Tema 3

Variables aleatorias y modelos de distribuciones

3.1 Conceptos generales

Definición 3.1.1.– *Dado un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$*, una variable aleatoria es una función* $\quad X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ejemplos de variables aleatorias:

- Se lanza una moneda dos veces y a cada resultado se le asigna el número de caras obtenidas:
  $\omega_1 = (c, c) \quad X(\omega_1) = 2$
  $\omega_2 = (c, x) \quad X(\omega_2) = 1$
  $\omega_3 = (x, c) \quad X(\omega_3) = 1$
  $\omega_4 = (x, x) \quad X(\omega_4) = 0$

- Se lanzan dos dados y a cada resultado se le asigna la suma de los números que han salido.

- Se dispara a una diana y se asigna a cada impacto la distancia desde éste hasta el centro de la diana.

Definición 3.1.2.– *Una variable aleatoria se dice que es discreta cuando su recorrido es un número finito o infinito numerable de valores. En otro caso, por ejemplo si el recorrido es un intervalo, se dice que la variable es continua.*

En los ejemplos anteriores los dos primeros casos corresponden a variables aleatorias discretas, y el tercero a una variable aleatoria continua.

Nota: el que una variable aleatoria sea continua o discreta no viene determinado por el espacio muestral, sino por su recorrido.

Proposición 3.1.3.– *Si* X *es una variable aleatoria sobre* Ω *y* f *es una función continua,* $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, tal que* $Img(X) \subseteq D$ *entonces* $f \circ X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una variable aleatoria que denotaremos* $f(X)$*, y se define como:*

$$f(X)(\omega) = (f \circ X)(\omega) = f(X(\omega)) \;\; \forall\, \omega \in \Omega$$

En particular, si X e Y son variables aleatorias sobre Ω y $a, b \in \mathbb{R}$, entonces aX, $aX + bY$ y XY son variables aleatorias.

3.2 Variables aleatorias discretas

Definición 3.2.1.– *Dada una variable aleatoria X que toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ se llama función de probabilidad o distribución de probabilidad a la función:*

$$P : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$P(x) = P[X = x] = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$$

Se verifica que:

1. $P(x) = 0$ si $x \notin \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.
2. $\displaystyle\sum_{x_i} P(x_i) = 1$.

En el ejemplo correspondiente al lanzamiento de la moneda:

$P(0) = P(X = 0) = P(\{\omega_4\}) = \frac{1}{4}$
$P(1) = P(X = 1) = P(\{\omega_2\}) + P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{2}$
$P(2) = P(X = 2) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4}$
$P(x) = P(X = x) = P(\emptyset) = 0$ si $x \notin \{0, 1, 2\}$

Definición 3.2.2.– *Dada una variable aleatoria discreta que toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ con $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$, se define la función de distribución asociada a X como:*

$$F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$
$$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} P(x_i)$$

La función de distribución asociada a la variable aleatoria descrita en el ejemplo 1 es:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Propiedades: Si F_X es la función de distribución asociada a una variable aleatoria X,

1. F_X es escalonada y los puntos de salto son los x_i.
2. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
3. F_X es no decreciente, esto es, si $x \leq y$ entonces $F_X(x) \leq F_X(y)$.
4. F_X es continua por la derecha.

3.3 Variables aleatorias continuas

Definición 3.3.1.– *Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es función de densidad de alguna variable aleatoria continua X si cumple*

1. $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

   Además, para esa variable se verifica que

3. $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$ *para* $a, b \in \mathbb{R}$.

Nota: Si X es una variable aleatoria continua se verifica que $P(X = x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Por tanto, no tiene sentido el cálculo de la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un determinado valor, sino que se trabaja con intervalos.

Definición 3.3.2.– *Dada una variable aleatoria continua X y f_X su función de densidad, se define la función de distribución de X como:*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

Nota: como ya hemos dicho, si una variable aleatoria X es continua se verifica que $P[X = x] = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, y por tanto $P[X < x] = P[X \leq x] = F_X(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Propiedades: La función de distribución F_X de una variable aleatoria continua X verifica

1. $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0 \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
2. $P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$.
3. F_X es no decreciente y además es continua.
4. $F'_X(x) = f_X(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ tal que f_X es continua en x.

3.4 Características asociadas a una variable aleatoria

Definición 3.4.1.– *Si X es una variable aleatoria* **discreta** *que toma los valores $x_1, x_2, x_3, \ldots$ se define la* **media o esperanza** *de X como:*

$$\mu_X = E[X] = \sum_{i \geq 1} x_i P[X = x_i]$$

Si X es continua, se define como:

$$\mu_X = E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

Si X es una variable aleatoria y $g(X)$ una función de dicha variable, se define la esperanza de $g(X)$ como:

$$E[g(X)] = \sum_{i\geq 1} g(x_i)P[X = x_i] \qquad \text{si } X \text{ es discreta.}$$

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx \qquad \text{si } X \text{ es continua.}$$

Propiedades:

1. $E[X + a] = E[X] + a$.
2. $E[aX] = aE[X]$.
3. $E[X + Y] = E[X] + E[Y]$.

Definición 3.4.2.– *Se define la varianza de una variable aleatoria X como:*

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum_{i\geq 1} (x_i - \mu_X)^2 \cdot P[X = x_i] \quad \textit{si } X \textit{ es discreta.}$$

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 \cdot f_X(x)dx \quad \textit{si } X \textit{ es continua.}$$

En ambos casos se verifica: $Var[X] = E[X^2] - \mu_X^2$. También se denota $Var[X] = \sigma_X^2$. A la raíz cuadrada positiva de la varianza se le denomina desviación típica y se denota por σ_X.

Propiedades:

1. $Var[X + a] = Var[X]$.
2. $Var[aX] = a^2Var[X]$.
3. Si X e Y son independientes (ver definición 3.5.3) entonces $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$.

3.4.1 Modelos de distribuciones discretas

Modelo Uniforme Discreto

Se describen a través de este modelo los experimentos aleatorios con N posibles resultados todos ellos equiprobables.

Definición 3.4.3.– *Una variable aleatoria X se distribuye según un modelo uniforme discreto de parámetro N, y se denota por $X \sim U(N)$, si su función de probabilidad es*

$$P[X = k] = \begin{cases} \frac{1}{N} & \textit{si} \quad k \in \{1, 2, \cdots, N\} \\ \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases}$$

Proposición 3.4.4.– *Si $X \sim U(N)$, entonces $E[X] = \frac{N+1}{2}$ y $Var[X] = \frac{(N+1)(N-1)}{12}$.*

Modelo de Bernouilli

Definición 3.4.5.– *Un experimento de Bernouilli es aquel que sólo puede dar lugar a dos resultados: "éxito" (E), con probabilidad p o "fracaso" (F), con probabilidad $q = 1 - p$.*

Definición 3.4.6.– *Una variable aleatoria X se distribuye según un modelo de Bernouilli de parámetro p, y se escribe $X \sim Be(p)$, si su función de probabilidad viene dada por:*

$$P[X = k] = \begin{cases} p^k \cdot (1-p)^{1-k} & \text{si } k \in \{0, 1\} \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Usualmente se asocia el resultado *éxito* al valor 1 y *fracaso* al valor 0, esto es, $X(E) = 1$ y $X(F) = 0$.

Proposición 3.4.7.– *Si $X \sim Be(p)$, entonces $E[X] = p$ y $Var[X] = pq$.*

Modelo Binomial

Definición 3.4.8.– *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según un modelo $Be(p)$. La variable aleatoria $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ se distribuye según un modelo binomial de parámetros n y p, y se escribe $X \sim B(n, p)$.*

Puesto que cada X_i vale 0 en caso de fracaso y 1 en caso de éxito, X indica el número de éxitos obtenidos en una sucesión de n experimentos de Bernouilli.

Proposición 3.4.9.– *Si $X \sim B(n, p)$, entonces*

1. *La función de probabilidad de X es*

$$P[X = k] = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \cdot p^k \cdot q^{n-k} & \text{si} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\} \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. *$E[X] = np$ y $Var[X] = npq$.*

3. *Si $p < 0.5$ y $np > 5$ o bien $p > 0.5$ y $nq > 5$ entonces $F_X(x) = P[X \leq x]$ se puede aproximar por $F_Y(x) = P[Y \leq x]$, donde $Y \sim N(np, npq)$ (distribución normal de media np y varianza npq).*

Modelo Geométrico

Definición 3.4.10.– *Dada una sucesión de experimentos de Bernouilli con probabilidad de éxito p, definimos la variable aleatoria X como el número de realizaciones del experimento hasta obtener el primer éxito. Se dice que X se distribuye según un modelo geométrico de parámetro p, y se denota por $X \sim Ge(p)$.*

Proposición 3.4.11.– *Si $X \sim Ge(p)$, entonces*

1. *La función de probabilidad de X es*

$$P[X=k] = \begin{cases} q^{k-1}\cdot p & \text{si} \quad k \in \{1,2,\ldots,n,\ldots\} \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. $E[X] = \frac{1}{p}$ *y* $Var[X] = \frac{q}{p^2}$.

Modelo de Poisson

Definición 3.4.12.– *Una variable aleatoria X se distribuye según un modelo de Poisson de parámetro $\lambda > 0$, y se denota por $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si su función de probabilidad es*

$$P[X=k] = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & \text{si} \quad k \in \{0,1,2,\ldots\} \\ \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La distribución de Poisson representa un buen modelo para la distribución de probabilidad del número de ocurrencias de un fenómeno en un espacio de tiempo o una región del espacio; por ejemplo: número de avisos de averías que se recibe cada hora en el servicio técnico de un determinado aparato.

Proposición 3.4.13.– *Si $X \sim P(\lambda)$ entonces*

1. $E[X] = \lambda$ *y* $Var[X] = \lambda$.
2. *Si λ es grande (> 20) entonces $F_X(x) = P[X \leq x]$ se puede aproximar por $F_Y(x) = P[Y \leq x]$, donde $Y \sim N(\lambda, \lambda)$ (distribución normal de media λ y varianza λ).*
3. *Dadas $X_1, \ldots, X_n$ independientes con $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, entonces*

$$X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$$

3.4.2 Modelos de distribuciones continuas

Modelo Uniforme Continuo

Definición 3.4.14.– *Una variable aleatoria continua se distribuye según un modelo Uniforme continuo en el intervalo (a,b), y se denota por $X \sim U(a,b)$, si su función de densidad es constante dentro del intervalo, y nula fuera de él, esto es*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in (a,b) \\ \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Proposición 3.4.15.– *Si $X \sim U(a,b)$, entonces $E[X] = \frac{a+b}{2}$ y $Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$.*

VNIVERSITAS COMPLVTENSIS • SAPERE AVDE

Modelo Exponencial

Definición 3.4.16.– *Una variable aleatoria X se distribuye según un modelo exponencial de parámetro $\lambda > 0$, y se denota por $X \sim Exp(\lambda)$, si su función de densidad es*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & si \quad x > 0 \\ \\ 0 & en\ caso\ contrario \end{cases}$$

La distribución exponencial es de gran utilidad cuando se desea modelar el tiempo que transcurre entre las ocurrencias de un determinado fenómeno, por ejemplo: tiempo entre averías. Guarda una estrecha relación con el modelo de Poisson: si el número de veces que ocurre un fenómeno en un determinado intervalo de tiempo sigue una distribución de Poisson, entonces el tiempo entre ocurrencias de ese fenómeno sigue una distribución exponencial y viceversa.

Proposición 3.4.17.– *Si $X \sim Exp(\lambda)$, entonces $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ y $Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$.*

Modelo Normal

Es el modelo más importante de todos, ya que son muchos los fenómenos naturales y sociales que se ajustan a dicho modelo, y en otros casos en los que la variable no se ajusta a un modelo normal, ciertas funciones muestrales sí siguen dicha distribución.

Definición 3.4.18.– *Una variable aleatoria X se distribuye según un modelo Normal de media $\mu \in \mathbb{R}$ y varianza $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, y se denota por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ si su función de densidad es*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

El estudio de la función de densidad muestra una serie de propiedades de dicha función:

1. La curva es simétrica respecto a la recta vertical $x = \mu$.
2. Tiene un máximo en μ y puntos de inflexión en $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$.
3. Presenta la asíntota horizontal $y = 0$.
4. La densidad de probabilidad de X está concentrada en torno a μ y en el intervalo $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

Proposición 3.4.19.– *Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, entonces*

1. *$E[X] = \mu$ y $Var[X] = \sigma^2$.*
2. *$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$.*
3. *Dadas $X_1, \ldots, X_n$ independientes con $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, entonces*

$$b + a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \sim N(b + \sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2)$$

4. *Si $Z \sim N(0, 1)$ entonces $P[Z \leq a] = P[Z \geq -a]$, $\forall a \in \mathbb{R}$.*

3.5 Variables bidimensionales

Supongamos que en una población queremos estudiar dos características que vienen descritas por dos variables aleatorias X e Y. La observación conjunta de ambas características sobre cada individuo se traduce en una variable aleatoria bidimensional (X, Y) que es discreta (continua) si X e Y son discretas (continuas).

Si X e Y son discretas, denotaremos por $\{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ al conjunto de valores que puede tomar X y por $\{y_1, \ldots, y_j, \ldots\}$ al conjunto de valores que puede tomar Y.

Definición 3.5.1.– *Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta se define su función de probabilidad conjunta como:*

$$P_{X,Y}(x, y) = P[X = x; Y = y] \qquad \forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Propiedades: Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional discreta,

- Si $x \notin \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ o bien $y \notin \{y_1, \ldots, y_j, \ldots\}$, entonces $P[X = x; Y = y] = 0$.
- $\displaystyle\sum_{x_i, y_j} P[X = x_i; Y = y_j] = 1$.

Definición 3.5.2.– *Una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es función de densidad conjunta de alguna variable aleatoria bidimensional continua (X, Y) si cumple:*

1. $f(x, y) \geq 0\ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dydx = 1$.

   Además, para esa variable se verifica que

3. $P[a \leq X \leq b; c \leq Y \leq d] = \int_a^b \int_c^d f(x, y)dydx \qquad \forall\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Nota: Si (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional, se define su función de distribución conjunta como $F_{X,Y}(x, y) = P[X \leq x; Y \leq y]$ que posee propiedades similares a las que ya vimos para las funciones de distribución de variables aleatorias unidimensionales. El cálculo efectivo de dicha función de distribución conjunta dependerá del carácter discreto o continuo de la variable bidimensional, aunque no profundizaremos en este aspecto.

Definición 3.5.3.– *Dos variables X e Y son independientes si y sólo si*

$P[X = x; Y = y] = P[X = x] \cdot P[Y = y]$ *si X e Y son discretas.*

$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ *si X e Y son continuas.*

Propiedades: Si X e Y son independientes, entonces:

1. $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$.
2. $Var[X + Y] = Var[X] + Var[Y]$.

Los recíprocos no son, en general, ciertos.

V. a. discretas	Interpretación	Función de probabilidad	Esperanza y Varianza	Relación con otras variables
Bernouilli Be(p)	Experimento aleatorio con dos posibles resultados: E, F. P(E) = p ; P(F) =1-p = q	$P[X=k]= p^k q^{1-k}$ k=0,1	E[X]= p Var[X]= pq	Si $X_1,...,X_n$~Be(p) independientes, entonces $X_1+...+X_n$~B(n,p)
Binomial B(n,p)	Número de éxitos en la realización de *n* experimentos de Bernouilli independientes	$P[X=k]=\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ k=0,1,...n	E[X]= np Var[X]= npq	Si p<0.5 y np>5 o bien p>0.5 y nq>5 se puede aproximar por N(np, npq)
Geométrica Ge(p)	Número de ensayos hasta la obtención del primer éxito en una sucesión de experimentos de Bernouilli.	$P[X=k]=q^{k-1}p$ k=1,2,3,...	E[X]= 1/p $Var[X]=q/p^2$	---------------
Poisson P(λ)	Número de ocurrencias de un fenómeno en un intervalo de tiempo o región del espacio.	$P[X=k]=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ k=0,1,2,3,...	E[X]= λ Var[X]= λ	Si λ es grande (>20), se puede aproximar por N(λ, λ) Si X_1~P(λ_1) y X_2~P(λ_2) independientes, entonces X_1+X_2~P($\lambda_1+\lambda_2$)
Uniforme discreta U(N)	Experimento aleatorio con N posibles resultados equiprobables	P[X=k]=1/N k=1,2,...,N	E[X]= (N+1)/2 Var[X]= (N+1)(N-1)/12	----------------

V.a. continuas	Interpretación	Función de densidad	Esperanza y Varianza	Relación con otras variables
Uniforme U(a,b)	Densidad de probabilidad repartida uniformemente en el intervalo (a,b)	f(x) = 1/(b-a) $x \in (a,b)$	$E[X]=\frac{a+b}{2}$ $Var[X]=\frac{(b-a)^2}{12}$	---------------
Normal N(μ,σ^2)	Densidad de probabilidad concentrada en torno a μ y en el intervalo ($\mu-3\sigma, \mu+3\sigma$)	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$ $\forall x \in R$	E[X]= μ Var[X]= σ^2	$\frac{X-\mu}{\sigma}$ ~ N(0,1) Si X_1~N(μ_1, σ_1^2) y X_2~N(μ_2, σ_2^2) independientes, entonces aX_1+bX_2+c ~ N($a\mu_1 + b\mu_2+c$, $a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$)
Exponencial Exp(λ)	Tiempo entre ocurrencias de un determinado fenómeno	f(x) = $\lambda e^{-\lambda x}$ x > 0	$E[X]=\frac{1}{\lambda}$ $Var[X]=\frac{1}{\lambda^2}$	----------------