

Capítulo 1

Números complejos-Problemas

Números complejos en forma binómica y polar. Módulo de complejos.

1. Dados $Z_1 = 2 + 4i$, $Z_2 = 3 - i$, $Z_3 = 1 + 2i$, hallar $(Z_1 + Z_2)^2 - \frac{Z_2}{Z_3}$
2. Calcular $\frac{1-Z}{1+Z}$, siendo $Z = \cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)$
3. Hallar el valor de $m \in \mathbb{R}$ para que $Z = \frac{1+mi}{m+i}$ verifique:
a) $\operatorname{Re}(Z) = 0$, b) $\operatorname{Im}(Z) = 0$, c) $|Z| = 1$, d) Z esté en la bisectriz del segundo cuadrante.
4. Hallar los números complejos cuya suma es 3 y cuyo cociente es imaginario puro, sabiendo que el módulo del dividendo es la mitad que el del divisor. Encontrar todas las soluciones.
5. Sabiendo que el complejo $(1 + i + i^2 + \dots + i^{22})(3 + ki)$ tiene módulo 5, hallar razonadamente el valor del número real k .
6. Dado un número complejo $Z_1 \neq 0$, hállese todos los complejos $Z \neq Z_1$ para los que $Z_2 = \frac{Z + Z_1}{Z - Z_1}$ es:
a) real, b) imaginario puro.
7. Calcular el valor del número real $(1 + \sqrt{3}i)^n + (1 - \sqrt{3}i)^n$ siendo n un número natural.
8. Hallar dos números complejos sabiendo que la diferencia entre ambos es real, la suma tiene parte real 8, y su producto es $11 - 16i$.
9. Demuestra que $\overline{iz} = -i\bar{z}$

Lugares geométricos.

10. Indicar la región del plano que satisface cada una de las siguientes condiciones:
a) $|Z - 1| + |Z + 1| < 2$, b) $|Z - 2| - |Z + 2| > 3$, c) $|Z| = \operatorname{Re}(Z) + 1$,
d) $|Z - 5| = |Z - i|$, e) $|Z - 4| > 1$, f) $\operatorname{Im}(Z) \geq 2$,
g) $0 < \operatorname{Re}(iZ) < 1$.

11. Hallar y describir el conjunto de todos los números complejos tales que:

$$\text{a) } \frac{1}{Z} + \frac{1}{\bar{Z}} = 1, \quad \text{b) } \left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| \leq 1$$

12. ¿Qué lugar geométrico determinan los puntos Z , tales $\left| \frac{1-Z}{1+Z} \right| = p$ siendo $p > 0$ y $p \neq 1$? ¿Y si $p = 1$?

13. Hallar las coordenadas de los vértices de un cuadrado, inscrito en una circunferencia centrada en el origen, sabiendo que uno de los vértices es el número complejo $1 + 2i$.

Raíces, exponenciales, logaritmos y potenciación compleja.

14. Calcular el valor de los siguientes complejos:

$$\text{a) } \sqrt[3]{-2+2i}, \quad \text{b) } (1+i)^{-3i}, \quad \text{c) } \sqrt[5]{(1+i)^3}, \quad \text{d) } \frac{1}{\sqrt[4]{-16i}}.$$

15. Hallar los siguientes logaritmos complejos, indicando sus valores principales:

$$\text{a) } \ln(4), \quad \text{b) } \ln(-2), \quad \text{c) } \ln(-i), \quad \text{d) } \ln(2-3i).$$

16. Obtener la suma y el producto de las raíces n -ésimas de la unidad.

17. Calcula y representa los afijos de las raíces cúbicas de $\frac{2i^9+i^{-7}}{3i}$. Expresar el resultado en forma binómica.

18. Hallar el argumento del complejo Z que tenga módulo 1, siendo

$$Z = (1+i)^{\left(\frac{9\pi}{4} + i \ln \sqrt{2}\right)}.$$

19. Calcular $Z = \ln \sqrt{t}$ siendo t un número complejo de módulo 1 y que verifica $\frac{t}{1+\sqrt{3}i} \in \mathbb{R}$.

20. Utilizando la fórmula de Moivre, hallar en función de $\cos x$ y $\sin x$:

$$\text{a) } \sin 5x, \quad \text{b) } \cos 7x.$$

21. Los afijos de Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 y Z_6 son los vértices consecutivos de un hexágono regular. Sabiendo que $Z_1 = 0$ y $Z_4 = 4 + 6i$, hallar los restantes vértices.

22. Expresar en forma binómica $z = ie^{(i\frac{7\pi}{4})}$

Soluciones de algunos de los problemas propuestos.

1.- $\frac{79 + 157i}{5}$

2.- $\frac{-\sin \theta}{1 + \cos \theta} i.$

3.-a) $m = 0$; b) $m = \pm 1$; c) $\forall m \in \mathbb{R}$; d) $m = -1 \pm \sqrt{2}$.

4.- $Z_1 = \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i, Z_2 = \frac{12}{5} - \frac{6}{5}i; Z'_1 = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i, Z'_2 = \frac{12}{5} + \frac{6}{5}i.$

5.- $k = \pm 4.$

7.- $2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{3}$.

10.- a) Imposible, b) Zona interior de la hipérbola $\frac{x^2}{\frac{9}{4}} - \frac{y^2}{\frac{7}{4}} = 1$, e) Exterior de la circunferencia de centro $(4, 0)$ y radio 1.

12.- Circunferencias de centro $\left(\frac{1+p^2}{1-p^2}, 0\right)$ y radio $r = \frac{2p}{1-p^2}$.

16.- $S = 0$, $P = \pm 1$ según sea n par o impar.

18.- $\alpha = (\ln \sqrt{2})^2 + \frac{81\pi^2}{16}$.