Capítulo 2

Función real de variable real. Continuidad

Dominio de definición.

1. Determina el dominio de definición de las funciones cuya expresión se indica:

a) $f(x) = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}\sqrt{x^2+x-2}$, b) $f(x) = (|x|-x)^{-1/2}$,

c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, d) $f(x) = \dfrac{(x-2)\sqrt{x}}{(1+3x)(x-1)}$,

e) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x-2}$, f) $f(x) = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}$.

2. Determina el dominio de definición de las funciones cuya expresión se indica:

a) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, b) $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$,

c) $f(x) = \sqrt{\ln(\tan x)}$, d) $f(x) = \ln[x(2-x)(x+3)]$,

e) $f(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2}\tan x$, f) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x^2-x)}$.

Composición de funciones.

3. Dadas $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$ halla los dominios de definición de las funciones f, g, $f \circ g$ y $g \circ f$. ¿Para qué números c existe un número x tal que $f(cx) = f(x)$?.

4. Sean las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$, $s(x) = \operatorname{sen} x$. Escribe las siguientes funciones en términos de f, g y s: $y = 2^{\operatorname{sen} x}$, $y = \operatorname{sen} x^2$, e $y = \operatorname{sen}^2 2^x$.

5. En cada uno de los casos siguientes encuentra las expresiones de las funciones compuestas $f \circ g$ y $g \circ f$ y da el dominio de definición de cada una de ellas:

a) $f(x) = 1 - x$ y $g(x) = x^2 + 2x$,

b) $f(x) = x + 5$ y $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ si $x \neq 0$, $g(0) = 0$.

Funciones elementales. Funciones inversas.

6. Determina, en cada caso, un número real x que satisfaga la igualdad dada:

$$\text{a)}\quad \ln(1+x) = \ln(1-x), \qquad \text{b)}\quad \ln(1+x) = 1 + \ln(1-x),$$
$$\text{c)}\quad 1 + \operatorname{sen} x = \cos x, \qquad \text{d)}\quad \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) = 1.$$

7. Demuestra:

   a) $\operatorname{sen} 3x = 3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x$,

   b) $\cos 3x = \cos x - 4\operatorname{sen}^2 x \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

   Como aplicación de lo anterior demuestra que $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ y que $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

8. Demuestra que $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$ siempre que $\tan x \tan y \neq -1$.

9. Halla dos números A y B tales que $3\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{3}) = A\operatorname{sen} x + B\cos x$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Definición de límite. Existencia. Álgebra de límites.

10. Prueba que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y g es una función acotada en un entorno reducido de centro a, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$. Aplicar este resultado para calcular el límite de la función siguiente en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3 + \operatorname{sen}\frac{1}{x}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

11. Calcula, si existen, los límites siguientes:

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{|x^2-1|}, \quad \text{b)}\quad \lim_{x\to 0} x\mathbf{e}^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}.$$

12. Estudia la existencia de los siguientes límites y calcula su valor o los valores de los límites laterales correspondientes cuando existan:

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}, \qquad \text{b)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2+x},$$
$$\text{c)}\quad \lim_{x\to 1} \frac{x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1}{x-1}, \quad \text{d)}\quad \lim_{x\to 0} \mathbf{e}^{\frac{|x|}{x}}.$$

13. Sean f y g dos funciones reales de variable real.

   a) Si en un punto no existen ni el límite de f ni el de g, ¿puede existir en dicho punto el de $f+g$ o el de $f \cdot g$? En caso afirmativo da un ejemplo.

   b) Si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$, ¿debe existir también $\lim\limits_{x\to a} g(x)$? Razónese.

   c) Si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y no existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim\limits_{x\to a} [f(x)+g(x)]$? Razónese.

   d) Si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$, ¿debe existir $\lim\limits_{x\to a} g(x)$? En caso negativo poner un ejemplo.

Límites de funciones polinómicas, racionales e irracionales

14. Halla a y b para que $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$.

15. Hallar los límites:
$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9},\quad \text{b)}\quad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2},$$

16. Hallar el límite de $f(x)=\dfrac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$ cuando
$$\text{a)}\quad x\to-\infty,\quad \text{b)}\quad x\to-1,\quad \text{c)}\quad x\to 0.$$

17. Halla el límite de $f(x)=\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$ cuando
$$\text{a)}\quad x\to+\infty,\quad \text{b)}\quad x\to 1,\quad \text{c)}\quad x\to 0.$$

Límites de funciones transcedentes.

18. Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican:
$$\begin{array}{llll}\text{a)} & \lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(1+x)-\ln x], & \text{b)} & \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x \\ \text{c)} & \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\operatorname{sen}^2 x}-\dfrac{1}{2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}}\right), & \text{d)} & \lim\limits_{x\to 0}(1+3\tan^2 x)^{\operatorname{cotg}^2 x}.\end{array}$$

19. Calcula los límites de la función $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ cuando
$$\text{a)}\quad x\to+\infty,\quad \text{b)}\quad x\to 0,\quad \text{c)}\quad x\to 1.$$

20. Calcula por infinitésimos equivalentes los siguientes límites:
$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{x(2-x)\tan bx},\quad \text{b)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2},$$
$$\text{c)}\quad \lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1},\qquad \text{d)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}\ \text{donde } a>0 \text{ y } b>0.$$

21. Halla el límite de $\dfrac{\mathbf{e}^x-1}{x}$ cuando $x\to+\infty$ y cuando $x\to 0$.

22. Calcula los siguientes límites:
$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}},\quad \text{b)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}.$$

23. Calcula $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}\sqrt[3]{x}\,\ln(1+3x)}{(\arctan\sqrt{x})^2(\mathbf{e}^{5\sqrt[3]{x}}-1)}$.

Continuidad en un punto.

24. Sea f la función real definida de la siguiente forma en $[0, \pi/2] - \{\pi/4\}$: $f(x) = (2\,\mathrm{sen}^2\,x)^{\frac{1}{\cos 2x}}$.

    a) Comprueba que está bien definida.

    b) Comprueba que es posible extender f a $\pi/4$ de manera que sea continua en dicho punto.

    c) Si en la expresión de $f(x)$ sustituimos $\cos 2x$ por $|\cos 2x|$, ¿sigue siendo posible lo anterior?.

25. Estudia la continuidad de la siguiente función en el punto $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{1-\mathbf{e}^{x-2}} & \text{si} \quad x \neq 2, \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 2. \end{cases}$$

26. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{\ln(x^2 - 3x + 2)}{\ln(x^2 - 7x + 12)}$.

27. Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{\mathrm{sen}\,(\pi x)}$ con $x \in (0,1)$. Define $f(0)$ y $f(1)$ de forma que $f(x)$ sea continua en el intervalo cerrado $[0,1]$.

Continuidad general de funciones elementales. Clasificación de discontinuidades.

28. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

$$\text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} x\mathbf{e}^{\frac{-1}{x}} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ \\ 0 & \text{si} \quad x = 0; \end{cases} \qquad \text{b)} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

29. Sabiendo que:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si} \quad |x| \leq 1, \\ 0 & \text{si} \quad |x| > 1; \end{cases}$$

    estudia la continuidad de f y dibuja su gráfica.

30. Estudia la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{2 + 2^{\frac{1}{x}}}{2 - 2^{\frac{1}{x}}}$.

31. Clasifica las discontinuidades de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos \frac{\pi}{x-1}}{1 + \mathbf{e}^{\frac{1}{x}}} & \text{si} \quad x \neq 1 \text{ y } x \neq 0, \\ \\ 0 & \text{si} \qquad\qquad x = 1. \end{cases}$$

32. Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}}{\mathbf{e}^{\frac{1}{x}} + 1}.$$

33. Estudia la continuidad de la función $f(x) = |x^2 - 1| + 2|x - 1|$.

34. Estudia la continuidad de la función $f(x)$, indicando en cada caso el tipo de discontinuidad y el valor que la función debiera tomar en $x = 2$ para ser continua en dicho punto:

$$f(x) = \begin{cases} \mathbf{e}^{\frac{|x-2|}{x-1}} & \text{si} \quad x < 2, \\ \\ x^2 - 3 & \text{si} \quad x > 2. \end{cases}$$

Teoremas sobre funciones continuas en intervalos cerrados.

35. Utilizando el teorema de Bolzano, prueba que la ecuación

$$3x^5 - 2x^4 + x^2 - 3x - 7 = 0$$

tiene al menos una raíz real. ¿Se puede generalizar el resultado anterior a toda ecuación polinómica de grado impar?. ¿Y si el grado es par?.

36. Demuestra que la ecuación $x \ln(x+1) - 2 = x - 2x^2$ tiene solución real.

37. Prueba que la función $f(x) = x - 2^{-x}$ tiene al menos una raíz real. ¿Toma f el valor $\dfrac{\pi}{2}$ alguna vez en $[1, 2]$?. Razona la respuesta.

Soluciones a algunos de los ejercicios propuestos.

10.- 0.

11.- a) **no existe**; b) **no existe**.

14.- $a = 1$ y $b = -1$.

15.- a) $\dfrac{-1}{16}$; b) 4/3.

16.- a) 1; b) $-\infty$ por la izquierda y $+\infty$ por la derecha; c) 10.

17.- a) 1/2; b) 2/3; c) 1.

18.- a) 1; b) $\mathbf{e}^2$; c) 1/2; d) $\mathbf{e}^3$.

19.- a) 1; b) 1/2; c) $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

23.- 3/5.

25.- Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$.

26.- Continua en $(-\infty, 1) \cup (2, 3) \cup (4, +\infty) - \left\{ \frac{7+\sqrt{5}}{2}, \frac{7-\sqrt{5}}{2} \right\}$.

27.- $f(0) = f(1) = -\frac{1}{\pi}$.

28.- a) Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$; b) Continua en $[-1, +\infty)$.

30.- Continua en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

31.- Discontinuidad de segunda especie en $x = 1$ y de primera especie $x = 0$.

32.- Continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

34.- Discontinuidad de segunda especie en $x = 1$, discontinuidad evitable en $x = 2$ (habría de ser $f(2) = 1$).