Tema 5 (II) - Conjuntos ortogonales. El proceso de Gram-Schmidt.

1. *a)* Comprobar que $\mathcal{B} = \{(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0), (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0), (0,0,1)\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

b) Hallar las coordenadas del vector $\mathbf{v} = (5, -5, 2)$ en la base $\mathcal{B}$.

c) Hallar (rápidamente) la matriz de paso de la base canónica a la base $\mathcal{B}$.

2. *a)* Normalizar (ya es ortogonal) la base $\{(1,0,-1), (1,1,1), (1,-2,1)\}$. Llamar $\mathcal{B}_1$ a la base obtenida.

b) Hallar la matriz de cambio de la base $\mathcal{B} = \{(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0), (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0), (0,0,1)\}$ a $\mathcal{B}_1$ y de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}$.

c) La matriz de cambio de una base ortonormal a otra también ortonormal, ¿es necesariamente ortogonal?

3. Para cada $\mathbf{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, a la matriz $H_{\mathbf{v}} = I_n - \frac{2}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}^t \times \mathbf{v}$ se le llama *matriz de Householder*.

a) Probar que $H_{\mathbf{v}}$ es simétrica y ortogonal, esto es, $H_{\mathbf{v}}^{-1} = H_{\mathbf{v}}^t = H_{\mathbf{v}}$.

b) Construir la matriz de Householder para $\mathbf{v} = (-1, 1, 2)$ y comprobar las afirmaciones anteriores.

4. *a)* Hallar, en la base canónica, la matriz de la proyección P_H sobre el subespacio $H = \langle (1,0,-1), (1,1,1) \rangle$.

b) Comprobar que $\mathsf{P}_H^2 = \mathsf{P}_H$.

c) Comprobar, para $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$, que $\mathbf{v} \notin H$ y que $\mathbf{v} - \mathsf{P}_H(\mathbf{v}) \in H^\perp$.

5. *a)* Hallar la matriz de la proyección P_H sobre el subespacio $H = \langle (1,2,0,-1), (0,1,1,0), (1,1,-1,1) \rangle$ en la base canónica.

b) Comprobar que $\mathbf{v} = (1,1,1,1) \notin H$ y que $\mathbf{v} - \mathsf{P}_H(\mathbf{v}) \in H^\perp$.

c) Comprobar que $\mathbf{w} = (1,1,-1,-1) \in H$ y que $\mathsf{P}_H(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$.

6. Usar el procedimiento de Gram-Schmidt para hallar, en cada caso, una base ortonormal de H.

a) $H = \langle (-8, 3, 5) \rangle$

b) $H = \langle (3,4,0), (1,0,0) \rangle$

c) $H = \langle (1,2,2,-1), (1,1,-5,3), (3,2,8-7) \rangle$

7. El siguiente ejercicio pretende ilustrar el hecho de que el procedimiento de Gram-Schmidt puede aplicarse a conjuntos L.D. Hallar, en cada caso, una base ortogonal de H partiendo del sistema generador dado.

a) $H = \langle (2,-1,3,-2), (4,-2,5,1), (2,-1,1,8) \rangle$

b) $H = \langle (3,-1,3,2), (5,-3,2,3), (1,-3,-5,0), (3,-1,1-3) \rangle$

8. *a)* Hallar una base ortonormal del subespacio H de $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones son: $\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$.

b) Hallar las coordenadas del vector $(-7, 14, 3, -1)$ respecto de dicha base.

c) Hallar (rápidamente) una base de $H^\perp$.

9. Hallar unas ecuaciones implícitas de $H^\perp$ siendo $H \equiv \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

10. Sea $H = \langle (1,0,2,1), (2,1,2,3), (0,1,-2,1) \rangle$.

a) Hallar sendas bases ortonormales, $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, de H y $H^\perp$.

b) Considerar en $\mathbb{R}^4$ la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ y hallar la matriz del cambio de la base canónica a $\mathcal{B}$.

11. Hallar una base ortonormal de $H^\perp$ si $H \equiv \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

12. La aplicación lineal $T : \mathbb{R}^4 \longmapsto \mathbb{R}^4$, en la base canónica, viene dada por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Obtener una base ortonormal de $\ker(T)$ y otra de $\mathrm{Im}(T)$.

b) Comprobar que $T\big(\ker(T)^\perp\big) = \mathrm{Im}(T)$ ¿Se cumple siempre la igualdad anterior?

13. Ampliar el conjunto $\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})\right\}$ para obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.