Capítulo 5

Métodos de integración.

En este tema nos ocupamos del problema de calcular una primitiva o integral indefinida de una función. Es decir, dada una función f, queremos determinar F de modo que para todo x del dominio de f se verifique

$$F'(x) = f(x)$$

El cálculo automático de primitivas es uno de los problemas más tratados en cualquier sistema de cálculo simbólico y está, en general, bastante bien resuelto. Por este motivo, no se dará aquí un tratamiento muy exhaustivo.

5.1. Integrales inmediatas

Llamamos funciones elementales a todas las funciones que se obtienen mediante suma, resta, multiplicación, división y composición de las funciones potencial, logarítmica y exponencial, y las trigonométricas y sus inversas.

La derivación de una función elemental es directa, sólo requiere de un uso sistemático de las reglas que se han aprendido. Además, el resultado es siempre una función elemental. La integración es un asunto muy diferente. Implica unas cuantas técnicas y gran cantidad de trucos; y lo que es peor, no siempre se obtiene una función elemental. Por ejemplo se sabe que las primitivas de e^{-x^2} y de $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no son funciones elementales.

A continuación damos una lista de integrales conocidas, que será útil en muchos casos y que se obtiene contemplando la integración como proceso inverso de las derivación.

$$\begin{array}{llll}
1. & \displaystyle\int \alpha dx = \alpha x + C,\ \forall \alpha \in \mathbb{R} & 2. & \displaystyle\int x^p dx = \begin{cases} \dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C, & p \neq -1 \\ \ln|x| + C, & p = -1 \end{cases} \\
3. & \displaystyle\int \mathrm{e}^x dx = \mathrm{e}^x + C & 4. & \displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ a > 0, a \neq -1 \\
5. & \displaystyle\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C & 6. & \displaystyle\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C \\
7. & \displaystyle\int \sec\, x \operatorname{tg} x dx = \sec\, x + C & 8. & \displaystyle\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x dx = -\operatorname{cosec} x + C
\end{array}$$

9. $\displaystyle\int \sec^{\,2} x dx = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

10. $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 x dx = \int (1+\operatorname{cotg}^2 x)dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$

11. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

12. $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$

5.2. Técnicas generales de integración

En esta sección se dan algunos resultados que permiten transformar integrales complicadas en otras más sencillas.

Linealidad

La linealidad de la derivada se traduce en linealidad de la integral

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

Cambio de variable

(a) Sea Φ una función con derivada Φ' continua. Entonces, haciendo $t = \Phi(x)$, se tiene

$$\int f(\Phi(x))\ \Phi'(x)dx = \int f(t)dt$$

(b) Sea Φ una función con derivada Φ' continua y tal que $\Phi'(x) \neq 0$ para todo x, y sea f una función continua. Entonces, haciendo $\Phi(x) = t$, se tiene

$$\int f(\Phi(x))dx = \int f(t)(\Phi^{-1})'(t)dt$$

`Nota:` Esta técnica es una consecuencia de la regla de la cadena en derivación.

Integración por partes

Dadas dos funciones derivables f y g se verifica

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$

`Notas:`

- Esta técnica es consecuencia de la regla de derivación del producto.

- Con notación diferencial, tomando $u = f(x),\ v = g(x)$, la fórmula de integración por partes se escribe

$$\int udv = u\ v - \int vdu$$

Fórmulas de reducción

Sea I_n una integral indefinida que depende de un número natural n. Si podemos definir una relación recurrente del tipo $f(I_n, I_{n+1}, \ldots, I_{n+p}, n, x) = 0$, denominada fórmula de reducción, será posible determinar el valor de I_n para cualquier n a partir de $I_0, \ldots, I_p$.

`Nota:` En la mayoría de los casos la relación recurrente es del tipo

$$I_n = f(I_{n-1}, x, n)$$

con lo que nos basta conocer una integral para conocer las siguientes. Para obtener la fórmula de recurrencia se suele utilizar la integración por partes.

5.3. Integración de funciones trigonométricas

Combinando el método de sustitución con el uso adecuado de algunas identidades trigonométricas, podemos integrar una gran variedad de funciones trigonométricas.

Algunas identidades útiles

- Identidades pitagóricas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ 1 + \operatorname{tg}^2 x &= \sec^{\,2} x = \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \operatorname{cotg}^2 x &= \operatorname{cosec}^2 x = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \end{aligned}$$

- Identidades del ángulo doble:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2x &= 2 \operatorname{sen} x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x \end{aligned}$$

- Identidades del ángulo mitad:

$$\begin{aligned} \cos \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \iff \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \\ \operatorname{sen} \frac{x}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \iff \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \end{aligned}$$

- Identidades para la suma

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(m \pm n)x &= \operatorname{sen} mx \ \cos nx \ \pm \ \cos mx \ \operatorname{sen} nx \\ \cos(m \pm n)x &= \cos mx \ \cos nx \ \mp \ \operatorname{sen} mx \ \operatorname{sen} nx \end{aligned}$$

- Identidades para el producto

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} mx \ \cos nx &= \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m+n)x \ + \ \operatorname{sen}(m-n)x] \\ \operatorname{sen} mx \ \operatorname{sen} nx &= -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x \ - \ \cos(m-n)x] \\ \cos mx \ \cos nx &= \frac{1}{2}[\cos(m+n)x \ + \ \cos(m-n)x] \end{aligned}$$

Tipo 1: $\left(\int \operatorname{sen}^n x dx, \int \cos^n x dx\right)$

Se considera ahora que $n \in \mathbb{N}$

- Si n es impar: Para $\int \operatorname{sen}^n x dx$, hacer el cambio de variable $\cos x = t$, para $\int \cos^n x dx$, hacer el cambio $\operatorname{sen} x = t$, y utilizar la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

  `Ejemplo`

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^5 x dx &= \int \operatorname{sen}^4 x \operatorname{sen} x dx = \int \left(\frac{1-\cos^2 x}{2}\right)^2 \operatorname{sen} x dx \\
&= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \operatorname{sen} x dx = \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\operatorname{sen} x dx = dt \end{array} \right\} = \\
&= -\frac{1}{4}\int (1 - 2t^2 + t^4) dt = -\frac{1}{4}t + \frac{2}{12}t^3 - \frac{1}{20}t^5 + C = -\frac{1}{4}\cos x + \frac{1}{6}\cos^3 x - \frac{1}{20}\cos^5 x + C
\end{aligned}$$

- Si n es par: Utilizar la identidad del ángulo mitad.

  `Ejemplo`

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\
&= \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx = \\
&= \frac{3}{8}\int dx + \frac{1}{4}\int 2\cos 2x dx + \frac{1}{32}\int 4\cos 4x dx = \\
&= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C
\end{aligned}$$

Tipo 2: $\left(\int \operatorname{sen}^m x \ \cos^n x dx\right)$

- Si m ó n es un entero impar positivo y el otro exponente es un entero cualquiera, factorizamos $\operatorname{sen} x$ ó $\cos x$ y utilizamos la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

  `Ejemplo`

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^3 x \cos^{-4} x dx &= \int (1 - \cos^2 x)(\cos^{-4} x)(\operatorname{sen} x) dx = \\
&= -\int (\cos^{-4} x - \cos^{-2} x)(-\operatorname{sen} x dx) = \\
&= -\left[\frac{(\cos x)^{-3}}{-3} - \frac{(\cos x)^{-1}}{-1}\right] + C = \frac{1}{3}\sec{}^3 x + \sec x + C
\end{aligned}$$

- Si m y n son enteros positivos pares se utilizan las fórmulas del ángulo mitad, a fin de reducir el exponente.

`Ejemplo`

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)dx = \\
&= \frac{1}{8}\int \left[1+\cos 2x - \frac{1}{2}(1+\cos 4x) - (1-\operatorname{sen}^2 2x)\cos 2x\right] dx = \\
&= \frac{1}{8}\int \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x + \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\right] dx = \\
&= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2}dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x(4dx) + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2 2x(2\cos 2x dx)\right] = \\
&= \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 2x\right] + C
\end{aligned}$$

Tipo 3: $\left(\int \operatorname{sen} mx \ \cos nx \ dx, \int \cos mx \ \cos nx \ dx, \int \operatorname{sen} mx \ \operatorname{sen} nx \ dx\right)$

Para manejar estas integrales, se utilizan las fórmulas del producto.

`Ejemplo:`

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen} 2x \ \cos 3x \ dx &= \frac{1}{2}\int [\operatorname{sen} 5x \ + \ \operatorname{sen}(-x)]dx = \\
&= \frac{1}{10}\int \operatorname{sen} 5x(5dx) - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x dx = -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C
\end{aligned}$$

Tipo 4: $\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$

Las integrales del tipo $\displaystyle\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$ con R una función racional siempre se reducen a una integral racional con el cambio de variable $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t$. Con este cambio, se realizan las siguientes sustituciones

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

En algunos casos, hay otros cambios de variable que también reducen la integral a una integral racional pero más sencilla que la que se obtiene con el cambio general. Son los siguientes:

- Si R es una función impar en $\operatorname{sen} x$ (es decir, $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se resuelve con el cambio $\cos x = t$.
- Si R es una función impar en $\cos x$ (es decir, $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se resuelve con el cambio $\operatorname{sen} x = t$.
- Si R es una función par en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ (es decir, $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, se resuelve con el cambio $\operatorname{tg} x = t$. Con este cambio, se realizan las siguientes sustituciones

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

5.4. Integración de funciones racionales

Una `función racional` es un cociente de dos polinomios. Para integrar funciones racionales, se descompone el integrando en fracciones simples y se integra cada una de estas fracciones simples.

Descomposición en fracciones simples

Para descomponer una función racional $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples, se procede como sigue

1. Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, se divide $P(x)$ entre $Q(x)$ para obtener
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$
donde $\text{grad}[R(x)] < \text{grad}[Q(x)]$. Por tanto, sin pérdida de generalidad, siempre podemos reducir el problema a calcular $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador, y donde $Q(x)$ es un polinomio cuyo coeficiente líder es 1.

2. Para resolver $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, donde $\text{grad}[P(x)] < \text{grad}[Q(x)]$, factorizar $Q(x)$ en producto de factores lineales irreducibles con coeficientes reales.

   a) Si todas las raíces de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de $Q(x)$ son reales y distintas, se puede realizar una descomposición de la forma
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$$
La determinación de A_i más sencilla, se realiza multiplicando ambos términos por $(x-\alpha_i)$ y sustituyendo x por α_i.
`Ejemplo`: La descomposición de $\dfrac{x}{x^2-3x+2}$ es
$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x-2} = \frac{A_1(x-2)+A_2(x-1)}{x^2-3x+2}$$
$$\Rightarrow\ x = A_1(x-2) + A_2(x-1)\ \Rightarrow \begin{cases} x=1 & : \ 1 = -A_1 \ \Rightarrow\ A_1 = -1 \\ x=2 & : \ 2 = A_2 \ \Rightarrow\ A_2 = 2 \end{cases}$$

   b) Si todas las raíces $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_h$ son reales, pero con multiplicidades respectivas $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$, siendo $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_h = n$, entonces
$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1\lambda_1}}{(x-\alpha_1)^{\lambda_1}} \\ &+ \frac{A_{21}}{x-\alpha_2} + \frac{A_{22}}{(x-\alpha_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2\lambda_2}}{(x-\alpha_2)^{\lambda_2}} + \cdots + \\ &+ \frac{A_{h1}}{x-\alpha_h} + \frac{A_{h2}}{(x-\alpha_h)^2} + \cdots + \frac{A_{h\lambda_h}}{(x-\alpha_h)^{\lambda_h}} \end{aligned}$$
Los coeficientes A_{ij} se obtienen reduciendo a común denominador. El mínimo común múltiplo será $Q(x)$, e igualando los numeradores se obtiene un sistema de ecuaciones, cuyas soluciones son los coeficientes requeridos.
`Ejemplo:`
$$\begin{aligned} \frac{x}{(x-1)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \\ &= \frac{A(x-1)^2 + B(x-1) + C}{(x-1)^3} = \frac{Ax^2 + (-2A+B)x + (A-B+C)}{(x-1)^3} \end{aligned}$$
Puesto que los denominadores de la primera y última fracción son iguales, deben coincidir también los numeradores. Igualando los coeficientes de los términos de igual grado, se tiene
$$\left.\begin{array}{lcl} A &=& 0 \\ -2A+B &=& 1 \\ A-B+C &=& 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ A=0,\ B=1,\ C=1$$

c) Si $Q(x)$ tiene raíces complejas simples, por ejemplo, si $\alpha_k = a_k + ib_k$ es raíz de $Q(x)$, también lo será su conjugada $\beta_k = a_k - ib_k$. Tratamos las raíces conjugadas conjuntamente y, en vez de poner

$$\frac{A_1}{x-(a+bi)} + \frac{A_2}{x-(a-bi)}$$

usamos su expresión equivalente $\dfrac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$, que tiene todos los coeficientes reales. Los coeficientes se obtiene de forma análoga al caso anterior.

`Ejemplo:`

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+1} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{(A+M)x^2+(N-M)x+(A-N)}{(x-1)(x^2+1)}$$

de donde se obtiene que $A = \frac{1}{2},\ M = -\frac{1}{2},\ N = -\frac{1}{2}$

d) Si $Q(x)$ tiene raíces complejas múltiples, por ejemplo, si $a+bi$ y , por tanto $a-bi$ es raíz de $Q(x)$ con multiplicidad λ, la descomposición de la función racional correspondiente a dichas raíces es la siguiente

$$\frac{M_1x+N_1}{(x-a)^2+b^2} + \frac{M_2x+N_2}{[(x-a)^2+b^2]^2} + \cdots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{[(x-a)^2+b^2]^\lambda}$$

`Ejemplo:`

$$\frac{x}{(x^2+1)(x^2+4)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+4} + \frac{Ex+F}{(x^2+4)^2}$$

obteniéndose los coeficientes de forma análoga a los casos anteriores.

`Nota:` Si n es grande hay procedimientos más rápidos para el cálculo de los coeficientes, como el método de Hermite o la utilización de programas de cálculo simbólico.

Integración de fracciones simples

Tal como hemos visto, toda función racional se puede escribir como suma de un polinomio más una combinación lineal de funciones del tipo

$$\frac{A}{x-a}, \qquad \frac{A}{(x-a)^n},\ (n>1), \qquad \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}, \qquad \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n},\ (n>1)$$

Usando la linealidad de la integral, bastará conocer cómo calcular una primitiva de estas fracciones simples para calcular la integral de cualquier función racional.

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$
2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$, si $n \neq 1$.
3. $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{(x-a)^2+b^2}dx = \frac{A}{2}\ln[(x-a)^2+b^2] + \frac{Aa+B}{b}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-a}{b}\right) + C$,
4. $$\begin{aligned}\int \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n}dx &= \int \frac{A(x-a)+Aa+B}{(x-a)^2+b^2}dx = \\ &= \frac{-A}{2(n-1)[(x-a)^2+b^2]^{n-1}} + (Aa+B)\int \frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^n}dx\end{aligned}$$

Para resolver esta última integral se hace el cambio de variable $(x-a)/b = t$ y se transforma en la integral $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$ que se puede resolver mediante la siguiente fórmula de reducción

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} \ \forall n \geq 2$$

Aplicando esta fórmula, de forma reiterada si es preciso, y teniendo en cuenta que $I_1 = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arc\,tg} x + C$, se obtiene el valor de la integral I_n.

5.5. Integración de funciones reducibles a racionales

Los radicales en el integrando siempre son problemáticos. Con frecuencia una sustitución adecuada racionalizará el integrando.

Integrandos que incluyen $\sqrt[n]{ax+b}$

Si $\sqrt[n]{ax+b}$ aparece en una integral, la sustitución $u = \sqrt[n]{ax+b}$ eliminará el radical.

`Ejemplo:` Calcular $\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x-\sqrt{x}} &= \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{x} = u & \Leftrightarrow \quad u^2 = x \\ 2udu = dx & \end{array} \right\} = \int \frac{2u}{u^2-u} du = 2 \int \frac{1}{u-1} du = \\ &= 2 \ln |u-1| + C = 2 \ln |\sqrt{x}-1| + C \end{aligned}$$

`Ejemplo:` Calcular $\int x \sqrt[5]{(x+1)^2} dx$

$$\begin{aligned} \int x \sqrt[5]{(x+1)^2} dx &= \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt[5]{x+1} = u & \Leftrightarrow \quad u^5 - 1 = x \\ 5udu = dx & \end{array} \right\} = \int (u^5-1)u^2 \cdot 5udu = \\ &= 5 \int (u^8 - u^3) du = \frac{5}{9} u^9 - \frac{5}{4} u^4 + C = \frac{5}{9} \sqrt[5]{(x+1)^9} - \frac{5}{4} \sqrt[5]{(x+1)^4} + C \end{aligned}$$

Integrandos que incluyen $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$

Para racionalizar estas expresiones, podemos suponer que a es positiva y realizar las siguientes sustituciones trigonométricas.

	Radical	Sustitución	Restricción sobre t	Resultado
1.	$\sqrt{a^2-x^2}$	$x = a \operatorname{sen} t$	$-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$	$\sqrt{a^2-x^2} = a \cos t$
2.	$\sqrt{a^2+x^2}$	$x = a \operatorname{tg} t$	$-\pi/2 < t < \pi/2$	$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec t$
3.	$\sqrt{x^2-a^2}$	$x = a\sec t$	$0 \leq t \leq \pi,\ t \neq \pi/2$	$\sqrt{x^2-a^2} = \pm a \operatorname{tg} t$

`Nota:` Las restricciones sobre t nos permiten eliminar los signos de valor absoluto en los dos primeros casos, pero también hacen que sean invertibles seno, tangente y secante. Esto significa que, en cada caso, podemos resolver las ecuaciones de las sustituciones para t y esto nos permitirá escribir nuestras respuestas en términos de x.

`Ejemplo:` Calcular $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}dx &= \left\{ \begin{array}{l} x=a\operatorname{sen} t,\ -\pi/2\le t\le \pi/2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a^2-x^2}=a\cos t \\ dx=a\cos t dt \end{array}\right\} = \\ &= \int a\cos t\cdot a\cos t dt = a^2\int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \\ &= \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}\left(t+\operatorname{sen} t\cos t\right)+C\end{aligned}$$

Ahora bien $x=a\operatorname{sen} t$ es equivalente a $x/a=\operatorname{sen} t$ y como t está restringida a hacer inversible la función seno, se tendrá que $t=\operatorname{arc\,sen}(x/a)$.
Además,

$$\cos t=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2}{2}\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$$

`Ejemplo:` Calcular $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} &= \left\{ \begin{array}{l} x=3\operatorname{tg} t,\ -\pi/2< t< \pi/2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{9+x^2}=3\sec t \\ dx=3\sec^2 t dt \end{array}\right\} = \\ &= \int \frac{3\sec^2 t}{3\sec t}dt=\int \sec t dt=\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|+C\end{aligned}$$

Para el último paso $\int \sec t dt$ se ha hecho uso de la expresión

$$\sec x=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\int \sec t dt &= \int \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}+\frac{\cos t}{1+\operatorname{sen} t}\right)dt=-\ln|\cos t|+\ln|1+\operatorname{sen} t|+C= \\ &= \ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} t}{\cos t}\right|+C=\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|+C\end{aligned}$$

También se puede hacer de otra forma

$$\begin{aligned}\int \sec t dt &= \int \frac{\cos t}{1-\operatorname{sen}^2 t}dt=\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} t=z \\ \cos t dt=dz \end{array}\right\}=\int \frac{dz}{1-z^2}= \\ & \left\{ \frac{1}{1-z^2}=\frac{A}{1-z}+\frac{B}{1+z}=\frac{A(1+z)+B(1-z)}{1-z^2} \ \Rightarrow\ A=\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\int \frac{dz}{1-z}+\int\frac{dz}{1+z}\right]=\frac{1}{2}\left[-\ln|1-z|+\ln|1+z|\right]+C= \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right|+C=\ln\sqrt{\left|\frac{1+\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen} t}\right|}+C=\ln\sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} t)(1+\operatorname{sen} t)}{(1-\operatorname{sen} t)(1+\operatorname{sen} t)}}+C= \\ &= \ln\sqrt{\frac{(1+\operatorname{sen} t)^2}{\cos^2 t}}+C=\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} t}{\cos t}\right|+C=\ln|\sec t+\operatorname{tg} t|+C\end{aligned}$$

Por último deshacemos el cambio de variable. Teniendo en cuenta que

$$\sec^2 t = 1 + \mathrm{tg}^2\, t \ \Leftrightarrow\ \sec t = \sqrt{1+\frac{x^2}{9}} = \frac{\sqrt{9+x^2}}{3}$$

se verifica que

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}} &= \ln\left|\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}+\frac{x}{3}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}+x}{3}\right| + C \\ &= \ln|\sqrt{9+x^2}+x| - \ln 3 + C = \ln|\sqrt{9+x^2}+x| + K\end{aligned}$$

Completar cuadrados

Cuando aparece una expresión cuadrática del tipo x^2+bx+c bajo un radical, completar el cuadrado la preparará para una sustitución trigonométrica.

`Ejemplo:` Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}}$

$$x^2+2x+26 = x^2+2x+1+25 = (x+1)^2+25$$

Entonces

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}} &= \left\{\begin{array}{l} u = x+1 \\ du = dx \end{array}\right\} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+25}} = \\ &= \left\{\begin{array}{l} u = 5\,\mathrm{tg}\, t,\ -\pi/2 < t < \pi/2 \ \Leftrightarrow\ \sqrt{u^2+25} = 5\sec t \\ du = 5\sec^2 t dt \end{array}\right\} = \int \frac{5\sec^2 t}{5\sec t} dt = \\ &= \int \sec t dt = \ln|\sec t + \mathrm{tg}\, t| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{u^2+25}}{5}+\frac{u}{5}\right| + C = \\ &= \ln|\sqrt{u^2+25}+u| - \ln 5 + C = \ln|\sqrt{u^2+25}+u| + K = \ln|\sqrt{x^2+2x+26}+x+1| + K\end{aligned}$$

`Ejemplo:` Calcular $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx = \int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx$$

La primera integral se resuelve mediante la sustitución $u=\sqrt{x^2+2x+26}$ y la segunda es la que acabamos de hacer. Por lo tanto

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}dx = 2\sqrt{x^2+2x+26} - 2\ln|\sqrt{x^2+2x+26}+x+1| + K$$

Índice general

5. Métodos de integración. **1**

5.1. Integrales inmediatas 1

5.2. Técnicas generales de integración 2

5.3. Integración de funciones trigonométricas 3

5.4. Integración de funciones racionales 5

5.5. Integración de funciones reducibles a racionales 8