Лабораторная работа по теме LaTeX

Чувилов Александр. Группа М8О-113Б-23

18 февраля 2024 г.

Определение:

Сложная функция – это композиция двух и более функций. Сложную функцию можно задать формулой y=f (g (x)), где g (x)– внутренняя функция, f (t) – внешняя функция.

Термин «*сложная*» функция не является понятием сложности начертания или исследования, а указывает на вид или «конструкцию» функциональной зависимости.

Утверждение 3.3 Пусть $g : X \to Y, f : Y \to Z, h : X \to Z, h = f \circ g, h(x) = f(g(x)), X, Y, Z \subset R$

1. $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = y_0$

2. $\lim\limits_{y \to y_0} f(y) = A$

3. $\Rightarrow \exists \mathring{U} : \forall x \in \mathring{U}(x_0) g(x) \neq y_0$

$\to \exists \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = A$

◀ $\forall \{x_n\} : x_n \to_{n \to \infty} x_0 \to g(x_n) \to y_0 (g(x_n) \neq y_0)$,

$g(x_n) = y_n, y_n \to y_0$, в силу 2) по Гейне:

$f(y_n) \to_{n \to \infty} A \Leftrightarrow f(g(x_n)) \to_{n \to \infty} A \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(g(x)) = A$. ▶

Пример 3.3 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = ?$

Обозначим $g(x) = 5x \to 0, x \to 0; 5x \neq 0$ при $x \neq 0 f(y) = \frac{5 \sin y}{y} \to 5x \to 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} 5x = 0, \lim\limits_{y \to 0} f(y) = 5 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin 5y}{y} = 5$

Замечание 3.3. Условие 3 является существенными, так как без него теорема вообще говоря, не верна.

Пример 3.4.

$g(x) = 0, f(y) = |sgn(y)|, h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = 0$,

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0 = y_0, \lim\limits_{y \to 0} f(y) = 1 \neq \lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$, так как $g(x) = 0$ при $x \neq 0$ и условие 3 нарушено.

3.5 Пределы типа *e*

Число e является иррациональным и приблизительно равно 2,718. Это число принято за основание логарифмов, которые называют натуральными логарифмами и обозначают $ln(x)$.

Утверждение 3.4

1. $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

2. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)}{x} = 1$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{x-1}}{x} = 1$

◀ 1. $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^{n+1} = e$

$e \leftarrow (1 + \frac{1}{[x]+1})^{[x]} \leq (1 + \frac{1}{x})^x \leq (1 + \frac{1}{[x]})^{[x]+1} \to e \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$.

2. $\lim\limits_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$ при $y = \frac{1}{x}$.

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} ln(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to 0} lne = 1$

4. $g(x) = e^x - 1 \to 0, x \to 0$,

$f(y) = \frac{ln(1+y)}{y} \to 1, y \to 0 \Rightarrow f(g(x)) = \frac{x}{e^x - 1} \to 1, x \to 0$. ▶

Интеграл — математическое понятие, обратное процессу дифференцирования. Интеграл функции описывает площадь под её графиком в определенном интервале. Существует два основных вида интегралов: неопределенный и определенный.

1.Неопределённый интеграл.

Неопределённый интеграл функции $f(x)$ обозначается как:

$$\int f(x)dx$$

Он представляет семейство функций, производная которых равна заданной функции $f(x)$. В выражении $\int$ - символ интеграла, $f(x)$ - подынтегральная функция, а dx указывает переменную интегрирования.

Пример:

$\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C$, гду C - константа интегрирования. Результат означает, что производная функция $\frac{1}{3}x^3 + C$ равна x^2.

2.Определённый интеграл

Определенный интеграл функции $f(x)$ от a до b обозначается как

$$\int_b^a f(x)dx$$

Этот интеграл представляет собой численное значение площади под графиком функции в заданном интервале $[a, b]$.

Пример:

$\int_0^1 x^2dx$ - это означает, что площадь под графиком функции x^2 от 0 до 1 равна $\frac{1}{3}$.

Интегралы играют **важную** роль в математике и физике. Они используются для нахождения площадей под кривыми, объемов тел, центров масс, а также в решении дифференциальных уравнений. Определенные интегралы часто применяются для вычисления накопленных изменений величин.

Для примера рассмотрим интеграл $\int x^2dx$:

1. Сначала необходимо использовать формулу интегрирования для x^2, которая выглядит следующим образом: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где n - положительное число и C - константа.

2. В нашем случае $n = 2$. Подставляем x^2 вместо x и $n = 2$ в формулу: $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C$.

3. Далее упрощаем выражение, разделив x^3 на 3: $\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C = \frac{x*x^2}{3} + C$.

4. Теперь мы можем записать ответ: $x^2dx = (\frac{x}{3})x^2 + C$. Это и есть решение нашего интеграла.

5. Константу C обычно опускают, так как она не влияет на результат функции. Однако, она важна, если мы хотим найти первообразную функцию.

Решите примеры:

1.$\int \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-x}dx$
2.$\int_0^2(x^3 - x^2)dx$
3.$\int_{-2}^1(3 - 2x - x^2)dx$
4.$\int x(1 - 2x)^3dx$
5.$\int \frac{dx}{25-4x}$
6. $\int e^{\frac{x}{3}}dx$
7. $\int \cos\frac{\pi x}{3}dx$
8. $\int \sqrt{x+4}dx$
9. $\int \frac{\sinh(\tan x)}{\cos^2 x}dx$
10. $\int x * 2^{x^2}dx$
11. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-100}$
12. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$
13. $\int \sin 3x * \cos 5x dx$
14. $\int \tan^2 x dx$
15. $\int \frac{1}{x^2}\cosh\frac{1}{x}dx$