

Лабораторная работа по теме L^AT_EX

Мустафаев Алим. Группа М8О-113Б-23

11 февраля 2024 г.

1 Теорема Коши о вычетах. Приложение вычетов к вычислению определенных интегралов. Суммирование некоторых рядов с помощью вычетов

1.1 Теорема Коши о вычетах

Теорема. Если функция $f(z)$ является аналитической на границе C области D и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек z_1, z_2, \dots, z_n , то

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res} f(z_k).$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz.]$$

Решение. В области $|z| < 4$ функция $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + z}$ аналитична всюду, кроме $z = 0$ и $z = -1$. По теореме Коши о вычетах

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz \approx 2\pi i (\operatorname{res} f(0) + \operatorname{res} f(-1))$$

Точка $z = 0$ есть устранимая особая точка функции $f(z)$, ибо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(x+1)} = 1.$$

Поэтому $\operatorname{res} f(0) = 0$. Точка $z = -1$ – полюс первого порядка,

$$\operatorname{res} f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{e^z - 1}{z(z+1)} (z+1) \right) = 1 - e^{-1}$$

Таким образом,

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z} dz = 2\pi i (1 - e^{-1}).$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz.$$

Решение. В области $D: |z| < 2$ функция $f(z) = \operatorname{tg} z$ аналитична всюду, кроме точек $z = \frac{\pi}{2}$ и $z = -\frac{\pi}{2}$, являющихся простыми полюсами. Все другие

особые точки $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ лежат вне области D и поэтому не учитываются.

Имеем

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin z}{(\cos z)'} \Big|_{z=\pi/2} = -1, \operatorname{res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin z}{(\cos z)'} \Big|_{z=-\pi/2} = -1.$$

Поэтому

$$\int_{|z|=2} \operatorname{tg} z dz = -4\pi i.$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int_{x-i=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1} dz.$$

Решение. В области D : $|z-i| < \frac{3}{2}$ функция $f(z) = \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}$ имеет две особые точки: $z=i$ – после первого порядка и $z=0$ – существенно особая точка.

По формуле (5) из §9 имеем

$$\operatorname{res} f(i) = \frac{e^{1/z^2}}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}$$

Для нахождения вычета точки $z=0$ необходимо иметь лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z=0$. Однако в данном случае искать ряд Лорана нет необходимости: функция $f(z)$ четная, и поэтому можно заранее сказать, что в ее лорановском разложении будут содержаться только четные степени z и $\frac{1}{z}$. Так что $c_{-1} = 0$ и, следовательно,

$$\operatorname{res} f(0) = 0$$

По теореме Коши о вычетах

$$\int_{|x-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1} dz = \frac{\pi}{e}.$$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} dz.$$

Решение. В круге $|z| \leq 2$ подынтегральная функция имеет две особые точки $z=1$ и $z=0$. Легко установить, что $z=1$ есть простой полюс, поэтому

$$\operatorname{res}_{z=1} \left(\frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} \right) = \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z-1)'} \Big|_{z=1} = \sin 1.$$

Для установления характера особой точки $z=0$ напомним ряд Лорана для функции $\frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z}$ в окрестности этой точки. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} &= -\frac{1}{1-z} \sin \frac{1}{z} = (-1+z+z^2+\dots) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) \\ &= - \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5!} - \dots \right) \frac{1}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \dots + \\ &\quad c_{-k} \neq 0, k = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Так как ряд Лорана содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями z , то точка $z=0$ является существенно особой. Вычет подынтегральной функции в этой точке равен

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin \frac{1}{z}}{z-1} = c_{-1} = - \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots \right) = -\sin 1.$$

Следовательно,

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} dz = 2\pi i (\sin 1 - \sin 1) = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

347. $\int_{|z|=1} z \tan \pi z dz.$ **348.** $\int_C \frac{z dz}{(z-1)^2(z+2)},$ где $C : x^{2/3} + y^{2/3} = 3^{2/3}.$

349. $\int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^3(z+1)}.$ **350.** $\int_{|z-i|=3} \frac{e^{x^2}-1}{x^3-iz^2} dz.$ **351.** $\int_{|z|=1/2} z^2 \sin \frac{1}{z} dz$

352. $\int_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin \pi z}{z^2-z} dz.$ **353.** $\int_{|z+1|=4} \frac{z dz}{e^x+3}.$ **354.** $\int_{|z|=1} \frac{z^2 dz}{\sin^3 z \cos z}.$

355. $\int_{|x-i|=1} \frac{e^z dz}{z^4+2z^2+1}.$ **356.** $\int_{|z|=4} \frac{e^{iz} dz}{(z-\pi)^3}.$

357. $\int_C \frac{\cos \frac{z}{2}}{z^2-4} dz,$ $C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$ **358.** $\int_C \frac{e^{2z}}{z^3-1} dz,$ $C : x^2 + y^2 - 2x = 0.$

359. $\int_C \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2} dz,$ $C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$ **360.** $\int_C \frac{z+1}{z^2+2z-3} dz,$ $C : x^2 + y^2 = 16.$