Tema 3 (II) - Determinantes, menores y rango

1. El cálculo de un determinante usando métodos "*clásicos*" puede ser, a veces, muy engorroso. Sin embargo, la teoría de determinantes está llena de recursos. Por ejemplo, para toda matriz $A_{n\times n}$ se cumple que $\det(A)^2 = \det(A)\cdot\det(A) = \det(A)\cdot\det(A^t) = \det(A\cdot A^t)$. Aplicar este "*truco*" para calcular los determinantes siguientes calculando previamente su cuadrado.

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & -2 & \sqrt{5} \\ -\sqrt{3} & \sqrt{2} & \sqrt{5} & 2 \\ 2 & -\sqrt{5} & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ -\sqrt{5} & -2 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}$$

2. Usar la *Regla de Cramer* para probar que los sistemas dados tienen solución única y hallar dicha solución.

$$\begin{aligned} 2x - y &= 3 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ -x + y &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 18x + 12y &= 13 \\ 30x + 24y &= 23 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 20x + 8y &= 11 \\ 12x - 24y &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x + z &= 0 \\ 3x - 4y + 4z &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ -x + 3y - 2z &= 4 \\ 4x + y - z &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x - 4y - z &= -1 \\ 2x - 3y + z &= 4 \\ x + y - 4z &= 6 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 5x - 2y + z &= 15 \\ 3x - 3y - z &= -7 \\ 2x - y - 7z &= -3 \end{aligned}$$

3. Para los sistemas que siguen: usar el *Teorema de Rouché-Frobenius* para resolverlos o para probar que no tienen solución.

$$\begin{aligned} 2x + 7y + 3z + t &= 6 \\ 3x + 5y + 2z + 2t &= 4 \\ 9x + 4y + z + 7t &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x - 3y + 5z + 7t &= 1 \\ 4x - 6y + 2z + 3t &= 2 \\ 2x - 3y - 11z - 15t &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + 4y + z + t &= 3 \\ 6x + 8y + 2z + 5t &= 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t &= 13 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 5y - 8z &= 8 \\ 4x + 3y - 9z &= 9 \\ 2x + 3y - 5z &= 7 \\ x + 8y - 7z &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 2z + 2t &= 2 \\ 2x + 3y + 2z + 5t &= 3 \\ 9x + y + 4z - 5t &= 1 \\ 2x + 2y + 3z + 4t &= 5 \\ 7x + y + 6z - t &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 8x + 6y + 5z + 2t &= 21 \\ 3x + 3y + 2z + t &= 10 \\ 4x + 2y + 3z + t &= 8 \\ 3x + 5y + z + t &= 15 \\ 7x + 4y + 5z + 2t &= 18 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 2x + 3y + z + 2t &= 4 \\ 4x + 3y + z + t &= 5 \\ 5x + 11y + 3z + 2t &= 2 \\ 2x + 5y + z + t &= 1 \\ x - 7y - z + 2t &= 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 3x + 5y + 2z &= 0 \\ 4x + 7y + 5z &= 0 \\ x + y - 4z &= 0 \\ 2x + 9y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

4. Para las matrices siguientes: hallar los valores de λ que hacen su rango, respectivamente, máximo y mínimo. Debe usarse la teoría de determinantes aunque no exclusivamente.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 3 & -\lambda & 4 \\ 4 & -\lambda & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 3 & \lambda+2 & 2\lambda+1 & 3\lambda \\ 3 & 2\lambda+1 & \lambda^2+2\lambda & 3\lambda^2 \end{pmatrix}$$

5. Para las siguientes matrices: hallar su rango (por el método que se prefiera), localizar un menor principal y, usando la teoría de determinantes, expresar las filas y columnas de cada matriz como combinación lineal de las filas y columnas que intervienen en el menor principal hallado.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 \\ 5 & -3 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

6. Supongamos que $B_{p\times p}$ es una matriz con rango r (obviamente, $r \leqslant p$) y $C_{q\times q}$ es una matriz con rango s (obviamente, $s \leqslant q$). Construimos la matriz por bloques $A = \left(\begin{array}{c|c} B & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & C \end{array}\right)$ ¿Cuál es el rango de la matriz A? ¿Es cierto que $\det(A) = \det(B)\cdot\det(C)$?