Tema 5 (I) - El producto interior y la norma

1. Encontrar un vector unitario en la dirección del vector $\mathbf{x} = (\sqrt{5}, -3, \sqrt{2}\,)$.

2. Se sabe que $\mathbf{x} \parallel \mathbf{y}$, que $\|\mathbf{x}\| = 3$ y que $\mathbf{y} = (2, -1, 1)$. Hallar $\mathbf{x}$.

3. Hallar el ángulo forman entre si los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

a) $\mathbf{x} = (1, 0)$ e $\mathbf{y} = (1, 1)$.

b) $\mathbf{x} = (\sqrt{3}, 1)$ e $\mathbf{y} = (1, \sqrt{3}\,)$.

c) $\mathbf{x} = \left(\cos\frac{\pi}{6}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)$ e $\mathbf{y} = \left(\cos\frac{3\pi}{4}, \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$.

d) $\mathbf{x} = (0, 1, 0, 1)$ e $\mathbf{y} = (3, 3, 3, 3)$.

e) $\mathbf{x} = (1, 2, -1, 0, 1)$ e $\mathbf{y} = (2, 1, -3, 1, -1)$.

4. Los vectores $\mathbf{x} = (2, -1)$ e $\mathbf{y} = (a, 2a-5)$ forman un ángulo de 60°. Hallar a.

5. Hallar un vector unitario que forme un ángulo de 45° con el vector $\mathbf{x} = (2, 1)$.

6. Hallar el ángulo que forma la diagonal de un cubo con una de sus aristas.

7. Hallar el ángulo que forma la diagonal de un cubo con una de sus caras.

8. Probar que $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ si y sólo si $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$. Interpretar geométricamente el resultado.

9. Probar que $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ si y sólo si $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$. Interpretar geométricamente el resultado.

10. Los vectores $\lambda(2, -1)$ y $(-3, 4)$ son dos lados de un rombo. Hallar λ.

11. La desigualdad triangular establece que $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ ¿En qué casos $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$?

12. Probar que un paralelogramo es un rombo si y sólo si sus diagonales son perpendiculares.

13. Probar que $\big|\, \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \,\big| \leqslant \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$ ¿En qué casos se da la igualdad? Interpretar geométricamente.

14. Dada la base de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1),\ (2, -1, 0),\ (0, 1, -2)\}$ y los vectores, cuyas coordenadas están referidas a $\mathcal{B}$, $\mathbf{x} = (2, -1, 3)_{\mathcal{B}}$ e $\mathbf{y} = (3, 2, -1)_{\mathcal{B}}$, hallar $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$.

15. Los vectores $\mathbf{a} = \lambda(1, -2)$ y $\mathbf{b}$ son los catetos de un triángulo rectángulo y el vector $\mathbf{c} = (3, 1)$ es la hipotenusa. Hallar λ y el vector $\mathbf{b}$.

16. Dado el subespacio $H = \langle\, (1, 2, -1, 0), (0, -1, 1, 3)\, \rangle$, hallar K tal que $H \oplus K = \mathbb{R}^4$.
`Sugerencia: hacer` $K = H^\perp$.

17. Hallar un vector en la dirección de la bisectriz del ángulo que forman los vectores $\mathbf{u} = (1, -2, 0)$ y $\mathbf{v} = (-3, 0, 4)$. Hallar un vector perpendicular a dicha bisectriz y comprobar que va en la dirección de la bisectriz del ángulo que forman $\mathbf{u}$ y $-\mathbf{v}$. Interpretar geométricamente el resultado obtenido.

18. Dado el conjunto $A = \{(0-2, 5, -1),\ (1-, 0, 0, -2)\}$, se pide:

a) Probar, sin hallar $A^\perp$, que $A^\perp = \langle\, (0-2, 5, -1),\ (1-, 0, 0, -2)\, \rangle^\perp$.

b) Hallar unas ecuaciones implícitas y una base del subespacio $\langle\, (0-2, 5, -1),\ (1-, 0, 0, -2)\, \rangle^\perp$.

19. Dada una matriz $A_{n\times m}$, ¿qué relación hay entre el rango(A) y la dimensión de nulo(A) ?

20. Una matriz $A_{3\times 4}$ es tal que filas$(A)^\perp = \langle\, (1, 1, 4, -1),\ (2, -1, 0, 0)\, \rangle$. Hallar la forma escalonada reducida de la matriz A.

21. Sean H y K dos subespacios de un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$.

a) Probar que $(H + K)^\perp = H^\perp \cap K^\perp$.

b) Usar el apartado anterior para probar que $(H \cap K)^\perp = H^\perp + K^\perp$.

22. Sea H un subespacio de R^n y sea $\mathbf{v} \in H$. Probar que $H^\perp \subseteq \langle\, \mathbf{v}\, \rangle^\perp$. Generalizar el resultado.