1º *a)* Hallar los valores de α que hacen que el sistema $\begin{cases} -8x + \qquad 2y + 5z = 18 \\ -8x + (\alpha-2)y + 5z = 13 \\ -4x + \qquad y + \alpha z = 9 \end{cases}$ sea compatible. [1p]

b) Usar la descomposición LU para resolver dicho sistema en el caso $\alpha = 5$. [1p]

2º En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios $\mathcal{M} = \Big\langle (3,-1,0,1),(0,-1,2,1) \Big\rangle$ y $\mathcal{N} \equiv \begin{cases} 2x + 6y + 3z \qquad = 0 \\ \qquad 2y \qquad - t = 0 \end{cases}$

a) Hallar unas ecuaciones implícitas de $\mathcal{M}$ y unas ecuaciones paramétricas de $\mathcal{N}$. [1p]

b) Dada la base $\mathfrak{B} = \{(2,-1,1,-1),(0,1,2,-2),(0,0,-3,2),(0,0,0,2)\}$, hallar unas ecuaciones implícitas de $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ referidas a dicha base. [1p]

3º La aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ está representada en la base canónica por la matriz $\begin{pmatrix} \beta & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Hallar β y una base de $Ker(f)$ sabiendo que $\dim\big(Ker(f)\big) = 1$. [1p]

b) Dado el subespacio $\mathcal{H} \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -3x + y + z = 0 \end{cases}$, hallar unas ecuaciones implícitas de $f(\mathcal{H})$. [1p]

4º En un ecosistema conviven zorros y gallinas. Llamaremos Z_n y G_n, respectivamente, al número de zorros y gallinas en el mes n-ésimo. Las poblaciones de zorros y gallinas están relacionadas por las ecuaciones

$$\begin{cases} Z_{n+1} = 0,6 \cdot Z_n + 0,5 \cdot G_n \\ G_{n+1} = -0,16 \cdot Z_n + 1,2 \cdot G_n \end{cases}$$

`Observe el significado de las ecuaciones: si no hubiera gallinas, el 40% de los zorros moriría cada mes y si no hubiera zorros, las gallinas crecerían a un ritmo de un 20% mensual. Por otro lado, cada zorro consume 0,16 gallinas/mes y el crecimiento de la población de zorros es proporcional` $(k = 0,5)$ `a la población de gallinas.`

Inicialmente, hay 100 zorros y 1000 gallinas. Probar que, a largo plazo, las poblaciones de zorros y gallinas tienden a estabilizarse en una población constante y hallar las cantidades de cada especie que habrá en dicha posición de equilibrio. [2p]

5º *a)* Usar el algoritmo de Euclides generalizado para hallar una solución particular de la ecuación diofántica $247\,x + 91\,y = 169$ y, a continuación, hallar la solución general de dicha ecuación. [1p]

b) Resolver la ecuación $16\,x \equiv 14 \pmod{26}$. [1p]

1º *a)* Hallar los valores de α que hacen que el sistema $\begin{cases} -8x + 2y + 5z = 18 \\ -8x + (\alpha-2)y + 5z = 13 \\ -4x + y + \alpha z = 9 \end{cases}$ sea compatible. [1p]

b) Usar la descomposición LU para resolver dicho sistema en el caso $\alpha = 5$. [1p]

SOLUCIÓN:

Apartado *a)* 1p

Una de las formas de abordar el problema (no la única), es ver qué valores de α anulan el determinante de la matriz de coeficientes. Para valores distintos de los hallados, el sistema será compatible y determinado y los casos en los que se anule el determinante, se estudian por separado.

$$\begin{vmatrix} -8 & 2 & 5 \\ -8 & \alpha-2 & 5 \\ -4 & 1 & \alpha \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} F_2 \mapsto F_2 - F_1 \\ F_3 \mapsto F_3 - \frac{1}{2}F_1 \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} -8 & 2 & 5 \\ 0 & \alpha-4 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha-\frac{5}{2} \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} \alpha-4 & 0 \\ 0 & \alpha-\frac{5}{2} \end{vmatrix} = -8(\alpha-4)(\alpha-\tfrac{5}{2})$$

– Si $\alpha \neq 4$ y $\alpha \neq \frac{5}{2}$ el sistema es compatible determinado (solución única).

– Si $\alpha = 4$, basta observar la primera y segunda ecuación para ver que el sistema es incompatible.

– Si $\alpha = \frac{5}{2}$, la primera y tercera ecuación son proporcionales. El sistema es compatible indeterminado.

Apartado *b)* 1p

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ -8 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 \mapsto F_3 - \frac{1}{2}F_1]{F_2 \mapsto F_2 - F_1} \begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \Longrightarrow L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema queda:

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ -8 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Haciendo ahora el cambio de variables:

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 13 \\ 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} r = 18 \\ s = 13 - r = -5 \\ t = 9 - \frac{1}{2}r = 0 \end{cases}$$

Resolviendo ahora el sistema triangular superior que queda, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{8}(18 - 2y - 5z) = -3,5 \\ y = -5 \\ z = 0 \end{cases}$$

2º En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios $\mathcal{M} = \Big\langle (3,-1,0,1),(0,-1,2,1) \Big\rangle$ y $\mathcal{N} \equiv \begin{cases} 2x+6y+3z & = 0 \\ \quad 2y \quad\quad -t & = 0 \end{cases}$

a) Hallar unas ecuaciones implícitas de $\mathcal{M}$ y unas ecuaciones paramétricas de $\mathcal{N}$. [1p]

b) Dada la base $\mathfrak{B} = \{(2,-1,1,-1),(0,1,2,-2),(0,0,-3,2),(0,0,0,2)\}$, hallar unas ecuaciones implícitas de $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ referidas a dicha base. [1p]

SOLUCIÓN:

Apartado *a)* 1p

Ecuaciones implícitas de $\mathcal{M}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \mapsto F_3 - \frac{x}{3}\cdot F_1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \dfrac{x}{3}+y & z & -\dfrac{x}{3}+t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \mapsto F_3 + (\frac{x}{3}+y)\cdot F_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}x+2y+z & y+t \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 2x+6y+3z & = 0 \\ \quad\quad y \quad\quad +t & = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas de $\mathcal{N}$ son inmediatas pues podemos despejar z y t fácilmente:

$$\begin{cases} z = \frac{1}{3}(-2x-6y) \\ t = 2y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 3\alpha \\ y = \beta \\ z = -2\alpha - 2\beta \\ t = 2\beta \end{cases} \quad \text{Así pues, } \mathcal{N} = \Big\langle (3,0,-2,0),(0,1,-2,2) \Big\rangle$$

Apartado *b)* 1p

Es claro que $\mathcal{M}+\mathcal{N} = \Big\langle (3,-1,0,1),(0,-1,2,1),(3,0,-2,0),(0,1,-2,2) \Big\rangle$. Hallaremos las ecuaciones implícitas de $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ en la base canónica y luego las hallaremos en la base pedida.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \xrightarrow[\;]{\substack{F_3 \mapsto F_3 - F_1 \\ F_5 \mapsto 3\cdot F_5}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3x & 3y & 3z & 3t \end{pmatrix} \xrightarrow{\cancel{F_3}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 3x & 3y & 3z & 3t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\;]{\substack{F_3 \mapsto F_3 + F_2 \\ F_4 \mapsto F_4 - x\cdot F_1}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & x+3y & 3z & -x+3t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4 \mapsto F_4 + (x+3y)F_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2x+6y+3z & 3y+3t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4 \mapsto F_4 - (y+t)F_3} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2x+6y+3z & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación implícita de $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ en la base canónica es $\boxed{2x+6y+3z=0}$

Llamaremos (x,y,z,t) un vector genérico expresado en la base canónica y (x',y',z',t') a ese mismo vector expresado en la base $\mathfrak{B}$. La ecuación del cambio de base es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Y la ecuación de $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ en la base canónica es:

$$(2,6,3,0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad $(*)$ por el vector fila de los coeficientes de la ecuación de $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ en la base canónica se tiene que:

$$0 = (2,6,3,0) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = (2,6,3,0) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = (1,12,-9,0) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

Así pues, la ecuación de $\mathcal{M}+\mathcal{N}$ en la base $\mathfrak{B}$ es $\boxed{x' + 12y' - 9z' = 0}$

3º La aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^3$ está representada en la base canónica por la matriz $\begin{pmatrix} \beta & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

a) Hallar β y una base de $Ker(f)$ sabiendo que $\dim\big(Ker(f)\big) = 1$. [1p]

b) Dado el subespacio $\mathcal{H} \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ -3x + y + z = 0 \end{cases}$, hallar unas ecuaciones implícitas de $f(\mathcal{H})$. [1p]

SOLUCIÓN:

Apartado *a)* 1p

Las columnas de la matriz de f son las coordenadas de los vectores imagen de la base canónica y como el núcleo tiene dimensión 1, el espacio imagen tiene dimensión 2. En otras palabras, el rango de la matriz de f es 2 y, en consecuencia, su determinante debe ser cero.

$$0 = \begin{vmatrix} \beta & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \{F_2 \mapsto F_2 + F_1\} = \begin{vmatrix} \beta & -1 & 1 \\ 2+\beta & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+\beta & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -5 - 3\beta \implies \boxed{\beta = -\frac{5}{3}}$$

Para hallar el núcleo, basta con resolver el sistema homogéneo formado por las dos últimas filas de la matriz de f pues seguro que la primera es combinación lineal de las dos últimas. Este sistema se resuelve muy fácilmente. El lector podrá comprobar que:

$$Ker(f) = \big\langle (3,1,6) \big\rangle$$

Apartado *b)* 1p

Cálculos sencillos demuestran que $\mathcal{H} = \big\langle (1,2,1) \big\rangle$. Por tanto:

$$f\big(\mathcal{H}\big) = \big\langle f(1,2,1) \big\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \big\langle (\tfrac{2}{3}, 1, -5) \big\rangle \implies \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 5y + z = 0 \end{cases}$$

4º En un ecosistema conviven zorros y gallinas. Llamaremos Z_n y G_n, respectivamente, al número de zorros y gallinas en el mes n-ésimo. Las poblaciones de zorros y gallinas están relacionadas por las ecuaciones

$$\begin{cases} Z_{n+1} = 0,6 \cdot Z_n + 0,5 \cdot G_n \\ G_{n+1} = -0,16 \cdot Z_n + 1,2 \cdot G_n \end{cases}$$

`Observe el significado de las ecuaciones: si no hubiera gallinas, el 40% de los zorros moriría cada mes y si no hubiera zorros, las gallinas crecerían a un ritmo de un 20% mensual. Por otro lado, cada zorro consume 0,16 gallinas/mes y el crecimiento de la población de zorros es proporcional (`$k = 0,5$`) a la población de gallinas.`

Inicialmente, hay 100 zorros y 1000 gallinas. Probar que, a largo plazo, las poblaciones de zorros y gallinas tienden a estabilizarse en una población constante y hallar las cantidades de cada especie que habrá en dicha posición de equilibrio. [2p]

SOLUCIÓN:

$$\begin{cases} Z_{n+1} = 0,6 \cdot Z_n + 0,5 \cdot G_n \\ G_{n+1} = -0,16 \cdot Z_n + 1,2 \cdot G_n \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} Z_1 \\ G_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -0,16 & 1,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ G_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} Z_n \\ G_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -0,16 & 1,2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} Z_0 \\ G_0 \end{pmatrix}$$

La cuestión es averiguar qué ocurre cuando $n \to +\infty$. Intentaremos primero diagonalizar la matriz.

$$0 = \left| \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -0,16 & 1,2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 0,6-\lambda & 0,5 \\ -0,16 & 1,2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1,8\lambda + 0,8 \implies \begin{cases} \lambda = 0,8 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Hallaremos una base formada por autovectores [¿Por qué sabemos que tal base existe?].

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -0,16 & 1,2 \end{pmatrix} - 0,8 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,2 & 0,5 \\ -0,16 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para proceder al cálculo de otro autovector, procedemos de forma similar.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -0,16 & 1,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,5 \\ -0,16 & 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso es $P = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y un cálculo sencillo muestra que $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Finalmente,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} Z_n \\ G_n \end{pmatrix} &= \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 0,6 & 0,5 \\ -0,16 & 1,2 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 100 \\ 1000 \end{pmatrix} = \lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (0,8)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 1000 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{5}{2} \\ -\frac{4}{5} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 1920 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5º *a)* Usar el algoritmo de Euclides generalizado para hallar una solución particular de la ecuación diofántica $247\,x + 91\,y = 169$ y, a continuación, hallar la solución general de dicha ecuación. [1p]

b) Resolver la ecuación $16\,x \equiv 14 \pmod{26}$. [1p]

SOLUCIÓN:

<u>Apartado *a)* 1p</u>

En primer lugar, hallaremos m.c.d.$(247, 91)$ con el algoritmo de Euclides generalizado.

$$\begin{aligned} 247 &= 91 \times 2 + 65 &\longrightarrow\quad 65 &= 247 \times 1 + 91 \times (-2) \\ 91 &= 65 \times 1 + 26 &\longrightarrow\quad 26 &= 65 \times (-1) + 91 \\ & & &= [247 \times 1 + 91 \times (-2)] \times (-1) + 91 \\ & & &= 247 \times (-1) + 91 \times 3 \\ 65 &= 26 \times 2 + 13 &\longrightarrow\quad 13 &= 26 \times (-2) + 65 \\ & & &= [247 \times (-1) + 91 \times 3] \times (-2) + [247 \times 1 + 91 \times (-2)] \\ & & &= 247 \times 3 + 91 \times (-8) \\ 26 &= 13 \times 2 \quad \boxed{\text{FIN}} & & \end{aligned}$$

Así pues, m.c.d.$(247, 91) = 13$ y dado que $13 \mid 169$, la ecuación original tiene solución. Además,

$$247 \times 3 + 91 \times (-8) = 13$$

Multiplicando la ecuación anterior por $\frac{169}{13} = 13$, obtenemos que:

$$247 \times (3 \times 13) + 91 \times (-8 \times 13) = 13 \times 13 = 169$$
$$247 \times 39 + 91 \times (-104) = 169$$

El par $\boxed{x_0 = 39\ ,\ y_0 = -104}$ es una solución particular.

Resolveremos ahora la ecuación homogénea.

$$274\,x + 91\,y = 0 \implies \frac{274}{13}\,x + \frac{91}{13}\,y = 19\,x + 7\,y = 0 \implies 19\,x = -7\,y \implies \boxed{x_h = -7n \quad y_h = 19n \quad n \in \mathbb{Z}}$$

La solución general de la ecuación diofántica original es:

$$\boxed{x = 39 - 7n \quad y = -104 + 19n \quad n \in \mathbb{Z}}$$

Apartado *b)* 1p

$$\begin{array}{rll}
16x \equiv 14 & (\text{mód } 26) & \\
2 \cdot 8x \equiv 2 \cdot 7 & (\text{mód } 2 \cdot 13) & \\
8x \equiv 7 & (\text{mód } 13) & 5 \cdot 8 = 40 = 13 \cdot 3 + 1 \\
5 \cdot 8x \equiv 5 \cdot 7 & (\text{mód } 13) & 5 \cdot 7 = 35 = 13 \cdot 2 + 9 \\
x \equiv 9 & (\text{mód } 13) &
\end{array}$$

$$\boxed{x = 9 + 13n \quad n \in \mathbb{Z}}$$