Tema 4 (I) - Aplicaciones lineales (1^{a} parte)

1. Razonar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

a) $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y) = (x - y, 3y, 2y)$

b) $T : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (2xy, x - y, -2z)$

c) $D : \mathbb{P}[x] \longmapsto \mathbb{P}[x]$ definida por $D(p(x)) = p'(x)$ (la derivada de $p(x)$).

d) $G : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ donde $G(v)$ es el resultado de girar 30°, en sentido positivo, el vector v.

e) $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = \big((x + y)^2, x - y\big)$

f) $T : \mathbb{P}^3[x] \longmapsto \mathbb{R}^3$ definida por $T(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a - b, b - c, c - d)$

2. En los casos siguientes, T es una aplicación lineal.

a) Si $T(1, 3) = (2, 1)$ y $T(3, 1) = (1, 2)$, hallar (rápidamente) $T(1, 1)$.

b) Si $\ker(T) = \langle\, (0, 1) \,\rangle$ e $\mathrm{Im}(\mathbb{R}^2) = \langle\, (1, 1) \,\rangle$, hallar $T(1, 0)$ [hay muchas soluciones].

c) $T(2, 1) = T(1, 2) + T(u)$. Hallar u si:

(1) - T es inyectiva.

(2) - $\ker(T) = \langle\, (-2, 1) \,\rangle$.

3. Dada la aplicación $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ definida por $T(x, y) = (x + y,\ -2x + 4y)$ se pide:

a) Probar que T es lineal y hallar su matriz en la base canónica.

b) Probar que T es inyectiva.

c) Hallar la matriz de T en la base $\mathcal{B} = \{(1, 1),\ (1, 2)\}$

4. Dada la aplicación $D : \mathbb{P}^3[x] \longmapsto \mathbb{P}^2[x]$ definida por $D(p(x)) = p'(x)$ (derivada de $p(x)$) y las bases, $\mathcal{B} = \big\{x^3, x^2, x, 1\big\}$ $\big($de $\mathbb{P}^3[x]\big)$ y $\mathcal{B}' = \big\{x^2, x, 1\big\}$ $\big($de $\mathbb{P}^2[x]\big)$ se pide:

a) Probar que D es lineal (si no se ha probado antes) y hallar su matriz en las bases dadas.

b) Hallar, usando la matriz hallada, $D\big((x - 1)^3\big)$.

c) Probar que D no es inyectiva y hallar una base de $\ker(D)$.

d) Hallar $D^{-1}(2x^2 - x + 2)$.

5. Sea $G : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ tal que $G(v)$ es el resultado de girar 30°, en sentido positivo, el vector v se pide:

a) Probar que G es lineal (si no se ha probado antes) y hallar su matriz en la base canónica.

b) Hallar la matriz de $G \circ G$ ¿Cuál es su significado geométrico?

c) Hallar $G(2, 3)$ y $G^{-1}(1, 1)$.

d) Probar que para algún valor de n se verifica que $\overbrace{G \circ G \circ \cdots \circ G}^{n \text{ veces}} = I$. Hallar todas los valores posibles.

6. De la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ se sabe que $T(1, 0) = (2, 0)$ y $T(0, 1) = (0, 1)$.

a) Probar que la información proporcionada determina T y hallar la matriz de T en la base canónica.

b) ¿En qué figura se transforma el cuadrado de vértices $(0, 0), (1, 0), (1, 1)$ y $(0, 1)$ al aplicar T a todos los vectores que tienen su origen en $(0, 0)$ y su extremo dentro del cuadrado?

c) $(*)$ ¿En qué figura se transforma el círculo de centro en $(0, 0)$ y radio 1?

7. Sea r la recta $y = x$ y $P_r : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $P_r(v) =$ proyección de v sobre r.

a) Usar argumentos geométricos para probar que P_r es lineal y que $P_r \circ P_r = P_r$.

b) Probar que P_r no es inyectiva y hallar una base de $\ker(P_r)$.

c) Hallar la matriz M de P_r en la base canónica y comprobar que $M^2 = I_2$.

d) Hallar una base de $\mathbb{R}^2$ de modo que la matriz de P_r en esa base sea $M_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$