Progetto d'esame. Regolazione di un sistema in retroazione con Matlab.

È dato un sistema in retroazione algebrica e unitaria. La funzione di trasferimento del processo $G(s)$ è

$$G(s) = \frac{169}{6}\frac{s+6}{s(s^2+13\,s+169)}$$

Si richiede di progettare un controllore C(s) tale per cui siano garantite le seguenti specifiche:

(1) <u>errore di inseguimento</u> inferiore al 2% per riferimento a un segnale di tipo rampa;

(2) <u>picco di risonanza</u> $M_{r,dB} \le 3\ dB$ e <u>banda passante</u> $30\ \frac{rad}{sec} \le \omega_{BW} \le 50\ \frac{rad}{sec}$.

Prima di iniziare, analizziamo la G(s). È possibile notare la presenza di uno zero a fase minima, così come un polo nell'origine e due poli complessi e coniugati, certamente giacenti nel semipiano sinistro (dalla regola di Cartesio). Affinché la retroazione sia stabile internamente, il regolatore non dovrà presentare nemmeno uno zero nell'origine, al fine di evitare cancellazioni sul semipiano destro.

1. Errore di inseguimento inferiore al 2% per riferimento a un segnale di tipo rampa.

La richiesta di asservire un errore di inseguimento specifico comporta la valutazione dello schema di controllo a transitorio esaurito, ovvero a regime: in gergo si parla di precisione statica del sistema. Nel caso corrente, il riferimento da cui calcolare l'errore è un segnale di tipo rampa, generico, del tipo

$$r(t) = R\ t\ 1(t) \ \rightarrow\ R(s) = \frac{R}{s^2}$$

che ci permette di definire l'errore di inseguimento.

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+L(s)} = \frac{R(s)}{1+C(s)G(s)} = \frac{R}{s^2}\,\frac{1}{1+C(s)G(s)}$$

Ovviamente la richiesta è la valutazione dello stesso per precisione statica, ovvero a transitorio esaurito. Ne deriva di conseguenza l'applicazione del teorema del valore finale.

$$e_{inf,r} = \lim_{t\to+inf} e(t) = \lim_{s\to 0} s\ E(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{R}{s^2}\,\frac{1}{1+L(s)} = \frac{R}{\lim\limits_{s\to 0} s + s\ C(s)\ G(s)} = \frac{R}{\lim\limits_{s\to 0} s\ C(s)\ G(s)}$$

È chiaro che la funzione d'anello L(s) debba essere di tipo 1, ovvero presenti un solo polo nell'origine. Ricordiamoci di essere ancora in fase di progettazione, e quindi con un limite all'inseguimento da rispettare attraverso la costruzione di C(s). Perciò, analizzando G(s), verifichiamo che l'unico polo nell'origine (e richiesto) è già presente: al controllore sarà dato un valore costante K di guadagno.

$$e_{inf,r} = \frac{R}{\lim\limits_{s\to 0} s\ k\ G(s)} = \frac{R}{k\lim\limits_{s\to 0} s\ G(s)} = \frac{R}{k} \le 0{,}02 \rightarrow\ k \ge \frac{1}{0{,}02 * R} \rightarrow\ \ k \ge \frac{50}{R}$$

Consideriamo per semplicità di applicazione, un segnale in ingresso di tipo rampa unitaria ($R = 1$). Sulla base di quanto emerso, scelgo $C(s) = 52$ tentando di rispettare la specifica richiesta. Ottengo allora la seguente *funzione d'anello non compensata* (mancando ancora le correzioni previste dalle successive richieste):

$$L(s)_{non-comp} = C(s)\ G(s) = \frac{4394}{3} \frac{s+6}{s(s^2+13\,s+169)}$$

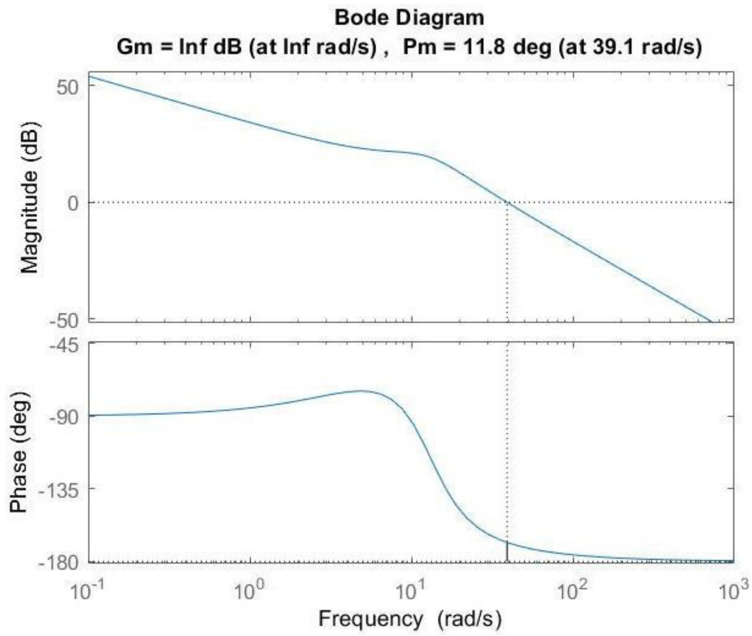


Figura 1 - Diagramma di Bode di $L(s)_{non-comp}$

2. **Picco di risonanza $\mathbf{M_{r,dB}} \leq$ 3 dB e banda passante $\mathbf{30\ \frac{rad}{sec} \leq \omega_{BW} \leq 50\ \frac{rad}{sec}}$.**

È imposto un limite al picco di risonanza della funzione di trasferimento sensitività $T(s)$. Richiedendo un fenomeno di risonanza, immaginiamo che la $T(s)$ sia approssimabile in media frequenza a un sistema del secondo ordine avente poli complessi e coniugati.

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Il picco di risonanza, in sistemi di questo tipo, è ottenibile come

$$M_r = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}} \rightarrow M_{r,dB} = -20\log\left(2\delta\sqrt{1-\delta^2}\right) \leq 3\ dB,$$

riuscendo a ricavare lo smorzamento

$$M_{r,dB} \leq 3\ dB \rightarrow\ \delta \geq 0{,}38$$

Lo smorzamento è legato al margine di fase attraverso l'approssimazione $\Phi_M \cong 100\ \delta$ e quindi avremo un valore di Φ_M che dovrà essere superiore a 38°. Dal momento che vale sempre $\omega_c \leq \omega_{BW}$, necessariamente dovremo imporre anche $30\ \frac{rad}{sec} \leq \omega_c \leq 50\ \frac{rad}{sec}$.

In relazione a quanto ottenuto, scegliamo di rispettare un margine di fase di $40°$ e una pulsazione di attraversamento di $47.9\ \frac{rad}{s}$.

$|L(j\omega_c)| = 0.66;\ \arg[L(j\omega_c)] = -170.83\ \rightarrow\ \Phi_{M,no-comp} \cong\ 180 - |\arg[L(j\omega_c)]| \cong 9.17° <\ 40° < \Phi_M$

Il margine di fase che ne risulta non rispetta le specifiche preposte, con un valore nettamente al di sotto degli almeno 40° previsti. Per questo motivo diviene necessaria un'azione correttrice, che determini sia un'amplificazione sul modulo che un anticipo sulla fase. Un regolatore con queste proprietà è definito come *rete anticipatrice*.

È prevista l'aggiunta alla funzione di anello di una coppia polo-zero del tipo

$$C_{rete-ant}(s) = \frac{1 + \tau\, s}{1 + \alpha\, \tau\, s}\ , 0 < \alpha < 1$$

In questo modo, la costante di tempo al denominatore sarà più piccola di quella al denominatore, a causa del fattore α che ne riduce il valore: ne consegue una struttura zero-dominante. Essendo lo zero il contributo più vicino all'origine degli assi, in MF $\left(\frac{1}{T} < \omega < \frac{1}{\alpha T}\right)$ si avrà un'amplificazione sul modulo e un anticipo sulla fase (per zero a fase minima). A quel punto interverrà il polo (stabile) in AF a compensare quanto causato dallo zero: la pendenza dei moduli sarà riportato al valore nullo, mentre agirà in controfase sul diagramma della fase.

Esiste un approccio algoritmico per cui è possibile determinare i valori T e α e quindi costruire la rete correttrice adatta alle specifiche che vogliamo soddisfare. Esso prevede tre parametri: ω_c, che abbiamo già considerato pari a 42.2 rad/s; m, equivalente al reciproco di $|L(j\omega_c)|$; θ, il cui ruolo è basilare in relazione al tipo di rete che si vuole costruire, equivalendo al compenso (in anticipo o ritardo) che si vuole dare alla fase affinché assuma un valore nel rispetto del margine di fase che si è previsto. Nel nostro caso, parlando di rete anticipatrice, esso assumerà un valore certamente positivo volto a incrementare la fase e quindi compensare sul margine di fase.

Avendo prefissato un margine di fase di 40°, occorre un compenso di almeno $40° - \Phi_{M,no-comp} = 29.3°$. Si sceglie, $\theta = 48°$. Ecco la rete correttrice così ottenuta:

$$C_{rete-ant}(s) = \frac{1 + 0.0235\, s}{1 + 0.00008\, s}$$

La funzione di anello finale sarà pertanto:

$$L(s) = L(s)_{no-comp}\, C_{rete-ant}(s) = \frac{420140\ (s+6)(s+42.58)}{s(s+12210)(s^2+13\, s+169)}$$

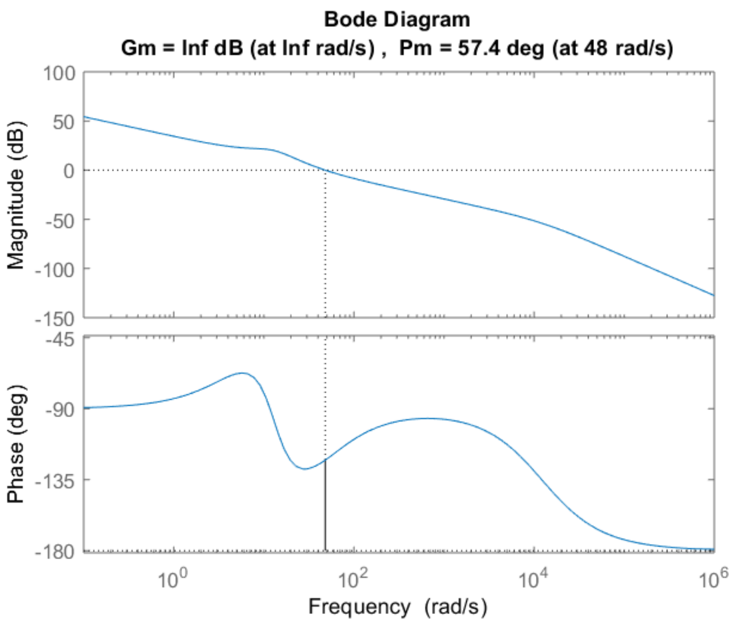
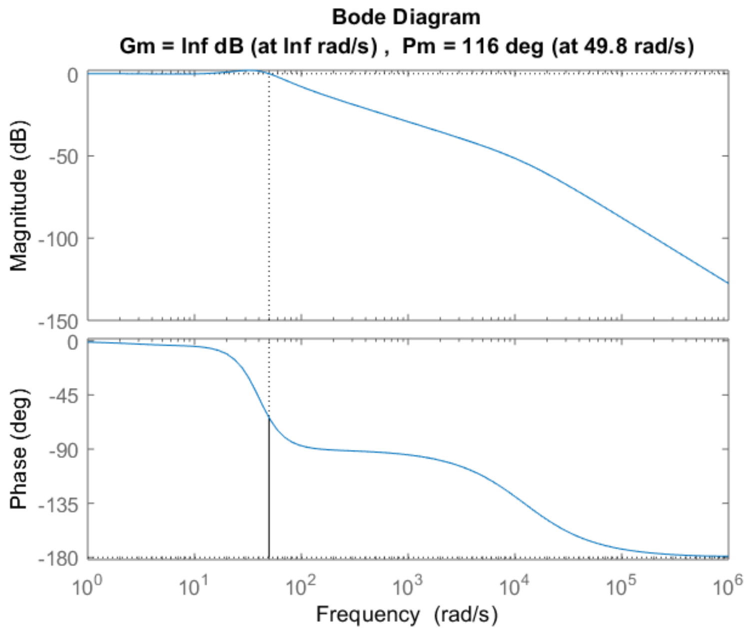


Figura 2 - Digramma di Bode L(s)

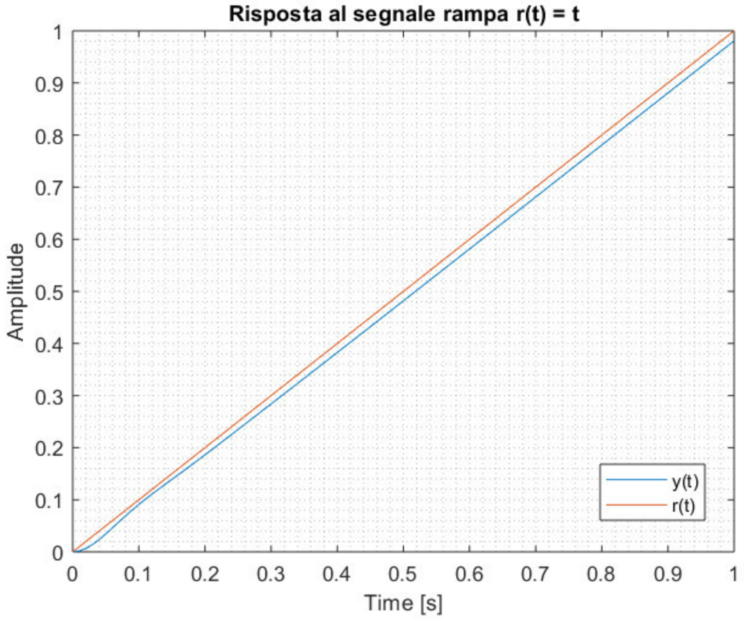
Si nota immediatamente che il vincolo del margine di fase è soddisfatto. Verifichiamo che le due limitazioni sulla funzione sensitività T(s) siano altrettanto verificate. La funzione di trasferimento del sistema retroazionato è facilmente ottenibile come

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{420140\,(s+42.58)(s+6)}{(s+12180)(s+5.45)(s^2+41.94\,s+1616)}$$



T(s) ha il medesimo grado relativo di G(s) e si nota facilmente che il picco di risonanza è limitato nella fascia di 3 dB. La pulsazione di banda passante assume il valore $\omega_{BW} = 49.8\frac{rad}{s}$, che rientra all'interno dell'intervallo richiesto. Come ipotizzato, sono presenti due poli complessi e coniugati, con smorzamento pari a $\delta = 0.52$ (che rispetta il vincolo dedotto a partire dal picco di risonanza) e pulsazione naturale $\omega_n = 40.2\frac{rad}{s}$.

È interessante verificare se anche il vincolo di asservimento della rampa unitaria nel dominio del tempo sia rispettato. Per visualizzare questa caratteristica, riportiamo semplicemente il grafico temporale dell'uscita.



L'errore di inseguimento è inferiore al 2 %, così come richiesto dalle specifiche.

```
clear; close all;

% Inserisco le funzioni di trasferimento G(s) e definisco la funzione di
% anello non compensata L(s).

G = tf([1,6],[6/169,6/13,6,0]);
C = 52;
L = series(C,G);

% Disegno il diagramma di Bode della funzione di anello non compensata.
figure(1);
margin(L);

% Determino lo smorzamento relativo al massimo picco di risonanza.
Mr = 3;
delta = smorz_Mr(Mr);

% Calcolo la funzione d'anello sulla nuova pulsazione di attraversamento.
wc_new = 47.9;
[mag,phase] = bode(L, wc_new);

% Progetto la rete correttrice che andrà a compensare la funzione d'anello.
m = 1/mag;
theta = 48;
[tau_1,tau_2] = generica(wc_new,m,theta);
C_reteAnt = tf([tau_1,1],[tau_2,1]);

% Ottengo la nuova funzione di anello. Per verificare che siano rispettate
% le specifiche di progetto, disegno il diagramma di Bode.
L_new = series(L,C_reteAnt);
figure(3);
[mag_new,phase_new] = bode(L_new,wc_new);
margin(L_new);

% Calcolo la funzione di trasferimento del sistema con feedback e ne vado a
% fare il diagramma di Bode, verificando così le specifiche richieste.
T = (L_new)/(1+L_new);
figure(4);
margin(T);
```