Capítulo 7

Aplicaciones de la integral

En este capítulo vamos a resolver algunos problemas geométricos y físicos que hacen uso de la integral definida.

7.1. El área de una región plana

7.1.1. Área de una región limitada por una curva y el eje X

Sea $y = f(x)$ una función continua y no negativa, definida en el intervalo $[a, b]$. Sea R la región del plano acotada por las gráficas de $y = f(x),\ x = a,\ x = b$ e $y = 0$. Su área $A(R)$ está dada por

$$A(R) = \int_a^b f(x)dx$$

Si $f(x) \leq 0$, para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx$ es un número negativo y por tanto no puede ser un área, puesto que el área es un número no negativo. Sin embargo, sólo es el negativo del área acotada por $y = f(x),\ x = a,\ x = b$ e $y = 0$. Su área $A(R)$ está dada por

$$A(R) = -\int_a^b f(x)dx$$

En general, para calcular el área de una región R del plano acotada por las gráficas de $y = f(x),\ x = a,\ x = b$ e $y = 0$, basta descomponer el intervalo de integración en subintervalos donde el signo de la función sea constante y aplicar la propiedad de linealidad de la integral respecto del intervalo de integración.

7.1.2. Área encerrada entre dos curvas

Sean $y = f(x)$ e $y = g(x)$ dos funciones definidas en el intervalo $[a, b]$. Sea R la región del plano acotada por las gráficas de $y = f(x),\ y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$. Su área $A(R)$ está dada por

$$A(R) = \int_a^b \mid f(x) - g(x) \mid dx$$

Hay casos, como por ejemplo aquellos en que la función y es contorno de una región, en que conviene usar `rectángulos representativos` horizontales y calcular el área integrando respecto de y. En general, para determinar el área encerrada entre dos curvas, usamos

$$A = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{[\text{(curva de arriba)-(curva de abajo)}]}_{\text{en la variable } x} dx$$

$$A = \int_{y_1}^{y_2} \underbrace{[\text{(curva derecha)-(curva izquierda)}]}_{\text{en la variable } y} dy$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos de intersección adyacentes de las dos curvas o puntos de las rectas frontera que se especifiquen.

7.2. Volumen de un sólido

7.2.1. Sólidos de revolución: Método de los discos

Cuando una región plana se encuentra por completo en un lado de una recta fija en su plano, y se hace girar alrededor de esa recta, genera un `sólido de revolución`. La recta fija se llama `eje` del sólido de revolución. Por ejemplo si la región acotada por un semicírculo y su diámetro se hace girar alrededor de ese diámetro, genera una esfera. Si la región dentro de una triángulo rectángulo se hace girar alrededor de uno de sus catetos, genera un cono. Cuando una región circular se hace girar alrededor de una recta en su plano y que no intersecta al círculo, se genera un `toro`. En cada caso es posible representar el volumen como una integral definida.

El más simple de los sólidos de revolución es el cilindro circular recto o `disco`, que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de una eje adyacente a uno de sus lados. El volumen de este disco es

$$\text{Volumen del disco} = \pi R^2 w$$

donde R es el radio del disco y w su anchura.
Podemos usar este resultado para calcular el volumen de un sólido de revolución general. Para ello, se considera un rectángulo representativo en la región plana. Cuando se gira este rectángulo alrededor del eje de revolución, se genera un `disco representativo` cuyo volumen es

$$\Delta V = \pi R^2 \Delta x$$

Si aproximamos el volumen del sólido por n de tales discos de anchura Δx y de radio $R(x_i)$, tenemos

$$\text{Volumen del sólido} \approx \sum_{i=1}^{n} \pi [R(x_i)]^2 \Delta x = \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2 \Delta x$$

Tomando el límite cuando $\|\Delta\| \to 0$ $(n \to \infty)$, tenemos

$$\text{Volumen del sólido} = \lim_{n\to\infty} \pi \sum_{i=1}^{n} [R(x_i)]^2 \Delta x = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx$$

Si se toma el eje de revolución verticalmente, se puede derivar una fórmula similar

$$\text{Volumen del sólido} = \pi \int_a^b [R(y)]^2 dy$$

En general, si se hace girar, alrededor del eje OX la curva $y = f(x)$ se genera un sólido de revolución cuyo volumen es

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x$$

Si se hace girar alrededor del eje OY el volumen viene dado por

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) \, \mathrm{d}x$$

7.2.2. Método de las arandelas

El método de los discos puede extenderse fácilmente para incluir sólidos de revolución con un agujero, reemplazando el disco representativo por una `arandela representativa`. La arandela se obtiene girando un rectángulo alrededor de un eje paralelo a uno de sus lados. Si r y R son los radios respectivos interno y externo de la arandela y w es su anchura, entonces el volumen viene dado por

$$\text{Volumen de la arandela} = \pi(R^2 - r^2)w$$

Si suponemos que la región está limitada por un radio externo $R(x)$ y otro interno $r(x)$ y se gira esta región alrededor de su eje de revolución, entonces el volumen del sólido resultante viene dado por

$$V = \pi \int_a^b \left([R(x)]^2 - [r(x)]^2\right) dx$$

7.2.3. Sólidos con secciones transversales conocidas

Hasta ahora se han considerado sólidos con secciones transversales circulares. Sin embargo, el método de encontrar el volumen funciona también para sólidos que tengan una sección con área conocida, ya que, en este caso, también puede aproximarse el volumen de una capa con esta sección transversal.
Si tenemos un sólido que al ser cortado por un plano perpendicular al eje OX da lugar a una sección de área $A(x)$, dependiente de la abscisa x, el volumen entre los puntos a y b viene dado por

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

Análogamente, para un sólido que al ser cortado por un plano perpendicular al eje OY da lugar a una sección de área $A(y)$ dependiente de la ordenada y, el volumen entre los puntos a y b viene dado por

$$V = \int_a^b A(y)\, dy$$

7.3. Longitud de un arco de curva

En esta sección nos basamos en el carácter de suma de la integral definida para calcular la longitud de un arco de curva plana. En este caso aproximaremos un arco de curva por segmentos rectos cuyas longitudes vienen dadas por la fórmula de la distancia

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Si un arco de curva tiene una longitud de arco de curva finita, decimos que es `rectificable`. Veremos, en el desarrollo de una fórmula para la longitud de un arco de curva, que una condición suficiente para que la gráfica de una función f sea rectificable entre $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ es que f' sea continua en $[a, b]$. La gráfica de una función continuamente derivable se llama `curva suave`.

Sea la curva $y = f(x)$, con f derivable y con derivada continua en $[a, b]$ y denotemos por s la longitud del arco de curva en ese intervalo. Aproximamos la gráfica de f por n segmentos cuyos extremos están determinados por la partición

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

Haciendo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, aproximamos la longitud total del arco por

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$$

Tomando el límite cuando $\|\Delta\| \to 0$ ($n \to \infty$), tenemos

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}$$

Por existir $f'(x)$ para todo x en (x_{i-1}, x_i), el teorema del valor medio garantiza la existencia de un $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(c_i)(x_i - x_{i-1}) \;\Rightarrow\; \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = f'(c_i)$$

Además, puesto que f' es continua en $[a, b]$, sabemos que $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ es también continua (y, por tanto, integrable) en $[a, b]$ y tenemos

$$s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\ \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

Llamamos a s la `longitud del arco` de f entre a y b.

Definición 7.1 *Si la función $y = f(x)$ representa una curva suave en el intervalo $[a, b]$, la* `longitud de arco` *de f entre a y b viene dada por*

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\ dx$$

Análogamente, para una curva suave de ecuación $x = g(y)$, la `longitud de arco` *de g entre c y d viene dada por*

$$s = \int_c^d \sqrt{1 + (g'(y))^2}\ dy$$

Otra forma de determinar una curva plana es a través de sus ecuaciones paramétricas

$$x = f(t),\ y = g(t),\ a \le t \le b$$

Definición 7.2 *Una curva plana es suave si está determinada por un par de ecuaciones paramétricas $x = f(t),\ y = g(t),\ a \le t \le b$, en donde f' y g' existen y son continuas en $[a, b]$ y $f'(t)$ y $g'(t)$ no son simultáneamente nulas en (a, b).*

Razonando de forma análoga, se obtiene que la longitud del arco s de la curva suave parametrizada por $x = f(t),\ y = g(t),\ a \le t \le b$, viene dada por

$$s = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\ dx$$

7.4. Área de una superficie de revolución

Si se hace girar una curva plana suave alrededor de un eje en su plano, genera una superficie de revolución.

Para calcular el área de una superficie de revolución, usamos la fórmula de la superficie lateral de un tronco de cono circular recto. Un tronco de cono o cono truncado es la parte de un cono comprendida entre dos planos perpendiculares al eje del cono. Si un cono truncado tiene radios de sus bases r_1 y r_2 y altura oblicua ℓ, entonces su área viene dada por

$$A = 2\pi \left(\frac{r_1 + r_2}{2}\right) \ell = 2\pi \cdot (\text{radio promedio}) \cdot (\text{altura oblicua}).$$

La deducción de este resultado sólo depende de la fórmula del área de un círculo.

Supongamos que se gira la gráfica de una función f, cuya derivada es continua en el intervalo $[a,b]$, alrededor del eje x, para formar una superficie de revolución. Sea Δ una partición de $[a,b]$, con subintervalos de amplitud Δx_i. Entonces el segmento de longitud

$$\Delta \ell_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

genera un tronco de cono.
Por el teorema del valor medio, existe un punto d_i tal que $r_i = f(d_i)$ es el radio medio de este tronco de cono. Entonces, el área de la superficie lateral ΔS_i del tronco viene dada por

$$\Delta S_i = 2\pi r_i \Delta \ell_i = 2\pi f(d_i)\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = 2\pi f(d_i)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$$

Por el teorema del valor medio, existe un punto c_i en (x_{i-1}, x_i) tal que

$$f'(c_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

Por tanto, $\Delta S_i = 2\pi f(d_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x_i$, y el área total de la superficie puede aproximarse por

$$S \approx 2\pi \sum_{i=1}^{n} f(d_i)\sqrt{1 + [f'(c_i)]^2}\Delta x_i$$

Tomando el límite cuando $\|\Delta\| \to 0$ ($n \to \infty$), se tiene que

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

De manera similar, se sigue que si se gira la gráfica de f en torno al eje y, el área S viene dada por

$$S = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

En definitiva, el área de la superficie de revolución S que se genera al hacer girar la gráfica de la función $y = f(x)$ con derivada continua, alrededor de un eje horizontal o vertical entre las rectas $x = a$ y $x = b$ viene dada por

$$S = 2\pi \int_a^b r(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

donde $r(x)$ es la distancia entre la gráfica de f y el eje de revolución correspondiente.
Si $x = g(y)$ en el intervalo $[c,d]$, entonces el área de la superficie es

$$S = 2\pi \int_c^d r(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}dy$$

donde $r(y)$ es la distancia entre la gráfica de g y el eje de revolución.

7.5. Aplicaciones a la Física

7.5.1. Trabajo realizado por una fuerza

Si una masa puntual se desplaza sobre una recta desde el punto $x = a$ al punto $x = b$ por la acción de una fuerza variable f, el trabajo desarrollado para ir desde a hasta b viene dado por

$$W = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\,.$$

Ejemplo Calcular el trabajo desarrollado al pasar una carga de 2 coulombios de un punto $x = p$ hasta un punto $x = q$ por la repulsión de una carga unidad situada en el origen de coordenadas.

Por la Ley de Coulomb: $F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$ luego

$W = \displaystyle\int_p^q k\frac{1\cdot 2}{x^2}\mathrm{d}x = 2k\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$. $\square$

7.5.2. Momentos, centros de masas, centroides

Consideremos un arco de curva material plana $y = f(x)$, $a \le x \le b$ de densidad lineal constante k. Los **momentos** respectos a los ejes x e y vienen dados por

$$\begin{aligned} M_x &= k\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x\,, \\ M_y &= k\int_a^b x\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x \end{aligned} .$$

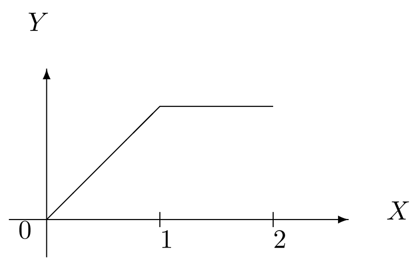
Las coordenadas del **centro de masas** o **centroide** (ya que la densidad lineal la consideramos constante) (x_G, y_G) vienen dadas por las expresiones

$$x_G = \frac{k\displaystyle\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x}{M} = \frac{M_y}{M}\,, \qquad y_G = \frac{k\displaystyle\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x}{M} = \frac{M_x}{M}$$

siendo M la masa total del sistema, que viene dada por la expresión

$$M = k\int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

Ejemplo Calcular el centro de gravedad del arco de curva $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$ suponiendo que tiene densidad lineal constante, k.



$$x_G = \frac{\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2}\mathrm{d}x + \int_1^2 x\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 (1+\sqrt{2})\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}x} \qquad y_G = \frac{\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{2}\mathrm{d}x + \int_1^2 1\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 (1+\sqrt{2})\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}x}\,,$$

resultando $x_G = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}, \qquad y_G = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}$. $\square$

Consideremos una región plana con densidad superficial constante k situada por debajo de la gráfica de una función continua f . Sea A el área de dicha región.

Los **momentos** respectos a los ejes x e y vienen dados por

$$M_x = k\frac{1}{2}\int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x\,,$$

$$M_y = k\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\,.$$

Las coordenadas del **centro de masas** o **centroide** (x_G, y_G) vienen dadas por las expresiones

$$x_G = \frac{k\displaystyle\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x}{kA} = \frac{M_y}{kA}\,, \qquad y_G = \frac{k\displaystyle\int_a^b x[f(x)]^2}{kA} = \frac{M_x}{kA}\,.$$

Ejemplo Hallar el centroide del cuarto de la circunferencia $x^2+y^2=4$ situado en el primer cuadrante con densidad lineal 1 .

Evidentemente $A = \dfrac{1}{4}\pi 2^2 = \pi$.

$$x_G = \frac{\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x}{\pi} = \frac{8}{3\pi}\,, \qquad y_G = \frac{\frac{1}{2}\displaystyle\int_0^2 (4-x^2)\mathrm{d}x}{\pi} = \frac{8}{3\pi}\,.\ \square$$

Supongamos ahora que la región plana con densidad lineal constante está delimitada por las gráficas de dos funciones f y g de manera que $f \geq g$ en el intervalo $[a,b]$. Sea A el área de dicha región.

Los **momentos** respectos a los ejes x e y vienen dados por

$$M_x = k\frac{1}{2}\int_a^b \left[[f(x)]^2 - [g(x)]^2\right]\mathrm{d}x\,,$$

$$M_y = k\int_a^b x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x\,.$$

Las coordenadas del **centro de masas** o **centroide** (x_G, y_G) vienen dadas por las expresiones

$$x_G = \frac{k\displaystyle\int_a^b x[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x}{kA} = \frac{M_y}{kA}\,, \qquad y_G = \frac{k\frac{1}{2}\displaystyle\int_a^b \left[[f(x)]^2-[g(x)]^2\right]\mathrm{d}x}{kA} = \frac{M_x}{kA}\,.$$

Ejemplo Hallar el centroide de la región delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=2x$ y $g(x)=x^2$ con densidad lineal constante igual a 1.

$A = \displaystyle\int_0^2 (2x-x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$.

$$Ax_G = \int_0^2 x(2x-x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3} \Rightarrow x_G = 1$$

$$Ay_G = \frac{1}{2}\int_0^2 (4x^2-x^4)\mathrm{d}x = \frac{32}{15} \Rightarrow y_G = \frac{8}{5}\ \square$$

Índice general