

Capítulo 5

Métodos de integración

1. Resuelve las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \int (x^3 - 2x^2 + 3x - 7) dx, & \text{b)} \quad \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x\sqrt{x}} + 2 \right) dx, \quad \text{c)} \quad \int \left(x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx, \\ \text{d)} & \int 3e^{2x} dx, & \text{e)} \quad \int \cos(a + bx) dx, \quad \text{f)} \quad \int \frac{1}{\cos^2(7x)} dx, \\ \text{g)} & \int \sin x \cos(2x) dx, & \text{h)} \quad \int \tan 4x dx, \quad \text{i)} \quad \int \frac{5x^2 - 3}{x^2 + 1} dx, \end{array}$$

2. Resuelve las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \int \tan x \sec^2 x dx, & \text{b)} \quad \int \sin^2 x \cos x dx, \quad \text{c)} \quad \int \cos^2 x dx, \\ \text{d)} & \int \frac{1}{1 + 2x^2} dx, & \text{e)} \quad \int \frac{e^x}{3 + 4e^x} dx, \quad \text{f)} \quad \int \sqrt{1 + \cos x} dx \end{array}$$

3. Resuelve por sustitución las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx, & \text{b)} \quad \int \frac{1}{\sqrt{4 - (x + 2)^2}} dx, \quad \text{c)} \quad \int x\sqrt{x^2 + 1} dx, \\ \text{d)} & \int \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 3}} dx, & \text{e)} \quad \int \frac{\sin(2x)}{(1 + \cos(2x))^2} dx, \quad \text{f)} \quad \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx, \\ \text{g)} & \int \frac{\sqrt{\tan x + 1}}{\cos^2 x} dx, & \text{h)} \quad \int \frac{\ln x}{x} dx, \quad \text{i)} \quad \int \frac{x^7 + 3x^3}{1 + x^8} dx, \\ \text{j)} & \int \sqrt{1 - x^2} dx. \end{array}$$

4. Resuelve por partes las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \int (x^2 + 1) \sin x dx, & \text{b)} \quad \int x^2 \sin(3x) dx, \quad \text{c)} \quad \int x \cos^2 x dx, \\ \text{d)} & \int \ln x dx, & \text{e)} \quad \int e^{2x} \sin x dx. \end{array}$$

5. Resuelve las siguientes integrales racionales:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & \int \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 7}{3x - 1} dx, \quad \text{b)} \quad \int \frac{2x - 1}{(x - 1)(x - 2)} dx, \\
 \text{c)} & \int \frac{3x + 2}{x(x + 1)^3} dx, \quad \text{d)} \quad \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx, \\
 \text{e)} & \int \frac{1}{2x^2 - 2x + 1} dx, \quad \text{f)} \quad \int \frac{5x + 6}{4x^2 + 4x + 5} dx, \\
 \text{g)} & \int \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 5}{x^2 + 4x + 5} dx, \quad \text{h)} \quad \int \frac{3x - 7}{x^3 + x^2 + 4x + 4} dx, \\
 \text{i)} & \int \frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x^2 + 2)^2} dx, \quad \text{j)} \quad \int \frac{2x^5 - 11x^3 + 17x^2 - 10x + 3}{2x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 4x + 1} dx, \\
 \text{k)} & \int \frac{3x^2 + 5x + 2}{(x - 1)^3} dx, \quad \text{l)} \quad \int \frac{3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} dx \text{ (mét. de Hermite)}.
 \end{array}$$

6. Resuelve las siguientes integrales trigonométricas:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & \int \sin^3 x dx, & \text{b)} \quad \int \sin^5 x \cos^2 x dx, \quad \text{c)} \quad \int \sin^3 x \cos^5 x dx, \\
 \text{d)} & \int \sin^4 x \cos^2 x dx, & \text{e)} \quad \int \sin x \cos(2x) \cos(3x) dx, \quad \text{f)} \quad \int \frac{\cos^3 x}{1 + \sin^2 x} dx, \\
 \text{g)} & \int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x} dx, & \text{h)} \quad \int \frac{1}{1 - \sin x + \cos x} dx, \quad \text{i)} \quad \int \sqrt{1 - \cos x} dx.
 \end{array}$$

7. Resuelve las siguientes integrales:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a)} & \int \frac{4^x + 5 \cdot 16^x}{1 + 16^x} dx \text{ (exponencial)}, \quad \text{b)} \quad \int \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} dx \text{ (irracional)}, \\
 \text{c)} & \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x}} dx \text{ (irracional)}, \quad \text{d)} \quad \int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} dx \text{ (sust. trigonométrica)}, \\
 \text{e)} & \int \sqrt{9+x^2} dx, \quad \text{f)} \quad \int \sqrt{x^2-2} dx \text{ (sust. trigonométrica)}, \\
 \text{g)} & \int \frac{(1+x)^{-\frac{3}{4}}}{x} dx, \quad \text{h)} \quad \int \frac{1}{x^4 \sqrt{1+x^3}} dx \text{ (binómica)}, \\
 \text{i)} & \int \frac{1}{x \sqrt{x^2+x+2}} dx, \quad \text{j)} \quad \int \frac{1}{\sqrt{2x^2+4x+3}} dx [R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})].
 \end{array}$$

8. Resuelve las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & \int \frac{1}{\sqrt{1-3x^2}} dx, & \text{b)} \quad \int \frac{1}{4+x^2} dx, \quad \text{c)} \quad \int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx, \\
 \text{d)} & \int \frac{x}{x^4+a^4} dx, & \text{e)} \quad \int (e^{5t} - 2^{3t}) dt, \quad \text{f)} \quad \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx, \\
 \text{g)} & \int \frac{1}{\sqrt{3-5x^2}} dx, & \text{h)} \quad \int x \sqrt{2-x^2} dx, \quad \text{i)} \quad \int \frac{\cos x}{a^2 + \sin^2 x} dx,
 \end{array}$$

9. Resuelve las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll}
 \text{a)} & \int \frac{1}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}} dx, & \text{b)} \quad \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx, \quad \text{c)} \quad \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx, \\
 \text{d)} & \int \frac{x - \arctan x}{1 + x^2} dx, & \text{e)} \quad \int x \arctan x dx, \quad \text{f)} \quad \int \ln(1-x) dx, \\
 \text{g)} & \int \frac{\arcsen x}{x^2} dx, & \text{h)} \quad \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx, \quad \text{i)} \quad \int \frac{7x+1}{6x^2+x-1} dx.
 \end{array}$$

10. Resuelve las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \int \frac{3x-1}{x^2-x+1} dx, & \text{b)} \quad \int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx, & \text{c)} \quad \int \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)} dx, \\ \text{d)} & \int \frac{x^2-5x+8}{x^3+2x} dx, & \text{e)} \quad \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx, & \text{f)} \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx, \\ \text{g)} & \int \frac{4}{x^4+1} dx, & \text{h)} \quad \int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^3} dx, & \text{i)} \quad \int \sin^4 x \cos^4 x dx, \end{array}$$

11. Resuelve las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \int \cos \frac{x}{2} \cos(5x) dx, & \text{b)} \quad \int \frac{1}{4-5 \sin x} dx, & \text{c)} \quad \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx, \\ \text{d)} & \int \frac{\sin(2x)}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx, & \text{e)} \quad \int \frac{1}{\sqrt[3]{\tan x}} dx, & \text{f)} \quad \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-x+3}} dx, \\ \text{g)} & \int \sqrt{\frac{2+3x}{x-3}} dx, & \text{h)} \quad \int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}} dx. \end{array}$$

Soluciones de algunos ejercicios propuestos.

1.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 7x + c, & \text{b)} \quad 2x - \frac{8}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + c, & \text{c)} \quad \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}\sqrt{x^2} + c, \\ \text{d)} & \frac{3}{2}e^{2x} + c, & \text{e)} \quad \frac{1}{b} \sin(a+bx) + c, & \text{f)} \quad \frac{1}{7} \tan 7x + c, \\ \text{g)} & \frac{1}{2} \cos x + c, & \text{h)} \quad -\frac{1}{4} \ln(\cos 4x) + c, & \text{i)} \quad 5x - 8 \arctan x + c, \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \frac{1}{2 \cos^2 x} + c, & \text{b)} \quad \frac{1}{3} \sin^3 x + c, & \text{c)} \quad \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x) + c, \\ \text{d)} & \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \sqrt{2}x + c, & \text{e)} \quad \frac{1}{4} \ln(3+4e^x) + c, & \text{f)} \quad 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} + c. \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \frac{2}{3} \ln x \sqrt{\ln x} + c, & \text{b)} \quad \arcsen \frac{x+2}{2} + c, & \text{c)} \quad \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} + c, \\ \text{d)} & \frac{1}{2} \sqrt{2x^2+3} + c, & \text{e)} \quad \frac{1}{1+\cos(2x)} + c, & \text{f)} \quad \frac{1}{2}(\arcsen x)^2 + c, \\ \text{g)} & \frac{2}{3}(\tan x + 1)\sqrt{\tan x + 1} + c, & \text{h)} \quad \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c, & \text{i)} \quad \frac{1}{8} \ln(1+x^8) + \frac{3}{4} \arctan x^4 + c, \\ \text{j)} & \frac{1}{2}(\arcsen x + x\sqrt{1-x^2}) + c. \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (-x^2+1) \cos x + 2x \sin x + c, & \text{b)} \quad \frac{1}{3}[(-x^2+\frac{2}{9}) \cos(3x) + \frac{2}{9}x \sin(3x)] + c, \\ \text{c)} & \frac{1}{4}(x^2+x \sin(2x) + \frac{1}{2} \cos(2x)) + c, & \text{d)} \quad x(-1+\ln x) + c, \\ \text{e)} & \frac{1}{5}e^{2x}(2 \sin x - \cos x) + c. \end{array}$$

5.

- a) $\frac{1}{9}x^3 - \frac{5}{18}x^2 + \frac{22}{27}x - \frac{167}{81}\ln|3x-1| + c,$
b) $\ln \frac{(x-2)^3}{x-1} + c,$
c) $2\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c,$
d) $\frac{1}{2}\arctan \frac{x+1}{2} + c,$
e) $\arctan(2x-1) + c,$
f) $\frac{5}{8}\ln(4x^2+4x+5) + \frac{7}{8}\arctan(x+\frac{1}{2}) + c,$
g) $\frac{1}{2}x^2 - 6x + 11\ln(x^2+4x+5) - 19\arctan(x+2) + c,$
h) $-2\ln|x+1| + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan \frac{x}{2} + c,$
i) $\frac{2}{9}\ln|x-1| - \frac{1}{9}\ln(x^2+2) + \frac{x-2}{12(x^2+2)} - \frac{5\sqrt{2}}{72}\arctan \frac{\sqrt{2}}{2}x + c,$
j) $\frac{1}{2}x^2 + 3x - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 2\arctan(2x-1) + \frac{1}{2}\ln(2x^2-2x+1) + c,$
k) $3\ln|x-1| - \frac{11}{x-1} - \frac{5}{(x-1)^2} + c,$
l) $-\frac{x}{x^2+1} + 2\arctan x + c.$

6.

- a) $-\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c,$
b) $-\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + c,$
c) $\frac{1}{8}\cos^8 x - \frac{1}{6}\cos^6 x + c,$
d) $-\frac{1}{48}\operatorname{sen}^3(2x) - \frac{1}{64}\operatorname{sen}(4x) - \frac{1}{24}x + c,$
e) $-\frac{1}{24}\cos(6x) + \frac{1}{16}\cos(4x) - \frac{1}{8}\cos(2x) + c,$
f) $-\operatorname{sen} x + 2\arctan(\operatorname{sen} x) + c,$
g) $\frac{1}{7}\tan^7 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + c,$
h) $-\ln|1 - \tan \frac{x}{2}| + c,$
i) $-2\sqrt{2}\cos \frac{x}{2} + c.$

7.

- a) $\frac{1}{\ln 4} \left[\arctan 4^x + \frac{5}{2}\ln 1 + 16^x \right] + c,$
b) $2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6\ln(1 + \sqrt[6]{x+2}) + c,$
c) $-2\sqrt{\frac{x+1}{x}} + 2\ln(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}),$
d) $-4\sqrt{4-x^2} + \frac{1}{3}(\sqrt{4-x^2})^3 + c,$
e) $\frac{1}{2}x\sqrt{9+x^2} + \frac{9}{2}\ln(x + \sqrt{9+x^2}) + c,$
f) $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-2} + \ln(x - \sqrt{x^2-2}) + c,$
g) $\ln \left| \frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}+1} \right| - 2\arctan \sqrt[4]{1+x} + c,$
h) $\frac{1}{6}\ln \left| \frac{\sqrt{1+x^3}+1}{\sqrt{1+x^3}-1} \right| - \frac{\sqrt{1+x^3}}{3x^3} + c,$
i) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2+x+2} - \sqrt{2}}{x + \sqrt{x^2+x+2} + \sqrt{2}} \right| + c,$
j) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln \left(1 - x - \sqrt{x^2+2x+\frac{3}{2}} \right) + c.$

8.

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} & \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsen \sqrt{3}x + c, & \text{b)} \quad \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + c, & \text{c)} \quad \arcsen \frac{x}{3} + c, \\
\text{d)} & \frac{1}{2a^2} \arctan \frac{x^2}{a^2} + c, & \text{e)} \quad \frac{1}{5} e^{5t} - \frac{1}{3 \ln 2} 2^{3t} + c, & \text{f)} \quad \arcsen e^x + c, \\
\text{g)} & \frac{\sqrt{5}}{5} \arcsen \sqrt{\frac{5}{3}}x + c, & \text{h)} \quad -\frac{1}{3}(2-x^2)\sqrt{2-x^2} + c, & \text{i)} \quad \frac{1}{a} \arctan \frac{\sen x}{a} + c,
\end{array}$$

9.

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & \arcsen(\ln x) + c, & \text{b)} \quad \frac{2}{3}(1 + \ln x)\sqrt{1 + \ln x} + c, \\
\text{c)} & \frac{4}{3}(1 + \sqrt{x})\sqrt{1 + \sqrt{x}} + c, & \text{d)} \quad \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + c, \\
\text{e)} & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x^2 + 1) \arctan x + c, & \text{f)} \quad (x - 1) \ln(1 - x) - x + c, \\
\text{g)} & -\frac{1}{x} \arcsen x + \frac{1}{2} \ln(2 - x^2 - 2\sqrt{1 - x^2}) - \ln x + c, & \text{h)} \quad x \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} + c, \\
\text{i)} & \frac{1}{2} \ln(2x + 1) + \frac{2}{3} \ln(3x - 1) + c.
\end{array}$$

10.

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & \frac{3}{2} \ln(x^2 - x + 1) + \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + c, \\
\text{b)} & \arctan \ln x + c, \\
\text{c)} & \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{6} \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln|x + 1| + \frac{16}{3} \ln|x + 21| + c, \\
\text{d)} & 4 \ln|x| - \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{5\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + c, \\
\text{e)} & -\ln|x - 1| + \frac{3}{2} \ln(x^2 - 2x + 5) + \frac{1}{4} \arctan \frac{x - 1}{2} + c, \\
\text{f)} & -\frac{1}{3 \sen^3 x} + \frac{1}{\sen x} + c, \\
\text{g)} & \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left(\frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} \right) + \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x - 1) + \sqrt{2} \arctan(\sqrt{2}x + 1) + c, \\
\text{h)} & -\frac{3\sqrt{2} \arctan \left(\frac{\sqrt{2}x}{2} \right)}{64} - \frac{3x^3 + 16x^2 + 10x + 24}{32(x^2 + 2)^2} + c, \\
\text{i)} & -\cos^5 x \left[\frac{\sen^3 x}{8} + \frac{\sen x}{16} \right] + \frac{\sen x \cos^3 x}{64} + \frac{3 \sen x \cos x}{128} + \frac{3x}{128} + c, \\
\text{j)} & \frac{1}{11} \sen \frac{11x}{2} + \frac{1}{9} \sen \frac{9x}{2} + c, \\
\text{k)} & \ln \sqrt[3]{\frac{\tan \frac{x}{2} - 2}{2 \tan \frac{x}{2} - 1}} + c, \\
\text{l)} & x - \tan \frac{x}{2} + c, \\
\text{m)} & \arctan(\tan^2 x) + c, \\
\text{n)} & \frac{\sqrt{3}}{3} \ln \frac{x - \sqrt{x^2 - x + 3} + \sqrt{3}}{-x + \sqrt{x^2 - x + 3} + \sqrt{3}} + c.
\end{array}$$