Capítulo 3

Función real de variable real. Derivabilidad

Derivadas: interpretación geométrica.

1. Si $f(x) = (ax+b)\operatorname{sen} x + (cx+d)\cos x$, determina los valores de las constantes para que $f'(x) = x\cos x$.
2. Halla los valores de las constantes a, b y c para los que las gráficas de los polinomios $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = x^3 - c$ se cortan en el punto $(1, 2)$ con la misma pendiente.
3. Dos puntos móviles siguen trayectorias coplanarias cuyas respectivas ecuaciones referidas a un mismo sistema de coordenadas rectangulares son $y = x^2 + x - 6$ e $y = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 8)$. El movimiento cumple la condición de que en todo instante los puntos tienen igual abscisa. Calcula las coordenadas de dichos móviles cuando:

    a) Se mueven paralelamente.

    b) Se mueven perpendicularmente.

4. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = \frac{1}{x}$ en el punto 1 y determina el área limitada por dicha tangente y los ejes coordenados. Demuestra que el área en cuestión es independiente del punto elegido.

Continuidad y derivabilidad. Derivadas laterales.

5. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $f(x) = |x^2 - 1| + 2|x - 1|$.
6. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x\ln|x| \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

    ¿Tiene recta tangente en todos los puntos?.

7. Considera la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 5x\operatorname{sen}\frac{\pi}{2x} & \text{si } x < 0, \\ B & \text{si } x = 0, \\ x + 1 & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 3 - Ax^2 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Estudia los valores de A y B para los que f es continua en todo $\mathbb{R}$. ¿Es derivable en el cero con los valores obtenidos?

8. Estudia la continuidad y derivabilidad de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

9. Estudia la continuidad y derivabilidad en el punto $x_0 = 0$ de la función $f(x) = |\sqrt[3]{x}|$.

10. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función $y = \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}|$.

11. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln (2x - x^2)}{(x-1)^2} & \text{si } 0 < x < 1 \text{ ó } 1 < x < 2, \\ -1 & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

12. Estudia la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} + \mathbf{e}^{|x|} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

13. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x^3}}{x}$, con $f(0) = 1$.

   b) $g(x) = \dfrac{1}{1 + \mathbf{e}^{\frac{1}{x}}}$, con $g(0) = 0$.

Cálculo de derivadas

14. Calcula las derivadas de las siguientes funciones mediante derivación logarítmica:

$$\text{a)} \quad f(x) = x^{\ln x}, \quad \text{b)} \quad f(x) = (\operatorname{sen} x)^{\tan x}, \quad \text{c)} \quad f(x) = (\arctan x)^{\sqrt{x}}.$$

15. Calcula las derivadas de las siguientes funciones compuestas:

$$\text{a)} \quad f(x) = \operatorname{arc\,sen} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \quad \text{b)} \quad f(x) = 2\sqrt{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln (x^2 + 3).$$

16. Halla la derivada n-ésima de $f(x) = \mathbf{e}^{5x+8} x^3$.

17. Halla la derivada n-ésima de las siguientes funciones:

$$\text{a)} \quad f(x) = \operatorname{sen} x, \quad \text{b)} \quad f(x) = \cos x, \quad \text{c)} \quad f(x) = \ln (1 + x).$$

18. Comprueba que la función $y = \mathbf{e}^{ax} \operatorname{sen}(bx)$ verifica la relación $y'' - 2ay' + (a^2 + b^2)y = 0$.

Diferencial de una función.

19. Utilizando el concepto de diferencial halla un valor aproximado de $\cos 61^0$ (¡expresa los ángulos en radianes!).

20. Utilizando el concepto de diferencial, halla de manera aproximada el incremento de volumen de una esfera de 30 cms. de radio cuando éste aumenta en $0'5$ milímetros.

21. Dada la función $y = \dfrac{x}{x+1}$, halla la diferencia que existe entre el incremento y la diferencial para $x = 2$ y $dx = 0,3$.

Crecimiento y decrecimiento. Extremos relativos.

22. Halla los máximos y mínimos de la funciones $f(x) = x^3 - |x|$ y $f(x) = \mathbf{e}^x \operatorname{sen} x$.

23. Halla los máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{e}^{-x^2 - \frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

24. Prueba que $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ no tiene extremos relativos ($(c,d) \neq (0,0)$).

25. Dada la función $f(x) = \dfrac{|x|}{\mathbf{e}^{|x-1|}}$ estudia:

    a) su derivabilidad (zonas de crecimiento y decrecimiento),

    b) su máximos y mínimos y

    c) sus puntos de inflexión (zonas de concavidad y convexidad).

Teoremas fundamentales del cálculo diferencial.

Teorema de Rolle.

26. ¿En qué intervalos puede asegurarse (sin calcular f') que la derivada de la función $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ posee al menos una raíz?.

27. Sea $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Comprueba que $f(1) = f(-1) = 0$ y que $f'(x) \neq 0$. ¿Contradice ésto el Teorema de Rolle?.

28. Demuestra que la ecuación $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$ (cualquiera que sea el valor de b).

29. Prueba que entre cualquier par de soluciones de la ecuación $\mathbf{e}^x \operatorname{sen} x = 1$ existe al menos una solución de $\mathbf{e}^x \cos x = -1$. Sugerencia: una solución de $\mathbf{e}^x \operatorname{sen} x = 1$ es una raíz de $f(x) = \mathbf{e}^{-x} - \operatorname{sen} x$.

30. Demostrar que la ecuación $4x^3+3x^2+2x+1$ tiene una única solución. Determinar un intervalo de amplitud menor que 1 donde se pueda asegurar que está dicha solución.

31. La ecuación $\mathbf{e}^x = x + 1$ tiene una raíz que es $x = 0$. Demostrar que esta ecuación no puede tener otra.

Teorema de Lagrange.

32. Sea la función
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{si } x\le 1,\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x>1.\end{cases}$$
¿Es posible aplicar el Teorema de Lagrange a f en el intervalo $[0,2]$?. Si la respuesta es afirmativa, dibuja la gráfica de la función, la de la recta que la corta en los puntos de abscisa $x=0$ y $x=2$ y la de la(s) tangente(s) a f en $[0,2]$ paralela(s) a dicha recta.

33. Halla una cota superior del error cometido al considerar que $\sqrt[5]{34}$ es igual a 2.

34. Utilizar el teorema del valor medio de Lagrange para demostrar que
$$5+\frac{1}{12}<\sqrt{26}<5+\frac{1}{10}$$

Teorema de Cauchy.

35. Explica por qué no es válida la fórmula de Cauchy para las funciones $f(x)=x^3$ y $g(x)=x^2$ en el intervalo $[-1,1]$ en la forma de cociente.

36. ¿Se puede aplicar el Teorema de Cauchy a las funciones $f(x)=\operatorname{sen}x-\tan x$ y $g(x)=\ln(x^2+1)$ en el intervalo $[-1,1]$?. ¿Y en el intervalo $[\frac{-1}{2},1]$?.

Regla de L'Hôpital.

37. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}},\quad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x(\mathbf{e}^x+1)-2(\mathbf{e}^x-1)}{x^3},\quad \text{c)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}},$$

$$\text{d)}\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x^x-x}{1-x+\ln x},\quad \text{e)}\ \lim_{x\to 1^-}(\ln x\ln(1-x)),\quad \text{f)}\ \lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}.$$

38. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x},\qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsen 2x-2\arcsen x}{x^3},$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{x}\ \text{con } a \text{ y } b<0,\qquad \text{d)}\ \lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}\ \text{con } a>0,$$

$$\text{e)}\ \lim_{x\to 2}\left(\frac{a}{1-(\log_2 x)^a}-\frac{b}{1-(\log_2 x)^b}\right)\ \text{con } a>b>0,\qquad \text{f)}\ \lim_{x\to+\infty}x^2\mathbf{e}^{-0'01x}.$$

39. Calcula los siguientes límites:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0^+}x^{\left(\frac{k}{1+\ln x}\right)}\ \text{con } k\in\mathbb{R},\quad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}\ \text{con } b\neq 0,\quad \text{c)}\ \lim_{x\to 0^+}[\ln(1+x)]^x,$$

$$\text{d)}\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x^2+x+5}\right)^{\frac{1}{1+\ln x}},\quad \text{e)}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{sen}x-\cos x)^{\tan x},\quad \text{f)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{e}^x-\mathbf{e}^{\operatorname{sen}x}}{\operatorname{sen}^3 x}.$$

40. Calcula los siguiente límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{x-1}\right)$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathbf{e}^{\frac{1}{x}}-\cos\frac{1}{x}}{1-\sqrt{1-x^{-2}}}$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x(1-\cos x)}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^{\operatorname{sen} x}}{x^3}$ con $a>0$, e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos x-x^2}{\tan^2 x-\operatorname{sen}^2 x}$.

41. Señala si hay error en

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{2}=3.$$

42. Siendo $f(x)=\operatorname{sen}^2 x\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ y $g(x)=\mathbf{e}^x-1$ calcula (sin recurrir a la regla de L'Hôpital) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$. Prueba que no existe $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. ¿Están estos resultados en contradicción con la regla de L'Hôpital?. ¿Qué explicación tienen?.

43. ¿Qué hipótesis de la regla de L'Hôpital no se cumplen en los siguientes límites?:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{sen} x}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x-\operatorname{sen} x}{\ln x+\cos x}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\operatorname{sen} x}{x+\cos x}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\mathbf{e}^{\frac{1}{x}}+1}$.

Optimización de funciones.

44. ¿En qué punto del primer cuadrante la tangente a la parábola $y=4-x^2$ determina con los ejes coordenados un triángulo de área mínima?.

45. Halla la altura y el radio de la base del cono de volumen máximo inscrito en una esfera de radio R.

46. Halla la altura y el radio de la base de un cono de volumen mínimo circunscrito a una esfera de radio R.

47. Dada una esfera de radio R halla la altura y el radio de la base del cilindro de mayor superficie lateral que puede inscribirse en la misma.

48. Una ventana tiene forma de rectángulo rematado por un semicírculo de diámetro igual al correspondiente lado del rectángulo. La porción rectángular ha de ser de cristal transparente y la parte circular ha de ser de cristales de colores, los cuales dejan pasar (por metro cuadrado) la mitad de luz que el cristal transparente. El perímetro total de la ventana debe tener longitud fija P. Halla, en función de P, las dimensiones de la ventana que deja pasar la mayor cantidad de luz.

49. Se considera el segmento parabólico limitado por la parábola $y=\dfrac{x^2}{6}$ y la recta $y=4$. En dicho segmento se inscribe un rectángulo, dos de cuyos vértices están en la parábola y los otros en la recta. Halla las coordenadas de los vértices del rectángulo de área máxima.

50. Un trozo de madera de 12 dms. de largo tiene forma de tronco de cono circular recto con bases de diámetros 4 y $4+h$ dms. ($h>0$). Determina, en función de h, el cilindro recto de mayor volumen que se puede cortar de este trozo de madera, de manera que su eje coincida con el del tronco de cono.

Representación gráfica de funciones.

51. Estudia la función $f(x) = 1 - |\ln|x||$ y represéntala gráficamente.

52. Representa gráficamente las funciones siguientes:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, b) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$, c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-3}}$,

d) $f(x) = x^x$, e) $f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2)$, f) $f(x) = \dfrac{x+2}{\mathbf{e}^{\frac{1}{x}} + 1}$,

g) $f(x) = x \arctan \frac{1}{x}$.

Soluciones de algunos de los problemas propuestos.

1.- $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 1$.

3.- a) $x = -2$; b) $x = 1/2$ y $x = 0$.

5.- Continua en $\mathbb{R}$, no derivable en -1 y en $+1$.

6.- Continua en $\mathbb{R}$, tangente vertical en 0.

7.- $A = B = 1$, no es derivable en el 0.

14.- a) $2x^{(\ln x - 1)} \ln x$; b) $(\operatorname{sen} x)^{\tan x} \big(\ln|\operatorname{sen} x|(\tan^2 x + 1) + 1\big)$.

19.- $(180 - \sqrt{3}\pi)/360$.

20.- $0{,}2\pi$ cm^3.

22.- $f(x) = x^3 - |x|$: máximo en $x = 0$ y mínimo en $x = 1/\sqrt{3}$.

23.- Máximos en $x = \pm 1$ y mínimo en $x = 0$.

33.- El error cometido es menor que $1/40$.

37.- a) $\mathbf{e}^{-2/\pi}$; b) $1/6$; c) $\mathbf{e}^{-1/6}$; d) -2; e) 0; f) $2/\pi$.

38.- a) $\mathbf{e}^{-2/\pi}$; b) 1; c) $\sqrt{ab}$; d) $a^a(\ln a - 1)$; e) $(a-b)/2$; f) 0.

39.- a) $\mathbf{e}^k$; b) a^2/b^2; c) 1; d) $1/e$; e) $\mathbf{e}^{-1}$; f) $1/6$.

40.- a) $-1/2$; b) $+\infty$.

44.- En el punto de abscisa $2\sqrt{3}/3$.