Estrella de Steiner en grafos
Prueba de la NP-completitud

SOFÍA ALMEIDA BRUNO,
PABLO ÁLVAREZ CABRERA
Universidad de Granada
1 de junio de 2019

Descripción del problema

El problema de la estrella de Steiner en grafos, al que nos referiremos como ES, se define de la siguiente forma:

Dado un grafo $G = (V, E)$, un subconjunto $R \subseteq V$ y un entero positivo $K \leq V - 1$, £existe un subárbol de G que contiene todos los vértices de R y que no contiene más de K arcos?

NP-completitud

En primer lugar veremos que está en NP. Después, definiremos una reducción del problema 3-SET al ES para probar que es NP-completo.

ES está en NP

El algoritmo sería el siguiente:

- Seleccionar de forma no determinista un subgrafo, esto es, elegir un subconjunto de nodos y otro de aristas.
- Comprobar que el subgrafo es un árbol. Esto se puede hacer viendo que no contiene ciclos y que es conexo, lo cual se puede hacer en tiempo polinómico.

- Verificar que contiene a los nodos de R.
- Ver que el subgrafo no contiene más de K arcos.

Si existe una estrella de Steiner en el grafo, el algoritmo anterior devuelve "SÍ" para un cierto subgrafo. En caso de no existir, el algoritmo devuelve siempre "NO".

Reducción 3-SET $\propto$ ES

Para la reducción vamos a considerar el problema del cubrimiento por conjuntos de tamaño tres (3-SET).

Una instancia de este problema vendrá dada por:

- Un conjunto finito $X = \{x_1, \ldots, x_{3q}\}$.
- Un subconjunto $C = \{C_1, \ldots, C_n\}$ de subconjuntos de X de 3 elementos.

La reducción se hará de la siguiente forma:

Queremos construir una entrada $(G = (V, E), R, K)$ para el problema ES a partir de una entrada (X, C) para el problema 3-SET.

- En el conjunto de vértices habrá un vértice por cada elemento de X, otro por cada elemento de C y un vértice al que llamaremos v.

$$V = \{x_1, \ldots, x_{3q}\} \cup \{c_1, \ldots, c_n\} \cup \{v\}$$

- Habrá una arista uniendo v con cada uno de los c_i y otra uniendo cada c_i con los elementos que contiene.

$$E = \{vc_1, \ldots, vc_n\} \cup (\bigcup_{x_j \in c_i} \{c_i x_j\})$$

- Consideremos $R = \{v, x_1, \ldots, x_{3q}\}$.
- Por último, $K = 4q$.

Esta reducción se puede hacer en espacio logarítmico, ya que nos limitamos a leer la entrada y escribir la salida sin volver atrás.

Veamos que si 3-SET tiene solución positiva, entonces ES también la tiene.

Sea C' un cubrimiento por conjuntos de X. Como $|X| = 3q$, C' tendrá $3q/3 = q$ subconjuntos. Supongamos que estos son $c_1, \ldots, c_q$. Consideramos el subgrafo dado por (V, E), donde $V = \{v, c_1, \ldots, c_q, x_1, \ldots, x_{3q}\}$ y $E = \{vc_1, \ldots, vc_q\} \cup (\bigcup_{x_j \in c_i} \{c_i x_j\})$ con $i = 1, \ldots, q$. Esta es la estrella de Steiner que resuelve el problema, ya que se trata de un árbol que contiene a los nodos de R y el número de aristas es $q + 3q = 4q = k$.

Finalizaremos viendo que si ES tiene una solución positiva, entonces 3-SET también la tiene.

Supongamos que existe un grafo de Steiner G con al menos $4q$ lados. Como G es un árbol no puede tener más de $4q + 1$ vértices. G contiene a v y $x_1, \ldots, x_{3q}$, luego no puede incluir más de q vértices c_i. Ahora observamos que para conectar con todos los nodos x_i debe haber al menos $4q + 1$ vértices, luego G contiene exactamente $4q$ aristas y q nodos c_i $(c_1, \ldots, c_q)$. La solución al problema 3-SET vendrá dada por los subconjuntos $C_1, \ldots, C_q$ asociados a los vértices $c_1, \ldots, c_q$.

Ejemplo

Veamos cómo funciona la reducción en un caso concreto.

Partimos del problema 3-SET dado por$X = \{x_1, \ldots, x_q\}$ y $C = \{C_1, \ldots, C_5\}$, donde $C_1 = \{x_2, x_5, x_7\}, C_2 = \{x_1, x_3, x_4\}, C_3 = \{x_6, x_8, x_9\}, C_4 = \{x_2, x_3, x_6\}$, $C_5 = \{x_7, x_8, x_9\}\}$. Este problema admite como solución $C' = \{C_1, C_2, C_3\}$.

La entrada de la reducción serían los conjuntos X, C y la salida, el grafo mostrado a continuación, $R = \{v, x_1, \ldots, x_9\}$, $K = 12$.