MATEMÁTICAS II, 1º GRADO INFORMÁTICA - EXAMEN FINAL - 28/06/2018

Criterios generales de corrección

I - Responda a las preguntas que se le formulan. Las respuestas a preguntas no formuladas carecen de valor.
II - Las respuestas deben razonarse. La aplicación mecánica de fórmulas carece de valor (aunque el resultado sea correcto).
III - El alumno debe conocer y manejar con soltura el cálculo básico por lo que las expresiones algebraicas deben simplificarse en lo posible y las operaciones han de completarse dando las respuestas correctas.
IV - Especial atención merecerá en todo el proceso de evaluación el uso que el alumno hace del lenguaje. Esto incluye tanto a símbolos y expresiones matemáticas como al lenguaje ordinario.
V - Los resultados obtenidos deben interpretarse correctamente. En particular, si un error no detectado nos lleva a un resultado absurdo, este debe reconocerse como tal (incluso si no podemos localizar el error).

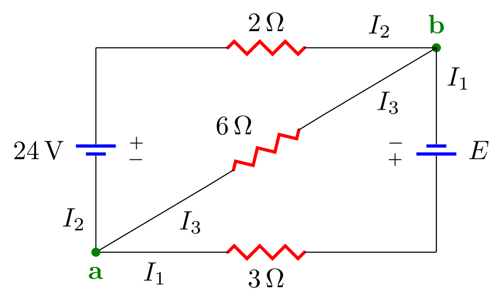
NO ESTÁ PERMITIDO EL USO DE CALCULADORAS

1º *a)* Transformaciones elementales por filas y por columnas: expresión matricial y aplicaciones. [0,5p]

b) Usar las leyes de Kirchhoff para obtener un sistema de ecuaciones que permita hallar las intensidades I_1, I_2 e I_3 en función de E. Resolver el sistema. [0,5p]

(1) ¿Cuál debe ser el valor de E para que $I_3 = 0$? Hallar, en ese caso, I_1 e I_2. [0,5p]

(2) ¿Cuál debe ser el valor de E para que $I_1 = \frac{4}{5} I_2$? Hallar, en ese caso, I_1, I_2 e I_3 y el sentido en el que circula la corriente por cada rama del circuito. [0,5p]



2º *a)* Sean H y K subespacios de un espacio vectorial V. Definir $H + K$ y probar que también es un subespacio vectorial de V. [0,5p]

b) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^5$ definidos por $H \equiv \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$ y $K = \langle (1,1,-1,-2,4), (2,1,2,1,0), (1,0,1,0,1) \rangle$, usar la forma escalonada reducida para hallar una base y unas ecuaciones implícitas de $H + K$. [1,5p]

3º *a)* Matriz de una aplicación lineal: su obtención y su relación con el espacio imagen. [1p]

b) De la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ se sabe que $\ker(T) = \langle (1,2,1) \rangle$, que $T(-1,1,0) = (2,-1,1)$ y que $T(1,1,3) = (0,-1,-1)$. Hallar la matriz de T en la base canónica. [1p]

4º Encontrar una matriz A tal que $A^3 = B$ donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & -27 \\ 9 & 18 & -26 \end{pmatrix}$ [2p]

5º *a)* Enunciar el *Teorema de la Proyección*. [1p]

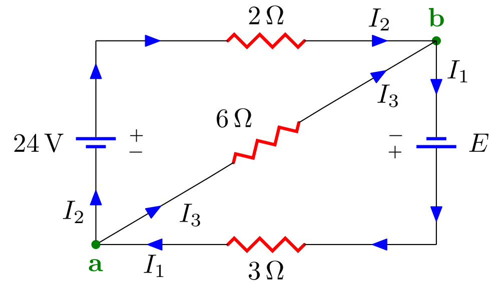
b) En $\mathbb{R}^3$, hallar $\mathsf{P}_H(1,-3,7)$, donde P_H es la proyección sobre el subespacio $H \equiv 3x + y - 2z = 0$. [1p]

1º *a)* Transformaciones elementales por filas y por columnas: expresión matricial y aplicaciones. [0,5p]

b) Usar las leyes de Kirchhoff para obtener un sistema de ecuaciones que permita hallar las intensidades I_1, I_2 e I_3 en función de E. Resolver el sistema. [0,5p]

(1) ¿Cuál debe ser el valor de E para que $I_3 = 0$? Hallar, en ese caso, I_1 e I_2. [0,5p]

(2) ¿Cuál debe ser el valor de E para que $I_1 = \frac{4}{5}I_2$? Hallar, en ese caso, I_1, I_2 e I_3 y el sentido en el que circula la corriente por cada rama del circuito. [0,5p]



Nota: El sentido de las flechas se ha elegido de forma arbitraria.

SOLUCIÓN

Apartado *a)* 0,5p

Contenidos teóricos explicados en clase. Consultar apuntes y/ó bibliografía.

Apartado *b)* 0,5p + 0,5p + 0,5p

Antes de comenzar asignamos, para cada tramo entre dos nodos, una dirección a la corriente. Esta asignación es arbitraria pero no importa pues si en un tramo la dirección fuera la contraria, obtendríamos un valor negativo para la intensidad en ese tramo. A continuación, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3 & \mapsto \quad 1^{\text{a}} \text{ ley [nodo a]: flujo entrante igual a flujo saliente (el b es igual).} \\ 24 - 2I_2 + 6I_3 = 0 & \mapsto \quad 2^{\text{a}} \text{ ley [ciclo superior]: en un ciclo, la suma total de potenciales es nula.} \\ E - 3I_1 - 6I_3 = 0 & \mapsto \quad 2^{\text{a}} \text{ ley [ciclo inferior]} \end{cases}$$

Usaremos el método de Gauss para resolver el sistema anterior.

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -6 & 24 \\ 3 & 0 & 6 & E \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \mapsto F_3 - 3F_1]{F_2 \mapsto \frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 12 \\ 0 & 3 & 9 & E \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 \mapsto F_3 - 3F_2]{F_1 \mapsto F_1 + F_2} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -4 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 18 & E-36 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \mapsto \frac{1}{18}F_3} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & -4 & 12 \\ 0 & 1 & -3 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{E-36}{18} \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 \mapsto F_2 + 3F_3]{F_1 \mapsto F_1 + 4F_3} \left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 0 & 0 & \frac{2E+36}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{E+36}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{E-36}{18} \end{array}\right)$$

La respuesta final a la primera pregunta es: $\boxed{I_1 = \dfrac{2E+36}{9} \qquad I_2 = \dfrac{E+36}{6} \qquad I_3 = \dfrac{E-36}{18}}$

b) (1) -

Cálculos elementales muestran que $\boxed{E = 36\,V \implies I_3 = 0\,A \quad I_1 = 12\,A \quad I_2 = 12\,A}$.

b) (2) -

$$I_1 = \tfrac{4}{5}I_2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2E+36}{9} = \frac{4}{5}\cdot\frac{E+36}{6} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E = 9\,V \implies I_1 = 6\,A \quad I_2 = 7{,}5\,A \quad I_3 = -1{,}5\,A}$$

Puesto que $E \geqslant 0$, se tiene que $I_1 > 0$ e $I_2 > 0$ de modo que el sentido de las flechas en sus correspondientes tramos de circuito está bien: siempre es el sentido indicado. En cuanto a I_3, si $E > 36$ entonces $I_3 > 0$ y el sentido de la flecha es el indicado. Si $E < 36$, el sentido cambia.

2º *a)* Sean H y K subespacios de un espacio vectorial V. Definir $H+K$ y probar que también es un subespacio vectorial de V. [0,5p]

b) Dados los subespacios de $\mathbb{R}^5$ definidos por $H \equiv \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_4 - x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$ y $K = \langle (1,1,-1,-2,4),\ (2,1,2,1,0),\ (1,0,1,0,1) \rangle$, usar la forma escalonada reducida para hallar una base y unas ecuaciones implícitas de $H+K$. [1,5p]

SOLUCIÓN

Apartado *a)* 0,5p

`Contenidos teóricos explicados en clase. Consultar apuntes y/ó bibliografía.`

Apartado *b)* 1,5p

Empezaremos por hallar una base de H.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \mapsto F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \mapsto \frac{1}{3}F_3]{F_1 \mapsto \frac{1}{2}F_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \mu \\ x_5 = \nu \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$H = \langle (1,2,0,0,0),\ (1,0,0,2,0),\ (1,0,0,0,2) \rangle$$

Ahora estamos en disposición de hallar una base y la(s) ecuación(es) de $H+K$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_5 \mapsto F_5 - 2F_1 \\ F_6 \mapsto F_6 - F_1 \\ F_7 \mapsto F_7 - x_1F_1}]{\substack{F_2 \mapsto F_2 - F_1 \\ F_3 \mapsto F_3 - F_1 \\ F_4 \mapsto F_4 - F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2x_1 + x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_4 \mapsto F_4 + F_2 \\ F_5 \mapsto F_5 + 3F_2 \\ F_6 \mapsto F_6 + 2F_2 \\ F_7 \mapsto F_7 - (-2x_1 + x_2)F_2}]{\substack{\boxed{F_2 \mapsto -\frac{1}{2}F_2 \quad \text{Paso 1}} \\ F_1 \mapsto F_1 - 2F_2 \\ F_3 \mapsto F_3 + 2F_2}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & x_3 & -2x_1 + x_2 + x_4 & x_5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_5 \mapsto F_5 - 2F_3 \\ F_6 \mapsto F_6 - F_3 \\ F_7 \mapsto F_7 - x_3F_3}]{\substack{\boxed{F_3 \leftrightarrow -F_4 \quad \text{Paso 1}} \\ F_4 \mapsto -\frac{1}{2}F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 & 4x_3 + x_5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{F_5 \mapsto F_5 + 8F_4 \\ F_6 \mapsto F_6 + 5F_4 \\ F_7 \mapsto F_7 - (-2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4)F_4}]{\substack{F_1 \mapsto F_1 - 2F_4 \\ F_2 \mapsto F_2 + F_4 \\ F_3 \mapsto F_3 - 3F_4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \end{pmatrix}$$

$$K + K \equiv \begin{cases} \text{Base} & : \quad \{(1,0,0,0,2),\ (0,1,0,0,-1),\ (0,0,0,1,0,-1),\ (0,0,0,1,-1)\} \\ \text{Ecuación} & : \quad -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

3º *a)* Matriz de una aplicación lineal: su obtención y su relación con el espacio imagen. [1p]

b) De la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ se sabe que $\ker(T) = \langle (1,2,1) \rangle$, que $T(-1,1,0) = (2,-1,1)$ y que $T(1,1,3) = (0,-1,-1)$. Hallar la matriz de T en la base canónica. [1p]

SOLUCIÓN

Apartado *a)* 1p

`Contenidos teóricos explicados en clase. Consultar apuntes y/ó bibliografía.`

Apartado *b)* 1p

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \implies \mathcal{B} = \{(1,2,1),\ (-1,1,0),\ (1,1,3)\} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

Así pues, la matriz de T cuando en origen fijamos $\mathcal{B}$ y en destino la base canónica es:

$$[T]_{\mathcal{B},Can} = \left(T\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; T\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; T\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

La matriz del cambio de la base $\mathcal{B}$ a la canónica es $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ de modo que P^{-1} cambia de la base canónica a $\mathcal{B}$. Así pues, $[T]_{Can} = [T]_{\mathcal{B},Can} \times P^{-1}$.

Hallaremos P^{-1} usando la teoría de determinantes [obsérvese que ya hemos visto que $\det(P) = 7$].

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad C_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \qquad C_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5 \qquad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Así pues, se tiene que $P^{-1} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ y, finalmente, obtenemos:

$$[T]_{Can} = [T]_{\mathcal{B},Can} \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \left[\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -10 & 4 & 2 \\ 6 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

El lector puede comprobar que los cálculos siguientes son, como era de esperar, correctos.

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -10 & 4 & 2 \\ 6 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -10 & 4 & 2 \\ 6 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -10 & 4 & 2 \\ 6 & -1 & -4 \\ -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

4º Encontrar una matriz A tal que $A^3 = B$ donde $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & -27 \\ 9 & 18 & -26 \end{pmatrix}$ [2p]

SOLUCIÓN

En primer lugar, trataremos de diagonalizar la matriz B. Comenzaremos hallando sus autovalores.

$$0 = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & -27 \\ 9 & 18 & -26 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 9 & 19-\lambda & -27 \\ 9 & 18 & -26-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 19-\lambda & -27 \\ 18 & -26-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\big[(19-\lambda)(-26-\lambda) + 27 \times 18\big] = (1-\lambda)\big[\lambda^2 + 7\lambda - 8\big]$$

$$(1-\lambda)\big(\lambda^2 + 7\lambda - 8\big) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda^2 + 7\lambda - 8 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = -8 \end{cases} \end{cases}$$

Hay un autovalor doble y uno sencillo. Estudiemos si hay una base formada por autovectores.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & -27 \\ 9 & 18 & -26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad 9x + 18y - 27z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Asociados al autovalor $\lambda = 1$ hay dos autovectores linealmente independientes.

Busquemos ahora un autovector asociado al autovalor $\lambda = -8$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & -27 \\ 9 & 18 & -26 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -8 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

B es diagonalizable y una matriz de paso es $P = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Es fácil probar que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Así pues,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 19 & -27 \\ 9 & 18 & -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

De modo que si

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt[3]{1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{-8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -9 \\ 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}^3 = \left[\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \right]^3$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1^3 & 0 \\ 0 & 0 & -2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = B$$

5º *a)* Enunciar el *Teorema de la Proyección.* [1p]

b) En $\mathbb{R}^3$, hallar $\mathsf{P}_H(1,-3,7)$, donde P_H es la proyección sobre el subespacio $H \equiv 3x+y-2z=0$. [1p]

SOLUCIÓN

Apartado *a)* 1p

`Contenidos teóricos explicados en clase. Consultar apuntes y/ó bibliografía.`

Apartado *b)* 1p

Hallaremos, en primer lugar, una base de H.

$$3x+y-2z=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x=\lambda \\ y=-3\lambda+2\mu \\ z=\mu \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El conjunto $\mathcal{B} = \{(1,-3,0),\,(0,2,1)\}$ es una base de H. Le aplicaremos el procedimiento de Gram-Schmidt para obtener, a partir de ella, una base ortogonal de H (no necesariamente ortonormal).

$$\begin{cases} u_1 = (1,-3,0) \\ u_2 = (0,2,1) - \frac{(0,2,1)\cdot(1,-3,0)}{(1,-3,0)\cdot(1,-3,0)}\,(1,-3,0) = \left(\frac{3}{5},\frac{1}{5},1\right) \qquad \longmapsto \qquad \text{Por comodidad, haremos } \; u_2=(3,1,5) \end{cases}$$

En consecuencia, el conjunto $\mathcal{B}_H = \{(1,-3,0),\,(3,1,5)\}$ es una base ortogonal de H.

Ahora, sólo queda aplicar el teorema de la proyección.

$$\mathsf{P}_H(1,-3,7) = \frac{(1,-3,7)\cdot(1,-3,0)}{(1,-3,0)\cdot(1,-3,0)}\,(1,-3,0) + \frac{(1,-3,7)\cdot(3,1,5)}{(3,1,5)\cdot(3,1,5)}\,(3,1,5) = (4,-2,5)$$