Grado en Ingeniería Informática

Examen de Matemáticas III (Convocatoria de septiembre)

Ejercicio 1: (1 pto) Consideremos dos sucesos A y B para los que se verifica que $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/5$ y $P(A|_B) + P(B|_A) = 2/3$. Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Ejercicio 2: (0.75 pto) Se escogen al azar cuatro personas de un grupo de 4 españoles, 3 franceses y 2 ingleses. Calcular la probabilidad de que entre los cuatro elegidos haya, al menos, uno de cada nacionalidad.

Ejercicio 3. El tiempo de respuesta de un servidor viene dado por una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda^3 x^2 e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$ es un parámetro desconocido. Se sabe que $E(X) = \frac{3}{\lambda}$ y que $Var(X) = \frac{3}{\lambda^2}$. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de la variable X. Se pide:

(a) (0.75 pto.) Construir la función de densidad conjunta de la muestra. ¿Es el estadístico $T_1 = 1 + 2\sum_{i=1}^{n} X_i$ suficiente de cara a estimar el parámetro λ?

(b) (0.75 pto) Demostrar que el estimador de $\frac{1}{\lambda}$ definido por $T_2 = \frac{\overline{X}}{3}$ es consistente.

Ejercicio 4: Una fábrica produce un tipo de componente electrónico en dos calidades diferentes. El 60% de la producción es de calidad A y el resto de calidad B. La duración X de un componente de calidad A sigue una distribución normal de media 4 años y desviación típica 2, mientras que la duración Y de los componentes de calidad B es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^2}{36} + \frac{1}{6}x & \text{si} \quad x \in (0,6) \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (0,6) \end{cases}$$

(a) (1 pto) ¿Cuál es la probabilidad de que un componente dure más de 2 años si es de calidad A?¿Y si es de calidad B?

(b) (0.75 pto) Si tomamos un componente de calidad A y otro de calidad B, ¿cuál es la probabilidad de que sólo uno de los dos dure más de 2 años?

(c) (0.75 pto) Se toma un componente al azar de toda la producción y se observa que dura más de 2 años. ¿Cuál es la probabilidad de que fuera de calidad A?

(d) (0.75pto) Se eligen al azar 20 componentes de calidad B. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 4 de esas componentes duren menos de 2 años?

Ejercicio 5: La velocidad X de un procesador, en GHz, sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Se han tomado 40 medidas de la velocidad del procesador observándose un valor medio de 1.4 GHz y desviación típica 0.17 GHz.

(a) (0.75 pto) Se construye un intervalo de confianza para la varianza poblacional resultando el intervalo $(L_1, 0.0539528)$. Determinar, razonadamente, el valor de L_1.

(b) (0.75 pto) A partir de los datos muestrales, ¿tenemos evidencia para afirmar, al 1% de significación, que la velocidad media del procesador es superior a 1.3 GHz? (Plantear y resolver un contraste de hipótesis adecuado).

Ejercicio 6: La siguiente tabla recoge el tiempo de funcionamiento (en nanosegundos) de un circuito lógico en frío (x) y el tiempo de respuesta (en nanosegundos) tras una hora de funcionamiento intensivo (y), para un conjunto de 5 máquinas:

x	4	7	11	13	14
y	5	6	7	14	16

(a) (0.75 pto) Ajustar a los datos un modelo del tipo $y = \beta_0 + \beta_1 x$, justificando los pasos realizados. Calcular e interpretar una medida de la bondad del ajuste realizado.

(b) (1 pto) Ajustar a los datos un modelo del tipo $y = \alpha e^{\beta x}$, justificando los pasos realizados. Calcular e interpretar una medida de la bondad del ajuste realizado.

(c) (0.25 pto) ¿Qué modelo resulta más adecuado para predecir el tiempo de respuesta, a partir del tiempo de funcionamiento? (Justificar la respuesta)

16 de septiembre de 2015

DURACIÓN: HASTA LAS 12:45H.

Ejercicio 1:

Tenemos que calcular $P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{A\cup B}) = 1-P(A\cup B)$

Sabemos que $\frac{2}{3} = P(A|_B)+P(B|_A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} + \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{1/5} + \frac{P(A\cap B)}{1/3} =$

$= 8\cdot P(A\cap B)$

Entonces $8\cdot P(A\cap B) = \frac{2}{3} \Rightarrow P(A\cap B) = \frac{1}{12}$

Finalmente, $P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 1-P(A\cup B) = 1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B)) = 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{12} = \frac{11}{20} = 0'55$

Ejercicio 2:

Usaremos la regla de Laplace para calcular la probabilidad.

El número de caso posibles es $C_{9,4} = \binom{9}{4}$.

Respecto al número de casos favorables, puesto que debe haber al menos una persona de cada nacionalidad las posibilidades son:

- 2 españoles, 1 francés, 1 inglés: $C_{4,2}\cdot C_{3,1}\cdot C_{2,1} = \binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}$
- 1 español, 2 franceses, 1 inglés: $C_{4,1}\cdot C_{3,2}\cdot C_{2,1} = \binom{4}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{2}{1}$
- 1 español, 1 francés, 2 ingleses: $C_{4,1}\cdot C_{3,1}\cdot C_{2,2} = \binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}$

Por tanto, la probabilidad pedida es:

$$\frac{\text{nº casos favorables}}{\text{nº casos posibles}} = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{3}{1}\binom{2}{1}+\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{2}{1}+\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{9}{4}} = \frac{72}{126} = \frac{4}{7}$$

Ejercicio 3:

a) Calculamos primero la función de densidad conjunta de la muestra:

$$f(x_1,\dots,x_n;\lambda) = \prod_{i=1}^{4} f(x_i;\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\lambda^3 x_i^2\cdot e^{-\lambda x_i} = \lambda^{3n}\cdot e^{-\lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\prod_{i=1}^{4}x_i^2$$

Comprobamos ahora que T_1 es suficiente para estimar λ:

$T_1 = 1 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{T_1 - 1}{2}$. Sustituyendo en la expresión de la función de densidad conjunta,

$$f(x_1, \dots, x_n; \lambda) = \underbrace{\lambda^{3n} \cdot e^{-\lambda \cdot \frac{T_1 - 1}{2}}}_{g(T_1, \lambda)} \cdot \underbrace{\frac{1}{2^n} \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^2}_{h(x_1, \dots, x_n)}$$

Hemos descompuesto la función de densidad conjunta de la muestra como producto de dos funciones: 'g', que es función de T_1 y λ, y 'h', que es función de la muestra. En consecuencia, T_1 es un estadístico suficiente para estimar λ.

b) Si se cumplen las condiciones

i) $\lim_{n\to\infty} E(T_2) = \frac{1}{\lambda}$ ii) $\lim_{n\to\infty} Var(T_2) = 0$

entonces T_2 es un estimador consistente para $\frac{1}{\lambda}$. Veamos entonces que se cumplen esas condiciones.

i) $$E(T_2) = E\left(\frac{\bar{X}}{3}\right) = \frac{1}{3} E(\bar{X}) = \frac{1}{3} \cdot E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{3n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{3n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{\lambda} = \frac{1}{3n} \cdot n \cdot \frac{3}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$E(X_i) = E(X)$

Entonces, $\lim_{n\to\infty} E(T_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$

ii) $$Var(T_2) = Var\left(\frac{\bar{X}}{3}\right) = \frac{1}{9} \cdot Var\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right) = \frac{1}{9n^2} \cdot Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{9n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) =$$

$X_1, \dots, X_n$ independientes

$$= \frac{1}{9n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{3}{\lambda^2} = \frac{1}{9n^2} \cdot n \cdot \frac{3}{\lambda^2} = \frac{1}{3n\lambda^2}$$

$Var(X_i) = Var(X)$

Entonces $\lim_{n\to\infty} Var(T_2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3n\lambda^2} = 0$

Puesto que se cumplen i) y ii), podemos afirmar que T_2 es un estimador consistente para $\frac{1}{\lambda}$

Ejercicio 4:

a) Si la componente es de calidad A, la probabilidad de que dure más de dos años es $(X \sim N(4, 2^2))$:

$$P(X>2) = P\left(\frac{X-4}{\sqrt{4}} > \frac{2-4}{\sqrt{4}}\right) = P(Z>-1) = P(Z \le 1) \overset{\text{tabla}}{=} 0'8413$$

Si la componente es de calidad B, la probabilidad de que dure más de dos años es:

$$P(Y>2) = 1-P(Y \le 2) = 1 - \int_0^2 \frac{-x^2}{36} + \frac{1}{6}x \, dx = 1 - \left(\frac{-x^3}{108} + \frac{1}{6}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right) = 1 - \left(\frac{-8}{108} + \frac{4}{12}\right) = \frac{20}{27}$$

b) $P((X>2 \cap Y<2) \cup (X<2 \cap Y>2)) = P(X>2 \cap Y<2) + P(X<2 \cap Y>2) \underset{X,\, Y \text{ independiente}}{=}$

$= P(X>2)\cdot P(Y<2) + P(X<2)\cdot P(Y>2) =$

$= 0'8413\cdot\left(1-\frac{20}{27}\right) + (1-0'8413)\cdot\frac{20}{27} = 0'33567$

c) Consideramos los sucesos:

- A = la componente elegida es de calidad A.
- B = " " " " " " B.

y la variable aleatoria D = duración de la componente elegida.

Tenemos que calcular $P(A|_{D>2})$. Usaremos la regla de Bayes.

$$P(A|_{D>2}) = \frac{P(A \cap (D>2))}{P(D>2)} = \frac{P(D>2|_A)\cdot P(A)}{P(D>2|_A)\cdot P(A) + P(D>2|_B)\cdot P(B)} = \frac{0'8413\cdot 0'6}{0'8413\cdot 0'6 + \frac{20}{27}\cdot 0'4} =$$

$= 0'630127$

d) La probabilidad de que una componente de tipo B dure menos de dos años es $P(Y<2) = 1-P(Y \ge 2) = 1-\frac{20}{27} = \frac{7}{27}$.

Entonces si W = número de componentes, de las 20 elegidas, que duran menos de dos años, $W \sim B(20, 7/27)$ y tenemos que calcular $P(W \ge 4)$.

$P(W \geq 4) = 1 - P(W < 4) = 1 - P(W \leq 3) = 1 - \left(P(W=0) + P(W=1) + P(W=2) + P(W=3)\right) =$

$= 1 - \binom{20}{0}\left(\frac{7}{27}\right)^0 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^{20} - \binom{20}{1}\cdot\left(\frac{7}{27}\right)^1 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^{19} - \binom{20}{2}\cdot\left(\frac{7}{27}\right)^2 \cdot \left(\frac{20}{27}\right)^{18} - \binom{20}{3}\cdot\left(\frac{7}{27}\right)^3 \left(\frac{20}{27}\right)^{17} \simeq$

$\simeq 1 - 0'1983 = \underline{\underline{0'8017}}$

<u>Ejercicio 5</u>: Datos del problema $n = 40$, $\bar{x} = 1'4$, $S_x = 0'17$, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

a) El intervalo de confianza para la varianza de una población normal es

$\left(\frac{n \cdot S_x^2}{\chi^2_{n-1, 1-\alpha/2}}, \frac{n \cdot S_x^2}{\chi^2_{n-1, \alpha/2}}\right)$. Entonces, debe ser $\frac{n \cdot S_x^2}{\chi^2_{n-1, \alpha/2}} = 0'0539528$,

y, por tanto, $\chi^2_{n-1, \alpha/2} = \chi^2_{39, \alpha/2} = \frac{40 \cdot 0'17^2}{0'0539528} = 21'4261$.

Al ser $\chi^2_{39, \alpha/2} = 21'4261$ y puesto que de la tabla de la distribución χ^2 se deduce que $\chi^2_{39, 0'01} = 21'4261$, necesariamente $\frac{\alpha}{2} = 0'01$ y el extremo izquierdo del intervalo se calcula como

$$L_1 = \frac{n \cdot S_x^2}{\chi^2_{n-1, 1-\alpha/2}} = \frac{n \cdot S_x^2}{\underbrace{\chi^2_{n-1, 0'99}}_{= \chi^2_{39, 0'99}}} = \frac{40 \cdot 0'17^2}{62'4281} = 0'0185173.$$

El intervalo buscado es $\boxed{(0'0185173, 0'0539528)}$

b) Tenemos que resolver el contraste

$\begin{cases} H_0: \mu = 1'3 \\ H_1: \mu > 1'3 \end{cases}$ con $\alpha = 0'01$. Es un contraste sobre la media de una población normal con varianza desconocida.

Rechazaremos la hipótesis nula si $\bar{x} \geq \mu_0 + \frac{S_c}{\sqrt{n}} \cdot \underbrace{t_{n-1, 1-\alpha}}_{= t_{39, 0'99} = 2'426}$

Puesto que $S_c = \sqrt{\frac{n \cdot S_x^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{40 \cdot 0'17^2}{39}} \simeq 0'1722$, se rechazará H_0 si $\bar{x} \geq 1'3 + \frac{0'1722}{\sqrt{40}} \cdot 2'426 = 1'36605$.

Puesto que, según los datos del problema $\bar{x} = 1'4$, se verifica la regla de rechazo y tenemos evidencia significativa ($\alpha = 0'01$) para afirmar que la velocidad media del procesador es superior a 1'3 GHz.

Ejercicio 6

a) La ecuación de la recta de regresión es $y - \bar{y} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}(x - \bar{x})$. De los datos del problema, $\bar{x} = 9'8$, $S_x^2 = 14'16$, $\bar{y} = 9'6$, $S_y^2 = 20'24$,

$$S_{xy} = \frac{\sum x_i \cdot y_i}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{4 \cdot 5 + \cdots + 14 \cdot 16}{5} - 9'8 \cdot 9'6 = \frac{545}{5} - 94'08 = 14'92,$$

con lo cual, la recta de regresión viene dado por:

$$y - 9'6 = \frac{14'92}{14'16} \cdot (x - 9'8) \longrightarrow \boxed{y = 1'0537 \cdot x - 0'7260}$$

Al tratarse de un ajuste de regresión lineal simple el coeficiente de determinación viene dado por $R^2 = \left(\frac{S_{xy}}{S_x S_y}\right)^2 = \frac{S_{xy}^2}{S_x^2 \cdot S_y^2} = \frac{14'92^2}{14'16 \cdot 20'24} \simeq 0'7767$

b) Tenemos que ajustar a los datos una curva del tipo $y = \alpha \cdot e^{\beta x}$. Tomando logaritmo neperiano a ambos lados de la igualdad, resulta:

$\ln y = \ln(\alpha \cdot e^{\beta x}) = \ln \alpha + \ln e^{\beta x} = \ln \alpha + \beta \cdot x$. Entonces, si $Y = \ln y$, resulta el ajuste lineal $Y = \ln \alpha + \beta \cdot x$. Aplicamos el cambio de variable a los datos del problema y se obtiene:

x	4	7	11	13	14
$Y = \ln y$	1'6094	1'7918	1'9459	2'6391	2'7726

Entonces, $\bar{x} = 9'8$, $S_x^2 = 14'16$, $\bar{Y} = 2'1518$, $S_Y^2 = 0'2178$

$$S_{xY} = \frac{4 \cdot 1'6094 + \cdots + 14 \cdot 2'7726}{5} - 9'8 \cdot 2'1518 = \frac{113'5098}{5} - 21'0876 = 1'6143$$

Con lo cual la recta de regresión entre x e $\bar{Y}$ viene dada por

$$(Y-\bar{Y}) = \frac{S_{xY}}{S_x^2}(x-\bar{x}) \rightarrow Y - 2'1518 = \frac{1'6143}{14'16}(x-9'8)$$

$$\rightarrow Y = \underline{0'1140} \cdot x + \underline{1'0346}$$

Identificando coeficientes: $Y = \ln\alpha + \beta x$, resulta $\beta = 0'1140$

$\ln\alpha = 1'0346 \Rightarrow \alpha = 2'8140$

Por lo tanto, la curva buscada es $\boxed{y = 2'814 \cdot e^{0'114 \cdot x}}$

Calculamos ahora el coeficiente R^2 que, por tratarse de un ajuste no lineal, lo calculamos como $R^2 = 1 - \frac{SS_{Res}}{SS_{Tot}}$

$SS_{Tot} = n \cdot S_y^2 = 5 \cdot 20'24 = 101'2$; $SS_{Res} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$ con $\hat{y}_i = 2'814 \cdot e^{0'114 \cdot x_i}$

x_i	4	7	11	13	14
y_i	5	6	7	14	16
$\hat{y}_i$	4'4398	6'2502	9'8612	12'3865	13'8822

$SS_{Res} = (5-4'4398)^2 + \cdots + (16-13'8822)^2 \simeq 15'6513$

Con lo cual $R^2 = 1 - \frac{15'6513}{101'2} \simeq 0'8453$

c) Resultaría más adecuado el modelo propuesto en el apartado b) por tener un mayor valor del coeficiente R^2.