Capítulo 6

Integral definida. Integrales impropias

Dos problemas, ambos de Geometría, motivan las dos ideas más importantes en el Cálculo. El problema de encontrar la recta tangente nos llevó a la *derivada*. El problema de encontrar el área nos conducirá a la *integral definida*.

La noción de integral es mucho más antigua que la de derivada y sus orígenes se pueden remontar a los griegos en problemas de cálculo de áreas y volúmenes. Nos proponemos en este tema abordar el estudio de la integral.

Hasta ahora, en el estudio del Cálculo, nos hemos centrado principalmente en el problema: *dada una función hallar su derivada*. Sin embargo, muchas aplicaciones importantes del Cálculo están relacionadas con el problema inverso: *dada la derivada de una función, hallar la función original*. Este problema es el que nos plantearemos inicialmente en el tema, que nos conducirá al concepto de primitiva de una función, y que nos ayudará a introducir el concepto de ecuación diferencial.

Una vez que se ha introducido el concepto de integral indefinida nos planteamos un problema nuevo, el de calcular el área de una región en el plano. A primera vista, estas dos ideas parecen no guardar relación alguna, sin embargo descubriremos que están íntimamente relacionadas por un importante teorema que recibe el nombre de Teorema fundamental del Cálculo.

6.1. Primitivas e integral indefinida

Definición 6.1 *Llamamos a F una* `antiderivada` *o* `primitiva` *de f en el intervalo I, si para todo x en I*

$$F'(x) = f(x)$$

Teorema 6.1 (Representación de primitivas) *Si F es una primitiva de f en un intervalo I, entonces G es una primitiva de f en el intervalo I si y sólo si es de la forma*

$$G(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in I$$

donde C es una constante.

El punto crucial del teorema 6.1 está en que podemos representar toda la familia de primitivas de una función mediante la adición de una constante a un primitiva conocida. Denominaremos a G la `antiderivada` o `primitiva general` de f.

Notación para primitivas

Como utilizamos el símbolo D_x, para la operación de tomar derivada, sería natural utilizar A_x para la operación de encontrar antiderivada. Así

$$A_x(f(x)) = F(x) + C$$

Ésta es la notación usada por varios autores, sin embargo, la notación original de Leibnitz continúa teniendo una popularidad aplastante y, por tanto, es la que seguiremos. En lugar de A_x Leibnitz utilizó el símbolo $\int \ldots dx$. Es decir

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

Siguiendo a Leibnitz, también usaremos el término `integral indefinida` en lugar de antiderivada o primitiva general. En este sentido, antiderivar equivale a `integrar`. En el símbolo $\int f(x)\ dx$, $\int$ se denomina `signo integral` y $f(x)$ se denomina `integrando`. Tal vez Leibnitz utilizó el adjetivo *indefinida* para indicar que la integral indefinida siempre incluye una constante arbitraria.

Teorema 6.2 (Regla de la potencia) *Si r es cualquier número racional $r \neq -1$, entonces*

$$\int x^r\ dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$$

`Notas:`

- El teorema incluye el caso $r = 0$, es decir $\int 1\ dx = x + C$.
- Puesto que no se especificó ningún intervalo, se entiende que la conclusión es válida sólo en los intervalos donde x^r esté definida. En particular se deberá excluir cualquier intervalo que contenga al 0 si $r < 0$.

Teorema 6.3

$$\int \text{sen}x\ dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\ dx = \text{sen}x + C$$

Teorema 6.4 (Linealidad) *La integral indefinida es un operador lineal, es decir*

(i) $\int kf(x)\ dx = k \int f(x)\ dx.$

(ii) $\int (f(x) + g(x))\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx.$

Teorema 6.5 (Regla generalizada de la potencia) *Si g es una función derivable y r es cualquier número racional $r \neq -1$, entonces*

$$\int [g(x)]^r g'(x)\ dx = \frac{[g(x)]^{r+1}}{r+1} + C$$

6.2. Introducción al área

En esta sección vamos a analizar el problema de hallar el área de una región plana. Un método para hallar dicha área hace entrar en juego sumas de muchos términos. Es por esto que comenzaremos esta sección presentando una notación para estas sumas que se conoce como `notación sigma`, debido a que utiliza la letra griega sigma mayúscula $\sum$.

6.2.1. Notación sigma

Definición 6.2 *La suma de* n *términos* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *se denota por*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

donde i *se llama* `índice de la suma`*,* a_i *el* `término` n`-ésimo` *de la suma, y los* `límites superior e inferior de la suma` *son* n *y 1 respectivamente.*

`Notas:`

- Los límites superior e inferior de la suma deben ser constantes respecto al índice de la suma. Sin embargo, el límite inferior no tiene por qué ser 1; cualquier valor entero menor o igual que el límite superior es válido.
- Aunque se puede utilizar cualquier letra como índice de la suma, habitualmente se suele elegir i, j y k.

Teorema 6.6 (Propiedades del sumatorio) *Se verifican las siguientes propiedades*

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$*, donde* k *es una constante.*
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$.

Teorema 6.7 (Fórmulas de la suma) *Se verifican las siguientes fórmulas*

$$1.\ \sum_{i=1}^{n} c = cn \qquad 2.\ \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$3.\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad 4.\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

6.2.2. Área

Para polígonos (regiones planas cerradas acotadas por segmentos de recta), el problema de calcular su área es sencillo de resolver. Iniciamos definiendo el área de una rectángulo como la conocida base por altura. A partir de ésta, de manera sucesiva podemos elaborar fórmulas para el área de otras regiones planas. Por ejemplo, para determinar el área de un triángulo, formamos un rectángulo cuya área sea dos veces la del triángulo.

$$\texttt{Triángulo}: A = \frac{1}{2}bh$$

Una vez conocida el área de un triángulo, el área de un polígono se deduce subdividiéndolo en regiones triangulares.

Al pasar de polígonos a regiones más generales, el cálculo del área se hace mucho más difícil. Los antiguos griegos fueron capaces de encontrar fórmulas para el área de ciertas regiones (principalmente las limitadas por cónicas) mediante el método de "*exhaución*". La explicación más clara de este método se debe a Arquímedes (287-212 a. de C.). En esencia, es un proceso de límite en el cual el área queda encajada entre las de dos polígonos, uno inscrito en la región y otro circunscrito. El proceso que empleamos para determinar el área de una región plana es parecido al de Arquímedes.

Introducimos el problema general de calcular el área mediante un ejemplo

Aproximación del área de una región plana

Considérese la región R acotada por la parábola $y = x^2$, el eje x y la recta vertical $x = 2$. Nos referiremos a R como la región encerrada bajo la curva $y = x^2$, entre $x = 0$ y $x = 2$. Nuestro objetivo es calcular el área de esta región, que denotaremos por $A(R)$.

Efectuamos en primer lugar la partición del intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos, cada uno de ellos de amplitud $\Delta x = 2/n$, por medio de los $n + 1$ puntos

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = 2$$

De esta forma

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta x = \frac{2}{n}, \quad x_2 = 2\Delta x = \frac{4}{n}, \ \ldots, \quad x_i = i\Delta x = \frac{2i}{n}, \ \ldots, \quad x_n = n\Delta x = n\frac{2}{n} = 2$$

Consideramos el rectángulo representativo con base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(x_{i-1}) = x_{i-1}^2$. Su área es $f(x_{i-1})\Delta x$. La reunión R_n de todos estos rectángulos forma un polígono inscrito en la región R cuya área tratamos de aproximar. En este caso, podemos tomar como una aproximación a dicha área

$$A(R_n) = f(x_0)\Delta x \ + \ f(x_1)\Delta x \ + \ \cdots \ + \ f(x_{n-1})\Delta x$$

Ahora bien,

$$f(x_i)\Delta x = x_i^2\Delta x = \left(\frac{2i}{n}\right)^2 \cdot \frac{2}{n} = \left(\frac{8}{n^3}\right) i^2$$

Por tanto

$$\begin{aligned} A(R_n) &= \frac{8}{n^3}(0^2) + \frac{8}{n^3}(1^2) + \frac{8}{n^3}(2^2) + \cdots + \frac{8}{n^3}((n-1)^2) \\ &= \frac{8}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] \\ &= \frac{8}{n^3}\left[\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right] = \frac{8}{6}\left(\frac{2n^3 - 3n^2 + n}{n^3}\right) = \\ &= \frac{4}{3}\left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} A(R_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}\right) = \frac{8}{3}$$

A continuación, vamos a aproximar el área por medio de polígonos circunscritos. Consideramos el rectángulo representativo con base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(x_i) = x_i^2$. Su área es $f(x_i)\Delta x$. La reunión S_n de todos estos rectángulos forma un polígono circunscrito para la región R. En este caso

$$A(S_n) = f(x_1)\Delta x \ + \ f(x_2)\Delta x \ + \ \cdots \ + \ f(x_n)\Delta x$$

Como antes, $f(x_i)\Delta x = \left(\dfrac{8}{n^3}\right) i^2$. Por tanto

$$\begin{aligned} A(S_n) &= \frac{8}{n^3}(1^2) + \frac{8}{n^3}(2^2) + \frac{8}{n^3}(3^2) + \cdots + \frac{8}{n^3}(n^2) \\ &= \frac{8}{n^3}(2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{8}{n^3}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \\ &= \frac{8}{6}\left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{n^3}\right) = \frac{4}{3}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$A(R) = \lim_{n\to\infty} A(S_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3}\left[2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right] = \frac{8}{3} \qquad \square$$

A continuación vamos a generalizar el procedimiento descrito en el ejemplo anterior:
Consideremos una región plana R encerrada entre la gráfica de una función continua no negativa $y = f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos, cada uno de ellos de longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Los extremos de los subintervalos son

$$\overbrace{a + 0(\Delta x)}^{a=x_0} < \overbrace{a + 1(\Delta x)}^{x_1} < \overbrace{a + 2(\Delta x)}^{x_2} < \cdots < \overbrace{a + n(\Delta x)}^{x_n=b}$$

Puesto que f es continua, el teorema de Weierstrass garantiza la existencia de un valor máximo y de un valor mínimo de $f(x)$ en cada subintervalo:

$$\begin{aligned} f(m_i) &= \text{valor mínimo de } f(x) \text{ en el } i\text{-ésimo subintervalo} \\ f(M_i) &= \text{valor máximo de } f(x) \text{ en el } i\text{-ésimo subintervalo} \end{aligned}$$

Por tanto, podemos definir un `rectángulo inscrito` situado en el *interior* de la i-ésima subregión y un `rectángulo circunscrito` situado en el *exterior* de la i-ésima subregión. Entonces se verifica

$$\begin{pmatrix} \text{Área del rectángulo} \\ \text{inscrito} \end{pmatrix} = f(m_i)\Delta x \le f(M_i)\Delta x = \begin{pmatrix} \text{Área del rectángulo} \\ \text{circunscrito} \end{pmatrix}$$

Sumando estas áreas se tiene

$$\begin{aligned} \texttt{suma inferior} &= s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x : && \text{Área de los rectángulos inscritos} \\ \texttt{suma superior} &= S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x : && \text{Área de los rectángulos circunscritos} \end{aligned}$$

Se verifica que

$$s(n) \le A(R) \le S(n)$$

Teorema 6.8 (Límite de las sumas superior e inferior) *Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. Los límites cuando $n \to \infty$ de la suma inferior y de la suma superior, existen y son iguales, es decir*

$$\lim_{n\to\infty} s(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} S(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $f(m_i)$ y $f(M_i)$ son los valores mínimo y máximo de f en el i-ésimo subintervalo.

`Nota:` De este teorema se deduce un resultado importante. Puesto que se alcanza el mismo límite para el valor mínimo $f(m_i)$ y para el valor máximo $f(M_i)$, del teorema del encaje se deduce que la elección de x_i en el i-ésimo subintervalo no afecta al límite. Esto deja plena libertad para escoger un valor arbitrario de x en el i-ésimo subintervalo, lo que justifica la siguiente definición

Definición 6.3 (Área de una región plana) *Sea f continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$. El* `área` *de la región limitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es*

$$\texttt{área} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$.

`Nota:` Esta definición se puede usar tanto para calcular *áreas exactas* como para *aproximar áreas*.

6.3. La integral definida

En la sección anterior usamos el límite de una suma para definir el área de un tipo especial de región en el plano. Hallar el área por estos medios es solamente una de las muchas aplicaciones relacionadas con el límite de una suma.

Si bien la integral definida había sido definida y utilizada con mucha anterioridad, fue Riemann (1826-1866) quién generalizó el concepto para incluir una clase de funciones más amplia.

Definición 6.4 (Partición de un intervalo) *Se llama* `partición del intervalo` $[a, b]$ *a una colección* P *de puntos de* $[a, b]$, $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ *que verifican la relación*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

`Nota:` Se denotará $\mathcal{P}([a, b])$, al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

Definición 6.5 (Norma de una partición) *Llamamos* `norma de la partición` P *y lo denotamos* $|P|$ *a*

$$|P| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - x_{i-1}|\}$$

`Notas:`

- Si todos los subintervalos determinados por una partición P son de la misma longitud, la partición se denomina `regular` y se verifica
$$|P| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$
- Para una partición general P, la norma de la partición, está relacionada con el número de subintervalos de $[a, b]$ por la siguiente fórmula
$$\frac{b-a}{|P|} \leq n$$
Por tanto, se verifica que el número de subintervalos de la partición tiende a infinito cuando la norma de la partición tiende a 0
$$(|P| \to 0) \;\Rightarrow\; (n \to \infty)$$
El recíproco de este resultado no es cierto. Por ejemplo, consideremos la siguiente partición del intervalo $[0, 1]$
$$0 < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}} < \cdots < \frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$
Se verifica $|P_n| = 1/2$ para todo n y, por lo tanto el hecho de que n tienda a infinito no implica que $|P_n|$ tienda a 0. En una partición regular, ambas afirmaciones son equivalentes.

Definición 6.6 *Dadas dos particiones* P *y* Q *de* $[a, b]$, *decimos que* Q `es más fina` *que* P *y se nota* $P \prec Q$, *cuando todo punto de* P *pertenece a* Q, *es decir, como conjuntos de puntos* $P \subset Q$.

Definición 6.7 (Sumas de Riemann) *Sea* f *definida en el intervalo cerrado* $[a, b]$, *y sea* P *una partición arbitraria de* $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

donde Δx_i *es la amplitud del i-ésimo subintervalo. Si* c_i *es cualquier punto del i-ésimo subintervalo, la suma*

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \qquad x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

se llama `suma de Riemann` *de* f *asociada a la partición* P.

`Nota:` En la definición anterior de suma de Riemann, la única restricción que se impone a f es que esté definida en el intervalo $[a,b]$. (En la sección anterior f era continua y no negativa).

Definición 6.8 *Sea f una función que está definida en el intervalo cerrado $[a,b]$. Si el límite de la suma de Riemann de f existe, entonces decimos que f es* `integrable` *en $[a,b]$ y denotamos este límite por*

$$\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

Llamamos `integral definida` *de f entre a y b al valor de este límite. El número a es el* `límite inferior de integración` *y b es el* `límite superior de integración`

`Notas:`

- Evidentemente, por el teorema 6.8, las funciones continuas y no negativas son integrables y se verifica que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = A(R)$, donde R es la región encerrada entre la gráfica de la función $y=f(x)$, el eje x, y las rectas $x=a$ y $x=b$.

- El sentido que tiene esta definición es el que surge del análisis realizado en la sección anterior. Sin embargo, se han introducido ahora algunas modificaciones. Por ejemplo, permitimos que f sea negativa en todo o en parte del intervalo $[a,b]$, utilizamos particiones que pueden tener longitudes diferentes y permitimos que c_i sea cualquier punto del i-ésimo subintervalo. Por tanto deberemos establecer, de manera precisa, cómo se relaciona la integral definida con el área. En general $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es el *área con signo* de la región encerrada entre la curva $y=f(x)$ y el eje x en el intervalo $[a,b]$, queriendo decir que se asigna un signo positivo a las áreas de las partes que están por encima del eje x y se asigna un signo negativo a las que están por debajo.

- Aclaramos el uso del límite dado en la definición anterior. La igualdad

$$\lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = L$$

significa que para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i - L\right| < \varepsilon$$

para todas las sumas de Riemann para f en $[a,b]$ para las cuales la norma $|P|$ de la partición asociada es menor que δ. En este caso, decimos que el límite existe y vale L.

- En la definición que hemos dado de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ se ha supuesto de forma implícita que $a<b$. Con las definiciones siguientes obviaremos esta restricción

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \qquad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

- Por último señalamos que x es una `variable muda` en el símbolo $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Con esto queremos decir que x puede reemplazarse por cualquier otra variable (siempre que ésta se sustituya en cada lugar en que se presente).

6.3.1. Funciones integrables

No toda función es integrable en un intervalo cerrado $[a, b]$. Por ejemplo, la función no acotada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

no es integrable en $[-2, 2]$. Puede probarse que, para esta función, la suma de Riemann puede hacerse arbitrariamente grande y, por tanto, el límite de la suma de Riemann en dicho intervalo no existe.

De hecho, también algunas funciones acotadas pueden no ser integrables, aunque son más raras. Por ejemplo, no es integrable la llamada "función de Dirichlet"

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} \quad / \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in [0, 1] - \mathbb{Q} \end{cases}$$

Para toda partición P del intervalo $[0, 1]$, la suma inferior $s(P, f) = 0$ y la suma superior $S(P, f) = 1$ y, por tanto, los límites de las sumas inferiores y superiores no coinciden.

Teorema 6.9 (de integrabilidad) *Sea* $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,*

(i) *Si* f *es continua en* $[a, b]$*, entonces* f *es integrable en* $[a, b]$*.*

(ii) *Si* f *es monótona en* $[a, b]$*, entonces es integrable en* $[a, b]$*.*

(iii) *Si* f *es acotada y es continua salvo en un número finito de puntos de* $[a, b]$*,* f *es integrable en* $[a, b]$*.*

6.3.2. Propiedades de las funciones integrables

Teorema 6.10 (Propiedad aditiva de intervalos) *Si* f *es integrable en un intervalo que contenga a los puntos* a*,* b *y* c*, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

no importa el orden de a*,* b *y* c*.*

`Nota:` Esta propiedad permite aplicar la definición de integral definida a funciones continuas que cambian de signo un número finito de veces en el intervalo $[a,\ b]$ sin más que descomponer $\int_a^b f(x)dx$ en suma de integrales en cuyos intervalos de integración, la función no cambie de signo. De la misma forma este resultado se puede aplicar a funciones que no siendo continuas en todo el intervalo tienen sólo un número finito de discontinuidades en él y estas discontinuidades o son evitables (en cuyo caso tomaríamos la extensión continua) o son discontinuidades de salto finito.

Teorema 6.11 (Propiedad de linealidad) *Si* f *y* g *son integrables en* $[a, b]$ *y* k *es una constante, entonces* $f + g$ *y* kf *son integrables y se verifica*

(i) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$

(ii) $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

Teorema 6.12 (Propiedad de comparación) *Si f y g son integrables en $[a,b]$ y si $f(x) \leq g(x)$ para toda x en $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Teorema 6.13 (Propiedad de acotamiento) *Si f es integrable en $[a,b]$ y si $m \leq f(x) \leq M$ para toda x en $[a,b]$, entonces*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

6.4. El teorema fundamental del Cálculo

El Cálculo Infinitesimal trata del estudio de los límites, y los dos límites más importantes que hemos abordado hasta ahora son la derivada y la integral definida. La derivada de una función f es

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

y la integral definida es

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Estas dos clases de límites parecen no tener relación entre sí. Sin embargo, hay una conexión muy estrecha, como veremos en esta sección.

Newton y Leibnitz, de manera simultánea aunque independientemente fueron los que entendieron y explotaron la íntima relación que existe entre primitivas (o antiderivadas) y la integral definida. Esta relación viene dada por el Teorema fundamental del Cálculo, que se enuncia a continuación. (Incluiremos la demostración por la importancia del resultado.)

Teorema 6.14 (El teorema fundamental del Cálculo) *Sea f continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y sea x un punto (variable) en (a,b). Entonces*

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Demostración ______

Sea

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Entonces

$$G(x+h) - G(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Supongamos por el momento que $h > 0$, y sean $m_h = \min_{t \in [x,x+h]} f(t)$ y $M_h = \max_{t \in [x,x+h]} f(t)$.

Por el teorema de acotamiento

$$\begin{array}{rcccl}
m_h(x+h-x) & \leq & \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt & \leq & M_h(x+h-x) \\
m_h h & \leq & \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)dt & \leq & M_h h \\
m_h h & \leq & G(x+h) - G(x) & \leq & M_h h \\
m_h & \leq & \dfrac{G(x+h) - G(x)}{h} & \leq & M_h
\end{array}$$

Evidentemente m_h y M_h dependen de h. Además, por ser f continua, se cumplirá que

$$\lim_{h\to 0} m_h = f(x), \qquad \lim_{h\to 0} M_h = f(x)$$

Por tanto, por el teorema del emparedado se tendrá que

$$\lim_{h\to 0} \frac{G(x+h)-G(x)}{h} = f(x)$$

En consecuencia se tiene el resultado $G'(x) = f(x)$.
En el caso de que $h < 0$, se actúa de forma análoga. ■

Una consecuencia teórica de este teorema es que toda función continua f, tiene una primitiva F, dada por la función de acumulación

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

`Nota:` Se denomina `función de acumulación` porque acumula el área bajo una curva $y = f(x)$, positiva, desde un valor fijo $t = a$ hasta un valor variable $t = x$.

Teorema 6.15 (Regla de Barrow) *Sea f continua en $[a,b]$, y sea F cualquier primitiva de f en $[a,b]$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

`Nota:` Este teorema es una consecuencia del teorema fundamental del Cálculo y nos proporciona una poderosa herramienta a la hora de evaluar integrales definidas.

Teorema 6.16 (Teorema del valor medio para integrales) *Si f es continua en $[a,b]$, existe un valor c entre a y b tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

6.5. Evaluación de integrales definidas

Por lo general, para calcular integrales definidas se procede en dos etapas; primero encontramos una primitiva y después aplicamos la regla de Barrow. En esta sección daremos algunos criterios que permiten simplificar el cálculo de integrales.

Teorema 6.17 (Regla de sustitución para integrales indefinidas) *Sea g una función derivable y sea F una primitiva de f. Entonces, si $u = g(x)$,*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

Teorema 6.18 (Regla de sustitución para integrales definidas) *Sea g una función con derivada continua en $[a,b]$ y sea f continua en el rango de g. Entonces, si $u = g(x)$,*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Teorema 6.19 *Si f es una función par entonces*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

Si f es una función impar entonces

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

6.6. Integrales impropias

Al establecer el concepto de integral definida en el sentido de Riemann, hemos partido de dos hipótesis fundamentales

1. La función $f(x)$ debía estar definida y ser acotada en el intervalo $[a, b]$.
2. La amplitud del intervalo de integración $[a, b]$ es finita, es decir, los extremos a y b son finitos.

A continuación vamos a estudiar un proceso de paso al límite para calcular integrales, cuando dejan de cumplirse alguna de las condiciones anteriores. Las integrales que se enmarcan en alguno de estos dos supuestos se denominan `integrales impropias`.

6.6.1. Integrales en intervalos no acotados

Las integrales en intervalos no acotados se suelen llamar también `integrales impropias de primera especie`. Corresponden a algunos de los siguientes tipos

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad \int_{a}^{\infty} f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Definición 6.9 (Integral impropia de primera especie) *Las integrales en intervalos no acotados se definen de la siguiente forma*

1. *Sea $f(x)$ una función acotada e integrable en cualquier intervalo de la forma $[M, b]$, siendo b un valor fijo y M cualquier valor tal que $M \leq b$. Se define*
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_{M}^{b} f(x)dx$$
2. *Sea $f(x)$ una función acotada e integrable en cualquier intervalo de la forma $[a, M]$, siendo b un valor fijo y M cualquier valor tal que $M \geq a$. Se define*
$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_{a}^{M} f(x)dx$$
3. *Se define*
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx = \lim_{M_1\to-\infty} \int_{M_1}^{b} f(x)dx + \lim_{M_2\to\infty} \int_{c}^{M_1} f(x)dx$$
siendo c un número real arbitrario.

En los dos primeros casos, la integral del primer miembro se dice que es convergente o divergente según que exista límite finito o infinito en el segundo miembro. Si no existe dicho límite, se dice que no existe la integral. En el tercer caso, para que la integral converja, tienen que converger las dos integrales de la derecha.

`Ejemplo:` Una integral impropia de primera especie importante, que juega el mismo papel que la serie armónica generalizada en el caso de series numéricas, es la integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$, cuyo valor es

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \infty & \text{si } \; p \leq 1 \\ \dfrac{1}{p-1} & \text{si } \; p > 1 \end{cases}$$

luego la integral converge si $p > 1$ y diverge para $p \leq 1$.

Criterios de convergencia

A continuación se dan algunos criterios de convergencia para integrales impropias de primera especie, que nos permitirán saber si la integral tiene un valor finito, aún cuando no sea posible calcular su valor.

Los criterios que se dan a continuación son para el caso en que el intervalo de integración es de la forma $[a, \infty]$. El caso en que el intervalo de integración es $[-\infty, b]$ se reduce a éste, sin más que realizar el cambio de variable $x = -y$.

En general se supondrá que $f(x)$ es continua, ya que otros casos de integrabilidad pueden reducirse a éste. También se supondrá que el integrando es no negativo. Por la aditividad de la integral, bastará que exista un valor $x_0 > a$ tal que $f(x) \geq 0$ para $x \geq x_0$. El caso de integrandos no positivos puede reducirse a éste sin más que hacer $g(x) = -f(x)$.

Teorema 6.20 (Criterio de comparación) *Supongamos que existe x_0 tal que para todo $x \geq x_0$ se verifica que $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$, entonces*

(a) *Si $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ converge y, para todo $x \geq x_0$, se verifica que $f(x) \leq g(x)$, entonces la integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ es convergente.*

(b) *Si $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ diverge y, para todo $x \geq x_0$, se verifica que $g(x) \leq f(x)$, entonces la integral $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ es divergente.*

Teorema 6.21 (Criterio de comparación en el límite) *Supongamos que existe $x_0 > a$ tal que para todo $x \geq x_0$ se verifica que $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$ y que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, entonces*

(a) *Si $A \in \mathbb{R} - \{0\}$, las integrales $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ convergen o divergen simultáneamente.*

(b) *Si $A = 0$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge.*

(c) *Si $A = \infty$ y $\displaystyle\int_a^\infty g(x)dx$ diverge, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.*

Corolario 6.22 *Supongamos que existe $x_0 > a$ tal que para todo $x \geq x_0$ se verifica que $f(x) \geq 0$, entonces si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = A$*

(a) *Si $A \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $p > 1$, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge.*

(b) *Si $A \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $p \leq 1$, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.*

(c) *Si $A = 0$ y $p > 1$, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ converge.*

(d) *Si $A = \infty$ y y $p \leq 1$, entonces $\displaystyle\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.*

El resto de casos posibles son casos dudosos.

Definición 6.10 (Convergencia absoluta) *Se dice que* $\int_a^{\infty} f(x)dx$ `converge absolutamente`, *si la integral* $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ *es convergente.*

Teorema 6.23 *Toda integral absolutamente convergente, es convergente.*

Definición 6.11 (Convergencia condicional) *Una integral impropia convergente, pero no absolutamente convergente, se dice que es* `condicionalmente convergente`.

La paradoja de la trompeta de Gabriel

Se supone que la curva $y = \frac{1}{x}$ en $[1, \infty)$ se hace girar alrededor del eje x, con lo que se genera una superficie denominada trompeta de Gabriel. Se verifica que el volumen V de dicha trompeta es finito, pero el área A de su superficie es infinita. En efecto

$$\begin{aligned}
V &= \int_1^{\infty} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \lim_{b\to\infty} \pi \int_1^{\infty} x^{-2}dx = \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{\pi}{x}\right]_1^b = \pi \\
A &= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right)^2} dx = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x^4}{x^4}} dx = \\
&= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\sqrt{1+x^4}dx
\end{aligned}$$

Ahora bien

$$\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3} > \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto

$$\int_1^b \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}dx > \int_1^b \frac{1}{x} = \ln b$$

y, puesto que $\lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$, concluimos que A es infinita.
Al poner en términos prácticos estos resultados, parecen decir que la trompeta puede llenarse con una cantidad finita de pintura, pero no hay pintura suficiente para pintar su superficie. Justificaremos esta aparente contradicción. Supongamos que la trompeta se abre por un lado y se aplana. Dada una cantidad finita de pintura, posiblemente no podríamos pintar esta superficie con una capa de pintura de grosor *uniforme*. Sin embargo, podríamos hacerlo si permitimos que la capa de pintura se haga cada vez más delgada conforme nos alejamos del extremo más ancho de la trompeta. Esto es lo que ocurre cuando llenamos la trompeta sin abrir con π unidades cúbicas de pintura.

`Nota:` Efectuamos $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}dx &= \left\{ \begin{array}{ll} x^2 = u & 2xdx = du \\ \dfrac{dx}{x^3} = \dfrac{du}{2x^4} = \dfrac{du}{2u^2} & \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+u^2}}{u^2} = \\
&= \left\{ \begin{array}{ll} u = \operatorname{tg} t & \sqrt{u^2+1} = \sec t \\ u^2 = \operatorname{tg}^2 t & du = \sec^2 t dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^3 t}{\operatorname{tg}^2 t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\cos t \cdot \operatorname{sen}^2 t}dt = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} t = z \\ \cos t = dz \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{z^2(1-z^2)}dz = \\
&= \frac{1}{2}\left[\int \frac{dz}{z^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1-z} + \frac{1}{2}\int \frac{dz}{1+z}\right] = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{z} - \frac{1}{2}\ln|1-z| + \frac{1}{2}\ln|1+z|\right] + C \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{z} + \ln\sqrt{\left|\frac{1+z}{1-z}\right|}\right] + C \\
&\left\{ \sqrt{\left|\frac{1+z}{1-z}\right|} = \sqrt{\left|\frac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t}\right|} = \sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} t)^2}{1-\operatorname{sen}^2 t}} = \frac{1+\operatorname{sen} t}{\cos t} \right\} \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\operatorname{sen} t} + \ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} t}{\cos t}\right|\right] + C = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{\operatorname{sen} t} + \ln|\sec t + \operatorname{tg} t|\right] + C \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{1+u^2}}{u} + \ln\left|u + \sqrt{1+u^2}\right|\right] + C = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + \ln\left|x^2 + \sqrt{1+x^4}\right|\right] + C
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}dx &= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^2} + \ln\left|x^2 + \sqrt{1+x^4}\right|\right]_1^b = \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\left[-\frac{\sqrt{1+b^4}}{b^2} + \ln\left|b^2 + \sqrt{1+b^4}\right| + \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})\right] = \infty
\end{aligned}$$

6.6.2. Integrales de funciones no acotadas

Corresponde al caso en que la función $f(x)$ no está acotada en ningún entorno de uno o varios puntos del intervalo $[a, b]$. Se suelen denominar también `integrales impropias de segunda especie`

Definición 6.12 (Integral impropia de segunda especie) *Las integrales de funciones no acotadas se definen de la siguiente forma*

1. *Caso de un solo punto de no acotación correspondiente al límite superior b.*
   Sea $f(x)$ una función integrable en cualquier intervalo contenido en $[a, b)$. Se define
   $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$$

2. *Caso de un solo punto de no acotación correspondiente al límite inferior a.*
   Sea $f(x)$ una función integrable en cualquier intervalo contenido en $(a, b]$. Se define
   $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$$

3. *Caso de un solo punto c de no acotación interior al intervalo $[a, b]$.*
   Se define

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \to c^+} \int_t^b f(x)dx$$

En los dos primeros casos, la integral del primer miembro se dice que es convergente o divergente según que exista límite finito o infinito en el segundo miembro. Si no existe dicho límite, se dice que no existe la integral. En el tercer caso, para que la integral converja, tienen que converger las dos integrales de la derecha.

`Ejemplo:` Una integral impropia de segunda especie importante, es la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$, cuyo valor es

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \infty & \text{si } p \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-p} & \text{si } p < 1 \end{cases}$$

luego la integral converge si $p < 1$ y diverge para $p \geq 1$.

Criterios de convergencia

A continuación se dan algunos criterios de convergencia para integrales impropias de segunda especie.

Dada una función continua en un intervalo, salvo en un número finito de puntos, y no acotada en ningún entorno de dichos puntos, se usará la propiedad de aditividad respecto del intervalo de integración para descomponer la integral en suma de las que fuesen necesario, de modo que en cada intervalo de integración la función únicamente no esté acotada en uno de sus extremos.

Los criterios que se dan son para integrales en las que $f(x)$ únicamente no esté acotada en el límite superior b. Existen criterios análogos para el caso en que $f(x)$ no esté acotada en el límite inferior a.

En general se supondrá que $f(x)$ es continua en (a, b). Otros casos de integrabilidad pueden reducirse a éste. También se supondrá que el integrando es no negativo. Por la aditividad de la integral, bastará que exista un valor $x_0 \in (a, b)$ tal que $f(x) \geq 0$ para $x_0 \leq x < b$. El caso de integrando no positivos puede reducirse a éste sin más que hacer $g(x) = -f(x)$.

Teorema 6.24 (Criterio de comparación) *Supongamos que existe x_0 tal que para $x_0 \leq x < b$ se verifica que $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$, entonces*

(a) *Si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge y, para $x_0 \leq x < b$, se verifica que $f(x) \leq g(x)$, entonces la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es convergente.*

(b) *Si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ diverge y, para $x_0 \leq x < b$, se verifica que $g(x) \leq f(x)$, entonces la integral $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ es divergente.*

Teorema 6.25 (Criterio de comparación en el límite) *Supongamos que existe x_0 tal que para $x_0 \leq x < b$, se verifica que $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$ y que $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, entonces*

(a) *Si $A \in \mathbb{R} - \{0\}$, las integrales $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ y $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ convergen o divergen simultáneamente.*

(b) *Si $A = 0$ y $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge.*

(c) *Si* $A = \infty$ *y* $\int_a^b g(x)dx$ *diverge, entonces* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge.*

Corolario 6.26 *Supongamos que existe* $x_0 \in (a, b)$ *tal que para* $x_0 \leq x < b$ *se verifica que* $f(x) \geq 0$*, entonces si* $\lim_{x \to b^-} (b - x)^p f(x) = A$

(a) *Si* $A \in \mathbb{R} - \{0\}$ *y* $p < 1$*, entonces* $\int_a^b f(x)dx$ *converge.*

(b) *Si* $A \in \mathbb{R} - \{0\}$ *y* $p \geq 1$*, entonces* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge.*

(c) *Si* $A = 0$ *y* $p < 1$*, entonces* $\int_a^b f(x)dx$ *converge.*

(d) *Si* $A = \infty$ *y y* $p \geq 1$*, entonces* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge.*

El resto de casos posibles son casos dudosos.

Definición 6.13 (Convergencia absoluta) *Se dice que* $\int_a^b f(x)dx$ `converge absolutamente`*, si la integral* $\int_a^b |f(x)|dx$ *es convergente.*

Teorema 6.27 *Toda integral absolutamente convergente, es convergente.*

Definición 6.14 (Convergencia condicional) *Una integral impropia convergente, pero no absolutamente convergente, se dice que es* `condicionalmente convergente`*.*

6.6.3. Integral impropia de tercera especie

Definición 6.15 (Integral impropia de tercera especie) *Una* `integral impropia de tercera especie` *es una integral con intervalo no acotado, y con integrando no acotado en un conjunto finito de puntos.*

El estudio de una integral impropia de tercera especie se reduce, por la aditividad respecto al intervalo de integración, a estudiar por separado una (o dos) integrales de primera especie y una (o varias) integrales de segunda especie.

Si todas las integrales de los sumandos son convergentes, la dada es convergente. Si al menos una es divergente, la dada es divergente. Para la convergencia absoluta se tiene un resultado análogo.

`Notas:`

- Si se trata de estudiar la convergencia de una integral impropia con $f(x)$ una función que no mantenga el signo en el intervalo, se estudia su convergencia absoluta. Si la integral es absolutamente convergente, es convergente.

- En ocasiones es preciso estudiar para qué valores del parámetro $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ es convergente una integral del tipo $\int_a^\infty f(x, \lambda)dx$ ó $\int_a^b f(x, \lambda)dx$. Si el integrando no mantiene el signo en el intervalo se aplica la nota anterior. Para aquellos valores de λ en los que la integral no es absolutamente convergente se intentará calcular una primitiva o reducirla a una integral que seamos capaces de estudiar.

`Ejemplo:` Estudiar la convergencia de la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}dx$ para los distintos valores de $p > 0$.

El integrando $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x^p}$ no conserva el signo en el intervalo $[1, \infty)$.
Evidentemente

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\right| \leq \frac{1}{x^p}$$

y sabemos que la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ converge si $p > 1$. En virtud del criterio de comparación se concluye que la integral impropia $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\right| dx$ converge para $p > 1$; por consiguiente la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}dx$ es absolutamente convergente y, por lo tanto, convergente, para $p > 1$.
Estudiemos ahora el caso $0 < p \leq 1$.
Como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}dx$ diverge, no se puede razonar como antes. Veamos otra forma de actuar.
Integrando por partes

$$\int_1^M \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}dx = \left[-\frac{1}{x^p}\right]_1^M - p\int_1^M \frac{\cos x}{x^{p+1}}dx = \cos 1 - \frac{\cos M}{M^p} - p\int_1^M \frac{\cos x}{x^{p+1}}dx$$

Tomando límite cuando $M \to \infty$

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}dx = \cos 1 - p\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{p+1}}dx$$

Estudiemos la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{p+1}}dx$.
Como $\left|\dfrac{\cos x}{x^{p+1}}\right| \leq \dfrac{1}{x^{p+1}}$ y la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{p+1}}$ converge por ser $p+1 > 1$, entonces por el criterio de comparación se concluye que la integral $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^{p+1}}\right| dx$ converge; por consiguiente, la integral $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{p+1}}dx$ es absolutamente convergente y, por lo tanto, es convergente.
En consecuencia, la integral dada es convergente para todo p. $\square$

6.6.4. La función Γ de Euler

Definición 6.16 (Función Γ de Euler) *Se denomina función Γ de Euler a la función*

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}dx, \qquad p > 0$$

`Nota:` La función Γ está bien definida, es decir, la integral impropia es convergente para todo $p > 0$.

Propiedades

1. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
2. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} \pi p}$ para $0 < p < 1$.
3. $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ para $p > 0$.

`Nota:` El cálculo de $\Gamma(p)$ para cualquier valor de $p > 1$ puede reducirse mediante la fórmula $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ al cálculo de $\Gamma(p)$ para un valor de p con $0 < p < 1$. Para estos valores la función Γ está tabulada; la tabla se obtiene usando métodos numéricos para calcular las integrales impropias y está incorporada en cualquier sistema de cálculo simbólico.

6.6.5. La función B de Euler

Definición 6.17 (Función B de Euler) *Se denomina función B de Euler a la función*

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \qquad p,q > 0$$

`Nota:` La función B está bien definida, es decir, la integral impropia es convergente para todo $p, q > 0$.

Propiedades

1. $B = B(q,p)\ \forall p, q > 0$.
2. $B(p,q) = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} x \cos^{2q-1} x dx$ para $p, q > 0$.
3. $B(p,q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ para $p, q > 0$.

Índice general