Tema 3 (I) - Determinantes: definición y propiedades básicas

1. Hallar el valor de los siguientes determinantes de orden 2.

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{1+t^2}{1-t^2} & \frac{2t}{1-t^2} \\ \frac{2t}{1-t^2} & \frac{1+t^2}{1-t^2} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & \log_a b \\ \log_b a & 1 \end{vmatrix}$$

2. Hallar el valor de los siguientes determinantes de orden 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 25 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$$

3. Hallar el valor de los siguientes determinantes de orden 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{4}{3} & 2 & -\frac{1}{2} & -5 \\ 1 & -2 & \frac{3}{2} & 8 \\ \frac{6}{5} & -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & \frac{12}{5} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{2} \\ 3 & -12 & \frac{21}{5} & 15 \\ \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{4}{5} & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & \sqrt{5} & \sqrt{3} \\ \sqrt{6} & \sqrt{21} & \sqrt{10} & -2\sqrt{3} \\ \sqrt{10} & 2\sqrt{15} & 5 & \sqrt{6} \\ 2 & 2\sqrt{6} & \sqrt{10} & \sqrt{15} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

4. Usando la teoría de determinantes, calcular la inversa (o demostrar que tal inversa no existe) de las matrices siguientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ -e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} e^\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & -5 & -7 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 9 & 3 & 9 \\ 6 & -10 & 4 \\ 10 & 7 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Hallar λ para que las matrices siguientes sean invertibles y hallar su inversa para esos valores.

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & -3 \\ 5 & 1-\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 1 & 10 & -6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda-1 & \lambda+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2-\lambda & \lambda+3 & \lambda+7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 2 \\ 0 & 2+\lambda & 1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

6. El determinante $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ se llama de *Vandermonde*[1]. Hallar su valor. Generalizar el resultado.

[1] En honor del matemático francés Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796)