§ 11. Теорема Коши о вычетах. Приложение вычетов к вычислению определенных интегралов. Суммирование некоторых рядов с помощью вычетов

1°. Теорема Коши о вычетах.

Теорема. *Если функция $f(z)$ является аналитической на границе C области D и всюду внутри области, за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$, то*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z_k).$$

Пример 1. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz.$$

<u>*Решение*</u>. В области $|z|<4$ функция $f(z)=\dfrac{e^z-1}{z^2+z}$ аналитична всюду, кроме $z=0$ и $z=-1$.

По теореме Коши о вычетах

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz = 2\pi i(\operatorname{res} f(0)+\operatorname{res} f(-1)).$$

Точка $z=0$ есть устранимая особая точка функции $f(z)$, ибо

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z(z+1)}=1.$$

Поэтому $\operatorname{res} f(0)=0$. Точка $z=-1$ — полюс первого порядка,

$$\operatorname{res} f(-1)=\lim_{z\to -1}\left(\frac{e^z-1}{z(z+1)}(z+1)\right)=1-e^{-1}.$$

Таким образом,

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz = 2\pi i(1-e^{-1}).$$ ▷

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int_{|z|=2} \operatorname{tg} z\,dz.$$

<u>*Решение*</u>. В области D: $|z|<2$ функция $f(z)=\operatorname{tg} z$ аналитична всюду, кроме точек $z=\dfrac{\pi}{2}$ и $z=-\dfrac{\pi}{2}$, являющихся простыми полюсами. Все другие

особые точки $z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ функции $f(z) = \operatorname{tg} z$ лежат вне области D и поэтому не учитываются.

Имеем

$$\operatorname{res} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=\pi/2} = -1, \quad \operatorname{res} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left.\frac{\sin z}{(\cos z)'}\right|_{z=-\pi/2} = -1.$$

Поэтому

$$\int\limits_{|z|=2} \operatorname{tg} z\, dz = -4\pi i. \qquad \triangleright$$

Пример 3. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}\, dz.$$

Решение. В области D: $|z-i| < \dfrac{3}{2}$ функция $f(z) = \dfrac{e^{1/z^2}}{z^2+1}$ имеет две особые точки: $z = i$ — полюс первого порядка и $z = 0$ — существенно особая точка.

По формуле (5) из § 9 имеем

$$\operatorname{res} f(i) = \left.\frac{e^{1/z^2}}{2z}\right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{2i}.$$

Для нахождения вычета в точке $z = 0$ необходимо иметь лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности точки $z = 0$. Однако в данном случае искать ряд Лорана нет необходимости: функция $f(z)$ четная, и поэтому можно заранее сказать, что в ее лорановском разложении будут содержаться только четные степени z и $\dfrac{1}{z}$. Так что $c_{-1} = 0$ и, следовательно,

$$\operatorname{res} f(0) = 0.$$

По теореме Коши о вычетах

$$\int\limits_{|z-i|=3/2} \frac{e^{1/z^2}}{z^2+1}\, dz = \frac{\pi}{e}. \qquad \triangleright$$

Пример 4. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-1} \sin\frac{1}{z}\, dz.$$

Решение. В круге $|z| \leqslant 2$ подынтегральная функция имеет две особые точки $z = 1$ и $z = 0$. Легко установить, что $z = 1$ есть простой полюс, поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=1}\left(\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\right) = \left.\frac{\sin\frac{1}{z}}{(z-1)'}\right|_{z=1} = \sin 1.$$

Для установления характера особой точки $z = 0$ напишем ряд Лорана для функции $\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}$ в окрестности этой точки. Имеем

$$\frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z} = -\frac{1}{1-z}\sin\frac{1}{z} = -(1+z+z^2+\ldots)\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ldots\right) =$$

$$= -\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \ldots\right)\frac{1}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \ldots + \text{правильная часть.}$$

$$c_{-k} \neq 0, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

Так как ряд Лорана содержит бесконечное множество членов с отрицательными степенями z, то точка $z = 0$ является существенно особой. Вычет подынтегральной функции в этой точке равен

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1} = c_{-1} = -\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \ldots\right) = -\sin 1.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-1}\sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i(\sin 1 - \sin 1) = 0. \qquad \triangleright$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить интегралы:

347. $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} z\operatorname{tg}\pi z\,dz.$ **348.** $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{z\,dz}{(z-1)^2(z+2)}$, где C: $x^{2/3}+y^{2/3}=3^{2/3}$.

349. $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z\,dz}{z^3(z+1)}.$ **350.** $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}\,dz.$ **351.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=1/2} z^2\sin\frac{1}{z}\,dz.$

352. $\displaystyle\int\limits_{|z|=\sqrt{3}} \frac{\sin\pi z}{z^2-z}\,dz.$ **353.** $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=4} \frac{z\,dz}{e^z+3}.$ **354.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z^2\,dz}{\sin^3 z\cos z}.$

355. $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z\,dz}{z^4+2z^2+1}.$ **356.** $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{e^{iz}\,dz}{(z-\pi)^3}.$

357. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}\,dz$, C: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1.$ **358.** $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{e^{2z}}{z^3-1}\,dz$, C: $x^2+y^2-2x=0.$

359. $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}\,dz$, C: $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1.$ **360.** $\displaystyle\int\limits_{C} \frac{z+1}{z^2+2z-3}\,dz$, C: $x^2+y^2=16.$