

Kekacauan vs Keteraturan

Aditya Firman Ihsan

The background of the slide is white, covered with numerous grey ink splatters and blotches of varying sizes. In the center, there is a faint, semi-transparent image of a pencil lying horizontally.

Bagaimana kita mendeskripsikan yang tidak teratur?



Bagaimana kita mendeskripsikan yang tidak teratur?

Tidak pasti, kacau, acak...

Uncertain



“**Berbicaralah dengan data!**”

kata banyak orang

Tapi, apa maksudnya?

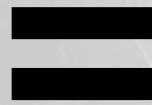
Berdasarkan data = pasti benar?

NB: Data adalah representasi realitas, berbentuk apapun

Realita itu
kompleks



Keterbatasan
Pengamatan



Data cenderung tidak pernah lengkap



Ketidakpastian (*uncertainty*)

Problem of induction: sebanyak apapun pengamatan tidak akan cukup untuk menyatakan sesuatu itu pasti benar

Realita itu
kompleks



Aleatoric
Uncertainty

Ketidakpastian "natural" yang
inheren ada dalam sistem, tidak
bisa direduksi

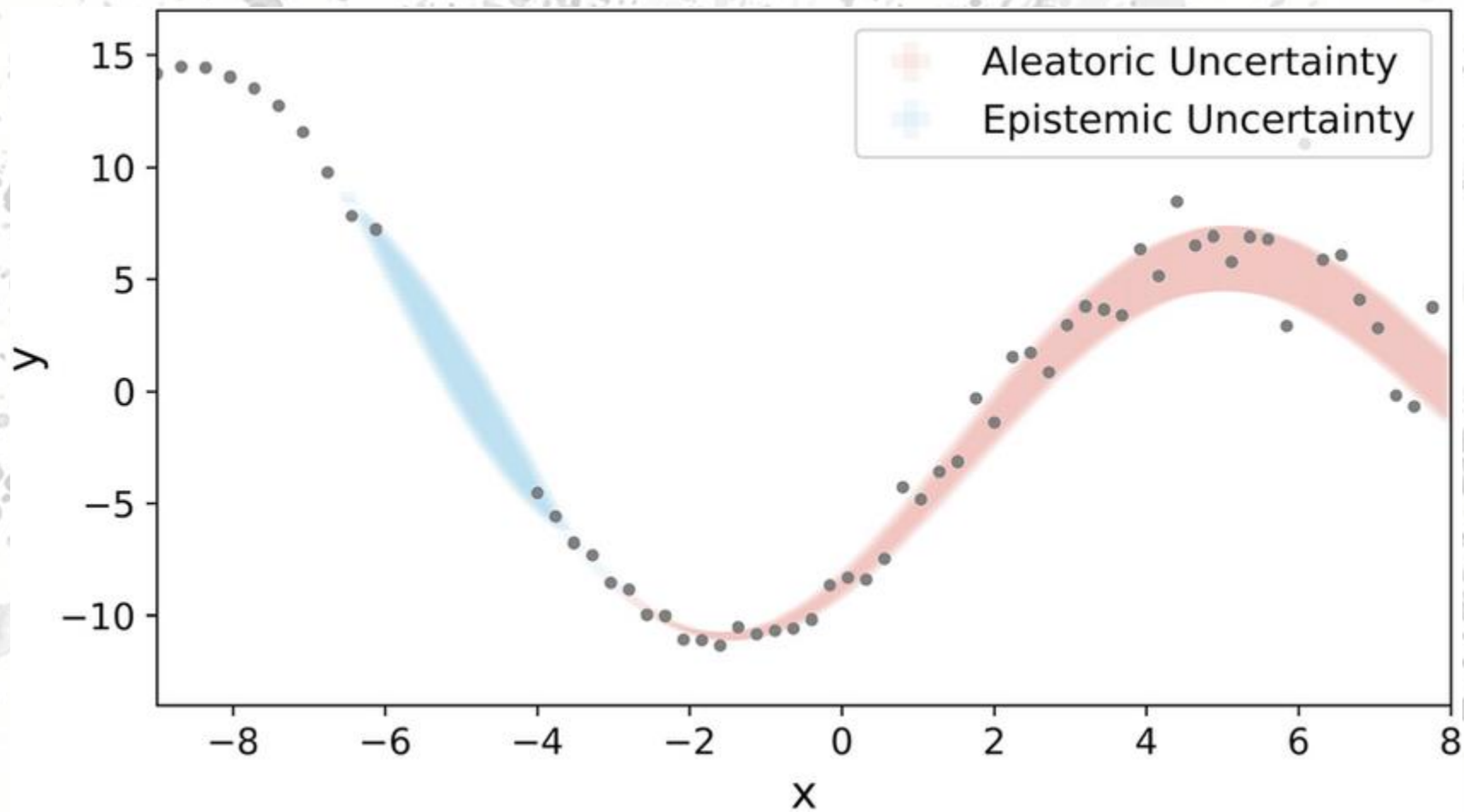
Keterbatasan
Pengamatan



Epistemic
Uncertainty

Ketidakpastian dari kurang
lengkapnnya data/informasi

Uncertainty



Uncertainty

Untungnya, manusia adalah peramal jenius!

Daripada pasrah pada ketidakpastian,
manusia belajar untuk “mengendalikan”
ketidakpastian itu

Dan voila, statistika.

Kenapa statistika?

Lebih mudah mengatakan
“sebagian besar burung terbang” (uncertain)
ketimbang

“Burung terbang, kecuali yang masih muda,
yang sakit, yang sayapnya rusak, yang, dst”
(deterministik)

Review singkat Statistika

Eksperimen: proses pengambilan sampel

Sampel: subset dari populasi

Ruang sampel: semua kemungkinan hasil dari suatu eksperimen

Contoh:

Eksperimen: 5x pelemparan koin

Sampel: Gambar, Gambar, Angka, Angka,
Gambar

Ruang sampel: {gambar, angka}

Eksperimen: Pengukuran tinggi 5 anak

Sampel: 100, 98, 85, 104.5, 91

Ruang sampel: Bilangan riil positif

Ingat *epistemic uncertainty*

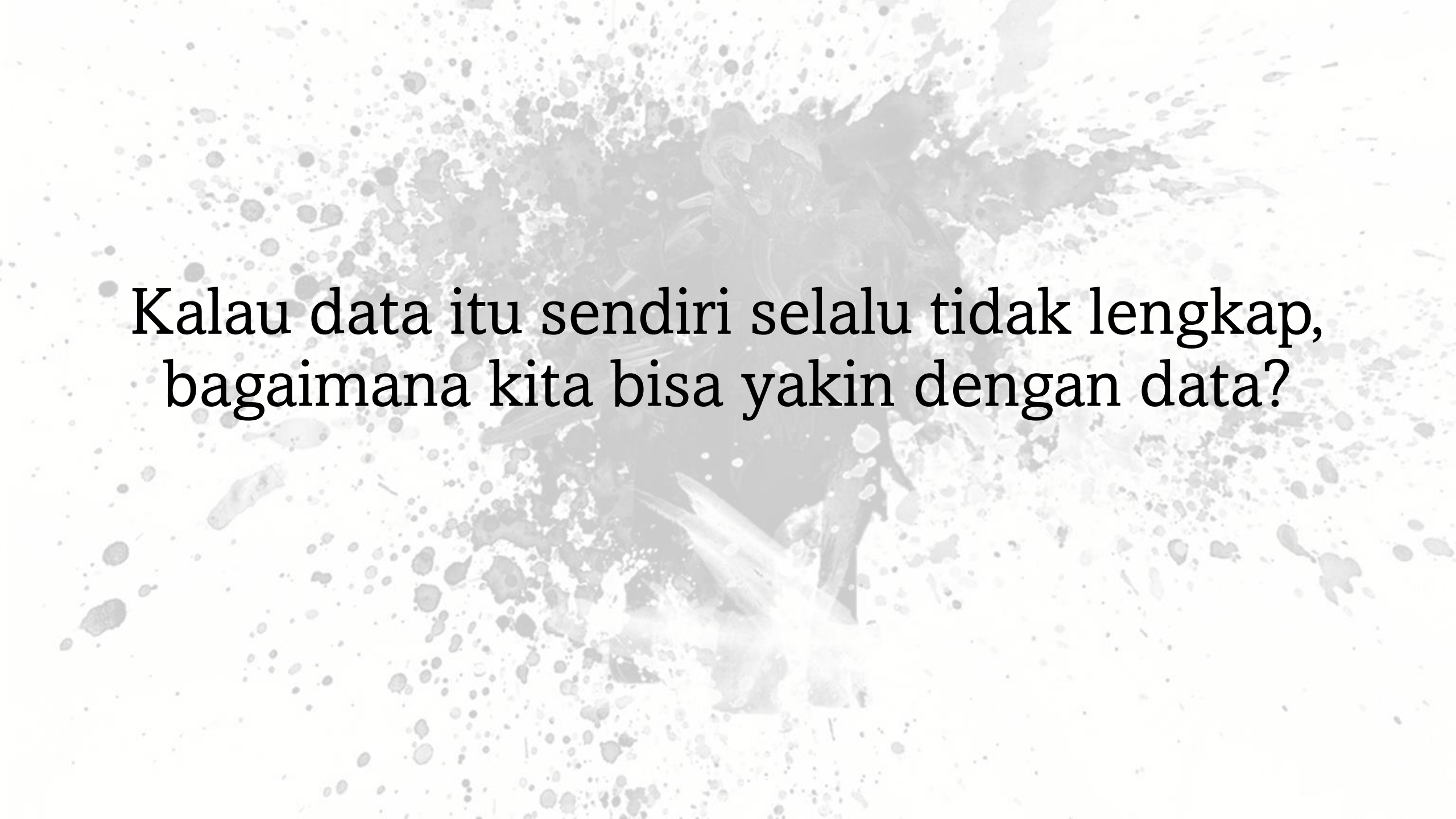
Sampel < **Populasi sesungguhnya**

Sehingga

Kesimpulan dari Sampel < **Kebenaran sesungguhnya**

Random





Kalau data itu sendiri selalu tidak lengkap,
bagaimana kita bisa yakin dengan data?

Jaminan kebenaran sampel: **acak!**

Tidak acak = sampel tidak mencerminkan populasi

Tanpa pola yang acak, tidak ada analisa statistik

Sampel yang
ideal: **IID**

Independen

pemilihan elemen yang satu tidak
mempengaruhi peluang pemilihan elemen
lain

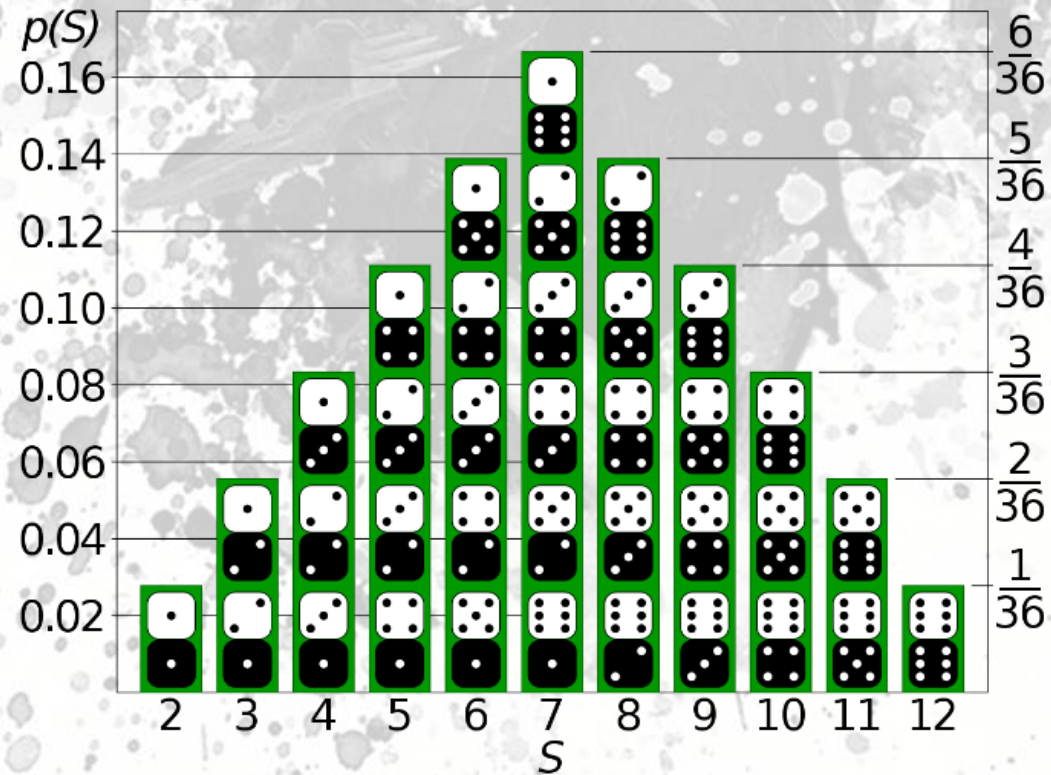
Tanpa bias
(*identically
distributed*)

setiap elemen punya peluang yang sama
untuk terpilih

Bentuk numerik dari ruang sampel: **Peubah acak** (*random variable*)

Setiap nilai **peubah acak** dipetakan ke suatu nilai peluang: **Distribusi**

$$X \sim P(X)$$



Apa artinya peluang $P(X)$?

“Peluang keberhasilan
di
mesin Jackpot itu 1%”

vs

“seorang dokter
mendiagnosa 60%
kemungkinan pasien itu
terkena kanker”

Dari 100 percobaan
main di mesin itu, 1
diantaranya akan
berhasil

“Peluang keberhasilan
di mesin Jackpot itu 1%”

frequentist

vs

Dokter itu cukup yakin
pasien itu terkena
kanker

“seorang dokter
mendiagnosa 60%
kemungkinan pasien itu
terkena kanker”

bayesian

Prinsip Bayes

Teorema Bayes:

$$P(A|B) = P(A) \frac{P(B|A)}{P(B)}$$

Atau dapat ditulis dengan bentuk lainnya

posterior = *prior* × *normalized likelihood*

P(A setelah B) = *P(A sebelum B)* × *suatu faktor*

P(hipotesis|data) = *P(hipotesis)* × *data likelihood*

Teorema ini memperlihatkan bagaimana peluang berubah berdasarkan informasi baru

Prinsip Bayes

peluang = derajat keyakinan

Keyakinan berubah ketika ada data/informasi baru.

Data akan mengubah **prior** menjadi **posterior**, sehingga kesimpulannya lebih “meyakinkan”

$$P(target) \rightarrow P(target|data)$$

Tapi, apakah ada yang benar-benar acak di dunia ini?

Coba pilih suatu bilangan acak 1-100 di pikiranmu, yakin itu benar-benar acak?

Laplace's Demon



Sejak Abad ke-17: Determinisme Sains Tumbuh.

"We may regard the present state of the universe as the effect of its past and the cause of its future. An intellect which at a certain moment would know all forces that set nature in motion, and all positions of all items of which nature is composed, if this intellect were also vast enough to submit these data to analysis, it would embrace in a single formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the tiniest atom; for such an intellect nothing would be uncertain and the future just like the past would be present before its eyes."

- Simon Pierre Laplace

Chaos



Lorenz Memutus Harapan



Mungkinkah segala hal bisa diprediksi?

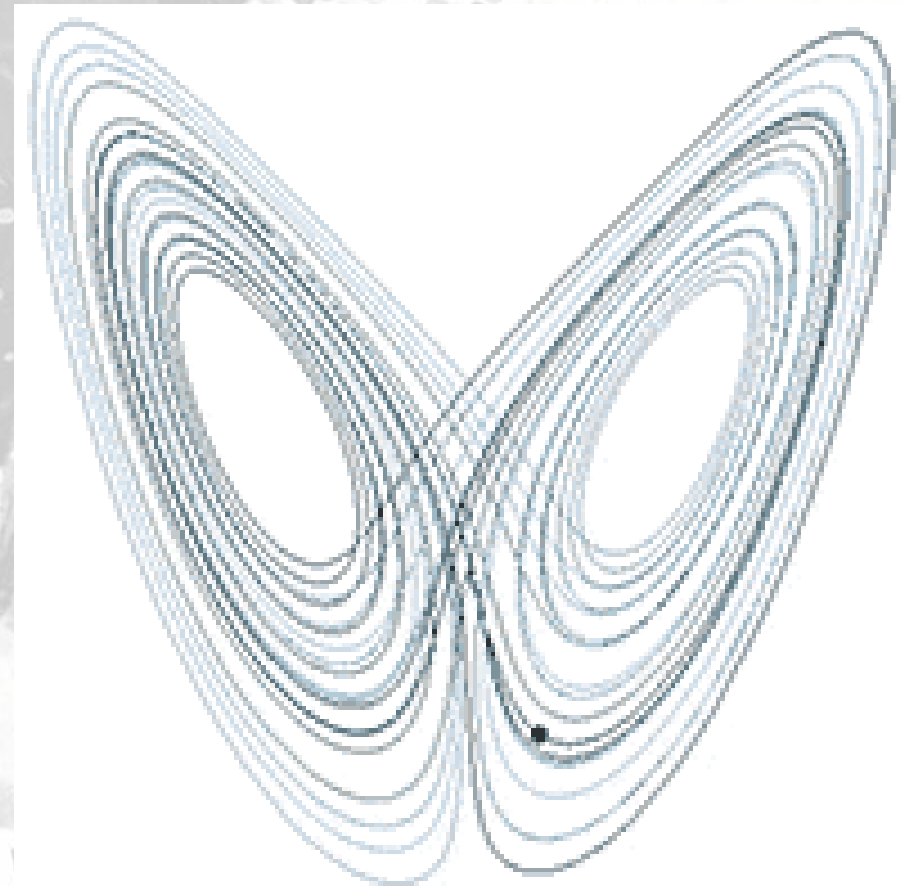
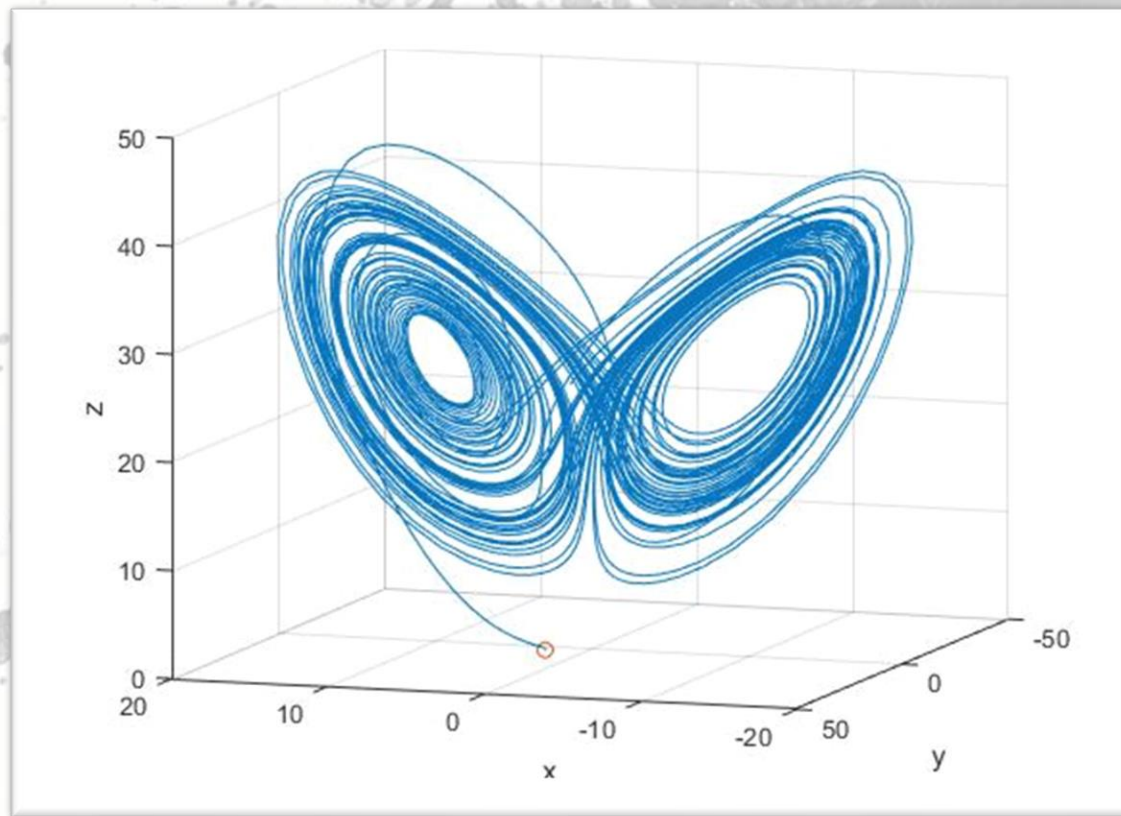
Pada 1963, Edward Norton Lorenz menemukan sistem yang mengubah pandangan dunia akan determinisme alam.

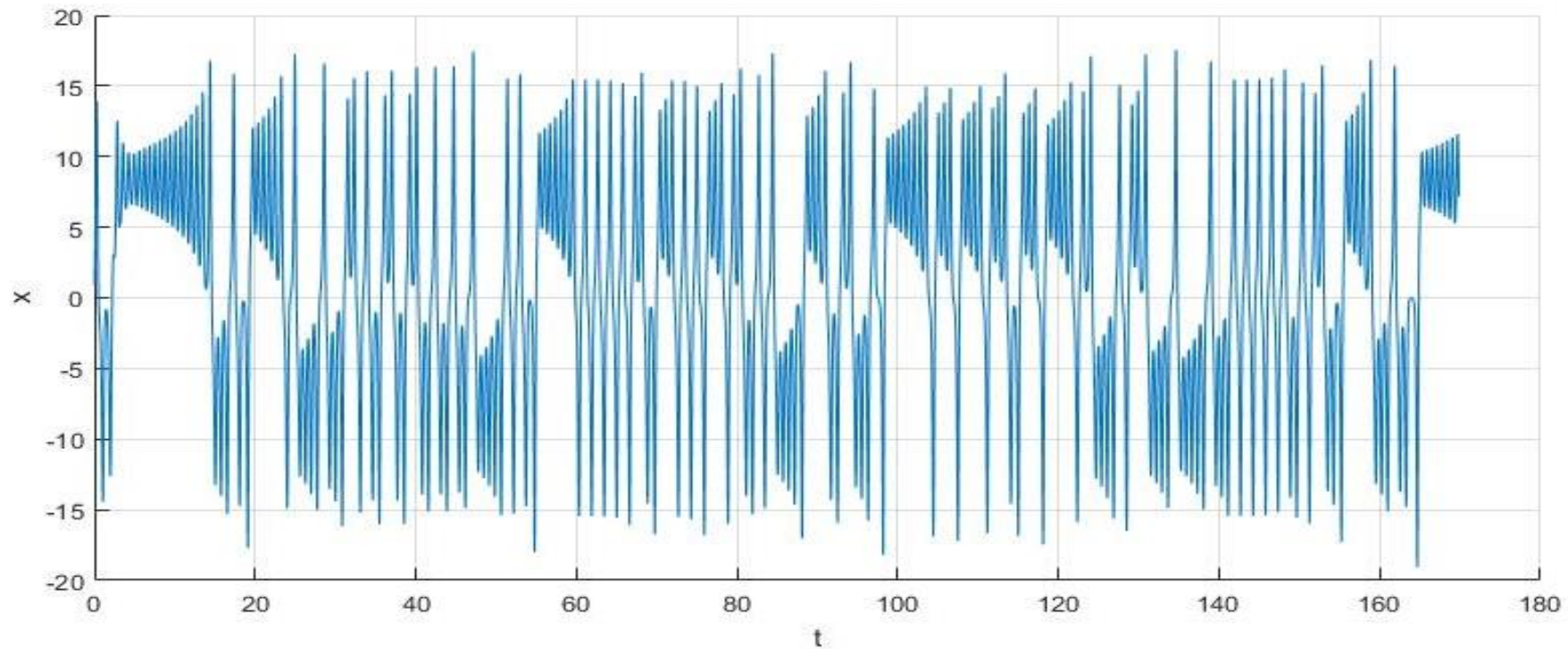
Misalkan x, y, z bergantung waktu (t)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma &= 10 \\ \rho &= \frac{8}{3} \\ \beta &= 28\end{aligned}$$

Lorenz Memutus harapan

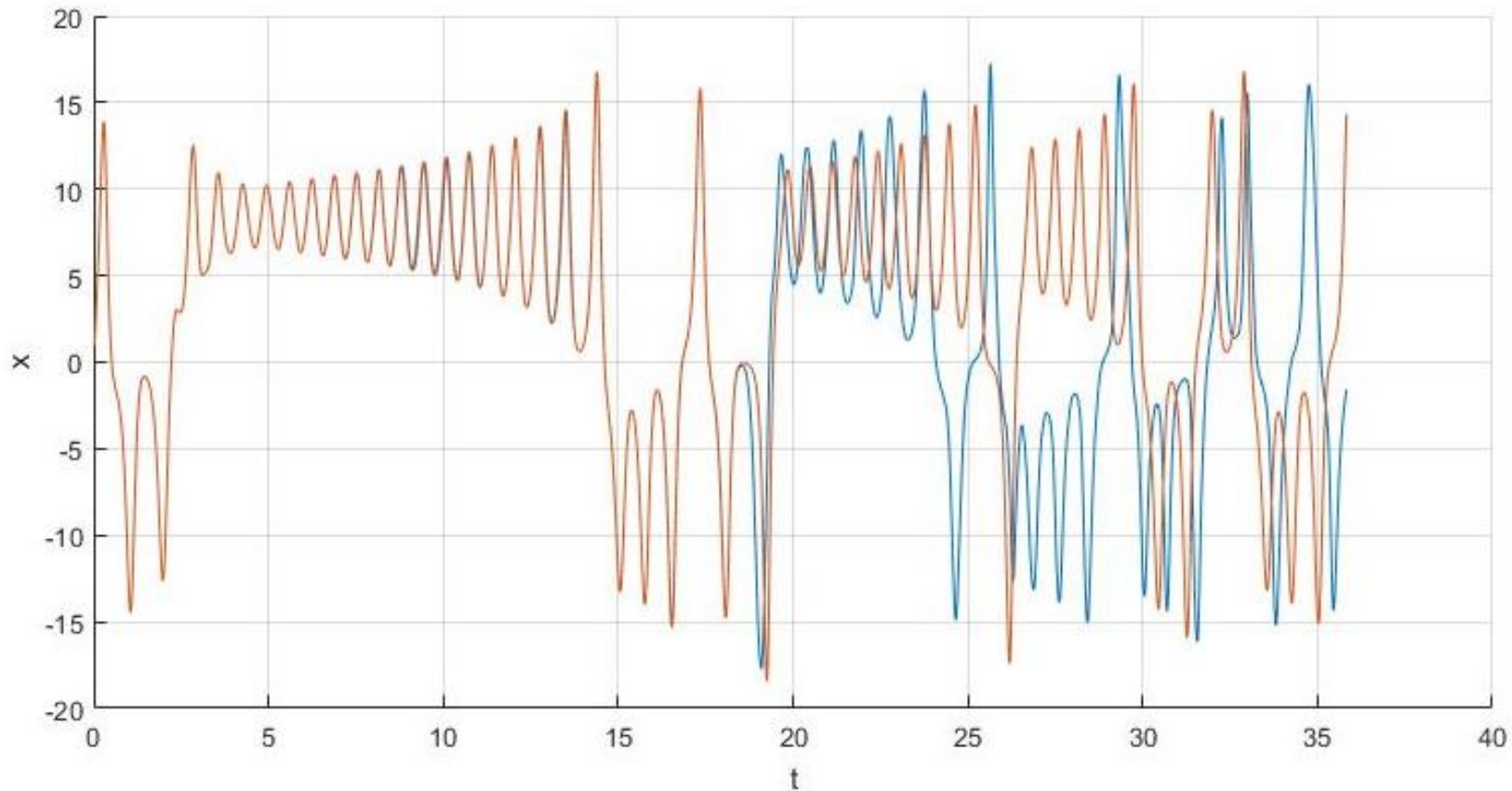




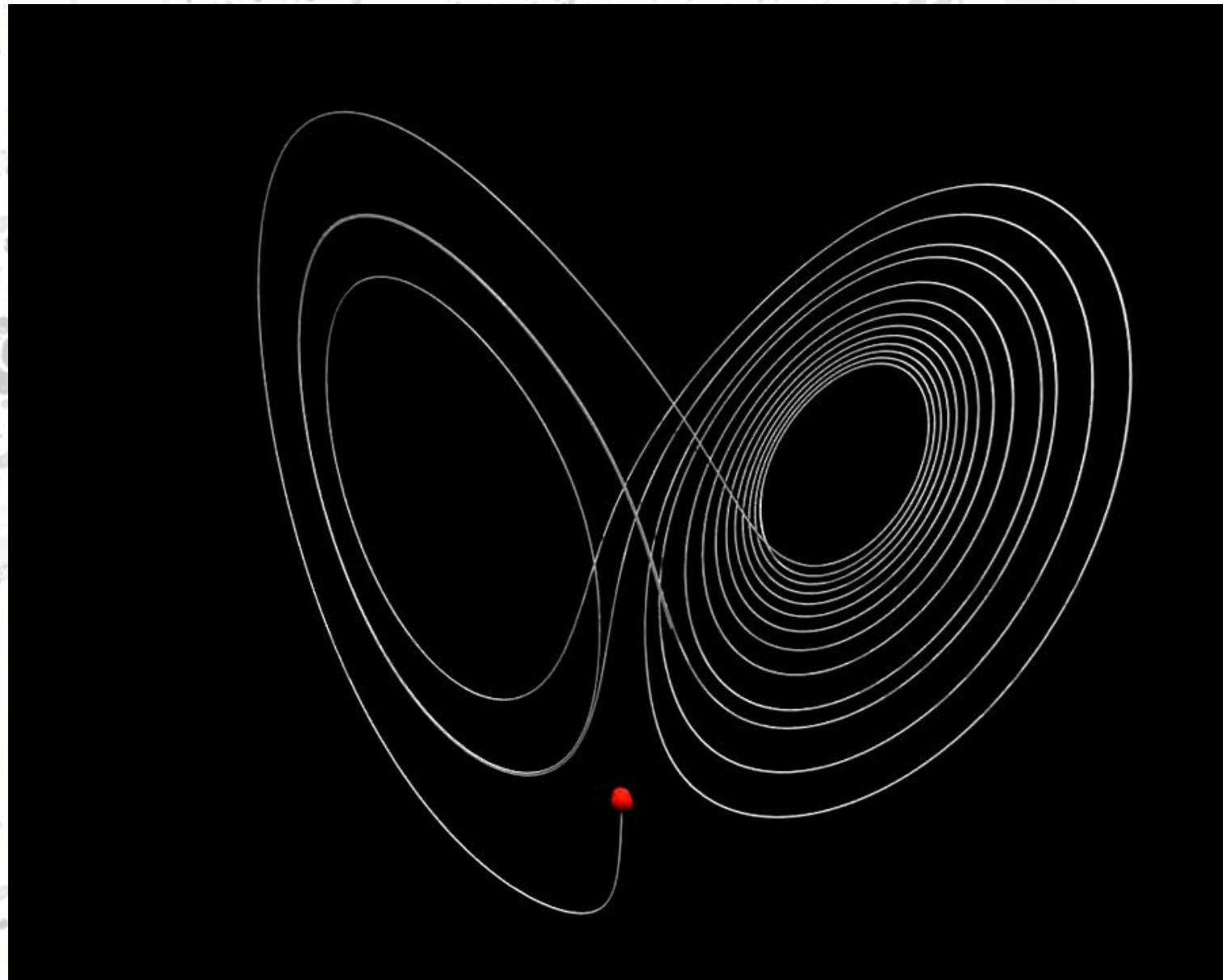
Sistem Lorenz: Deterministik tapi Unpredictable!

Semesta bukanlah mesin jam yang bisa diprediksi perilakunya selama tahu cara kerjanya.

Lorenz memutus harapan



Dua simulasi sistem Lorenz dengan beda nilai awal x sebesar 0.0001



Sistem Lorenz: sensitif oleh perubahan kecil!

Satu gangguan kecil menghasilkan perubahan yang besar

Butterfly Effect

One meteorologist remarked that if the theory were correct, one flap of a sea gull's wings would be enough to alter the course of the weather forever. The controversy has not yet been settled, but the most recent evidence seems to favor the sea gulls

- E.N. Lorenz

“Does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?”

Chaos

Sistem Lorenz menginisiasi apa yang dikenal sebagai *chaos*, sebuah perilaku alam yang kacau namun berasal dari sistem yang deterministik.

Deterministik \neq predictable

Chaos

Dalam matematika, sistem *chaos* adalah sistem yang

1. Sensitif terhadap kondisi awal
2. *Topologically transitive* (menyebarkan)
3. Punya orbit yang “padat”

Sinkronisasi Sistem Lorenz

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

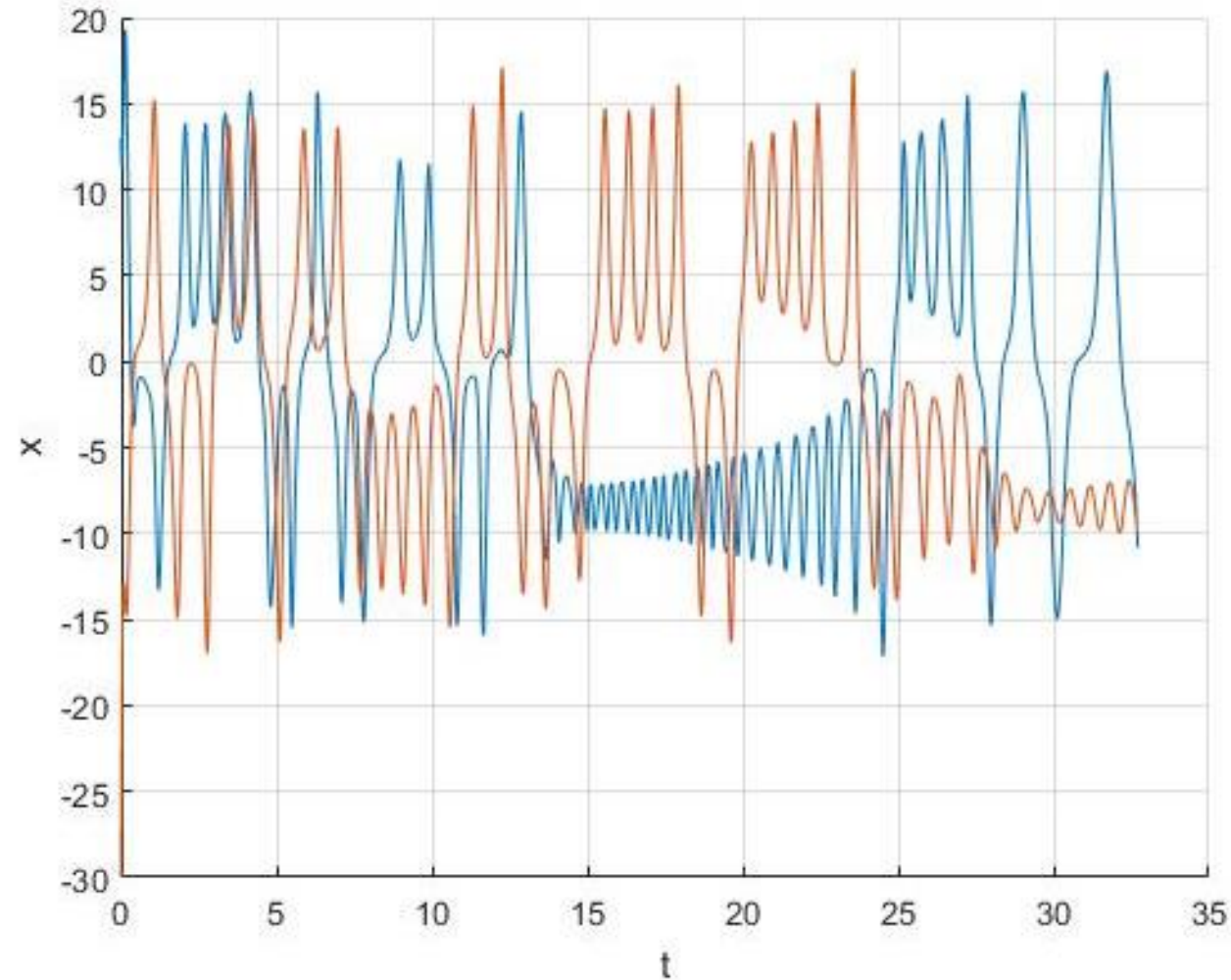
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

$$\frac{dx'}{dt} = \sigma(y' - x')$$

$$\frac{dy'}{dt} = x'(\rho - z') - y'$$

$$\frac{dz'}{dt} = x'y' - \beta z'$$

Sinkronisasi Sistem Lorenz



Sinkronisasi Sistem Lorenz

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) + \varepsilon(x - x')$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

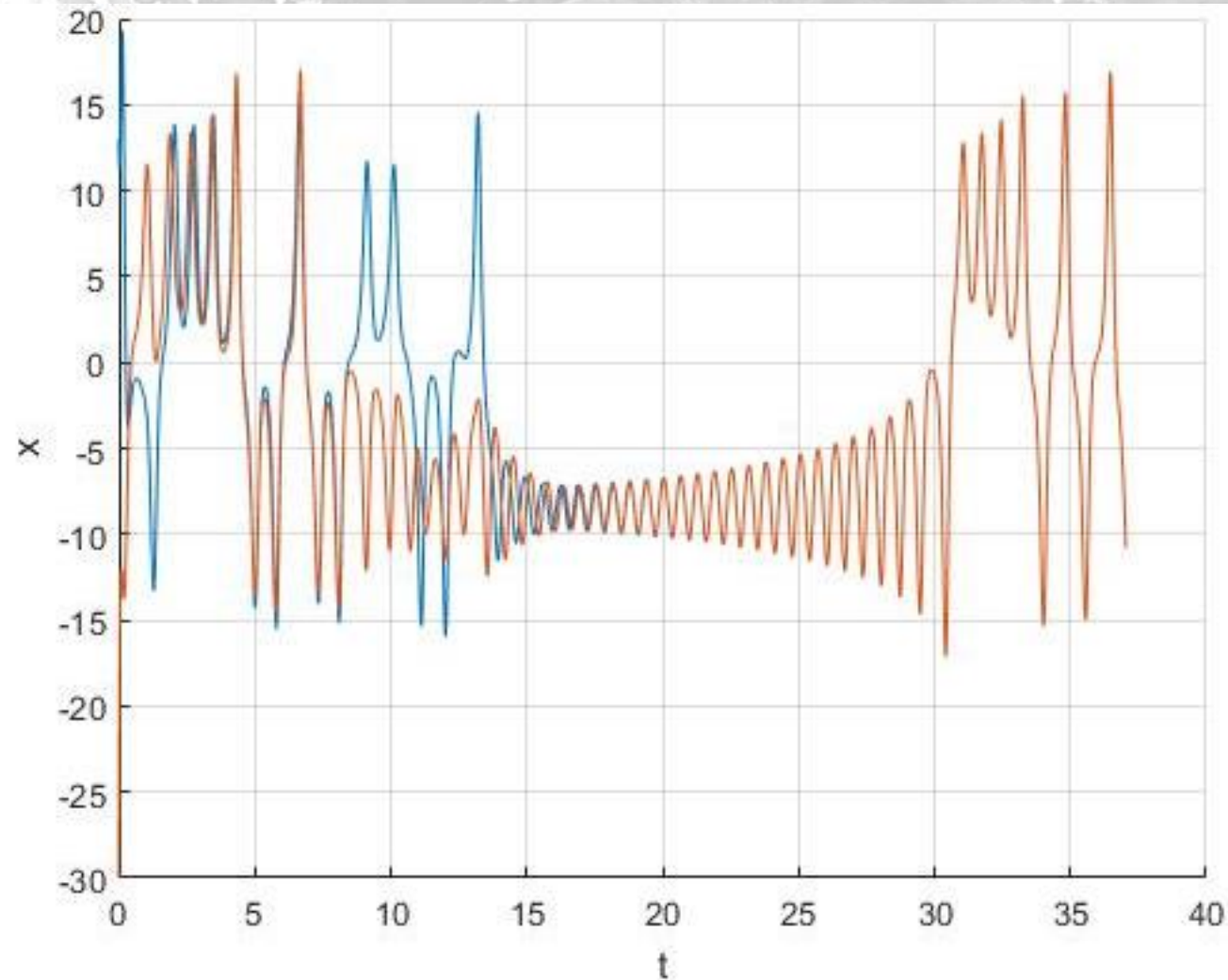
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

$$\frac{dx'}{dt} = \sigma(y' - x') + \varepsilon(x' - x)$$

$$\frac{dy'}{dt} = x'(\rho - z') - y'$$

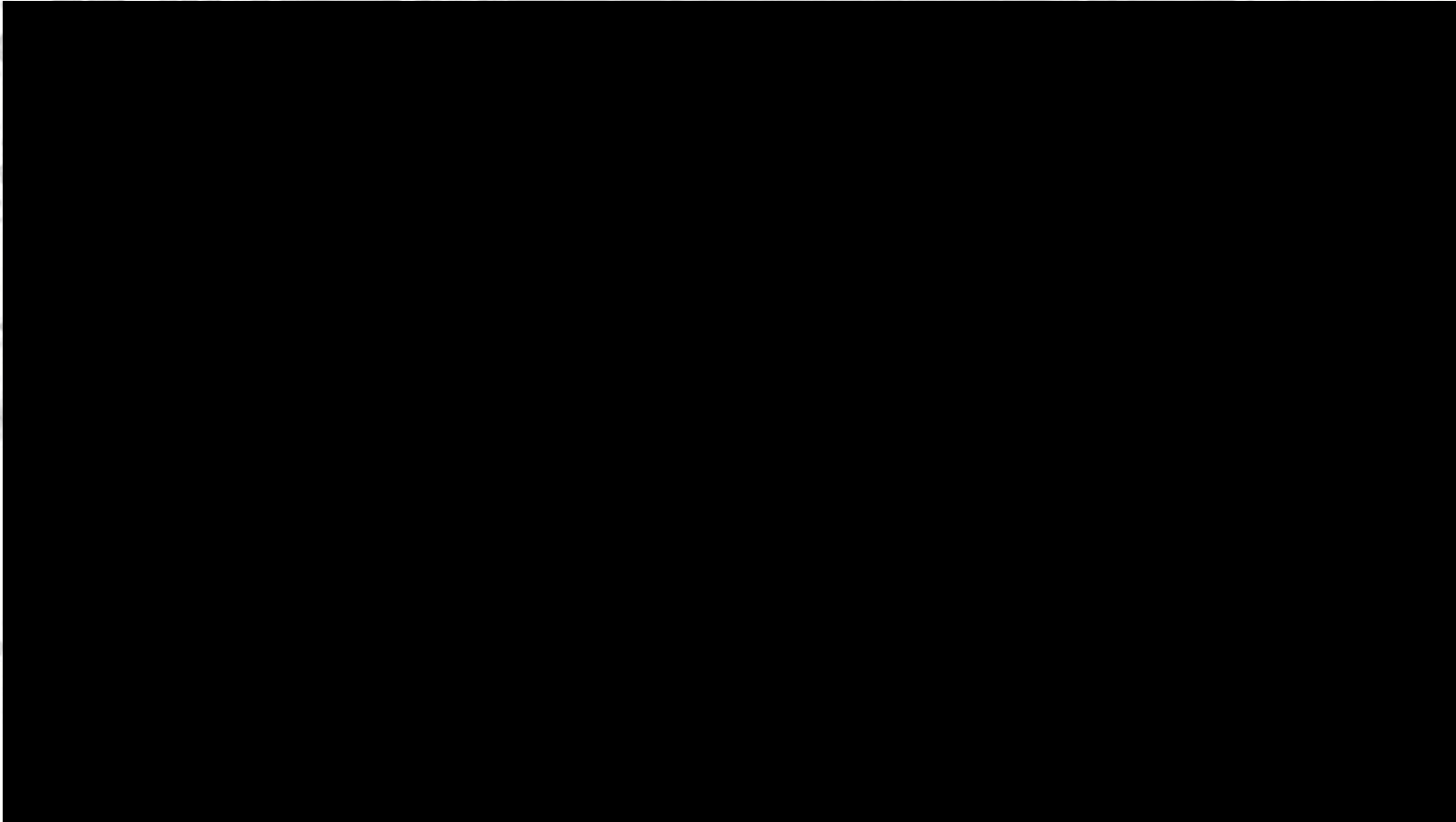
$$\frac{dz'}{dt} = x'y' - \beta z'$$

Sinkronisasi Sistem Lorenz





Sinkronisasi Metronom



Emergence

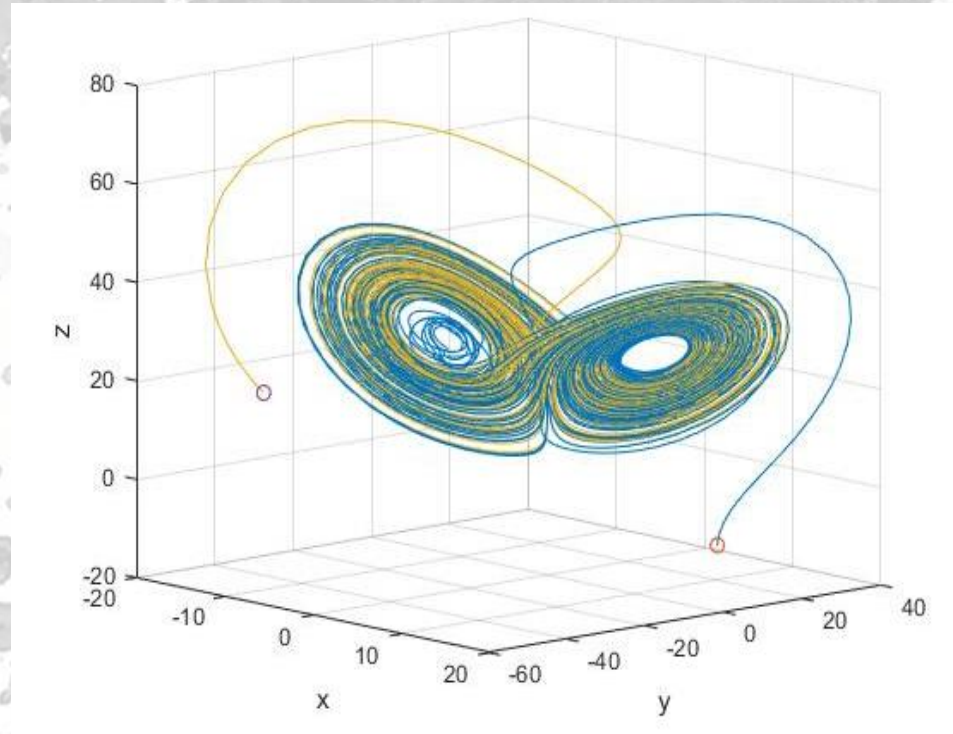




Kalau semesta itu *chaotic*, lantas apa yang membuatnya “teratur”?

Sistem Lorenz:

Chaotic tapi berstruktur

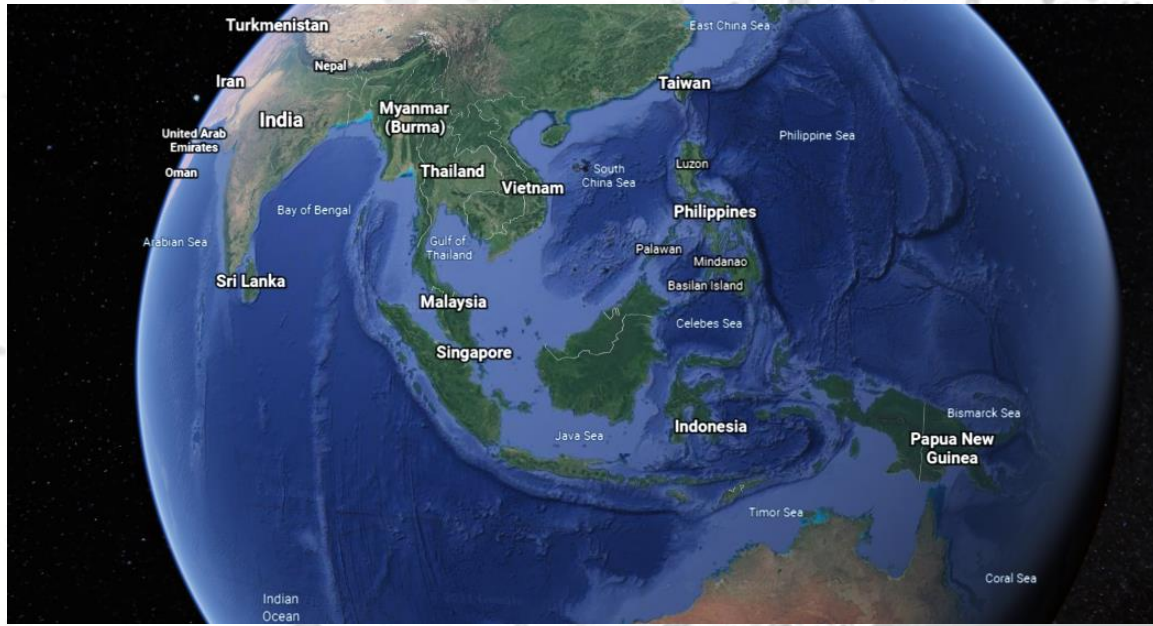


Dua simulasi sistem Lorenz dengan nilai awal yang cukup berjauhan

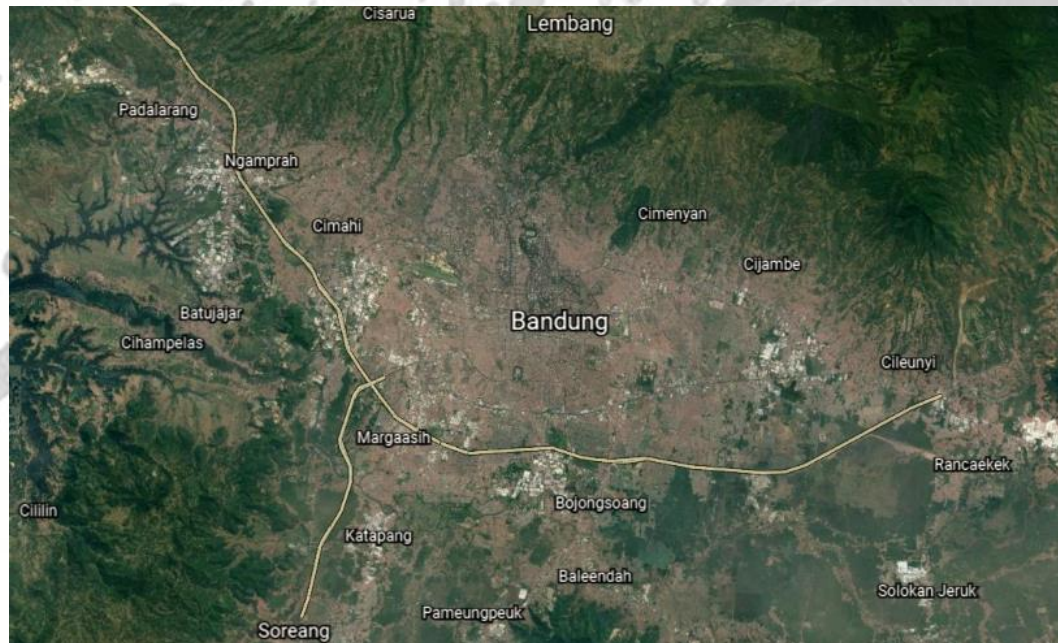
Data individu akan terlihat acak dan ‘berantakan’, namun bila dilihat dalam satu kesatuan kelompok, ada pola/struktur yang terbentuk

Justifikasi statistik: kumpulan memiliki informasi yang lebih kaya ketimbang satuan

“Kualitatif” di atas Kuantitatif



**Beberapa perspektif
akan berbeda bila
dilihat dalam skala
yang berbeda**



Emergence Property

- Dalam biologi, memandang kumpulan objek sebagai satu kesatuan akan memunculkan (*emerge*) sifat-sifat baru.

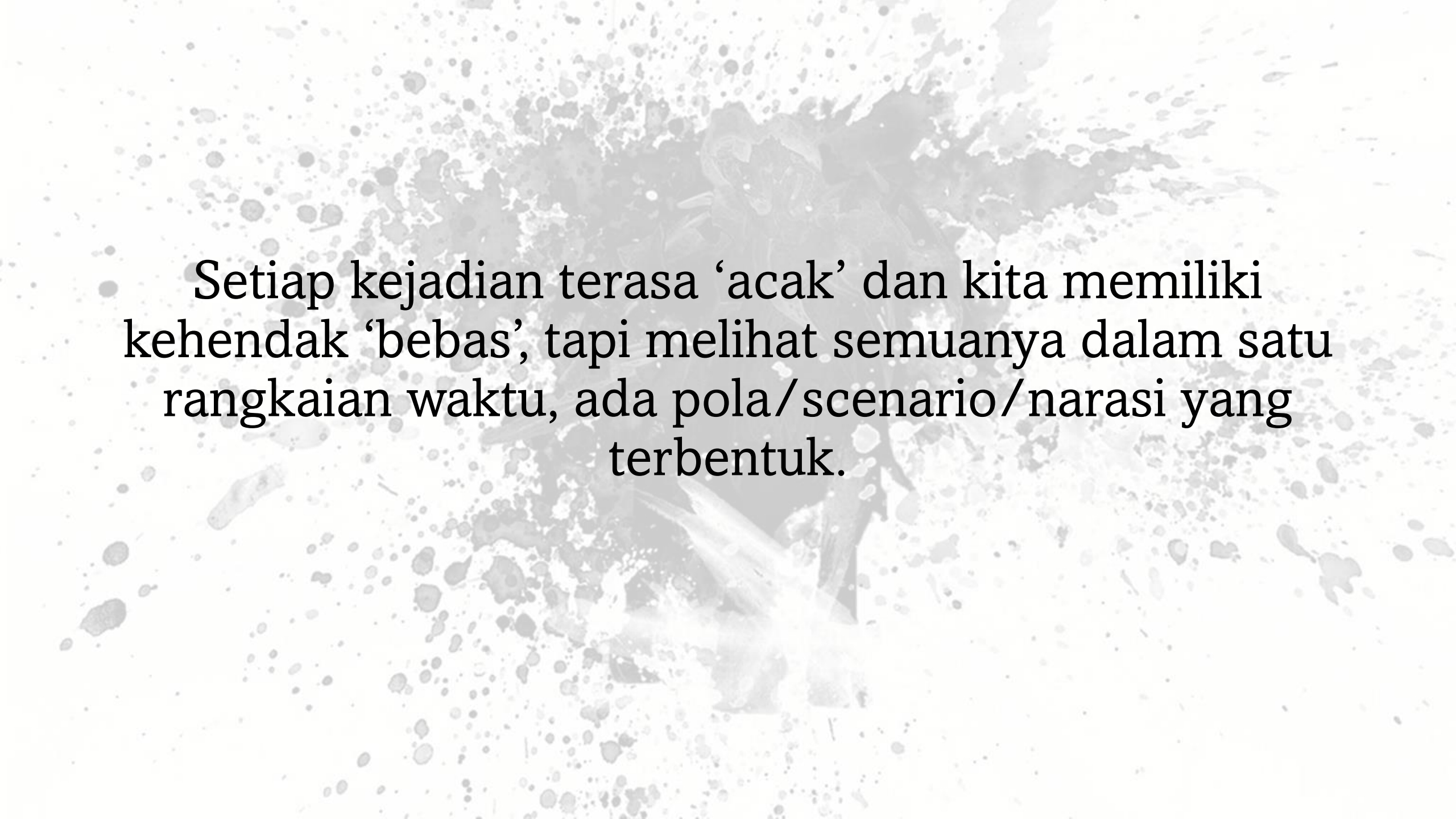
Kompleksitas bertingkat

Sel -> jaringan -> organisme -> ekosistem -> bioma -> gaia -> semesta

Setiap level kompleksitas memiliki keteraturan dan keteracakan yang berbeda ketimbang level sebelumnya.

EMERGENT PROPERTIES AT THE POPULATION LEVEL





Setiap kejadian terasa ‘acak’ dan kita memiliki kehendak ‘bebas’, tapi melihat semuanya dalam satu rangkaian waktu, ada pola/scenario/narasi yang terbentuk.

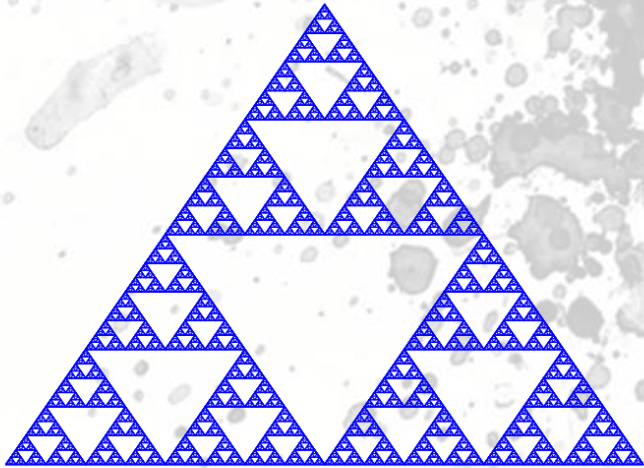
Fraktal?

- Sistem *chaos* pada beberapa kasus memiliki struktur fraktal.
- Fraktal: bentuk yang mengulang secara terus menerus



Dimensi pecahan

- Bentuk-bentuk fraktal mendeskripsikan wujud berdimensi pecahan (**Hausdorff Dimension**)
- Dimensi 0: titik. Dimensi 1: Garis. Dimensi 2: Bidang. Dimensi 3: Ruang. Fraktal ada **di antara** dimensi-dimensi itu

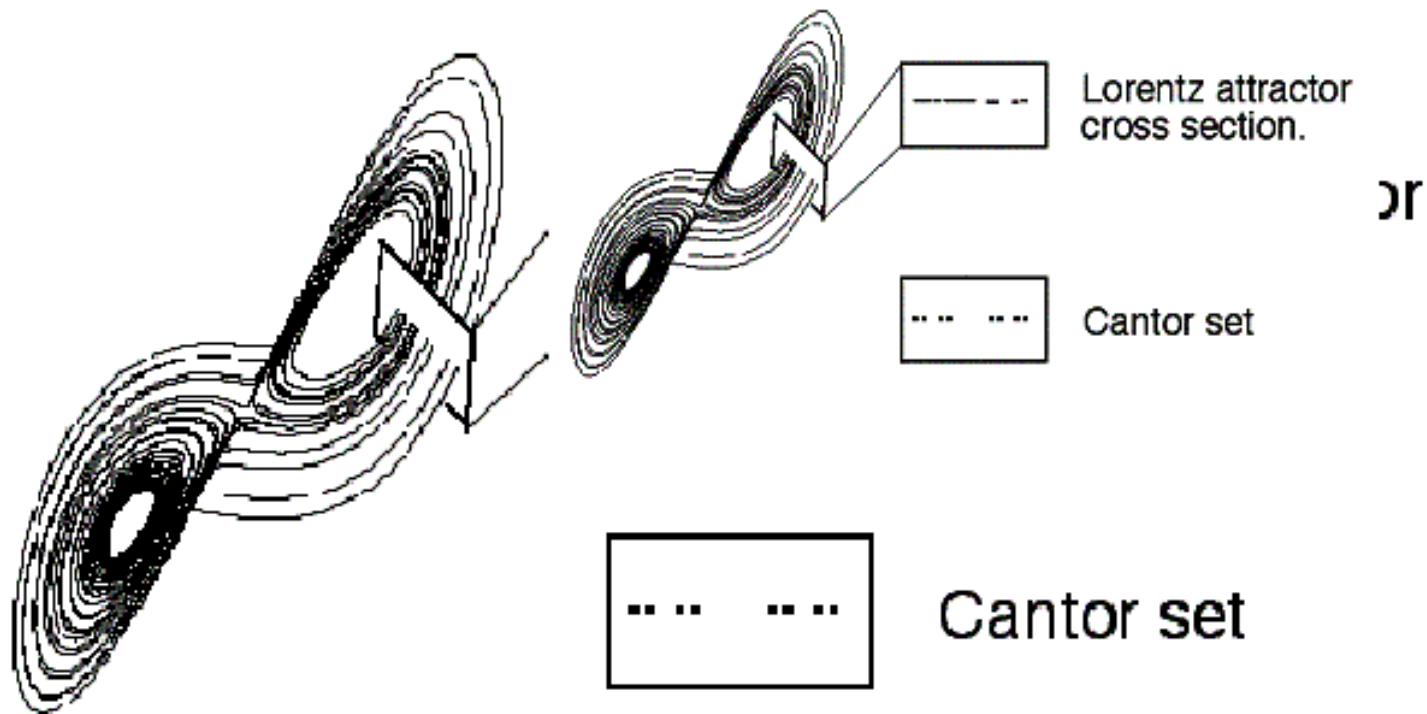


Segitiga Sierpinski, Dimensi 1,58



Salju Koch, Dimensi 1,26

Sistem Lorenz (lagi)?



Fraktal Mandelbrot

Kumpulan c
dimana

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

terbatas,



Di alam?



Di alam?



Di alam?



Di alam?



Di alam?



Di alam?



Entropy





Di balik semua struktur dan pola, ada informasi.

Ketidakpastian terkait dengan informasi yang terkandung dalam suatu fenomena



Kandungan informasi harus bisa diketahui dengan baik

Maka kita harus bisa kuantifikasi informasi

Entropi Informasi

Jumlah informasi dihitung dari seberapa tidak mungkin sesuatu itu terjadi

Contoh: bahwa “besok matahari terbenam di barat”, merupakan hal yang tidak informatif, karena peluangnya besar.

Uncertain = Informatif

Dihitung dengan entropi informasi

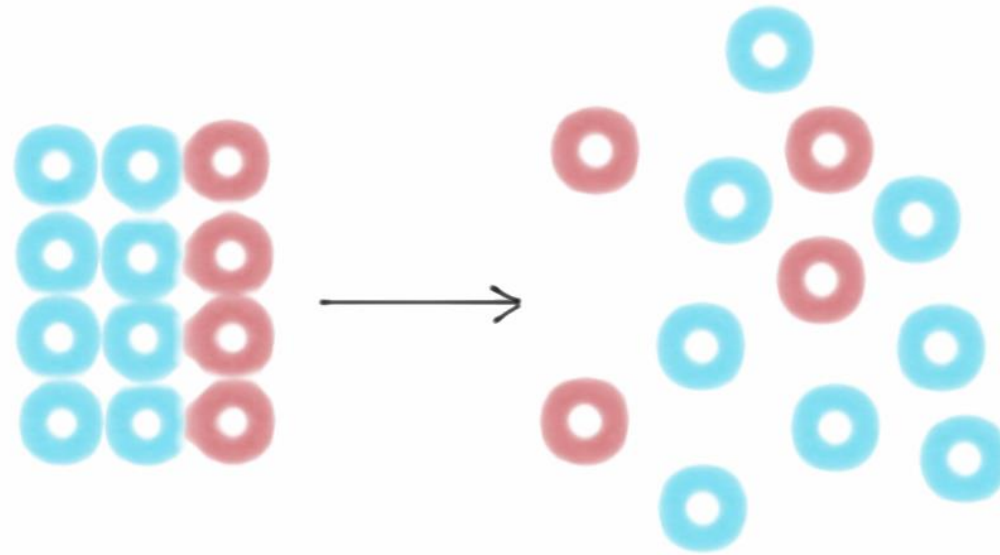
$$H(x) = \mathbb{E}_{x \sim P}[-\log(P(x))]$$



Entropi Informasi

Keacakan, yang terkait juga dengan tidak pastinya suatu proses, terkait dengan seberapa banyak informasi yang terkandung.

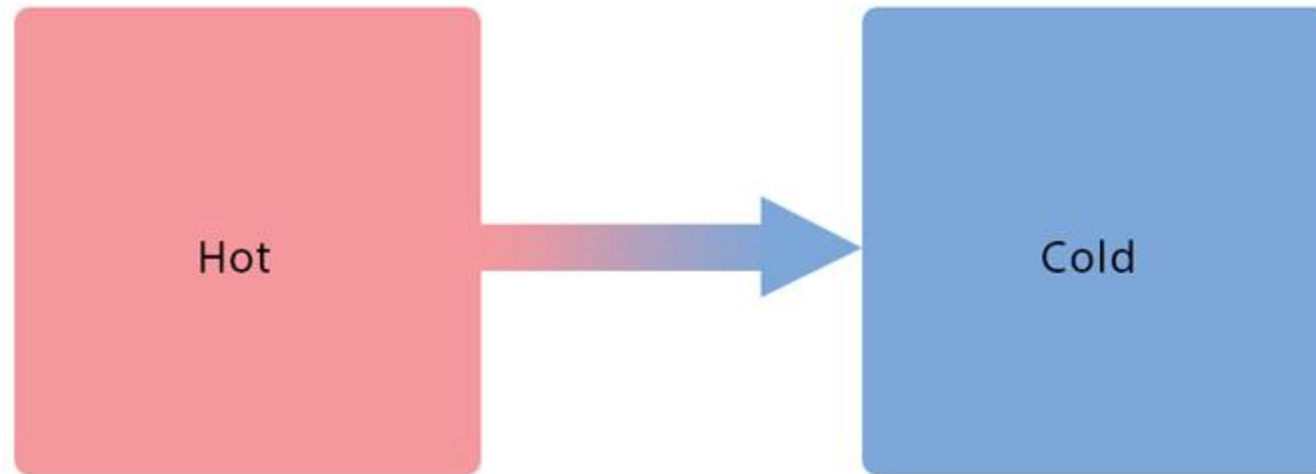
Semakin banyak informasi, semakin kacau, semakin tidak pasti.



Informasi rendah, entropi rendah → Informasi tinggi, entropi tinggi

Hukum termodinamika ke-2

Entropi suatu sistem selalu bertambah.



Hukum termodinamika ke-2

Setiap proses apapun cenderung mengurangi informasi yang terkandung, meningkatkan ketidakpastian.

Tambahan: Mekanika Kuantum

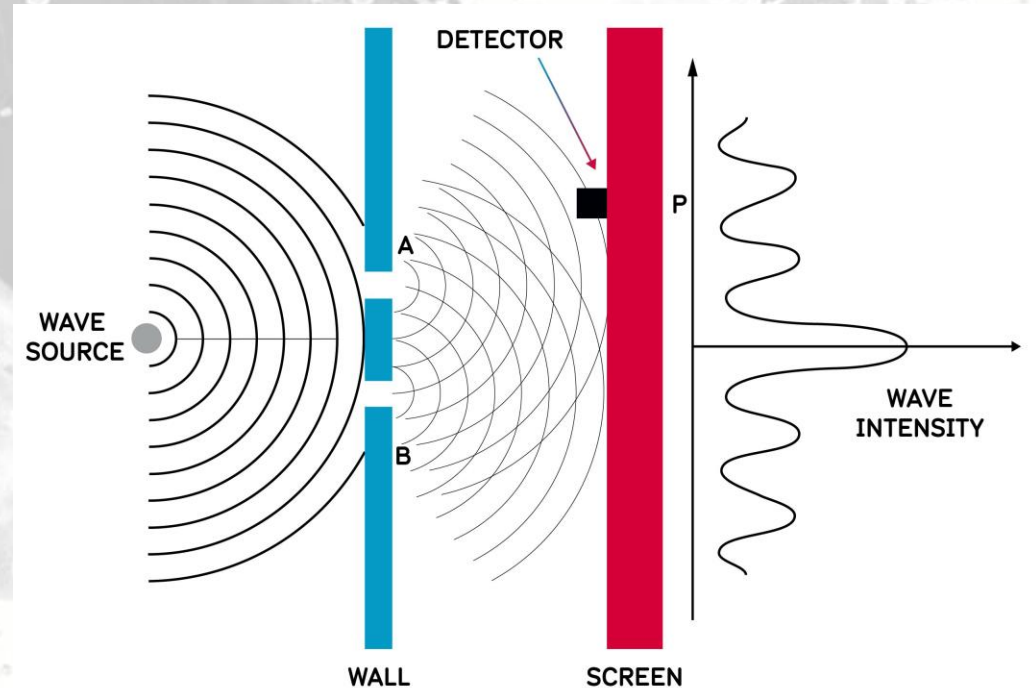


Mekanika Kuantum

Mekanika kuantum mendobrak determinisme sains.

Alam dideskripsikan melalui fungsi gelombang yang menjadi “peluang” keberadaan partikel.

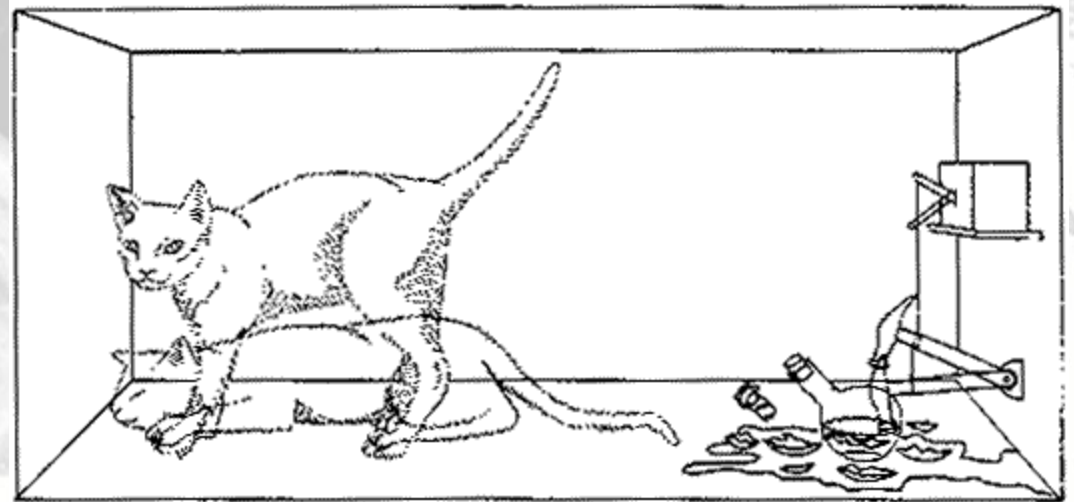
$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = \hat{H} |\Psi\rangle$$



Copenhagen interpretation

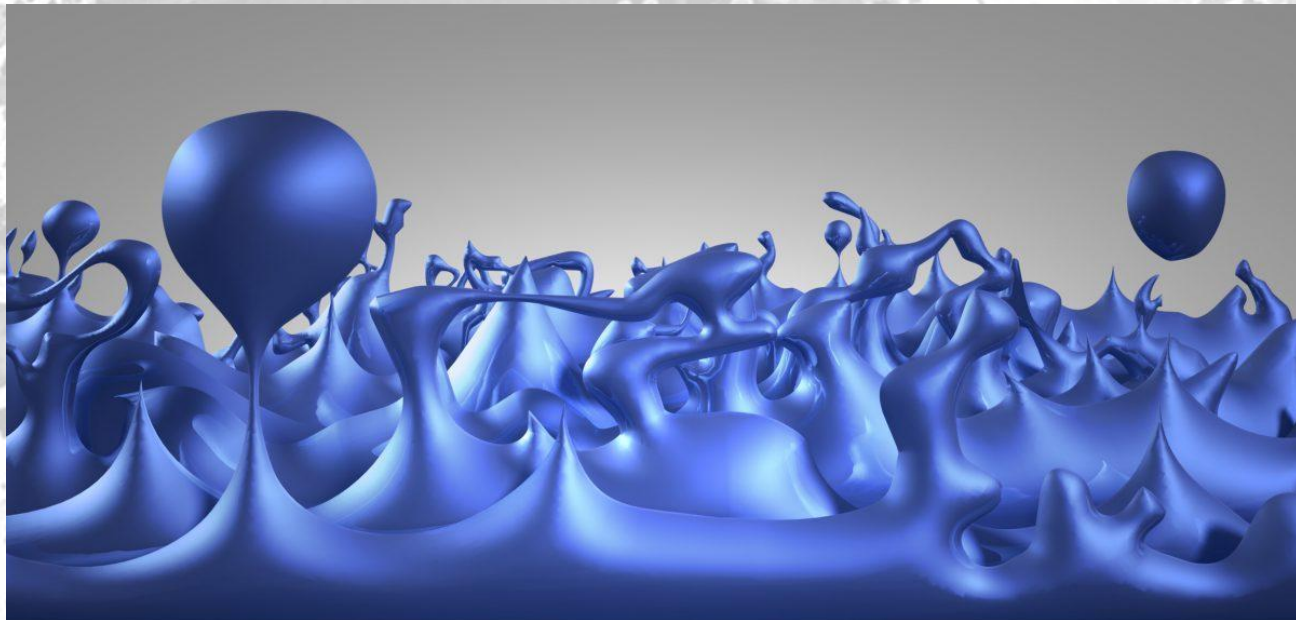
Keadaan fisis bersifat probabilistic sampai dilakukan pengamatan.

Proses pengamatan merupakan kondisi ketika semesta “memutuskan”



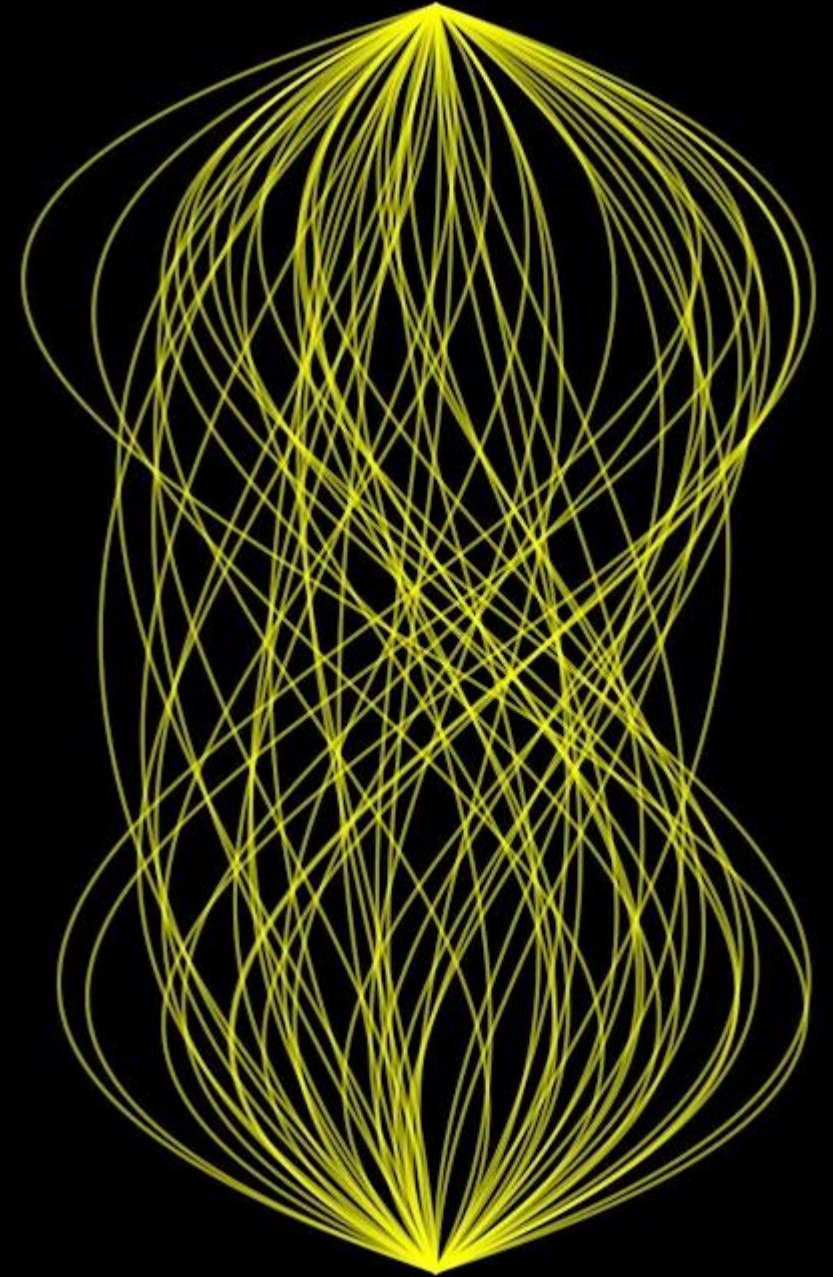
Quantum Field Theory

Seluruh semesta berisi “field” yang bergejolak, pada beberapa bagian dimana itu memadat, akan terjadi partikel



Infinite Quantum Paths

Feynman mencetuskan semua Gerak itu terjadi dalam semua kemungkinan Gerak (infinite path), tapi kemudian mengintegrasikan semuanya untuk mendapatkan path dengan aksi terkecil



Ini contoh modern bagaimana kondisi mikro yang terasa acak, kacau, dan probabilistik, tetap bisa menghasilkan semesta yang deterministik

“Kualitatif” di atas Kuantitatif

Terima kasih