Tema 3 - Determinantes (1ª parte)

1. Determinante de una matriz cuadrada: definición y teoremas fundamentales. `[LAY, pág. 163-169]`

– **Definición 1** – Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se define $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

– Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, definimos $A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{ij} & & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

– **Definición 2** – $\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots\cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{1n})$

– **Teorema 1** – *Para todo* $i = 1, \cdots, n$ *se cumple que* $\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})$.

– Para cada $i, j = 1, n$ definimos $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$ y le llamamos *cofactor* del elemento a_{ij}.

– Con al notación anterior, se tiene que para todo $i = 1, \cdots, n$ $\quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}C_{ij}$.

– **Teorema 2** – $\det(A) = \det(A^t)$ [Esto es, valen los desarrollos por columnas].

2. Propiedades de los determinantes (1ª parte). `[Apuntes de clase y LAY, pág. 169-170]`
`Nota: usaremos la palabra línea para referirnos a una fila o columna.`

a) El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es el producto de los elementos de su diagonal principal. En particular, $\det(I_n) = 1$.

b) $$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} + \mu a'_{11} & \lambda a_{12} + \mu a'_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} + \mu a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

`Nota: La misma propiedad es válida para cualquier línea.`

c) Si una matriz tiene una línea de ceros, su determinante es nulo.

d) Si se intercambian entre si dos líneas paralelas de una matriz, su determinante cambia de signo.

e) Si una matriz tiene dos líneas paralelas iguales, su determinante es nulo.

f) Si una línea de una matriz es combinación lineal de otras líneas paralelas, su determinante es nulo. En otras palabras, si $\text{rango}(A_{n\times n}) < n$, entonces $\det(A) = 0$.

g) Si a una línea de una matriz se le suma una combinación lineal de otras líneas paralelas su determinante no cambia.

3. Determinantes, matrices elementales y rango. `[Apuntes de clase y LAY, pág. 174]`

a) Si E es una matriz elemental, $\det(E) = \begin{cases} -1 & \text{si } E \text{ cambia la fila } i \text{ por la fila } j \\ 1 & \text{si } E \text{ suma a la fila } i \text{ la fila } j \text{ multiplicada por } k \\ k & \text{si } E \text{ multiplica la fila } i \text{ por } k \end{cases}$

b) Si $E_{n\times n}$ es una matriz elemental y $A_{n\times n}$ una matriz cualquiera, $\det(E \cdot A) = \det(E)\cdot\det(A)$.

c) **Teorema** – *Si* $\text{rango}(A_{n\times n}) = n$, *entonces* $\det(A) \neq 0$.

Corolario – $\text{rango}(A_{n\times n}) = n \iff \det(A) \neq 0$.