Capítulo 6

Integrales impropias

Integrales de primera especie.

1. Calcula las siguientes integrales:

$$\mathbf{a)}\quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx, \quad \mathbf{b)}\quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^3}\,dx, \quad \mathbf{c)}\quad \int_3^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

2. Discute la convergencia de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$ en función de p.

3. Calcula las siguientes integrales:

$$\mathbf{a)}\quad \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{-3x}\,dx, \quad \mathbf{b)}\quad \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{-x}\,dx, \quad \mathbf{c)}\quad \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{\frac{1}{2}x}\,dx.$$

4. Discute la convergencia de $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathbf{e}^{-px}\,dx$ en función de p.

5. Calcula el área de la región comprendida entre la *curva de Agnesi* $y = \dfrac{a^3}{x^2+a^2}$ y el eje x $(a > 0)$.

6. Calcula las siguientes integrales:

$$\mathbf{a)}\quad \int_0^{\infty} x\cos x\,dx, \qquad \mathbf{b)}\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx, \qquad \mathbf{c)}\quad \int_0^{\infty} \lambda\mathbf{e}^{-\lambda x}\,dx, \lambda > 0,$$

$$\mathbf{d)}\quad \int_0^{\infty} \lambda x\mathbf{e}^{-\lambda x}\,dx, \lambda > 0, \quad \mathbf{e)}\quad \int_0^{\infty} \mathbf{e}^{-x}\operatorname{sen} x\,dx.$$

Integrales de segunda especie.

7. Calcula las siguientes integrales:

$$\mathbf{a)}\quad \int_0^{1} \ln x\,dx, \quad \mathbf{b)}\quad \int_0^{1} \frac{1}{x}\,dx, \quad \mathbf{c)}\quad \int_0^{3} \frac{1}{x^2}\,dx.$$

8. Estudia la convergencia de $\displaystyle\int_a^{b} \frac{1}{(b-x)^{\alpha}}\,dx$ para los distintos valores de α.

9. Calcula las integrales:

$$\mathbf{a)}\quad \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx, \quad \mathbf{b)}\quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \mathbf{c)}\quad \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^4}\,dx, \quad \mathbf{d)}\quad \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx.$$

Soluciones de los problemas propuestos.

1.- a) ∞, b) $\frac{1}{2}$, c) ∞.

2.- ∞ si $p \leq 1$, $\frac{1}{p-1}$ si $p > 1$.

3.- a) $\frac{1}{3}$, b) 1, c) ∞.

4.- $\frac{1}{p}$ si $p > 0$, ∞ si $p \leq 0$.

5.- πa^2.

6.- a) no existe, b) π, c) 1, d) $\frac{1}{\lambda}$, e) $\frac{1}{2}$.

7.- a) -1, b) ∞, c) ∞.

8.- ∞ si $\alpha \geq 1$, $\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$.

9.- a) 2, b) π, c) ∞, d) $-\ln 2$.