Лабораторная работа №22

Дмитрий Колесник

14 февраля 2024 г.

1 Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости

Полезным для дальнейшего является понятие колеба- ния функции f на отрезке [a, b]:

$$\omega(f,[a,b]) = \sup_{x\in[a,b]} f(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x).$$

В частном случае для краткости будем обозначать $\omega(f,[x_{k-1},x_k]) = \omega_k(f)$.

Пусть $M_k = \sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x),\ m_k = \inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$.

Суммы

$$S(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \bigtriangleup x_k, \qquad s(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \bigtriangleup x_k$$

называются соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу*, соответствующими разбиению T.

Свойство 1. При фиксированном разбиении T сум- мы Дарбу являются точными границами множества инте- гральных сумм.

Свойство 2. При добавлении точек деления нижняя сумма Дарбу разве лишь увеличивается, а верхняя разве лишь уменьшается.

Свойство 3. Пусть разбиение T' получено из разбиения T добавлением p точек деления и λT - мелкость разбиения T . Пусть M – верхняя граница функции f на $[a,b]$, m – ее нижняя граница. Тогда

$$S(T) - S(T') \le (M-m)p\lambda T.$$

Свойство 4. Пусть $I^* = \inf\limits_{T}\{S(T)\}$, а $I_* = \sup\limits_{T}\{S(T)\}$.

Тогда

$$I^* = \lim_{\lambda \to 0} S(T), \qquad I_* = \lim_{\lambda \to 0} s(T).$$

Доказательство. Докажем, что $I^* = \lim\limits_{\lambda \to 0} S(T)$, т.е

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta(\varepsilon) > 0\ \forall T\ (\lambda < \delta \Rightarrow S(T) - I^* < \varepsilon).$$

Заметим, что это утверждение очевидно для $f(x) \equiv C$ (подумайте, почему), и проведем доказательство для $f(x)$, отличной от константы.

Из определения I^* имеем:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists T^\varepsilon : S(T^\varepsilon) < I^* + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Возьмем $\delta \le \frac{\varepsilon}{3(M-m)p}$, где p - число точек деления T^ε, M, m - точные грани $f(x)$ на $[a,b]$. Возьмем произвольное разбиение T с мелкостью $\lambda < \delta$. Пусть T' содержит все точки разбиений T и T^ε. Рассмотрим

$$0 \le S(T) - I^* = S(T) - S(T') + S(T') - S(T^\varepsilon) + S(T^\varepsilon) - I^*.$$

Тогда $S(T^\varepsilon) - I^* < \frac{\varepsilon}{3}$ по выбору T^ε, $S(T') - S(T^\varepsilon) \le 0$, так как T' получено из T^ε добавлением точек разбиения (свойство 2), а по свойству 3

$$S(T) - S(T') \le (M-m)p\delta \le (M-m)p\frac{\varepsilon}{3(M-m)p} = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда

$$0 \le S(T) - I^* \le \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon. \qquad \square$$

Теорема 11.2 (критерий Римана) *Для того, чтобы ограниченная функция f была интегрируемой на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T отрезка $[a, b]$, при котором*

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k(f) \triangle x_k < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Поскольку функция итерируема, найдется I такое, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ \forall T, \ \forall A\{\xi_k\}$$

$$\lambda < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle x_k - I \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Берем любое разбиение T с мелкостью $\lambda < \delta(\varepsilon)$. Тогда

$$I - \frac{\varepsilon}{3} < \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle x_k < I + \frac{\varepsilon}{3}$$

Поскольку нижняя и верхняя суммы Дарбу являются, при выбранном T, точной нижней и верхней границей множества интегральных сумм, то

$$I - \frac{\varepsilon}{3} \le s(T) \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle x_k \le S(T) \le I + \varepsilon,$$

т. е.

$$S(T) - s(T) = \sum_{k=1}^{n} \omega_k(f) \triangle x_k \le \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon.$$

Достаточность. Для начала заметим, что $I^* = I_*$. Действительно, поскольку

$$0 \le I^* - I_* \le S(T) - s(T),$$

для любого T, а по условию для любого $\varepsilon > 0$ существует разбиение T, для которого $S(T) - s(T) < \varepsilon$, то для любого $\varepsilon > 0$

$$0 \le I^* - I_* < \varepsilon,$$

т. е. $I^* - I_* = 0$ или $I^* = I_* = I$.

Далее, для любого разбиения T

$$s(T) \le \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \triangle x_k \le S(T),$$

а при $\lambda \to 0$ по свойству 4 сумм Дарбу $s(T) \to I_* = I$ и $S(T) \to I^* = I$. Следовательно, по правилу "двух миллиционеров интегральная сумма тоже стремится к I. $\square$

2 Далее просто представлены некоторые формулы и примеры из книги

$$1. \qquad \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)ds} = C \in [m, M].$$

$$2. \qquad |F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t)dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt\right| \leq M\,|x - x_0|$$

$$3. \qquad \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)^2$$

$$4. \qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0$$

$$5. \qquad \triangle f(x_0, y_0) = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0, y_0) \triangle x + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0, y_0) \triangle y + o(\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2})$$

$$6. \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^3+7n+3}{2n^3+5n+4} = \frac{1}{2}$$

$$7. \qquad \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})} = e$$

$$8. \qquad \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$9. \qquad \int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq 1$$

$$10. \qquad \int\frac{xdx}{x^2+a^2} = \left[u = x^2+a^2; du = 2xdx\right] = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u}\bigg|_{u=x^2+a^2} =$$

$$\frac{1}{2}\ln|u| + C|_{u=x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C$$