Teorema de la base (Steinitz)

Lema 1 (Teorema del conjunto generador) **-** *Sean $u_1,\, u_2,\, \cdots, u_p$ vectores de un espacio vectorial V. Si u_1 depende linealmente del conjunto $\{u_2,\, \cdots, u_p\}$, entonces $\langle\, u_1,\, u_2,\, \cdots, u_p \,\rangle = \langle\, u_2,\, \cdots, u_p \,\rangle$.*

Demostración:

Es obvio que $\langle\, u_2,\, \cdots, u_p \,\rangle \subseteq \langle\, u_1,\, u_2,\, \cdots, u_p \,\rangle$. Veamos la inclusión contraria.

Si $u \in \langle\, u_1,\, u_2,\, \cdots, u_p \,\rangle$, existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ tales que $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p$ y como u_1 depende linealmente de los demás, existirán $\beta_2, \cdots, \beta_p$ tales que $u_1 = \beta_2 u_2 + \cdots \beta_p u_p$. Sustituyendo esta expresión en la anterior, obtenemos:

$$u = \alpha_1(\overbrace{\beta_2 u_2 + \cdots + \beta_p u_p}^{u_1}) + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2)u_2 + \cdots + (\alpha_1\beta_p + \alpha_p)u_p$$

En otras palabras, $u \in \langle\, u_2,\, \cdots, u_p \,\rangle$ lo cual implica que $\langle\, u_1,\, u_2,\, \cdots, u_p \,\rangle \subseteq \langle\, u_2,\, \cdots, u_p \,\rangle$ ■

Lema 2 - *Si el conjunto $\mathcal{B} = \{e_1,\, e_2,\, \cdots, e_n\}$ es una base de V y el conjunto $A = \{v_1,\, v_2,\, \cdots, v_m\}$ es linealmente independiente, entonces $m \leqslant n$.*

Demostración:

Supongamos que $m > n$. Tendríamos entonces $A = \{v_1,\, v_2,\, \cdots, v_n, v_{n+1},\, \cdots, v_m\}$

– Puesto que $\mathcal{B}$ es una base y $v_1 \neq \vec{\mathbf{0}}$, existen $\alpha_1,\, \alpha_2,\, \cdots, \alpha_n$ no todos nulos, tales que

$$v_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$$

Podemos suponer (reordenando si fuera necesario) que $\alpha_1 \neq 0$ y despejando e_1 en la ecuación anterior,

$$e_1 = \left(\tfrac{1}{\alpha_1}\right)v_1 + \left(\tfrac{-\alpha_2}{\alpha_1}\right)e_2 + \cdots + \left(\tfrac{-\alpha_n}{\alpha_1}\right)e_n$$

lo cual, combinado con el lema 1, implica que

$$V = \langle\, e_1,\, e_2,\, \cdots, e_n \,\rangle = \langle\, v_1,\, e_1,\, e_2,\, \cdots, e_n \,\rangle = \langle\, v_1,\, e_2,\, \cdots, e_n \,\rangle$$

– Puesto que $V = \langle\, v_1,\, e_2,\, \cdots, e_n \,\rangle$ y $v_2 \neq \vec{\mathbf{0}}$, existen $\beta_1,\, \beta_2,\, \cdots, \beta_n$ no todos nulos, tales que

$$v_2 = \beta_1 v_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n$$

Si fuese $\beta_2 = \cdots = \beta_n = 0$, entonces el conjunto $\{v_1, v_2\}$ sería linealmente dependiente. Podemos pues suponer (reordenando si fuera necesario) que $\beta_2 \neq 0$. Despejando e_2 en la ecuación anterior,

$$e_2 = \left(\tfrac{-\beta_1}{\beta_2}\right)v_1 + \left(\tfrac{1}{\beta_2}\right)v_2 + \cdots + \left(\tfrac{-\beta_n}{\beta_2}\right)e_n$$

lo cual, combinado con el lema 1, implica que:

$$V = \langle\, v_1,\, e_2,\, \cdots, e_n \,\rangle = \langle\, v_2, v_1,\, e_2,\, \cdots, e_n \,\rangle = \langle\, v_1,\, v_2,\, \cdots, e_n \,\rangle$$

Continuando el proceso, obtenemos que $V = \langle\, v_1,\, v_2,\, \cdots, v_n \,\rangle$. Pero esto es absurdo pues implica que los vectores $v_{n+1}, \cdots, v_m$ dependen linealmente del conjunto $\{v_1,\, v_2,\, \cdots, v_n\}$ lo cual, contradice el hecho de que $A = \{v_1,\, v_2,\, \cdots, v_n,\, v_{n+1}, \cdots, v_m\}$ es linealmente independiente. Así pues, $m \leqslant n$. ■

Teorema de la base (Steinitz) **-** *En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las bases tienen el mismo número de elementos.*

Demostración:

La demostración se deja al cuidado del lector. ■