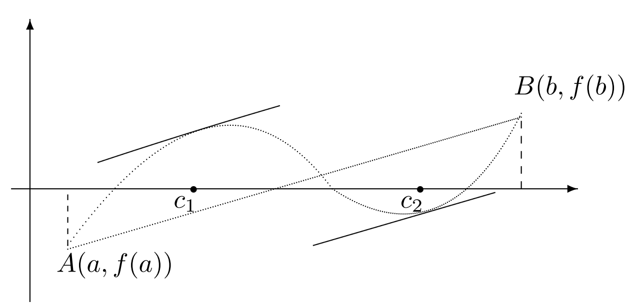
1. Si la función es constante, tiene derivada nula en todos los puntos del intervalo. En caso contrario, tiene algún extremo.
2. El teorema asegura que existe un x_0, pero no tiene por qué ser único.
3. La condición de derivabilidad en todos los puntos del intervalo no se puede quitar.

Teorema 3.10 (Teorema del valor medio o de Lagrange) *Sea* $f: \ D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua en* $[a, b] \subseteq D$ *y derivable en* (a, b)*. Entonces:*

$$\exists\, c \in (a,\, b) \ / \ f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a) \qquad \left(\text{o bien } \ \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \right).$$

Notas:

1. En el caso particular que $f(b) = f(a)$ tenemos el teorema de Rolle.
2. Gráficamente significa que existe al menos un punto $C(c, f(c))$ en el que la tangente a la curva en el punto C es paralela a la recta que pasa por $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.



Teorema 3.11 (Teorema de Cauchy o teorema del valor medio generalizado) *Sean f y g dos funciones reales continuas en* $[a, b]$ *y derivables en* (a, b)*, entonces:*

$$\exists c \in (a,\, b) \ / \ f'(c) \cdot [g(b) - g(a)] = g'(c) \cdot [f(b) - f(a)].$$

Si además $g(b) - g(a) \neq 0$ *y* $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,\, b)$*, la igualdad anterior se puede escribir:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3.4.1. Corolarios de los teoremas del valor medio

El primer corolario que se da se refiere a la caracterización de funciones constantes.

Corolario 3.12 (Caracterización de las funciones constantes) *Sea la función* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *, continua en* $[a, b] \subset D$ *y derivable en* (a, b)*. Entonces se tienen las siguientes equivalencias:*

1. f *es constante en* $[a, b]$ $\iff$ $f'(x) = 0$ *en* $[a, b]$.
2. $f(x) = g(x) + k, \quad k \in \mathbb{R},$ *en* $[a, b]$ $\iff$ $f'(x) = g'(x) \quad \forall\, x \in [a, b]$.

Estudiaremos ahora otras interesantes aplicaciones del TVM que se refieren a la localización de las raíces o soluciones de una ecuación $f(x) = 0$, donde f es una función real derivable en cierto intervalo.

Corolario 3.13 *Sea* f *una función real continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$ *y derivable en* (a, b)*. Si* a *y* b *son dos raíces de la ecuación* $f(x) = 0$*, existe al menos una raíz de la ecuación* $f'(x) = 0$ *en el intervalo* (a, b)*.*

Corolario 3.14 *Sea* f *una función real derivable en un intervalo cerrado* $[\alpha, \beta]$*. Si* α *y* β *son dos raíces consecutivas de la ecuación* $f'(x) = 0$*, entre ellas existe a lo sumo una raíz de la ecuación* $f(x) = 0$ *t, de hecho, esta raíz existe sólo cuando* $f(\alpha)$ *y* $f(\beta)$ *tienen signos distintos.*

3.4.2. Aplicación al cálculo de límites: Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno (tal vez reducido) de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ y existe $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ y es finito, entonces también existe $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, y se cumple:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

`Notas:`

1. El enunciado del teorema también es válido cuando
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$
Así mismo, se puede formular de manera análoga si x_0 es $+\infty$ o $-\infty$.
2. Si en la expresión $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se vuelve a presentar una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ ó $\dfrac{\infty}{\infty}$ se puede volver a aplicar la regla de L'Hôpital (siempre y cuando se cumplan las hipótesis de aplicabilidad).
3. Indeterminaciones de los tipos $0 \cdot \infty,\ \infty - \infty,\ 1^{\infty},\ 0^0$ y ∞^0, también pueden resolverse mediante la regla de L'Hôpital, sin más que reformular adecuadamente el problema.

Índice general