Tema 4 - Aplicaciones lineales entre espacios vectoriales

1. Aplicaciones lineales, definición y propiedades básicas. `[Apuntes de clase y Lay`[1]`, cáp. 1-5]`

Teorema – *Sean V y W espacios vectoriales y $T : V \longmapsto W$ una aplicación lineal.*

`(1) -` $T\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k v_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k T(v_k)$ *En particular,* $T(-v) = -T(v)$ y $T(\vec{\mathbf{0}}_V) = \vec{\mathbf{0}}_W$

`(2) -` *T conserva la dependencia lineal.*

`(3) -` *T transforma subespacios de V en subespacios de W (bases en sistemas generadores).*

`(4) -` *La imagen inversa de un subespacio de W es un subespacio de V.*

2. Núcleo e imagen de una aplicación lineal. Aplicaciones lineales inyectivas.

a) **Teorema** – $\dim(V) = \dim\big(\ker(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$.

b) **Teorema** – *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

`(1) -` *T es inyectiva.*

`(2) -` $\ker(T) = \{\vec{\mathbf{0}}_V\}$.

`(3) -` $\dim(V) = \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big)$.

`(4) -` *T transforma las bases de V en bases de* $\mathrm{Im}(T)$.

`(5) -` *T conserva la independencia lineal.*

3. La matriz $[T]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}$ de $T : V \longmapsto W$ lineal referida a las bases $\mathcal{B}_V$ y $\mathcal{B}_W$. `[Apuntes de clase]`

a) Significado de las columnas de la matriz $[T]_{\mathcal{B}_V,\mathcal{B}_W}$ de la aplicación lineal T.

b) Relaciones entre el rango y el espacio nulo de la matriz $[T]$ y el núcleo y la imagen de T.

c) Cambios de base.

d) Operaciones con aplicaciones lineales.

e) Los espacios $\mathcal{L}(V,W)$ y $\mathbb{M}_{m\times n}$ con $n = \dim(V)$ y $m = \dim(W)$.

f) Endomorfismos de un espacio. Endomorfismos inyectivos.

g) Matriz de un endomorfismo. Rango e inyectividad.

h) Cambios de base en un endomorfismo: matrices semejantes.

4. Autovalores y autovectores. `[Apuntes de clase y Lay, pág. 267-270 y 276-277]`

a) Autovectores y autovalores de un endomorfismo (de una matriz cuadrada).

b) Subespacio asociado a un autovalor: propiedades.

c) El polinomio característico y la ecuación característica de un endomorfismo (de una matriz).

d) El teorema de Cayley-Hamilton. Aplicación al cálculo de A^{-1}.

5. Diagonalización de endomorfismos (de matrices) y algunas aplicaciones.

a) Endomorfismos (matrices) diagonalizables. Matriz de paso. `[LAY, pág. 282-285]`

b) Potencia n-ésima de una matriz diagonalizable. `[Apuntes de clase]`

c) Procesos de Markov. `[LAY, pág. 253-259]`

d) Ecuaciones en diferencias. `[LAY, pág. 244-253]`

e) Sistemas depredador-presa. `[LAY, pág. 302-305]`

f) Otras aplicaciones de la diagonalización. `[Apuntes de clase]`

---

[1] En el texto de LAY no hay un capítulo dedicado específicamente a las aplicaciones lineales.