

## Progetto d'esame. Analisi di un sistema dinamico con Maple.

È data la risposta temporale a un segnale cosinusoidale  $u(t) = \cos(t)1(t)$  di un sistema *LTI* e *right-sided*.

$$y(t) = \left( -\frac{3}{25}\cos(t) + \frac{1}{25}\sin(t) - \frac{1}{50}e^{-2t}(29 + 30t) + \frac{1}{10}e^{-t}(7\cos(t) + \sin(t)) \right) 1(t)$$

### 1. Funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri.

Per determinare la funzione di trasferimento, dobbiamo ricondurci alla risposta stessa nel *dominio di Laplace*. Utilizziamo la *L-trasformata* su un sistema che, essendo lineare, permette di integrare singolarmente i vari termini, sfruttando quindi delle trasformate elementari.

$$y(t) = -\frac{3}{25}\cos(t) + \frac{1}{25}\sin(t) - \frac{29}{50}e^{-2t} - \frac{30}{50}te^{-2t} + \frac{7}{10}\cos(t)e^{-t} + \frac{1}{10}\sin(t)e^{-t}$$

$$\begin{aligned} Y(s) = L[y(t)] &= L\left[-\frac{3}{25}\cos(t) + \frac{1}{25}\sin(t) - \frac{29}{50}e^{-2t} - \frac{30}{50}te^{-2t} + \frac{7}{10}\cos(t)e^{-t} + \frac{1}{10}\sin(t)e^{-t}\right] = \\ &= -\frac{3s}{25(s^2+1)} + \frac{1}{25(s^2+1)} - \frac{29}{30(s+2)} - \frac{30}{50(s+2)^2} + \frac{7s+7}{10(s+1)^2+10} + \frac{1}{10(s+1)^2+10} \end{aligned}$$

Eseguiti i calcoli, la risposta all'armonica nel dominio di Laplace risulta essere:

$$Y(s) = \frac{-s(s-1)}{(s+2)^2(s^2+2s+2)(s^2+1)}$$

Sempre sfruttando le trasformate elementari, è noto che  $U(s) = \frac{s}{s^2+1}$ , e poiché la risposta forzata di un sistema dinamico è nella forma  $Y(s) = G(s)U(s)$ , possiamo facilmente ricavare la f.d.t..

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-s(s-1)(s^2+1)}{s(s+2)^2(s^2+2s+2)(s^2+1)} = \frac{-(s-1)}{(s+2)^2(s^2+2s+2)}$$

Analizzando la  $G(s)$  così ottenuta, è possibile fare delle rigorose considerazioni in merito al sistema che stiamo analizzando. Prima di tutto, andiamo a definire poli e zeri dello stesso:

- $s-1=0 \rightarrow z_1=1$ , *uno zero a fase non minima*;
- $(s+2)^2=0 \rightarrow p_{1,2}=-2$ , *due poli stabili, reali e coincidenti*;
- $s^2+2s+2=0 \rightarrow p_{3,4}=-1 \pm j$ , *due poli stabili, complessi e coniugati*.

Quindi sulla base di quanto ottenuto, è possibile affermare che il sistema dinamico proposto è:

- ✓ *proprio*, in quanto il numero dei poli è superiore a quello degli zeri;
- ✓ *BIBO – stabile*, poiché tutti i poli hanno parte reale negativa, e quindi si trovano sul semipiano sinistro.

## 2. Modi di evoluzione libera del sistema.

I modi di un sistema dinamico rappresentano gli elementi temporali “elementari” che definiscono un sistema. Più tecnicamente, sono ottenuti dalla risposta forzata quando  $U(s) = 1$  (risposta all'impulso) che dovrà essere poi espressa nel tempo.

Quindi applichiamo l'anti-trasformata di Laplace alla  $G(s)$  così da tramutarla in  $g(t)$ . Prima di fare ciò, è utile esprimere la f.d.t. in fratti semplici e in questo modo poter applicare le trasformate inverse elementari (sulle orme di quanto fatto prima per calcolare la  $G(s)$ ).

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-(s-1)}{(s+2)^2(s+1-j)(s+1+j)} \rightarrow \frac{C_{11}}{s+2} + \frac{C_{12}}{(s+2)^2} + \frac{C_{21}}{s+1-j} + \frac{C_{22}}{s+1+j}$$

Il calcolo dei coefficienti può essere effettuato sfruttando la *formula di Heaviside*.

$$C_{11} = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{d}{ds} \left[ (s+2) \frac{-(s-1)}{(s+2)^2(s+1-j)(s+1+j)} \right] = 1$$

$$C_{12} = \lim_{s \rightarrow -2} \left[ (s+2)^2 \frac{-(s-1)}{(s+2)^2(s+1-j)(s+1+j)} \right] = \frac{3}{2}$$

$$C_{21} = \lim_{s \rightarrow -1+j} \left[ (s+1-j) \frac{-(s-1)}{(s+2)^2(s+1-j)(s+1+j)} \right] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}j$$

$$C_{22} = \overline{C_{21}} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4}j$$

Si ottiene allora

$$G(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{3}{2} \frac{1}{(s+2)^2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}j\right) \frac{1}{s+1-j} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}j\right) \frac{1}{s+1+j}$$

A questo punto risulta immediata l'applicazione dell'anti-trasformata.

$$\begin{aligned} g(t) &= L^{-1}[G(s)] = L^{-1} \left[ \frac{1}{s+2} + \frac{3}{2} \frac{1}{(s+2)^2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}j\right) \frac{1}{s+1-j} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}j\right) \frac{1}{s+1+j} \right] = \\ &= e^{-2t} + \frac{3e^{-2t}t}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}j\right) e^{(-1+j)t} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}j\right) e^{(-1-j)t} \end{aligned}$$

A conclusione dei calcoli, avrò

$$g(t) = e^{-2t} + \frac{3e^{-2t}t}{2} - e^{-t} \cos(t) - \frac{e^{-t} \sin(t)}{2}$$

i cui rispettivi *modi di evoluzione libera* saranno  $e^{-2t}$ ,  $e^{-2t}t$ ,  $e^{-t} \cos(t)$ ,  $e^{-t} \sin(t)$ .

### 3. La risposta all'impulso del sistema.

Avendo definito la  $G(s)$ , è immediato riuscire a studiare la risposta del sistema ad altre sollecitazioni esterne che come l'armonica, possono essere sottoposte al sistema. La *Delta di Dirac* si presenta come un oggetto matematico particolare, tale per cui vale l'identità

$$\Delta = U(s) = 1$$

ovvero un  $\delta(t)$  tale per cui

$$U(s) = L[\Delta] = \int_0^{+\infty} e^{-st} \delta(t) dt = 1$$

Affinché l'uguaglianza possa essere soddisfatta, deve valere in  $t = 0$ . Nel dominio di Laplace, considerando che  $Y(s) = G(s) U(s)$ , la risposta all'impulso sarà data da  $Y(s) = G(s)$ . Nel dominio del tempo quindi

$$y_{\Delta}(t) = g(t) = e^{-2t} + \frac{3e^{-2t}t}{2} - e^{-t} \cos(t) - \frac{e^{-t} \sin(t)}{2}$$

### 4. La risposta la gradino e il suo grafico.

Il gradino è l'ingresso elementare per eccellenza, che prende anche il nome di *funzione di Heaviside*. Nel dominio del tempo, può essere definito tramite una funzione definita a tratti.

$$1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \rightarrow L[1(t)] = \frac{1}{s}$$

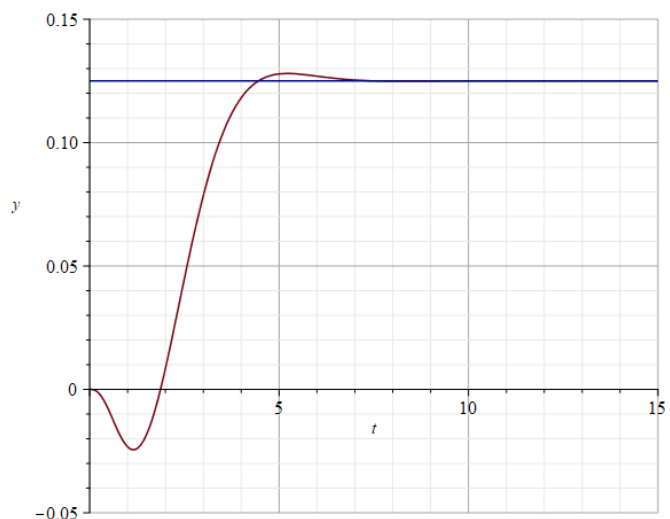
A questo punto, sulla definizione di risposta forzata, possiamo scrivere che

$$Y_{grad}(s) = G(s)L[1(t)] = \frac{G(s)}{s} \rightarrow y_{grad}(t) = L[Y_{grad}(s)]$$

Inoltre, prima di calcolare il grafico effettivo della risposta al gradino, è già possibile definire i *valori iniziale e finale* della funzione, attraverso l'applicazione dei *teoremi del valore iniziale e del valore finale*.

$$y_{grad}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sY(s) = 0$$

$$y_{grad}(+\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 0,125$$



## 5. La risposta alla rampa.

La rampa, o anche *segnale di velocità*, è esprimibile attraverso la funzione

$$f_v(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \rightarrow L[f_v(t)] = \frac{1}{s^2}$$

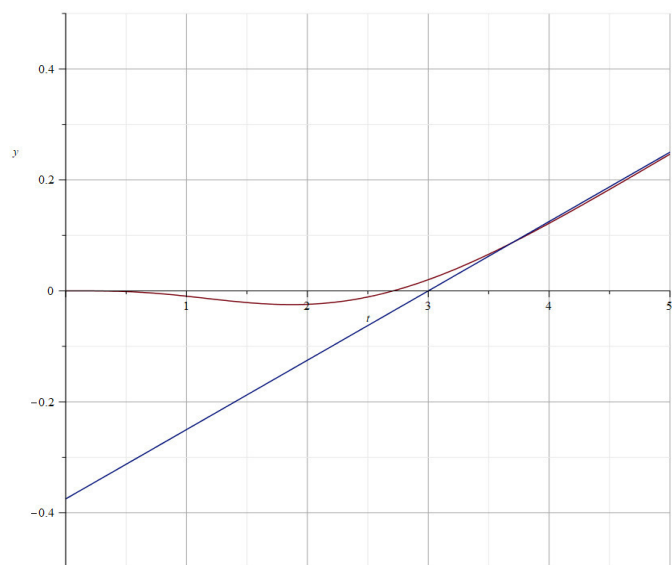
Quindi, sulla definizione di risposta forzata, affermiamo che

$$Y_{rampa}(s) = G(s) L[f_v(t)] = \frac{G(s)}{s^2} \rightarrow y_{rampa}(t) = L[Y_{rampa}(s)]$$

Anche qui, prima di graficare la risposta, è possibile avere un prospetto dell'andamento della funzione attraverso i teoremi del valore iniziale e finale.

$$y_{rampa}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow +\infty} sY(s) = 0$$

$$y_{rampa}(+\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = +\infty$$



## 6. Un modello I-U la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta al punto 1.

Nella sua più generale caratterizzazione, la risposta forzata di un sistema dinamico è esprimibile come  $Y(s) = G(s) U(s)$ , ovvero

$$Y(s) = \frac{\text{num}_G(s)}{\text{den}_G(s)} U(s)$$

Questa definizione deriva direttamente dal fatto che una generica risposta  $Y(s)$  non è altro che la traduzione di un sistema di equazioni differenziali in termini matematicamente più semplici. Difatti, dato un sistema differenziale e LTI, è possibile sempre associarne un'equazione algebrica sotto il dominio di Laplace. Ovviamente quest'ultima sarà molto più semplice da manipolare e analizzare.

Quindi lo scopo è cercare di ricondurci al sistema I-U differenziale originario. Essendo poi stazionario, è possibile considerare le sue condizioni iniziali come nulle, semplificando ulteriormente la definizione.

$$Y(s) \text{den}_G(s) = \text{num}_G(s) U(s)$$

Sostituendo la specifica  $G(s)$  proposta in esercizio, si avrà

$$Y(s)(s+2)^2(s^2+2s+2) = (-s+1)U(s)$$

$$Y(s)s^4 + 6Y(s)s^3 + 14Y(s)s^2 + 16Y(s)s + 8Y(s) = -U(s)s + U(s)$$

Il sistema, come già detto, è in *quiete*. Pertanto, la trasformata di Laplace assume la forma (semplificata)

$$L[a^{(n)}(t)] = s^n A(s) \rightarrow L^{-1}[s^n A(s)] = a^{(n)}(t)$$

Calcolando l'anti-trasformata termine per termine (perché vale la linearità), ottengo l'equazione differenziale

$$y^{(4)}(t) + 6y^{(3)}(t) + 14y^{(2)}(t) + 16y^{(1)}(t) + 8y(t) = -u^{(1)}(t) + u(t)$$

$$\text{con } y^{(n)}(0) = 0, n = 0 \dots 3$$

che lega strettamente l'uscita ai valori assunti dall'ingresso.

**7. Tenendo conto del modello determinato al punto 6, valutare le condizioni iniziali tali per cui il transitorio della risposta al segnale  $u(t) = \sin(t)1(t)$  è nullo.**

Nella sua più alta astrazione, la risposta di un sistema è così composta

$$Y(s) = Y_f(s) + Y_l(s) = Y_{tr}(s) + Y_r(s) + Y_l(s)$$

ovvero ottenuta come combinazione lineare di *risposta transitoria*, *a regime* e *libera*.

Viene richiesto che, a seguito della perturbazione generata dall'*armonica elementare*, la risposta forzata ottenuta coincida esattamente con la risposta a regime. È chiaro per riuscire a far verificare ciò, è necessario lavorare sulle condizioni iniziali, tali per cui si possa "trasporre" il grafico al momento in cui il transitorio si sia già concluso. Di conseguenza, le condizioni iniziali del sistema non saranno più nulle.

A livello algebrico, l'annullamento del transitorio può essere così determinato

$$Y_{tr}(s) + Y_l(s) = 0 \rightarrow Y(s) = Y_f(s)$$

Innanzitutto, occorre estrarre la risposta libera. Essa coincide con la risposta del sistema quando l'ingresso è nullo, ovvero strettamente correlata alle condizioni iniziali dello stesso.

Partiamo dal modello I-U definito precedentemente. Difatti, lavorando sul sistema di equazioni differenziali, possiamo sfruttare il *teorema della derivata* associato alla trasformata di Laplace, tale per cui  $L[a^{(n)}(t)] = s^n A(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^{(n-i+1)} a^{(i)}(0)$ . In questo modo esplicito le condizioni iniziali che sono appunto l'incognita da calcolare.

$$y^{(4)}(t) + 6y^{(3)}(t) + 14y^{(2)}(t) + 16y^{(1)}(t) + 8y(t) = -u^{(1)}(t) + u(t)$$

$$\begin{aligned}
& s^4 Y(s) - y^{(3)}(0) - s y^{(2)}(0) - s^2 y^{(1)}(0) - s^3 y(0) + 6s^3 Y(s) - 6y^{(2)}(0) - 6s y^{(1)}(0) \\
& - 6s^2 y(0) + 14s^2 Y(s) - 14y^{(1)}(0) - 14s y(0) + 16s Y(s) - 16y(0) + 8Y(s) \\
& = -sU(s) + u(0) + U(s)
\end{aligned}$$

Poiché si tratta di sistemi *right-sided*, allora  $u(0) = 0$ .

$$\begin{aligned}
& s^4 Y(s) - y^{(3)}(0) - s y^{(2)}(0) - s^2 y^{(1)}(0) - s^3 y(0) + 6s^3 Y(s) - 6y^{(2)}(0) - 6s y^{(1)}(0) \\
& - 6s^2 y(0) + 14s^2 Y(s) - 14y^{(1)}(0) - 14s y(0) + 16s Y(s) - 16y(0) + 8Y(s) \\
& = -sU(s) + U(s)
\end{aligned}$$

A questo punto, attraverso le dovute manipolazioni, è possibile ricondursi alla forma  $Y(s) = G(s) U(s) + Y_l(s)$  della risposta, così da esplicitare la risposta libera del sistema (si veda allegato maple). La risposta transitoria, invece, è direttamente vincolata dalla risposta forzata. Di conseguenza, è evidente che essa sia propria del segnale passato in ingresso al sistema. Nel caso specifico, si ipotizza l'armonica elementare  $u(t) = \sin(t) 1(t)$ . Da definizione, essa si ottiene dalla parte immaginaria di un generico *segnale modale*.

Dati  $U = Ae^{j\theta}$  e  $\lambda = j\omega$ , rispettivamente ampiezza e pulsazione,

$$\tilde{a}(t) = Ue^{\lambda t} 1(t) = Ae^{j(\omega t + \theta)} 1(t) \rightarrow a(t) = \text{Im}[u(t)] = \frac{a(t) - \overline{a(t)}}{2j} = A \sin(\omega t + \theta)$$

$$A = 1, \quad \omega = 1, \quad \theta = 0 \rightarrow \tilde{u}(t) = e^{jt} 1(t) \rightarrow u(t) = \sin(t) 1(t)$$

Iniziamo perciò l'analisi caratterizzando questo ingresso. Difatti, una volta ben definito, sarà immediato estrarne la componente sinusoidale tramite il ragionamento sopra descritto.

La trasformata di Laplace di un generico segnale modale è del tipo

$$L[\tilde{a}(t)] = U \frac{1}{s - \lambda} \rightarrow Y_f(s) = G(s) U(s) = G(s) \frac{U}{s - \lambda}$$

L'obiettivo che ci si pone è quello di riuscire a scorporare la risposta forzata nelle sue componenti, affinché si possa isolare quella transitoria. Per fare ciò, il primo passo è tradurre la risposta in una combinazione lineare dei vari elementi che la costituiscono, attraverso una scomposizione in fratti semplici tramite la formula di Heaviside.

$$\lim_{s \rightarrow \lambda} \left[ (s - \lambda) G(s) \frac{U}{s - \lambda} \right] = U G(\lambda) \rightarrow Y_f(s) = Y_{tr}(s) + Y_r(s) = Y_{tr}(s) + G(\lambda) \frac{U}{s - \lambda}$$

Si ricava la risposta transitoria del segnale modale semplicemente impostando opportunamente l'equazione.

$$Y_{tr}(s) = Y_f(s) - Y_r(s) = G(s) \frac{U}{s - \lambda} - G(\lambda) \frac{U}{s - \lambda} = \frac{U [G(s) - G(\lambda)]}{s - \lambda}$$

Come è già stato detto, il  $\sin(t)$  si ottiene come parte immaginaria del segnale modale corrispondente. Quindi, per il *principio di sovrapposizione degli effetti*, la risposta forzata dell'armonica si ricava estraendo la parte immaginaria dalla risposta forzata del segnale modale. Di conseguenza, per linearità, è possibile ottenere anche la risposta transitoria dell'armonica elementare agendo esattamente allo stesso modo.

$$Y_{tr,u(t)}(s) = \frac{Y_{tr}(s) - \overline{Y_{tr}(s)}}{2j}$$

Sostituendo opportunamente i valori del segnale specifico analizzato, avremo

$$A = 1, \omega = 1, \theta = 0 \rightarrow U = Ae^{j\theta} = 1, \lambda = j$$

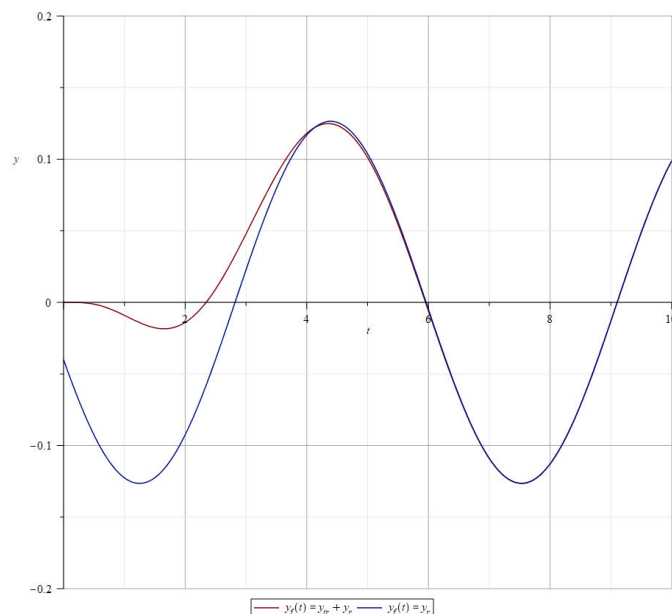
$$Y_{tr}(s) = \frac{G(s) - G(j)}{s - j}, \overline{Y_{tr}(s)} = \frac{G(s) - G(-j)}{s + j} \rightarrow Y_{tr,u(t)}(s) = \frac{\frac{G(s) - G(j)}{s - j} - \frac{G(s) - G(-j)}{s + j}}{2j}$$

dove la  $G(s)$  è la f.d.t. già ottenuta al punto 1.

A questo punto, una volta ottenuta anche la risposta transitoria, risolviamo l'identità sopra trascritta in modo da ottenere le condizioni iniziali richieste.

$$Y_{tr}(s) + Y_l(s) = 0 \rightarrow \begin{cases} y(0) = -\frac{1}{25} \\ y^{(1)}(0) = -\frac{3}{25} \\ y^{(2)}(0) = \frac{1}{25} \\ y^{(3)}(0) = \frac{3}{25} \end{cases}$$

Analizziamo graficamente la risposta del sistema con transitorio e con transitorio nullo.



#ALLEGATO 1 - Foglio di calcolo Maple esercizio A

#1. Funzione di trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri

#Inserisco la risposta all'armonica (right-sided) nel dominio del tempo, così come l'ingresso

$$y := t \rightarrow \left( -\frac{3}{25} \cdot \cos(t) + \frac{1}{25} \cdot \sin(t) - \frac{1}{50} \cdot e^{-2t} \cdot (29 + 30t) + \frac{1}{10} \cdot e^{-t} \cdot (7\cos(t) + \sin(t)) \right) \cdot \text{Heaviside}(t)$$

$$y := t \mapsto \left( -\frac{3 \cos(t)}{25} + \frac{\sin(t)}{25} - \frac{e^{-2t} (29 + 30t)}{50} + \frac{e^{-t} (7 \cos(t) + \sin(t))}{10} \right) \text{Heaviside}(t) \quad (1)$$

$$u := t \rightarrow \text{piecewise}(t \geq 0, \cos(t), t < 0, 0)$$

$$u := t \mapsto \begin{cases} \cos(t) & 0 \leq t \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2)$$

#Definisco adesso  $Y(s)$  e  $U(s)$ , ovvero risposta e ingresso nel dominio di Laplace.

with(inttrans) :

$$Y := s \rightarrow \text{simplify}(\text{laplace}(y(t), t, s)) :$$

$$Y(s)$$

$$-\frac{s(s-1)}{(s+2)^2(s^2+2s+2)(s^2+1)} \quad (3)$$

$$U := s \rightarrow \text{simplify}(\text{laplace}(u(t), t, s)) :$$

$$U(s)$$

$$\frac{s}{s^2+1} \quad (4)$$

#Poiché vale  $G(s)=Y(s)/U(s)$ , allora è immediata la definizione della f.d.t.

$$G := s \rightarrow \text{combine}\left(\frac{Y(s)}{U(s)}\right) :$$

$$G(s)$$

$$-\frac{s-1}{(s+2)^2(s^2+2s+2)} \quad (5)$$

#A questo punto passo a calcolare poli e zeri della  $G(s)$



$$\left\{ y_I(0) = -\frac{1}{25}, D(y_I)(0) = -\frac{3}{25}, D^{(2)}(y_I)(0) = \frac{1}{25}, D^{(3)}(y_I)(0) = \frac{3}{25} \right\} \quad (36)$$

*#A prova di quanto detto, andiamo a calcolare un grafico di confronto tra risposta forzata senza transitorio e con transitorio*

$$\text{plot}\left(\left[\text{invlaplace}\left(G(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 1}, s, t\right), \text{invlaplace}\left(\left(G(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 1}\right) - Y_{1, tr, u(t)}(s), s, t\right)\right], t = 0 .. 10, y = -0.2 .. 0.2, \text{legend} = ['y_f(t) = y_{tr} + y_r', 'y_f(t) = y_r'], \text{gridlines} = \text{true}\right)$$

## Progetto d'esame. Costruzione del diagramma di Bode di una funzione di trasferimento con Maple.

Sono richiesti i *diagrammi di modulo e fase di Bode* della seguente funzione di trasferimento.

$$G(s) = \frac{\left(1 - \frac{s}{10}\right)}{s(s^2 + s + 25)}$$

È possibile già affermare che il sistema da esso descritto non rispetti la *BIBO-stabilità*, data la presenza di un polo nell'origine. Viene però richiesta la costruzione del diagramma di Bode e trattandosi di una rappresentazione grafica della *risposta in frequenza* del sistema, la BIBO-stabilità non è un requisito necessario. Per quanto riguarda i poli e gli zeri, si constata che:

- la f.d.t ha **un solo zero**:
  - $z_1 = 10$ , a fase non minima;
- la f.d.t ha **tre poli**:
  - $s = 0$ , situato nell'origine;
  - due poli complessi e coniugati,  $p_1 = -\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{11}}{2}i$  e  $p_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{11}}{2}i$ , stabili.

Innanzitutto, occorre definire la cosiddetta *forma di Bode*. Nel caso specifico della f.d.t. analizzata, essa avrà la seguente conformazione

$$G(s) = k_b \frac{1 + T_1 s}{s \left(1 - \frac{2\delta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)} = k_b \frac{1 + \frac{s}{\Omega_1}}{s \left(1 - \frac{2\delta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}$$

dove:

- $T_1 = \frac{1}{|z_1|} = \frac{1}{10}$  è la *costante di tempo* di  $z_1$  e  $\Omega_1 = \frac{1}{|T_1|} = 10 \frac{rad}{sec}$  è la sua *pulsazione di rottura*;
- $\delta$  e  $\omega_n$  sono rispettivamente lo *smorzamento* e la *pulsazione naturale* (e anche di rottura) dei poli complessi e coniugati, i cui valori si ottengono dalla risoluzione del seguente sistema.

$$\begin{cases} \omega_n^2 = 25 \\ 2\delta\omega_n = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \omega_n = 5 \\ \delta = \frac{1}{10} \end{cases}$$

- $K_b$  rappresenta il *guadagno o costante di Bode*, ottenibile come

$$k_b = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(1 - s/10)}{(s^2 + s + 25)} = \frac{1}{25}$$

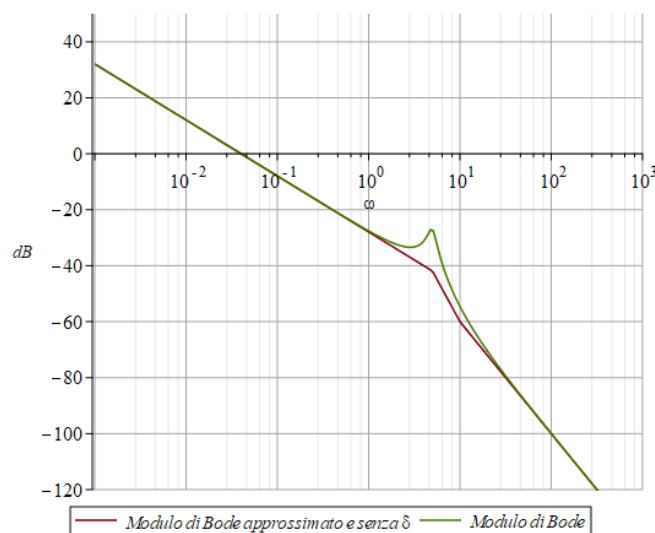
$$G(s) = \frac{1}{25} \frac{1 + \frac{1}{10} s}{s \left(1 - \frac{1}{25} s + \frac{s^2}{25}\right)} = \frac{1}{25} \frac{1 + \frac{s}{10}}{s \left(1 - \frac{1}{25} s + \frac{s^2}{25}\right)}$$

Poiché viene richiesto graficare la risposta in frequenza del sistema, valutiamo  $G(s)$  per  $s = j\omega$ . In questo modo si andrà a comprimere la f.d.t. sul solo asse immaginario e quindi sul *dominio di Fourier* (ovvero delle frequenze).

$$G(j\omega) = k_b \frac{1 + \frac{j\omega}{10}}{s \left( 1 - j \frac{\omega}{25} + \frac{\omega^2}{25} \right)} \rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{dB} \\ \arg(G(j\omega)) \end{cases}$$

Prima di continuare con il tracciamento dei *diagrammi di modulo*  $|G(j\omega)|_{dB}$  e fase  $\arg(G(j\omega))$ , importante è specificare che siamo di fronte a un sistema con leggera risonanza. Questo perché lo smorzamento su individuato,  $\delta = \frac{1}{10} = 0,1$ , presenta un valore compreso tra  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ . Per questo motivo, un primo diagramma sarà più “grossolano”, ovvero non terrà conto dello smorzamento. Solo successivamente verrà corretto inserendo le modifiche dovute alla presenza della risonanza.

Si discute innanzitutto il diagramma dei moduli.



Da definizione, la *pendenza iniziale* è determinata dai poli più a sinistra che, se presenti, sono proprio quelli nell'origine. In questo caso ne abbiamo uno, quindi il diagramma parte con **pendenza iniziale** di  $-20 \frac{dB}{dec}$ .

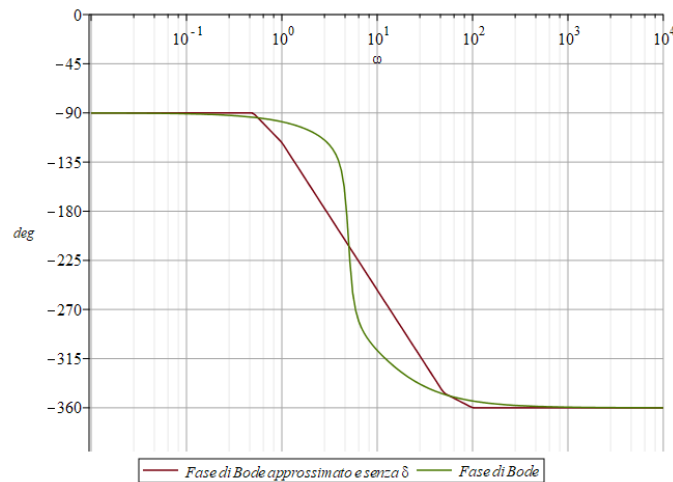
Ogni zero, in AF, determina l'incremento della spezzata di  $+20 \frac{dB}{dec}$  a partire dalla sua pulsazione di rottura.

Nel caso corrente ne abbiamo solo uno, che agisce in corrispondenza di  $10 \frac{rad}{sec}$ . Per quanto riguarda i poli, essi sono esclusivamente di natura complessa e coniugata, radici di un unico trinomio. Perciò la spezzata viene decrementata di  $-40 \frac{dB}{dec}$  in corrispondenza della pulsazione naturale dei poli, ovvero di rottura, pari a  $5 \frac{rad}{sec}$ .

Quindi è possibile definire la **pendenza finale** del diagramma dei moduli, semplicemente attraverso la somma algebrica delle varie pendenze fin qui definite, ovvero  $-20 \frac{dB}{dec} + 20 \frac{dB}{dec} - 40 \frac{dB}{dec} = -40 \frac{dB}{dec}$ .

Il guadagno di Bode, infine, determinerà lo slittamento dell'intero diagramma sull'asse delle ordinate. Nella  $G(s)$  proposta, la spezzata verrà quindi traslata, in corrispondenza della pulsazione unitaria, di un valore pari a  $|k_b|_{dB} \simeq -28 \text{ dB}$ .

Passiamo adesso alla definizione del diagramma di fase.



La **fase iniziale** dipende strettamente sia dal guadagno di Bode sia dalla presenza o meno di poli nell'origine. Nella f.d.t. qui analizzata, abbiamo un solo zero, che abbassa la fase di  $-90^\circ$ , e il guadagno di Bode che, essendo positivo, non contribuisce in nessun modo alla stessa. Quindi in conclusione:  $-90^\circ + 0^\circ = -90^\circ$ .

Il contributo dello zero sulla fase è determinato dal fatto che esso sia a fase non minima. Di conseguenza, a partire da una decade prima della pulsazione di rottura ( $= 10 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ), è possibile verificare un  $-45 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$  tutto durante la MF. In AF allora (una decade dopo la pulsazione di taglio), avremo un ritardo sulla fase di  $-90^\circ$ .

Per quanto riguarda i poli complessi e coniugati (sempre a meno dello smorzamento), essi si comportano rispettivamente come due poli reali e stabili (con  $\omega_n = 5$ ). Difatti, tra la BF e l'AF, la fase subisce un ritardo di  $-180^\circ$ , determinando una pendenza sulla MF di  $-90 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ .

Ne deriva che la pendenza della **fase finale**, determinata dalla somma algebrica di fase iniziale e dai contributi di poli e zeri, sarà:  $-90^\circ - 90^\circ - 180^\circ = -360^\circ$ .

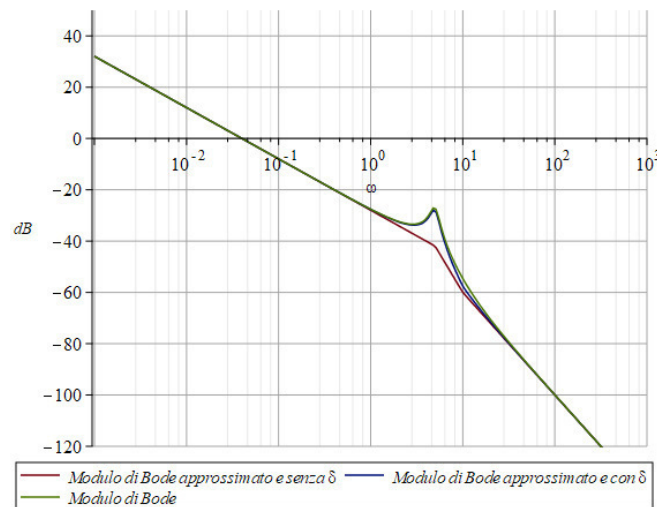
È chiaro come queste approssimazioni si allontanino tanto dall'effettivo andamento dei diagrammi di modulo e fase di Bode. Questo perché a causa della risonanza, la pulsazione di taglio del polo complesso e coniugato viene a mancare della sua stessa definizione qualitativa, ovvero di discostamento massimo tra diagramma reale e approssimato non superiore a  $|3 \text{ dB}|$ .

Andiamo perciò a definire la cosiddetta *pulsazione di risonanza*  $\omega_r$  e il suo relativo *picco di risonanza*  $M_r$ .

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2} = 4,94 \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

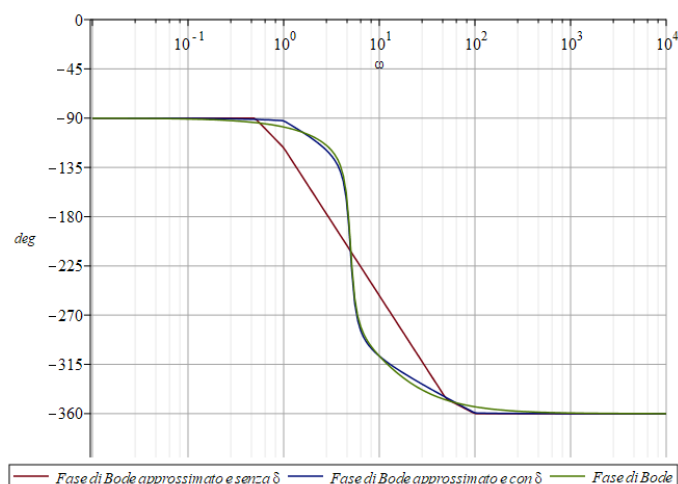
$$M_r = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}} = 5,02 \rightarrow M_{r,dB} = 20 \log_{10}(M_r) = 14,02 \text{ dB}$$

Quindi, in corrispondenza della pulsazione di risonanza, la spezzata verrà “tirata” verso l’alto di  $M_{r,dB}$ .



Considerazioni diverse devono essere fatte per il diagramma della fase. Innanzitutto, agire su quest’ultima a causa di risonanza, ha senso solo nel caso di smorzamento tendenzialmente piccolo. Questo perché, a smorzamento prossimo a 1, la risonanza tende a determinare picchi sempre meno elevati, rientrando perciò nel limite dei 3dB di approssimazione. Il contributo dei poli complessi e coniugati sulla fase, si manifesta restringendo l’intervallo di MF a seguito dello smorzamento. Poiché per  $\omega = \omega_n$  l’argomento ( o meglio la fase) del polo (complesso e coniugato) vale  $\frac{1}{\delta}$ , l’intervallo di MF passerà dal canonico  $10^{-1} \leq \frac{\omega}{\omega_n} \leq 10$  con  $-90 \frac{dB}{dec}$ , a  $10^{-\delta} \leq \frac{\omega}{\omega_n} \leq 10^{\delta}$ , con pendenza di  $-\frac{90}{\delta} \frac{dB}{dec}$ . Possiamo riscontrare il tutto nella f.d.t. analizzata:

- BF  $\rightarrow \omega < 3,97 \rightarrow 0^\circ$
- AF  $\rightarrow \omega > 6,29 \rightarrow -180^\circ$
- MF  $\rightarrow 3,97 \leq \omega \leq 6,29 \rightarrow -900 \frac{deg}{dec}$



#ALLEGATO 2 - Foglio di calcolo Maple esercizio B

#Inserisco la funzione di trasferimento

$$G := s \rightarrow \frac{1 - \frac{s}{10}}{s \cdot (s^2 + s + 25)} :$$

#Vado a calcolare il guadagno di Bode  $k_b$ . Per prima cosa, mi servono i poli e zeri della f.d.t :

$$\text{zeri} := \text{solve}(\text{numer}(G(s)), s)$$

$$\text{zeri} := 10 \quad (1)$$

$$m := \text{nops}([\text{zeri}])$$

$$m := 1 \quad (2)$$

$$\text{poli} := \text{solve}(\text{denom}(G(s)), s)$$

$$\text{poli} := 0, -\frac{1}{2} + \frac{3I\sqrt{11}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{3I\sqrt{11}}{2} \quad (3)$$

$$\text{poliCC} := \text{remove}(x \rightarrow x = 0, [\text{poli}])$$

$$\text{poliCC} := \left[ -\frac{1}{2} + \frac{3I\sqrt{11}}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{3I\sqrt{11}}{2} \right] \quad (4)$$

#Definisco  $r$  come il numero di poli nell'origine e calcolo  $k_b$

$$r := \text{nops}(\text{select}(x \rightarrow x = 0, [\text{poli}]))$$

$$r := 1 \quad (5)$$

$$k_b := \lim_{s \rightarrow 0} s^r \cdot G(s)$$

$$k_b := \frac{1}{25} \quad (6)$$

#Traccio i diagrammi di modulo e fase. Per fare ciò, ci avvaliamo di funzioni sussidiarie esprimibili come funzioni piecewise. Inoltre, poiché siamo in presenza di poli complessi e coniugati, è necessario calcolare smorzamento e pulsazione naturale e le correlate pulsazione di risonanza e picco di risonanza.

$$\omega_n := |\text{poliCC}[1]|$$

$$\omega_n := 5 \quad (7)$$

$$\delta := \frac{|\operatorname{Re}(\operatorname{poliCC}[1])|}{\omega_n}$$

$$\delta := \frac{1}{10} \quad (8)$$

$$\omega_r := \operatorname{evalf}\left(\omega_n \cdot \sqrt{1 - 2 \cdot \delta^2}\right)$$

$$\omega_r := 4.949747467 \quad (9)$$

$$M_r := \operatorname{evalf}\left(\frac{1}{2 \cdot \delta \cdot \sqrt{1 - \delta^2}}\right)$$

$$M_r := 5.025189075 \quad (10)$$

$$M_{r, dB} := \operatorname{evalf}(20 \cdot \log_{10}(M_r))$$

$$M_{r, dB} := 14.02304814 \quad (11)$$

*#Per entrambi i diagrammi di Bode,andrò a definire due tracciati per ognuno. Nello specifico, moduloBode1 e faseBode1 saranno i diagrammi che non terranno considerazione dello smorzamento. Viceversa, moduloBode2 e faseBode2 avranno un' approssimazione migliore della risonanza (proprio perché avranno il contributo del valore assunto dallo smorzamento) with(plots) :*

*#MODULO*

$$\operatorname{modulo} := (\omega, \omega_t) \rightarrow \begin{cases} 0 & \left(\frac{\omega}{\omega_t}\right) < 1 \\ 20 \cdot \log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_t}\right) & \text{otherwise} \end{cases} :$$

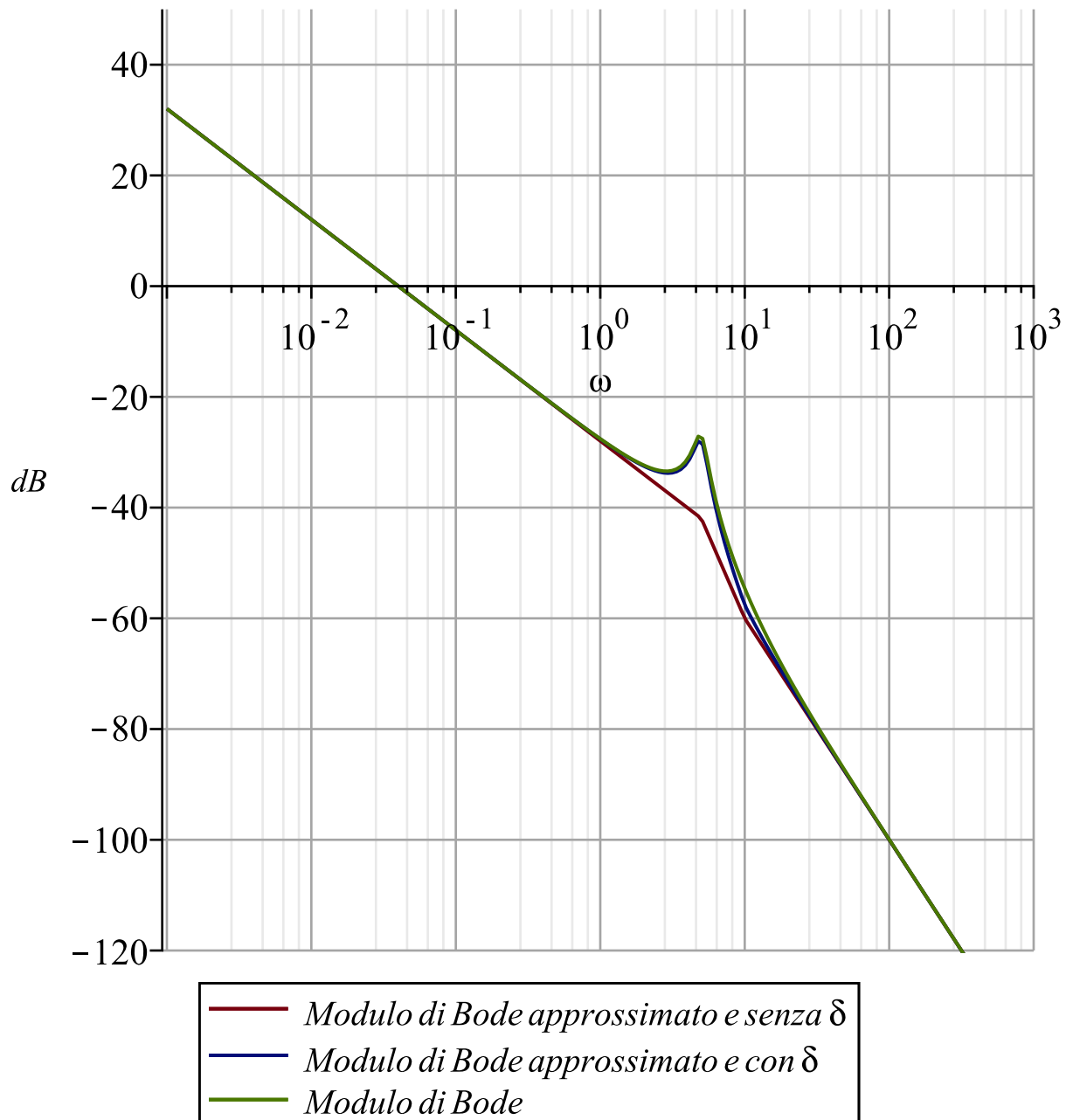
$$\operatorname{moduloSmorz} := (\omega, \omega_n, \delta) \rightarrow -20 \cdot \log_{10}\left(\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + I \cdot \frac{2 \cdot \delta \cdot \omega}{\omega_n}\right|\right) :$$

$$\operatorname{moduloBode1} := \omega \rightarrow 20 \cdot \log_{10}(|k_b|) - r \cdot 20 \cdot \log_{10}(\omega) + \sum_{i=1}^m \operatorname{modulo}(\omega, |\{zeri\}[i]|) - 2 \cdot \operatorname{modulo}(\omega, \omega_n) :$$

$$\operatorname{moduloBode2} := \omega \rightarrow 20 \cdot \log_{10}(|k_b|) - r \cdot 20 \cdot \log_{10}(\omega) + \sum_{i=1}^m \operatorname{modulo}(\omega, |\{zeri\}[i]|) + \operatorname{moduloSmorz}(\omega, \omega_n, \delta) :$$

$moduloBode := \omega \rightarrow 20 \cdot \log_{10} ( | G(I \cdot \omega) | ) :$

$semilogplot([ moduloBode1(\omega), moduloBode2(\omega), moduloBode(\omega) ], \omega = 10^{-3} .. 10^3, dB = -120 .. 50,$   
 $tickmarks = [default, [seq(20 \cdot i, i = -12 .. 5) ]], legend = [ 'Modulo di Bode approssimato e senza \delta',$   
 $'Modulo di Bode approssimato e con \delta', 'Modulo di Bode' ], gridlines = true)$





#FASE

$$fase := (\omega, \omega_t) \rightarrow \begin{cases} 0 & \left( \frac{\omega}{\omega_t} \right) < \frac{1}{10} \\ \frac{\text{Pi}}{4} \cdot \log_{10} \left( \frac{\omega}{\left( \frac{\omega_t}{10} \right)} \right) & \frac{1}{10} \leq \left( \frac{\omega}{\omega_t} \right) < 10 \\ \frac{\text{Pi}}{2} & otherwise \end{cases} :$$

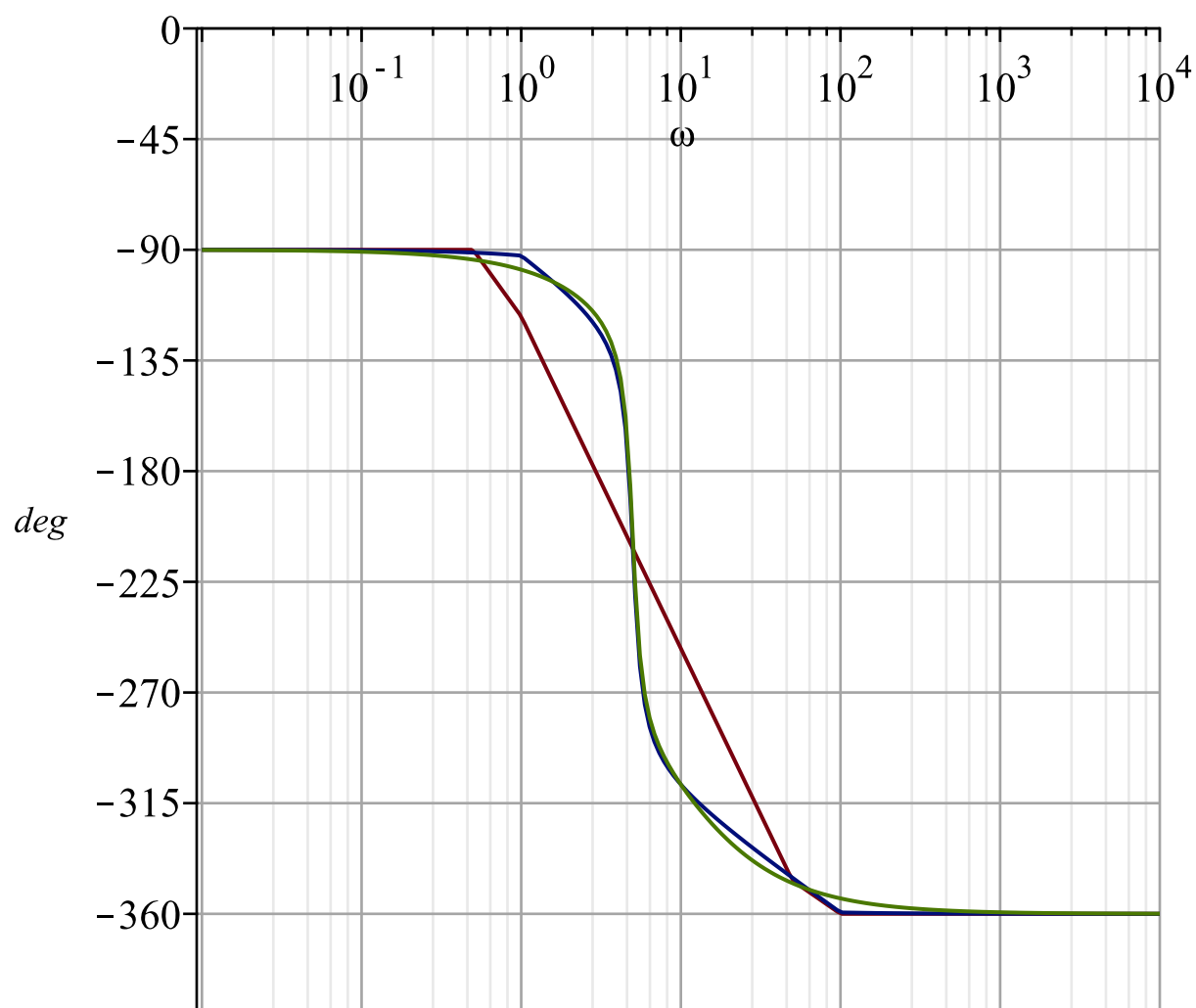
$$faseSmorz := (\omega, \omega_n, \delta) \rightarrow \text{argument} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + I \cdot \frac{2 \cdot \delta \cdot \omega}{\omega_n} \right) :$$

$$faseBode1 := \omega \rightarrow \text{argument}(k_b) - r \cdot \frac{\text{Pi}}{2} + \sum_{i=1}^m \text{signum}(-\{\text{zeri}\}[i]) \cdot fase(\omega, |\{\text{zeri}\}[i]|) - 2 \cdot fase(\omega, \omega_n) :$$

$$faseBode2 := \omega \rightarrow \text{argument}(k_b) - r \cdot \frac{\text{Pi}}{2} + \sum_{i=1}^m \text{signum}(-\{\text{zeri}\}[i]) \cdot fase(\omega, |\{\text{zeri}\}[i]|) - faseSmorz(\omega, \omega_n, \delta) :$$

$$faseBode := \omega \rightarrow \text{argument}(k_b) - r \cdot \frac{\text{Pi}}{2} + \sum_{i=1}^m \text{signum}(-\{\text{zeri}\}[i]) \cdot \text{argument} \left( 1 + I \cdot \frac{\omega}{|\{\text{zeri}\}[i]|} \right) - faseSmorz(\omega, \omega_n, \delta) :$$

$$\text{semilogplot} \left( \left[ \frac{180}{\text{Pi}} \cdot faseBode1(\omega), \frac{180}{\text{Pi}} \cdot faseBode2(\omega), \frac{180}{\text{Pi}} \cdot faseBode(\omega) \right], \omega = 10^{-2} .. 10^4, deg = -400 .. 0, \text{tickmarks} = [\text{default}, [\text{seq}(45 \cdot i, i = -8 .. 4) ]], \text{legend} = [ 'Fase di Bode approssimato e senza \delta', 'Fase di Bode approssimato e con \delta', 'Fase di Bode' ], \text{gridlines} = \text{true} )$$



— Fase di Bode approssimato e senza  $\delta$   
— Fase di Bode approssimato e con  $\delta$   
— Fase di Bode