Capítulo 2

Función real de variable real. Continuidad

2.1. Funciones reales de variable real.

Definición 2.1 *Una función f de un conjunto X en un conjunto Y es una correspondencia que asigna a cada elemento $x \in X$ exactamente un elemento $y \in Y$. Diremos que y es la imagen de x bajo f, denotado $f(x)$. El* `dominio` *de f es el conjunto X, y su* `recorrido` *consta de todas las imágenes $f(x)$ de los elementos x de X.*

Una función se dice que es `inyectiva` *si a cada elemento del recorrido le corresponde exactamente un elemento del dominio, y se dice que es* `sobreyectiva` *si el recorrido coincide con todo el conjunto Y.*

Definición 2.2 (Función real de variable real) *Una función real de variable real es una función con dominio $D \subset \mathbb{R}$ y con valores en $\mathbb{R}$ que hace corresponder a cada número real $x \in D$ otro número real; lo expresamos de la siguiente forma:*

$$\begin{array}{rrcl} f: & D \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & f(x) = y \ . \end{array}$$

A x se le llama `variable independiente`, a $f(x)$ o y `variable dependiente` y el conjunto D será el `dominio de definición o campo de existencia`.
Nos referiremos a partir de ahora al conjunto de las funciones reales de variable real definidas sobre D de la siguiente forma $\mathcal{F}(D, \mathbb{R}) = \{ f : \ D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$.
Cuando no se especifica un dominio para una función, se supone que es el conjunto más grande de números reales para el cual tiene sentido la definición de la función. éste se denomina `dominio natural`. El `recorrido de la función` será la imagen del dominio, es decir:

$$\mathrm{Im}(f) = \{ f(x) \ / \ x \in \mathrm{Dom}(f) \}.$$

Definición 2.3 (Grafo) *Sea $f : \ D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, llamamos* `grafo` *de f y lo representamos por G_f al siguiente conjunto:*

$$G_f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ x \in D, \ y = f(x) \} \ .$$

La representación del grafo en el plano se le denomina `gráfica de la función`.

2.1.1. Tipos de funciones

Definición 2.4 (Función monótona) *Decimos que* f *es una* `función creciente` *en* A *(subconjunto del dominio), si*

$$\forall x, x' \in A, \quad x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$$

Se dice que f *es una* `función decreciente` *sobre* A *(subconjunto del dominio), si*

$$\forall x, x' \in A, \quad x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x').$$

Cuando se verifica la desigualdad estricta se dice que el crecimiento o decrecimiento es `estricto`.
Si una función es creciente o decreciente se le llama `monótona`.

Definición 2.5 *Se dice que* f *es* `creciente (decreciente)` *en* x_0 *si existe un entorno de* x_0 *donde la función es creciente (decreciente).*

Definición 2.6 (Función acotada) *Sea* $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *, decimos que* f *está* `acotada superiormente` *en* D *si:*

$$\exists\, K \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in D \ \Rightarrow f(x) \leq K.$$

Decimos que f *está* `acotada inferiormente` *en* D *si:*

$$\exists\, K' \in \mathbb{R} \,/\, \forall x \in D \ \Rightarrow f(x) \geq K'.$$

Si una función está acotada superiormente e inferiormente decimos que está `acotada`.

Si una función está acotada en D, el conjunto $f(D) \subseteq \mathbb{R}$ será un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$, y por el axioma del extremo superior, admitirá un supremo M y un ínfimo m, llamados `extremos superior e inferior` de la función f en D. En el caso que M y m pertenezcan a $f(D)$, se llamarán respectivamente `máximo y mínimo` de f en D.

Definición 2.7 (Función simétrica) *Sea* $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$*. Decimos que* f *es* `par` *o* `simétrica respecto del eje` Y *si*

$$f(x) = f(-x), \ \forall x \in D$$

Decimos que f *es* `impar` *ó* `simétrica respecto del origen de coordenadas` *si*

$$f(x) = -f(-x), \ \forall x \in D$$

Definición 2.8 (Función periódica) *Sea* $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ *y* $\mathrm{T} \in \mathbb{R}^+$*. Decimos que* f *es* `periódica` *si*

$$f(x + \mathrm{T}) = f(x), \ \forall x \in D$$

El mínimo valor de T *que verifica esta relación se denomina* `periodo`.

2.1.2. Operaciones con funciones. Función inversa

Definición 2.9 *Sean* $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$*, definimos las* `operaciones suma y producto por un escalar` *de la siguiente forma:*

$$\begin{cases} (f+g)(x) & = f(x) + g(x) \\ (\lambda \cdot f)(x) & = \lambda \cdot f(x)\,. \end{cases}$$

El conjunto $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, con las dos operaciones anteriormente definidas, tiene estructura de espacio Vectorial Real.

Definición 2.10 (Producto de funciones) *Sean* $f, g \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, *definimos la operación* `producto de dos funciones`*:*

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in D.$$

Definición 2.11 (Composición de funciones) *Sean* $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ *y* $g \in \mathcal{F}(B,\mathbb{R})$ *tales que* $\mathrm{Im}(f) \subseteq B$, *llamamos* `función compuesta` *de* f *y* g *y lo denotamos* $g \circ f$ *a la función* $h : D \longrightarrow \mathbb{R} \;/\; \forall x \in D,\; h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

La composición de funciones verifica la propiedad asociativa $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$, sin embargo, no verifica, en general, la propiedad conmutativa $f \circ g \neq g \circ f$.

Definición 2.12 (Función inversa) *Una función* g *decimos que es* `inversa o recíproca` *de la función* f *en* D *si,*

$$f \circ g \;=\; g \circ f \;=\; i,$$

siendo i *la* `función identidad`, *definida como* $i(x) = x, \quad \forall x \in D.$
Dicha función g *se denotará por* f^{-1}.

Teorema 2.1 (Propiedad reflexiva de las inversas) *Los grafos de dos funciones inversas son simétricos respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante.*

Teorema 2.2 (Existencia de la función inversa) *Una función tiene inversa si y sólo si es inyectiva.*

Como consecuencia, si f es estrictamente monótona en todo su dominio, entonces es inyectiva y, por tanto, admite inversa.
Además, si f es estrictamente creciente (decreciente), su función inversa también lo es.
Si la función dada no es inyectiva en su dominio, se puede restringir a un intervalo donde sea monótona y en el que podremos calcular su inversa.

2.2. Límite de una función en un punto

Definición 2.13 (Significado intuitivo de límite) *Decir que* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ *significa que cuando* x *está cerca, pero diferente de* x_0, *entonces* $f(x)$ *está cerca de* L.

Definición 2.14 (Límite de una función en un punto) *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Decimos que* `el límite de la función` f `en` x_0 `es` L, *y lo denotamos* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, *cuando para cualquier* $\varepsilon > 0$ *dado (tan pequeño como se quiera), existe un correspondiente* $\delta(\varepsilon) > 0$ *tal que, si* $0 <\mid x - x_0 \mid< \delta(\varepsilon)$, $x \in D$, *entonces* $\mid f(x) - l \mid< \varepsilon$.

Gráficamente esto significa que dentro del rectángulo comprendido entre las rectas $y = l \pm \varepsilon$ y $x = x_0 \pm \delta$ están todos los puntos de la gráfica de f, salvo quizás el $(x_0, f(x_0))$, según se observa en la figura[2.2].

Teorema 2.3 (Unicidad del límite de una función en un punto) *El límite de una función, si existe, es único.*

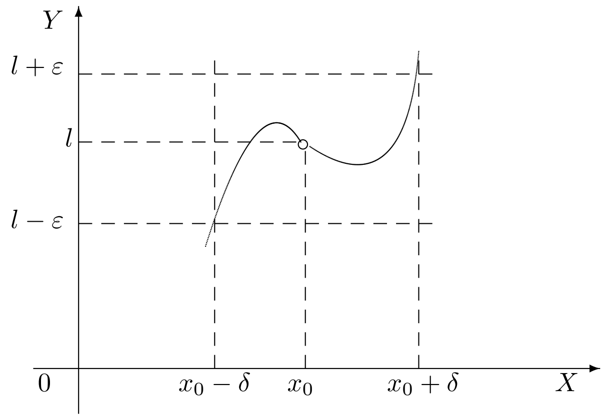


Figura 2.1: Límite de una función en un punto

Teorema 2.4 (Teorema fundamental del límite) *Sea* $f:\ D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *. El límite de* f *en el punto* x_0 *es* l*, si, y sólo si, para cualquier sucesión* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de D que converja a* x_0*,* $(x_n\neq x_0,\ \forall n\in\mathbb{N})$*, la sucesión* $\{f(x_n)\}$ *converge a* l*.*

Ejemplo: Demostrar que no existe el $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$.

Consideremos las sucesiones $\{x_n\}=\dfrac{1}{n\pi}$ y $\{x'_n\}=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$; si hallamos los límites resultan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n=0$ y en cambio $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)=1$. Consecuentemente no existe el $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}$. $\square$

Definición 2.15 (Límite por la derecha) *Decimos que la función* f *tiene* `límite por la derecha` *en el punto* x_0*, y lo denotamos* $f(x_0^+)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l_1$*, cuando*

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta(\varepsilon)\ /\quad 0<x-x_0<\delta(\varepsilon)\Rightarrow\mid f(x)-l_1\mid<\varepsilon.$$

Definición 2.16 (Límite por la izquierda) *Decimos que la función* f *tiene* `límite por la izquierda` *en el punto* x_0*, y lo denotamos* $f(x_0^-)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l_2$*, cuando*

$$\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ \delta(\varepsilon)\ /\quad 0<x_0-x<\delta(\varepsilon)\Rightarrow\mid f(x)-l_2\mid<\varepsilon.$$

2.2.1. Propiedades de los límites

Proposición 2.1 *Sea* $f:\ D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *. Si* f *tiene límite en* x_0*, entonces* f *está acotada en algún entorno de* x_0*.*

Proposición 2.2 *Sea* $f:\ D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *. Si existe el límite de* f *en* x_0 *y además se cumple que* $a\leq f(x)\leq b,\ \forall x\in E^*(x_0)$*, entonces se verifica que*

$$a\leq\lim_{x\to x_0} f(x)\leq b.$$

Proposición 2.3 (Teorema del emparedado) *Sean* $f,g,h:D\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$*, funciones que satisfacen* $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$ *para toda* x *cercana a* x_0*, excepto posiblemente en* x_0*. Si existen* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l$ *entonces* $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$*.*

Proposición 2.4 *Sea* $f:\ D\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *y tal que existe* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$*, entonces se verifica:*

$$\lim_{x\to x_0}\mid f(x)\mid=\left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|.$$

2.2.2. Límites infinitos y en el infinito

Definición 2.17 (Límites infinitos) *Se dice que una función tiende a más infinito en* x_0 *y se expresa* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$*, si para cada número positivo* M*, existe una correspondiente* δ

$$\forall M > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ /\ 0 < \mid x - x_0 \mid < \delta \ \Rightarrow\ f(x) > M.$$

Se dice que una función tiende a menos infinito en x_0 *y se expresa* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ *si*

$$\forall N > 0,\ \exists\, \delta > 0 \ /\ 0 < \mid x - x_0 \mid < \delta \ \Rightarrow\ f(x) < -N.$$

Definición 2.18 *La recta* $x = c$ *es una* `asíntota vertical` *de la función, si alguna de las afirmaciones siguientes es verdadera*

$$\lim_{x\to c+} f(x) = \pm\infty,\ \lim_{x\to c+} f(x) = \pm\infty$$

Definición 2.19 (Límites en el infinito) *Sea* f *una función definida en* $[c,\infty)$ *para algún número* c*. Decimos* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$*, si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un correspondiente número* M *tal que*

$$x > M \ \Rightarrow \mid f(x) - L \mid < \varepsilon.$$

Sea f *una función definida en* $(-\infty, c]$ *para algún número* c*. Decimos* $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$ *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un correspondiente número* K *tal que*

$$x < K \ \Rightarrow \mid f(x) - l \mid < \varepsilon.$$

Definición 2.20 *La recta* $y = b$ *es una* `asíntota horizontal` *de la función, si se cumple*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \ \text{ o } \ \lim_{x\to -\infty} f(x) = b$$

Con ambas definiciones llegaríamos a la definición de límite infinito en el infinito.

Definición 2.21 *La recta* $y = mx + n$ *es una* `asíntota oblicua` *de la función, si se cumple*

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0,\ n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx]$$

2.2.3. Álgebra de límites

Proposición 2.5 *Sean* $f, g \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$*, entonces se verifica:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
3. $\lim\limits_{x\to x_0} (\lambda \cdot f(x)) \ = \ \lambda \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$,
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ y $g(x) \neq 0$ *en un entorno de* x_0.

2.2.4. Infinitésimos

Definición 2.22 *Se dice que una función f es un infinitésimo (o infinitamente pequeña), cuando $x \to x_0$, si* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

Definición 2.23 *Dos infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ en x_0 son del mismo orden si* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} - \{0\}$

Definición 2.24 *Sean $f(x)$ y $g(x)$ infinitésimos en x_0. Se dice que $f(x)$ es un infinitésimo de mayor orden que $g(x)$ si* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Definición 2.25 *Dos infinitésimos $f(x)$ y $g(x)$ en x_0 son equivalentes si* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. *Se representa $f(x) \approx g(x)$.*

La importancia de esta definición radica en el hecho de que si $f(x)$ y $g(x)$ son infinitésimos equivalentes, el límite de una expresión en la que figura $f(x)$ como factor o divisor no se altera al sustituir $f(x)$ por $g(x)$.

Infinitésimos equivalentes para $x \to 0$

$\operatorname{sen} x \approx x$	$\operatorname{tg} x \approx x$
$\operatorname{arc\,sen} x \approx x$	$\operatorname{arc\,tg} x \approx x$
$\ln(1 \pm x) \approx \pm x$	$e^x - 1 \approx x$
$a^x - 1 \approx x \cdot \ln a,\ a > 0$	$1 - \cos x \approx x^2/2$
$(1+x)^p \approx 1 + px$	$\sqrt[n]{x+1} - 1 \approx x/n$

2.3. Continuidad de una función real de variable real.

En esta sección vamos a definir el concepto de **continuidad**, una de las ideas más importantes y fascinantes de toda la Matemática.
El término *continuo* tiene el mismo sentido en Matemáticas que en el lenguaje cotidiano. Así, decir que una función es continua en un punto x_0 significa que su gráfica no sufre interrupción en x_0, que ni se rompe ni tiene saltos o huecos.

2.3.1. Continuidad puntual

Una función f se dice continua en un punto x_0 si se puede conseguir que $f(x)$ esté tan próximo a $f(x_0)$ como se desea, sin mas que tomar x suficientemente cerca de x_0, es decir, si $f(x_0)$ es el límite de f en x_0.

Definición 2.26 (Continuidad puntual) *Sea f una función definida en un intervalo abierto que contenga a x_0. Decimos que f es* `continua` *en x_0 cuando*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Si x_0 es un punto aislado, entonces f es continua en x_0 por definición.

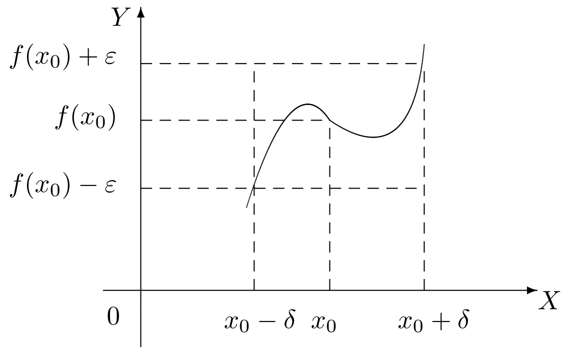


Figura 2.2: Continuidad una función en un punto

Como consecuencia del teorema fundamental del límite, teorema 2.4, se tiene el siguiente

Teorema 2.5 (Caracterización de la continuidad por sucesiones) *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *. Entonces f es continua en* x_0 *si, y sólo si,* $\forall \; \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *se verifica que* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$*.*
En otras palabras, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n\right)$*.*

Definición 2.27 (Continuidad lateral) *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *y sea* $x_0 \in D$*. Se dice que f es* `continua por la izquierda` *en el punto* x_0 *si* $\exists \; f(x_0^-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$*.*
Análogamente, se dice que f es `continua por la derecha` *en el punto* x_0 *cuando* $\exists \; f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$*.*

De la definición anterior se deduce que una función $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en un punto $x_0 \in D$ si, y sólo si, es continua por la izquierda y por la derecha en x_0.

Definición 2.28 (Discontinuidad) *Una función* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se dice que es* `discontinua` *en* $x_0 \in D'$*, si no es continua en él.*

La función no será continua cuando ocurra uno de los siguientes casos:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ y $f(x_0)$ puede existir o no pero, si existe, $f(x_0) \neq l$.
2. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
3. No existe o es infinito uno, al menos, de los límites del apartado 2.

Según se dé una posibilidad u otra, el tipo de discontinuidad que resulta, recibe un nombre u otro.

Definición 2.29 (Discontinuidad evitable) *Una función* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se dice que tiene en* x_0 *una* `discontinuidad evitable` *si* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *y, o bien f no está definida en* x_0*, o bien* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$*.*

Evidentemente, dada una función con una discontinuidad evitable en un punto, podemos redefinirla en ese punto y construir una extensión continua.

Definición 2.30 (Discontinuidad de salto) *Una función* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se dice que tiene en* x_0 *una* `discontinuidad de salto o de primera especie` *cuando*
$\exists \; f(x_0^-) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \; f(x_0^+) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ *y son distintos.*

Definición 2.31 (Discontinuidad esencial) *Una función* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se dice que tiene en* $x = x_0$ *una* `discontinuidad esencial o de segunda especie` *si no existe o es infinito uno, al menos, de los límites laterales de* f *en* x_0.

Proposición 2.6 *Si* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en* x_0, *entonces existe un* $\delta > 0$ *tal que* f *está acotada en* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$.

Teorema 2.6 (Conservación del signo) *Sea* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua en* x_0 *y supongamos que* $f(x_0) \neq 0$. *Entonces existe un intervalo* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *en el que* $f(x)$ *tiene el mismo signo que* $f(x_0)$ *para cualquier* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Proposición 2.7 (Álgebra de funciones continuas) *Sean* $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dos funciones continuas en el punto* $x_0 \in D$. *Entonces:*

1. $f \pm g$ *es continua en* x_0.

2. $\lambda \cdot f$ *es continua en* x_0 *para cualquier* $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. $f \cdot g$ *es continua en* x_0.

4. $\dfrac{f}{g}$ *es continua en* x_0 *siempre que* $g(x) \neq 0 \ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Proposición 2.8 (Continuidad de la función compuesta) *Si* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en* x_0 *y* $g : f(D) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en* $y_0 = f(x_0)$, *entonces* $g \circ f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es continua en* x_0.

2.3.2. Continuidad en intervalos cerrados. Teoremas

Definición 2.32 (Continuidad en un conjunto) *Una función* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se dice que es* `continua en el conjunto` $A \subset D$ *si lo es en cada punto de* A.

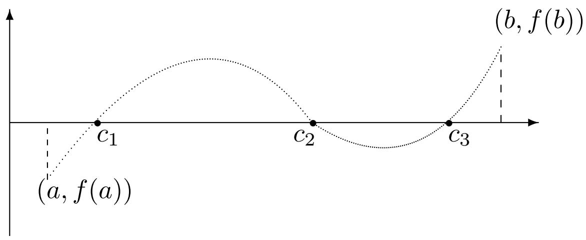
Si el conjunto A de la definición anterior fuese un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es continua en $[a, b]$ si, y sólo si, lo es en todos lo puntos del interior, es continua a la derecha en a y continua a la izquierda en b.

Proposición 2.9 *La función identidad, la función potencial, las funciones polinómicas y las funciones racionales son continuas en cada punto de su dominio respectivo (el dominio de las tres primeras es* $\mathbb{R}$ *mientras que el dominio de la última excluye los puntos que anulan el polinomio denominador).*

Proposición 2.10 *Las funciones trigonométricas elementales, así como las funciones exponencial y logarítmica son funciones continuas en cada punto de su dominio.*

Teoremas sobre funciones continuas

Teorema 2.7 (Teorema de Bolzano) *Sea* f *continua en cada punto del intervalo cerrado* $[a, b]$ *y supongamos que* $f(a)$ *y* $f(b)$ *tienen signos opuestos* $(f(a) \cdot f(b) < 0)$. *Existe entonces, al menos, un* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$.



Teorema de Bolzano.

Veamos una generalización inmediata de este teorema.

Teorema 2.8 (Teorema de Darboux de los valores intermedios) *Sea f continua en cada punto del intervalo cerrado $[a, b]$. Si $f(a) \neq f(b)$ la función f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ al menos una vez en el intervalo (a, b).*

Proposición 2.11 *Sea f continua en cada punto del intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces f está acotada en $[a, b]$, esto es, existe un número $C \geq 0 \;/\; |f(x)| \leq C \;\forall x \in [a, b]$.*

Es importante resaltar el hecho de que el intervalo sea `cerrado`. En un intervalo abierto el resultado de la proposición no es cierto; basta considerar la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el intervalo abierto $(0, 1)$ en el que la función es continua pero no está acotada.

Teorema 2.9 (Teorema de Weierstrass) *Si f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, existen puntos x_1 y x_2 de $[a, b]$ en los que f alcanza los valores mínimo y máximo respectivamente, es decir, puntos tales que*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \;\forall x \in [a, b]$$

Corolario 2.10 *Si f es una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, entonces la imagen de f es también un intervalo cerrado y acotado.*

Teorema 2.11 (Continuidad de la función inversa) *Sea f estrictamente creciente y continua en un intervalo $[a, b]$. Sean $c = f(a)$, $d = f(b)$ y sea g la inversa de f. Entonces g es continua en $[c, d]$.*

Existe un teorema análogo para funciones estrictamente decrecientes.

A. Funciones elementales

Se efectúa a continuación una breve descripción de una colección básica de funciones denominadas `funciones elementales`.
Las funciones elementales se dividen en dos categorías,

$$\text{Funciones} \begin{cases} \text{Algebraicas} \begin{cases} \text{Polinómicas} \\ \text{Racionales} \\ \text{Irracionales} \end{cases} \\ \\ \text{Trascendentes} \begin{cases} \text{Exponencial/Logarítmica} \\ \text{Trigonométricas} \end{cases} \end{cases}$$

Un análisis detallado de las funciones elementales puede encontrarse en distintos textos. Por ejemplo en
– "Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable". A. García y otros. Ed. CLAGSA.
– "Cálculo (vol 1)". Larson y otros. Ed Mc GrawHill.
– "Cálculo". Purcell y otros. Ed Prentice Hall

Índice general