Tema 2

Teoría de la probabilidad

2.1 ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden escribir con los dígitos $\{1,2,3,4,5,6\}$?

2.2 ¿De cuántas formas se pueden sentar en una fila de butacas 5 personas, si las butacas están numeradas del 1 al 10? ¿Y si fuesen 10 personas?

2.3 ¿De cuántas maneras se pueden repartir 10 bolas indistinguibles en 4 urnas diferentes?

2.4 Un grupo está formado por 25 chicas y 15 chicos. ¿Cuántas comisiones de cinco personas se pueden formar?¿Cuántas comisiones están compuestas por tres chicas y dos chicos?

2.5 Utilizando 10 consonantes y las cinco vocales, ¿cuántas palabras de 5 letras pueden formarse escogiendo 3 consonantes y 2 vocales?

2.6 En una sección hay cinco biólogos, cuatro químicos y tres matemáticos. Si es necesario formar un tribunal de seis miembros, calcular el número de tribunales que pueden formarse con:

(a) Tres biólogos, dos químicos y un matemático.
(b) Dos matemáticos.
(c) Por lo menos tres biólogos.

2.7 Cuántos números de cuatro cifras, mayores que 3000, pueden formarse con las cifras 2,3,4 y 5 sin repetir ninguna?

2.8 Tenemos cinco bolas blancas y cuatro negras. Si se eligen 5 bolas y se colocan en fila, ¿cuántas secuencias distintas de colores podemos obtener?

2.9 Dados dos sucesos A, B$\in \mathcal{A}$, demostrar la siguiente desigualdad:

$$1 - P(\overline{A}) - P(\overline{B}) \leq P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$$

2.10 Sean A, B $\in \mathcal{A}$. Demostrar que si $P(A) = 0$ y $P(B) = 1$, entonces $P(A \cap B) = 0$.

2.11 Sean A y B dos sucesos incompatibles tales que $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$. ¿Son A y B independientes?

2.12 Sean A, B y C tres sucesos. Supongamos $C \cap B = \emptyset$. ¿Es cierto que $P(A|_{(C \cup B)}) = P(A|_B) + P(A|_C)$?

2.13 Demostrar que si $P(A) + P(B) > 1$, entonces $P(A \cap B) \neq 0$

2.14 ¿Es cierto que si $P(B|_A) = P(B|_{\overline{A}})$, entonces A y B son independientes?

2.15 Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) \neq 0$ y $P(B) \neq 0$. Demostrar que si $P(A|_B) > P(A)$, entonces $P(B|_A) > P(B)$

2.16 Demostrar que si $P(A|_C) \geq P(B|_C)$ y $P(A|_{\overline{C}}) \geq P(B|_{\overline{C}})$, entonces $P(A) \geq P(B)$.

2.17 ¿Cuándo puede ser un suceso independiente de sí mismo?¿Y de su complementario?

2.18 Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = 0.2$, $P(A|_B) = 0.25$ y $P(B|_A) = 0.5$. Calcular $P(A \cup B)$.

2.19 Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = P(B) = p$. Si la probabilidad de que ambos sucesos ocurran a la vez es 0.2 y la de que no se verifique ninguno de los dos es 0.1, determinar p.

2.20 Sean A y B sucesos tales que $P(A) = 0.2$, $P(A|_B) = 0.25$ y $P(B|_A) = 0.5$. Calcular $P(\overline{A}|_{\overline{B}})$.

2.21 Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = P(B)$. Si la probabilidad de que ambos sucesos ocurran a la vez es de 0.2 y la probabilidad de que no se verifique ninguno de los dos es 0.1, calcular $P(A)$ y $P(A|_{\overline{B}})$.

2.22 Sean A, B y C sucesos independientes tales que $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.6$ y $P(C) = 0.7$. Calcular $P(A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}))$

2.23 Sean A y B sucesos tales que $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ y $P(A \cap B) = 1/4$. Calcular $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ y $P(A|_{\overline{B}})$.

2.24 En una caja hay 6 bolas numeradas del 1 al 6. Se extraen todas al azar, de una en una. Hallar la probabilidad de que los números de bolas extraídas aparezcan en orden creciente.

2.25 Mientras marcaba un número de teléfono, un abonado olvidó las tres últimas cifras. Recordando que eran diferentes, las marcó al azar. Hallar la probabilidad de que marcara las cifras correctas.

2.26 En una mesa de juego en 1654, Méré propuso a Pascal la siguiente afirmación: "Es más probable obtener al menos un as con cuatro dados que al menos un doble as en veinticuatro tiradas de dos dados". Demostrar que Méré tenia razón.

2.27 En un taller trabajan 6 hombres y 4 mujeres. Según el número de su ficha se han escogido al azar 7 personas. Hallar la probabilidad de que entre las personas seleccionadas aparezcan exactamente 3 mujeres.

2.28 ¿Cuál es la probabilidad de sumar 7 puntos en un lanzamiento de cuatro dados?

2.29 Una cerradura de *combinación* tiene sobre su eje general cuatro discos, cada uno de los cuales está dividido en 5 sectores con distintas cifras escritas sobre ellos. La cerradura se abre sólo cuando los discos ocupan una posición determinada. Hallar la probabilidad de que la cerradura pueda abrirse al poner los discos arbitrariamente.

2.30 En una caja hay 10 piezas de las cuales 4 están pintadas. Un montador toma al azar 3 piezas. Hallar la probabilidad de que por lo menos una de las piezas resulte pintada.

2.31 Para la señalización de emergencia se han instalado dos indicadores que funcionan independientemente. La probabilidad de que el indicador se accione durante la avería es igual a 0.95 para el primero y 0.9 para el segundo. Hallar la probabilidad de que durante la avería se accione sólo un indicador.

2.32 La probabilidad de que en una medición de cierta magnitud física se cometa un error mayor que la precisión prefijada es igual a 0.4. Se realizan tres mediciones independientes. Hallar la probabilidad de que sólo en una de ellas el error cometido supere la precisión prefijada.

2.33 De un programa con 25 preguntas, un estudiante sabe 20. Hallar la probabilidad de que el estudiante conteste a las tres preguntas dadas por el examinador.

2.34 En un circuito eléctrico se conectan en serie tres elementos que trabajan independientemente uno del otro. Las probabilidades de fallos del primero, segundo y tercer elemento son respectivamente iguales a $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.15$, $p_3 = 0.2$. Hallar la probabilidad de que no haya corriente en el circuito.

2.35 Sea un dado tal que la probabilidad de que las distintas caras es proporcional al número de puntos inscrito en ellas. Hallar para este dado la probabilidad de obtener un número par.

2.36 Entran en un ascensor de un edificio de siete plantas, tres personas en la primera planta. Cada una de ellas sale, independientemente de las otras y empezando en la segunda, con igual probabilidad en cada planta. Hallar las probabilidades de los siguientes sucesos:

(a) Todas las personas bajan simultáneamente.
(b) Todas las personas bajan en diferentes plantas.

2.37 Los n tomos de una enciclopedia se disponen al azar sobre una estantería.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que los tomos 1 y 2 aparezcan uno al lado del otro en dicho orden?
(b) Idem para los tomos 1 a p.

2.38 En un pequeño pueblo viven 270 personas. De estos, 90 leen el diario A, 90 leen el diario B y 90 leen C; 30 leen A y B, 30 leen A y C, 30 leen B y C y 10 personas leen los tres diarios. Determinar la probabilidad de que un individuo elegido al azar lea:

(a) Exactamente k diarios.
(b) Por lo menos k diarios.
(c) No más de k diarios.
para k=0,1,2,3.

2.39 En un censo hecho a un grupo de 500 personas se recogió la siguiente información: 300 eran varones, 295 eran personas casadas, 395 tenían coche, 200 eran varones casados, 245 tenían coche y estaban casados, 250 eran varones con coche y 190 eran varones casados y con coche. Se elige al azar una persona de entre las 500. Calcular la probabilidad de que:

(a) ni tenga coche ni esté casada.
(b) sea varón soltero o mujer con coche.
(c) sea mujer soltera sin coche.

2.40 De una baraja con 48 cartas se extraen dos cartas a la vez. Hallar la probabilidad de que:

(a) Ambas sean copas.
(b) Por lo menos una sea copa.
(c) Una sea copa y la otra espada.

2.41 Supongamos que tenemos tres urnas con las siguientes composiciones de bolas: 1B y 3N, 2B y 2N, 3B y 1N. Si extraemos una bola de cada urna, ¿cuál es la probabilidad de que extraigan en total 2 bolas blancas y una bola negra?

2.42 Si el lugar de impacto sobre una diana de 25 cm. de radio fuese aleatorio, ¿cuál sería la probabilidad de dar en su círculo central si éste tiene 3 cm. de radio?.

2.43 Un ordenador elige de forma aleatoria dos números reales del intervalo [0,2]. ¿Cuál es la probabilidad de que la diferencia entre ambos sea mayor de 1?¿Y la probabilidad de que el producto de ambos sea menor que dos?

2.44 Dos personas A y B se citan en una cafetería entre las tres y las cuatro de la tarde pero como ambos piensan que pueden tener imprevistos de última hora, deciden que ninguno va a esperar al otro más de un tiempo T. Determinar cuánto tienen que esperar para que la probabilidad de encontrarse sea de, al menos, 0.5.

2.45 Determinar la probabilidad de que la suma de dos números elegidos aleatoriamente en el intervalo $(0, L)$ exceda de L, y que su producto sea menor o igual que $L^2/4$.

2.46 El temario de un examen tiene 50 preguntas divididas en dos bloques de 30 y 20 preguntas respectivamente. El examen consta de 3 preguntas: dos se eligen del primer bloque y una se elige del segundo bloque. Si un alumno se ha estudiado 10 preguntas de cada uno de los bloques, ¿cuál es la probabilidad de que no conozca ninguna respuesta?

2.47 Cuatro distribuidores A, B, C y D envían material por encargo a una empresa con probabilidades 0.3, 0.2, 0.4 y 0.1, respectivamente. El porcentaje de encargos entregados con retraso por estos distribuidores es del 20% para A, el 10% para B, el 15% para C y el 25% para D.

(a) Determinar la probabilidad de que la empresa reciba un encargo sin retraso.
(b) La empresa recibe un encargo con retraso. Calcular la probabilidad de que proceda de A. ¿Cuál es la probabilidad de que ese encargo proceda de B o de C?

2.48 Tres urnas contienen cada una 6 bolas negras y 4 bolas blancas. De la primera urna se extrae al azar una bola y se echa en la segunda urna, después de la segunda urna se escoge al azar una bola y se traspasa a la tercera urna. Hallar la probabilidad de que la bola tomada al azar de la tercera urna resulte blanca.

2.49 Se dispone de una urna con cuatro bolas en su interior, de las que sabemos únicamente, que son de dos colores: rojo y blanco.

(a) Describir las posibles composiciones de bolas que puede haber en la urna.
Supuesto que todas esas composiciones son equiprobables,
(b) Determinar la probabilidad de extraer una bola blanca de la urna.
(c) Si se extrae una bola que resulta ser de color rojo, ¿cuál es la probabilidad de que en la urna hubiera dos bolas de cada tipo?

2.50 Cada uno de n bastones se rompe en dos partes, una larga y otra corta. Después se emparejan al azar las $2n$ partes resultantes formando n bastones. Determinar la probablidad de que:

(a) Las $2n$ partes se hayan emparejado formando los n bastones originales.
(b) Cada una de las partes largas resulte unida a una corta.

2.51 Cada una de n urnas contiene 4 bolas blancas y 6 negras, mientras que otra urna contiene 5 bolas blancas y 5 bolas negras. Se elige aleatoriamente una urna de entre las $n+1$ existentes y se extraen dos bolas de ella, resultando que ambas son negras. La probabilidad de que en la urna elegida queden 5 blancas y 3 negras es $1/7$. Determinar el valor de n.

2.52 Hay 6 cajas que contienen 12 tornillos buenos y malos. Una tiene 8 buenos y 4 defectuosos; dos cajas contienen 6 buenos y 6 malos, y tres cajas, 4 buenos y 8 malos. Se elige una caja al azar y se extraen 3 tornillos, sin reemplazamiento, de dicha caja. Si de estos tres tornillos 2 son buenos y 1 es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que la caja elegida contenga 6 tornillos buenos y 6 malos?

2.53 Dadas dos barajas de 40 cartas cada una, se extrae aleatoriamente una carta de la primera baraja y se incluye en la segunda. Posteriormente se toma una carta de la segunda baraja y resulta ser un as. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta que se extrajo también fuera un as?

2.54 Una urna contiene 10 bolas, de las cuales 5 son negras. Se elige un número n aleatoriamente entre 1 y 6 (ambos inclusive) y posteriormente se toma una muestra de tamaño n. Hallar la probabilidad de que todas las bolas sean negras.

2.55 En las aulas de informática A y B hay 28 ordenadores en cada una. Diez ordenadores del aula A y ocho del aula B están contaminados por un virus. Un grupo de tres estudiantes elige una de las aulas al azar y en ella seleccionan tres ordenadores para trabajar. Si exactamente dos de los estudiantes han elegido ordenadores contaminados, ¿cuál es la probabilidad de que se encuentren en el aula A?

2.56 De una batería con tres cañones se sabe que las probabilidades de dar en el blanco del primer, segundo y tercer cañón son respectivamente $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.3$ y $p_3 = 0.5$. Un cañón puede dar o no en el blanco con independencia de los demás.

(a) Si se hace una descarga, ¿cuál es la probabilidad de dar en el blanco?
(b) Si se sabe que sólo dos de los cañones dieron en el blanco, hallar la probabilidad de que el primer cañón sea uno de ellos.

2.57 De una urna que contiene tres bolas blancas y tres bolas negras, se pasan cuatro a una segunda urna vacía, de la que se extraen dos bolas que resultan ser una de cada color. ¿Cuál es la probabilidad de que se hayan pasado exactamente tres bolas blancas de la primera a la segunda urna?

2.58 En una determinada población el número de fumadores respecto de los que no fuman está en la proporción de $3/5$. Por los datos experimentales se sabe que la probabilidad de que un fumador padezca una enfermedad determinada es de 0.3, mientras que la probabilidad de que la padezca un no fumador es de 0.025.

(a) Si una persona padece dicha enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que sea fumador?
(b) Si se eligen tres individuos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos padezca la enfermedad?

2.59 Un procesador de textos dispone de una función para corregir palabras. El corrector detecta error en una palabra incorrecta con probabilidad 0.99 y en una palabra que es correcta con probabilidad 0.02. Si un texto tiene un 5% de palabras incorrectas,

(a) Calcular la probabilidad de que habiendo identificado el corrector una palabra como correcta, sea en realidad incorrecta.

(b) Calcular la probabilidad de que el corrector clasifique erróneamente una palabra.