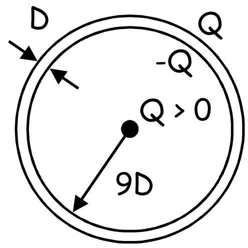
SOLUCIÓN

CUESTIONES



① El campo y potencial eléctricos generados por una carga puntual Q son: $\mathbf{E} = KQ/r^2\, \mathbf{e}_r$ y $V = KQ/r$, siendo r la distancia a Q.

La esfera se polariza por la acción de ese campo: Aparece una carga q negativa distribuida en su frontera interior, de manera homogénea, por la simetría (en una superficie esférica de radio 9D), y una carga de igual magnitud pero positiva, -q, distribuida homogéneamente en su frontera exterior (en una superficie esférica de radio 10D).

El campo eléctrico generado por una superficie esférica homogéneamente cargada es cero, dentro, y fuera, el de una carga puntual situada en su centro con toda la carga de la esfera. El potencial eléctrico, fuera, es lo mismo, y dentro, constante, con el valor que genera esa carga puntual a una distancia igual al radio de la esfera.

En un conductor en equilibrio el campo es cero. Aplicando el Ppo. de Superposición al espesor de la esfera, se tiene que la carga distribuida en 9D es –Q. Por tanto, Q en 10D.
$\mathbf{E}(9D < r < 10D) = KQ/r^2\, \mathbf{e}_r + Kq/r^2\, \mathbf{e}_r + \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow q = -Q$.

Aplicando el Ppo. de Superposición:

- El campo eléctrico, fuera o dentro, es igual al creado por Q.

- El potencial eléctrico fuera es igual al creado por Q.

- En el espesor de la esfera es: $V = KQ/(10D)$

- Dentro es: $V = KQ/r - KQ/(9D) + KQ/(10D) = KQ\,(1/r - 1/(90D))$

② La capacidad de un condensador plano es: $C = \varepsilon\, A/d = (4\pi K)^{-1}\, A/d$, siendo A la superficie de cada placa (1 cm^2) y d la distancia entre placas (0,5 mm o 0,1 mm). La intensidad del campo eléctrico entre las placas es: $E = V/d$, siendo V la tensión del condensador (5 V). Por tanto:

$C_{pulsada}$ = 8,84 pF $E_{pulsada} = 5\ 10^4$ V/m

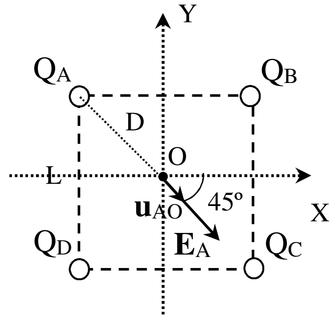
$C_{liberada}$ = 1,77 pF $E_{liberada} = 10^4$ V/m

$k = \varepsilon_r = E_{sin\ dieléctrico} / E_{con\ dieléctrico} = E_{pulsada} / E_{liberada} = 5$
(con dieléctrico la disminución ocurriría al insertarlo)

PROBLEMAS

❶ <u>Datos</u>: $Q_A = 2$, $Q_B = -4$, $Q_C = -2$, $Q_D = 1$, $q = -2$ (en μC) | $L = 20$ cm | $K = 9\ 10^9\ N\ C^{-2}\ m^2$.

a) Campo eléctrico en el centro del cuadrado:



Ppo. de Superposición: $\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_B + \mathbf{E}_C + \mathbf{E}_D$

Campo eléctrico carga puntual: $\mathbf{E}_A = K\ Q_A / D^2\ \mathbf{u}_{AO}$

$D = \text{Diagonal} / 2 = (L^2 + L^2)^{1/2} / 2 = L / \sqrt{2}$

$\mathbf{E}_A = |\mathbf{E}_A| \cos45° \mathbf{i} - |\mathbf{E}_A| \text{sen}45° \mathbf{j}$

$\mathbf{E}_A = K\ |Q_A| / D^2 \cos45° \mathbf{i} - K\ |Q_A| / D^2 \text{sen}45° \mathbf{j}$

$\mathbf{E}_A = K\ |Q_A| / D^2 (\cos45° \mathbf{i} - \text{sen}45° \mathbf{j}) = K\ 2\mu / D^2 (\cos45° \mathbf{i} - \text{sen}45° \mathbf{j})$

$\mathbf{E}_B$ va hacia B ($Q_B < 0$), $\mathbf{E}_C$ hacia C ($Q_C < 0$) y $\mathbf{E}_D$ hacia B ($Q_D > 0$):

$\mathbf{E}_B = K\ |Q_B| / D^2 (\cos45° \mathbf{i} + \text{sen}45° \mathbf{j}) = K\ 4\mu / D^2 (\cos45° \mathbf{i} + \text{sen}45° \mathbf{j})$

$\mathbf{E}_C = K\ |Q_C| / D^2 (\cos45° \mathbf{i} - \text{sen}45° \mathbf{j}) = K\ 2\mu / D^2 (\cos45° \mathbf{i} - \text{sen}45° \mathbf{j})$

$\mathbf{E}_D = K\ |Q_A| / D^2 (\cos45° \mathbf{i} + \text{sen}45° \mathbf{j}) = K\ 1\mu / D^2 (\cos45° \mathbf{i} + \text{sen}45° \mathbf{j})$

$\mathbf{E} = K / D^2 (9\mu \cos45° \mathbf{i} + 1\mu\ \text{sen}45° \mathbf{j}) = 9\ 10^9\ 2 / (0{,}2)^2 (9\mu\ 1/\sqrt{2}\ \mathbf{i} + 1\mu\ 1/\sqrt{2}\ \mathbf{j})$

$\mathbf{E} = 4{,}5/\sqrt{2}\ \ 10^5 (9\ \mathbf{i} + \mathbf{j}) = 2{,}86\ 10^6\ \mathbf{i} + 0{,}32\ 10^6\ \mathbf{j}$ (N/C)

b) Potencial eléctrico en el centro del cuadrado:

Ppo. de Superposición: $V = V_A + V_B + V_C + V_D$

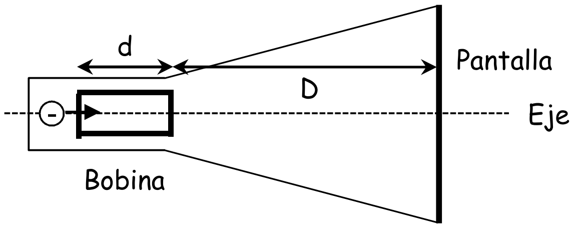
Potencial eléctrico carga puntual: $V_A = K\ Q_A / D$

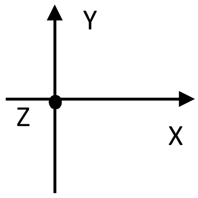
$V = K (Q_A + Q_B + Q_C + Q_D) / D = 9\ 10^9 (-3\mu) \sqrt{2} / 0{,}2 = -\ 27/\sqrt{2}\ \ 10^4 = -\ 191$ kV

c) Fuerza eléctrica sobre q en O: $\mathbf{F} = q\ \mathbf{E} = -2\mu C\ (2{,}86\ 10^6\ \mathbf{i} + 0{,}32\ 10^6\ \mathbf{j}) =$
$= -5{,}72\ \mathbf{i} - 0{,}64\ \mathbf{j}$ (N)

d) Energía potencial de q en O: $E_P = q\ V = -2\mu C\ (-191\ kV) = 382$ mJ

❷ <u>Datos</u>: $e = 1{,}60\ 10^{-19}$ C | $m = 9{,}11\ 10^{-31}$ kg | d = 4 cm | D = 12 cm.





$\mathbf{B} = -857\ \mu\text{T}\ \mathbf{k}$

$K = E_C = 1{,}25\ 10^3\ \text{eV} = 1{,}25\ 10^3\ 1{,}60\ 10^{-19}\ \text{C V} = 2\ 10^{-16}\ \text{J}$

$E_C = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow v = (2E_C/m)^{\frac{1}{2}} = (2\ 2\ 10^{-16} / (9{,}11\ 10^{-31}))^{\frac{1}{2}} = (4/91{,}1)^{\frac{1}{2}}\ 10^8 = 20{,}95\ 10^6\ \text{m/s}$

a) El electrón al entrar en la región en que se sitúan las bobinas siente el campo magnético y sufre una fuerza magnética. El módulo de la fuerza es: $F = |q|\ v_\perp\ B = e\ v\ B$. Y va dirigida inicialmente en la dirección del eje Y, en sentido negativo (hacia abajo). Siendo $\mathbf{F} = q\ (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, **F** debe ser perpendicular a **v** (que está en el eje X) y a **B** (que está en el eje Z): **F** está inicialmente en el eje Y. El resultado del producto va en el sentido positivo del eje Y, pero q es negativa, por tanto **F** inicialmente va en sentido negativo (hacia abajo).

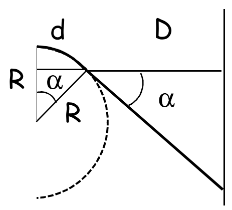
Como **F** es perpendicular a **v**, solo tiende a variar la dirección, no el módulo de la velocidad. Tiende a desviar la trayectoria del electrón inicialmente hacia abajo. Al no variar la velocidad, no varía el módulo de **F**. Un electrón con una velocidad perpendicular a un campo magnético uniforme, es sometido a una fuerza magnética constante en módulo y perpendicular a su velocidad en cada punto de su trayectoria. El electrón describe, por ello, un movimiento circular uniforme de radio R y aceleración normal v^2/R.

Aplicando la 2ª Ley de Newton en la dirección normal al movimiento:

$$F = m\ a \Rightarrow e\ v\ B = m\ v^2/R \Rightarrow R = mv/(eB) = 9{,}11\ 10^{-31}\ 20{,}95\ 10^6 / (1{,}6\ 10^{-19}\ 857\ 10^{-6}) =$$
$$= 9{,}11\ 20{,}95 / (1{,}6\ 857) = 13{,}92\ \text{cm}$$

El electrón habrá descendido al salir de la región en que están las bobinas una distancia:

$H_1 = R - (R^2 - d^2)^{\frac{1}{2}} = 13{,}92 - (13{,}92^2 - 4^2)^{\frac{1}{2}} = 0{,}59$ cm



b) El ángulo lo marca la velocidad, que es tangente a la trayectoria.

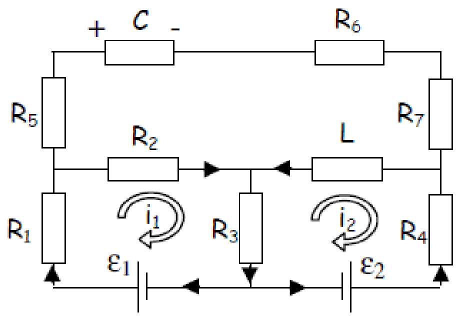
$\alpha = \text{arcsen}(d/R) = \text{arcsen}(4/13{,}92) = 16{,}7°$

c) Al salir de la región en que están las bobinas el electrón no está sometido a ninguna fuerza (despreciando el efecto de la gravedad) y sigue, por tanto, un movimiento rectilíneo uniforme (1ª Ley de Newton). El descendo total será la suma de lo descendido antes más lo descendido en D hasta impactar en la pantalla.

$H = H_1 + H_2 = 0{,}59 + D\ \text{tg}\alpha = 0{,}59 + 12\ \text{tg}(16{,}7) = 4{,}19$ cm

❸ En estado estacionario (corriente continua), un condensador se comporta como una resistencia de valor infinito (bloqueo), y una bobina como un cable ideal, es decir, como una resistencia de valor cero. Por tanto, en la rama que contiene al condensador no circula corriente y la caída de potencial aplicada a la rama coincide con la aplicada al condensador. Por otra parte, la caída de potencial en la bobina es cero, lo que hace que la tensión aplicada al condensador coincida con la aplicada a la resistencia que está bajo él en el circuito (R_2).

Asociando una corriente de malla a cada malla restante (i_1 e i_2), en sentido horario, se tiene que:



$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ -\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3R & -R \\ -R & 2R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \varepsilon = 3R\, i_1 - R\, i_2 \\ -\varepsilon = -R\, i_1 + 2R\, i_2 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} -\varepsilon + 3R\, i_1 - R\, i_2 = 0 \\ \varepsilon - R\, i_1 + 2R\, i_2 = 0 \end{array}$$

Las soluciones son:

$$i_1 = \frac{\varepsilon}{5R} = 0{,}4A \quad \text{e} \quad i_2 = -\frac{2\varepsilon}{5R} = -0{,}8A\,.$$

Por tanto:

$I_{\varepsilon 1} = I_{R1} = I_{R2} = \lvert i_1\rvert = 0{,}4$ A ($i_1 > 0 \Rightarrow$ en sentido horario)
$I_{\varepsilon 2} = I_{R4} = I_L = \lvert i_2\rvert = 0{,}8$ A ($i_2 < 0 \Rightarrow$ en sentido antihorario)
$I_{R3} = \lvert i_1 - i_2\rvert = I_{R2} + I_L = 1{,}2$ A (($i_1 - i_2) > 0 \Rightarrow$ hacia abajo)
$I_{R5} = I_C = I_{R6} = I_{R7} = 0$

Y se tiene que:

$Q_C = C\, V_{R2} = C\, R\, I_{R2} = 2$ pC	$U_C = \frac{1}{2}\, Q_C^2/C = 0{,}4$ pJ
$\Phi_L = L\, I_L = 20$ nWb	$U_L = \frac{1}{2}\, \Phi_L^2/L = 8$ nJ

La polaridad del condensador (el sentido + a -) coincide con el sentido de la caída de potencial aplicada, con V_{R2}, que es el mismo que el de I_{R2}.

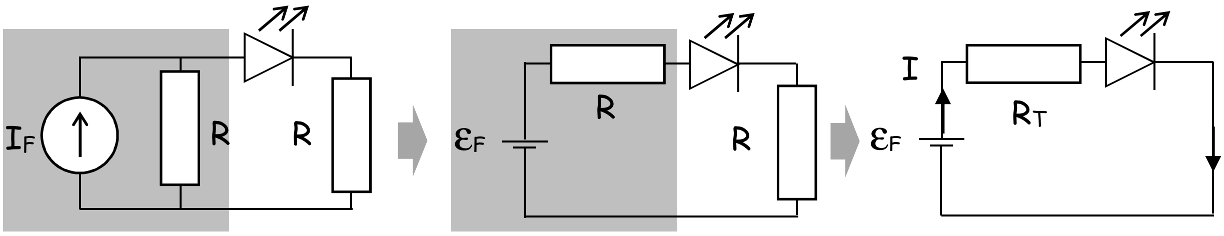
Las potencias suministrada y consumida, que coinciden, son:

$P_{sum} = P_{\varepsilon 1} + P_{\varepsilon 2} = \varepsilon_1 I_{\varepsilon 1} + \varepsilon_2 I_{\varepsilon 2} = 2{,}4$ W
(ambos suministran, la corriente correspondiente fluye del – al + de cada generador).

$P_{con} = P_{R1} + P_{R2} + P_{R3} + P_{R4} = R\, I_{R1}^2 + R\, I_{R2}^2 + R\, I_{R3}^2 + R\, I_{R4}^2 = 2{,}4$ W
(el resto de elementos no consume: V o/e I son nulos –P = VI = 0-).

❹ <u>Datos</u>: $G = 0{,}02$ S | $I_F = 100$ mA.

Por tanto: $R = 1/G = 1/(2\ 10^{-2}) = 100/2 = 50\ \Omega$ | $\varepsilon_F = R\ I_F = 50\ 100\text{m} = 5$ V
$R_T = R + R = 100\ \Omega$ (en serie)



La corriente, I, que circula por los distintos elementos del circuito es la misma, al haber una sola malla. La orientación de la pila implica que la corriente circula en sentido horario. Por la orientación de los componentes se tiene, entonces, que:

$I = I_{\varepsilon F} = I_{RT} = I_D$ (el diodo está en polarización directa)

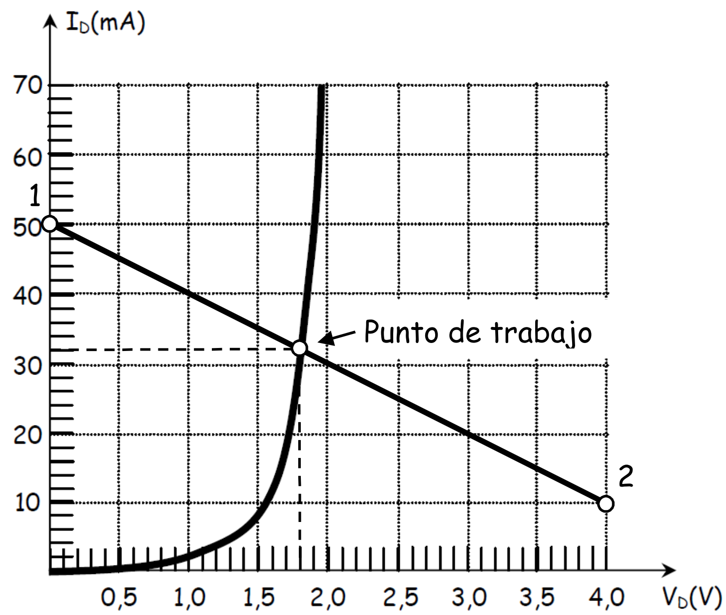
Atendiendo a la 2ª Ley de Kirchhoff (Regla de las Mallas), debe verificarse en la malla, en sentido horario y calculando caídas de potencial, y teniendo en cuenta además la Ley de Ohm en la resistencia, que:

$-\varepsilon_F + V_{RT} + V_D = 0$ o $\varepsilon_F = V_{RT} + V_D \quad \rightarrow \quad \varepsilon_F = R_T\ I_D + V_D$

Por tanto, la recta de carga es: $I_D = \varepsilon_F/R_T - 1/R_T\ V_D$

Para representarla, se pueden elegir, por ejemplo, los siguientes puntos:

Punto 1: $V_D = 0$ V $\Rightarrow$ $I_D = \varepsilon_F / R_T = 5 / 100 = 0{,}05$ A $= 50$ mA
Punto 2: $V_D = 4$ V $\Rightarrow$ $I_D = (\varepsilon_F - V_D) / R_T = 1 / 100 = 0{,}01$ A $= 10$ mA



El punto de trabajo del diodo, el par V_D - I_D, es el que verifica las dos ecuaciones: la curva que da el comportamiento del diodo en pol. directa y la recta de carga, es decir, el punto de corte en la gráfica.

$$\boxed{\begin{array}{c} V_D = 1{,}8\ \text{V} \\ I_D = 32\ \text{mA} \end{array}}$$