Capítulo 4

Aproximación de funciones. Fórmula de Taylor

Fórmula de Taylor. Término complementario. Fórmula de Mac-Laurin.

1. Ordena según las potencias de $(x-2)$ el polinomio $f(x) = x^3 + 4x^2 - 5x + 8$ mediante la fórmula de Taylor.

2. Determina un polinomio $P(x)$ tal que

   a) Cumpla la identidad $P(x+2) - 2P(x+1) + P(x) = x$

   b) En $x = 0$ valga $1/6$

   c) En $x = 3$ valga $2/3$.

3. Desarrollar en serie de Taylor las siguientes funciones en los puntos que se indican:

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} & \mathbf{e}^x \text{ en } 0, & \text{b)} & \mathbf{e}^x \text{ en } 1, & \text{c)} & \operatorname{sen} x \text{ en } 0, \\ \text{d)} & \cos x \text{ en } 0, & \text{e)} & \ln x \text{ en } 1, & \text{f)} & \log_a x \text{ en } 1. \end{array}$$

4. Obtener la fórmula de Taylor de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en un entorno del punto $x_0 = 1$.

5. Obtener la fórmula de Taylor de la función $f(x) = x\mathbf{e}^x$ en un entorno del punto $x_0 = 0$ (fórmula de Mac Laurin).

6. Obtener la fórmula de Mac Laurin de la función $f(x) = \mathbf{e}^{\frac{x}{2}+2}$.

7. Obtener el desarrollo de Mac-Laurin de $f(x) = \dfrac{3x+2}{x^2 - 5x + 6}$.

8. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ x - \frac{x^3}{6} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

   a) ¿Para qué valores de x es derivable la función?

   b) Calcula la función derivada.

   c) ¿Cuántas veces es f derivable en $x = 0$?

   d) Escribe la fórmula de Taylor de dicha función en $x = 0$ utilizando el polinomio de mayor grado posible.

Estimación de errores mediante la fórmula de Taylor.

9. Calcula con un error menor que una centésima $\mathbf{e}^{0,4}$.

10. Prueba que si $x > 0$ entonces
$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}.$$

11. Calcula $\ln 1{,}1$ con un error menor que 10^{-4}.

12. Calcula, con un error menor que 10^{-4}, $\operatorname{sen} 51^{\underline{\text{o}}}$ y $\cos 271^{\underline{\text{o}}}$.

13. Calcula el seno y el coseno de $\frac{1}{10}$ con un error menor que una millonésima.

Aplicaciones geométricas de la fórmula de Taylor.

14. Bajo la fuerza del peso el hilo se arquea imitando la línea catenaria $y = a\cosh\frac{x}{a}$ (a constante). Muestra que, para $|x|$ pequeño, la forma del hilo se aproxima a la de una parábola.

15. Considera los desarrollos en serie de Mac Laurin de las siguientes funciones y representa gráficamente las aproximaciones que resultan al considerar 1, 2 o 3 términos del desarrollo.
$$\text{a)}\quad y = \operatorname{sen} x, \quad \text{b)}\quad y = \cos x, \quad \text{c)}\quad y = \mathbf{e}^x, \quad \text{d)}\quad y = \ln(1+x).$$

16. De la función f se sabe que $f'(2) = f''(2) = f'''(2) = \cdots = f^{(k-1)}(2) = 0$ y $f^{(k)}(2) = 6$. ¿Qué puede afirmarse de f en cuanto a monotonía y curvatura en el punto $x = 2$?.

Cálculo de límites mediante desarrollos en serie.

17. Calcula los límites siguientes:
$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right), \quad \text{b)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\mathbf{e}^x - \cos x}{\tan^2 x}, \quad \text{c)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x - \ln(1+x)}{1 - \cos\frac{x}{2}},$$
$$\text{d)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x) - \operatorname{sen} x}{x - \operatorname{sen} x}, \quad \text{e)}\quad \lim_{x\to 2}\frac{\mathbf{e}^{x-2} - 1}{x-2}, \quad \text{f)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x(1-\cos 3x)}.$$

Soluciones a algunos de los ejercicios propuestos.

1.- $(x-2)^3 + 10(x-2)^2 + 23(x-2) + 22$.

5.- $x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \cdots$.

6.- $\mathbf{e}^2\left[1 + \frac{2}{1!2} + \frac{x^2}{2!2^2} + \frac{x^3}{3!2^3} + \frac{x^4}{4!2^4} + \cdots\right]$.

7.- $\frac{1}{3} + \frac{7x}{9} + \frac{16x^2}{27} + \frac{59x^3}{162} + \frac{199x^4}{972} + \cdots$.

9.- 1,4906.

11.- 0,095333.

12.- a) 0,777232; b) 0,0174409.

17.- a) $\frac{1}{3}$; c) 4.