

Hingga tak Terhingga



Mari berhitung

1, 2, 3, 4, 5, ...



Lanjut

..., 101, 102, 103, 104, 105, ...



Lanjutt

...,2001, 2002, 2003, 2004, ...

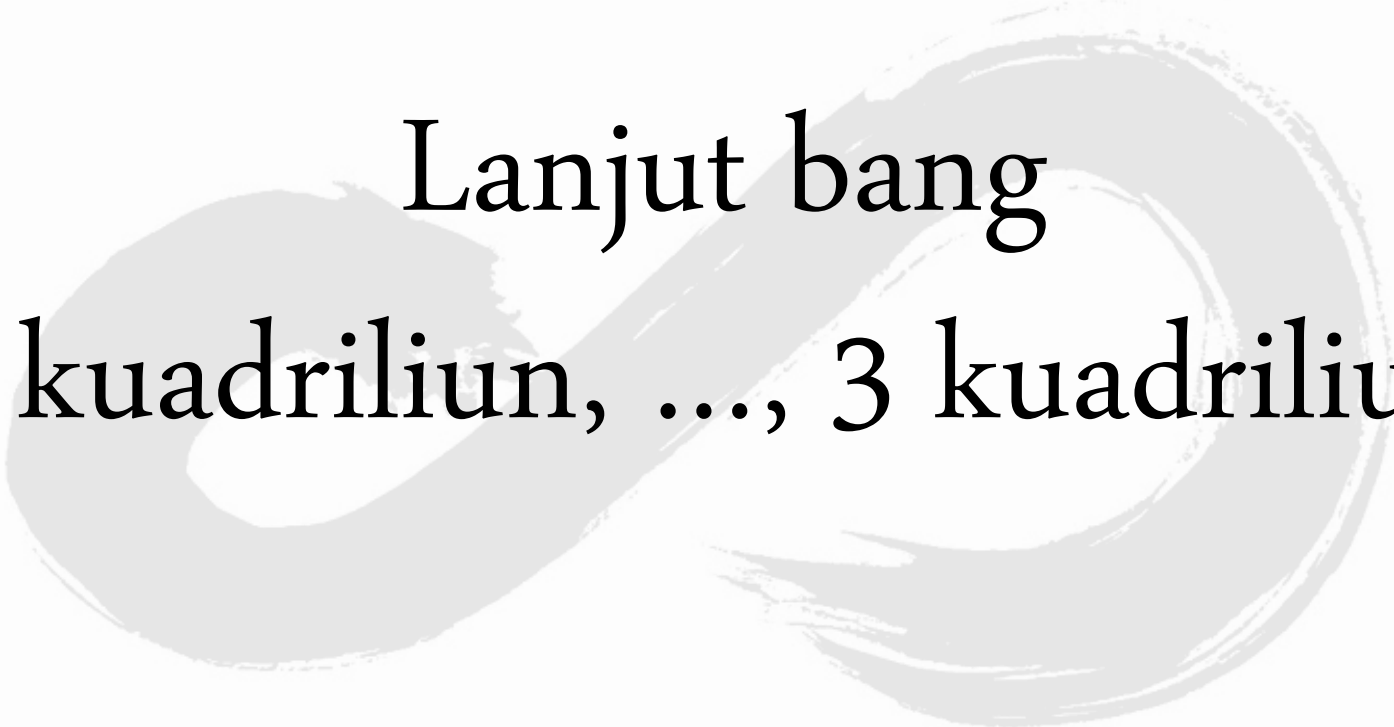


Lanjuut

...,3000001, 100002, 3000003, ...

Lanjut terus

...,2 milyar, ..., 3 milyar, ...4 milyar,...



Lanjut bang
...,2 kuadriliun, ..., 3 kuadriliun, ...



Masih lanjut
..., 2 desiliun, ..., 3 desiliun, ...

*Desiliun = 10^{33}



Masih lanjut
..., 2 sentiliun, ..., 3 sentiliun, ...

*Sentiliun = 10^{303}



Teruus

..., 2 googolplex, ..., 3 googolplex, ...

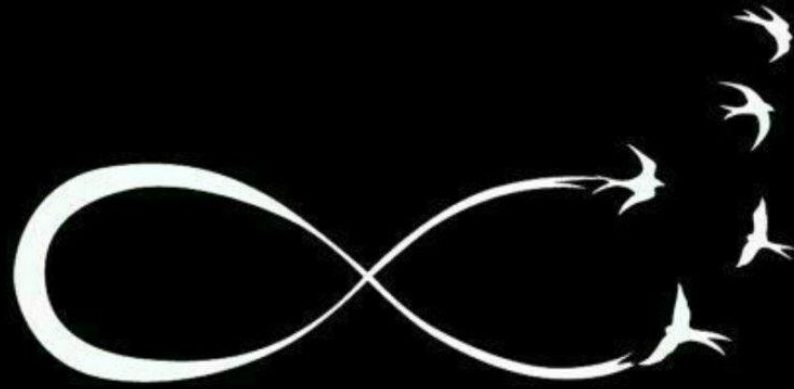
*Googolplex = $10^{10^{100}}$



Fyuh capek.

Kok tidak ada habisnya.

Kemana bilangan akan berhenti?



Seberapa besar sih bilangan-bilangan itu?

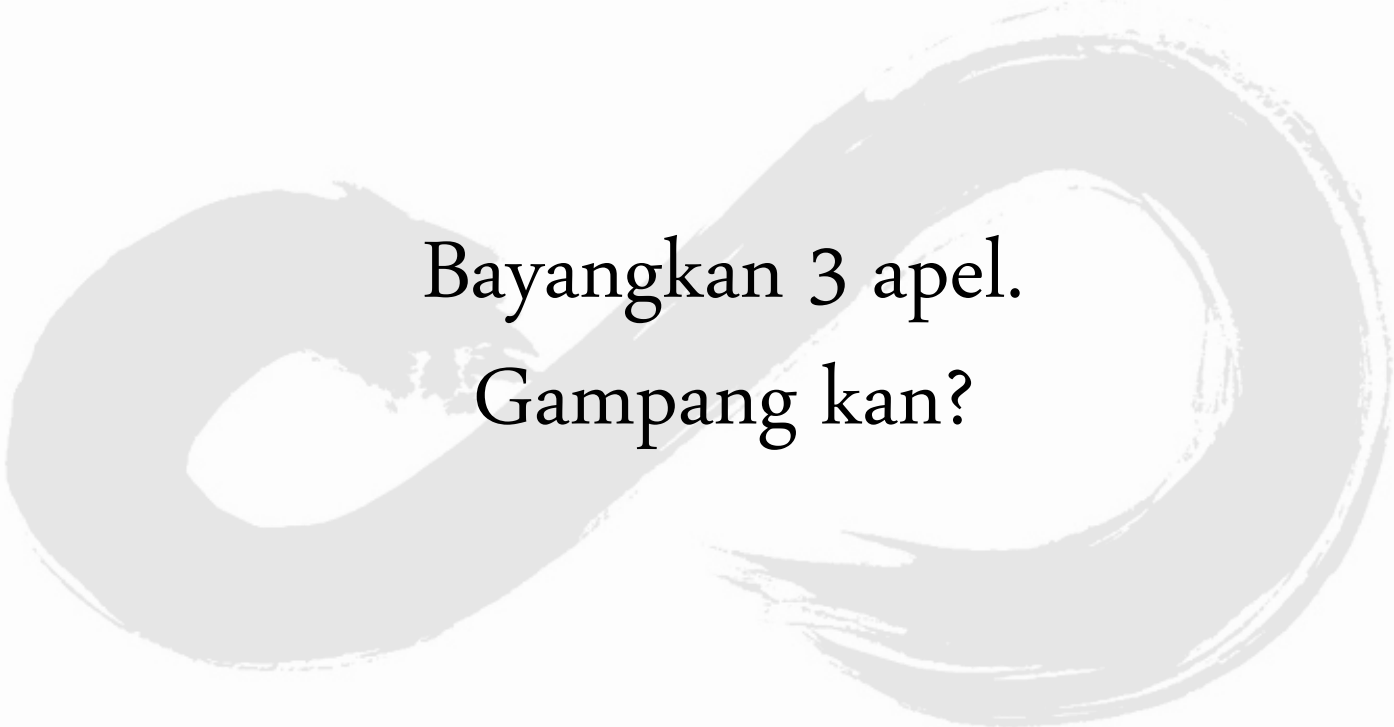
Banyaknya **sel** di tubuh manusia: **37.2 triliun**

Banyaknya **koneksi neuron** di otak: **100 triliun**

banyaknya **DNA** di seluruh bumi: **5.3 undesiliun**

banyaknya **nucleon** di Bumi: **4 sekdesiliun**

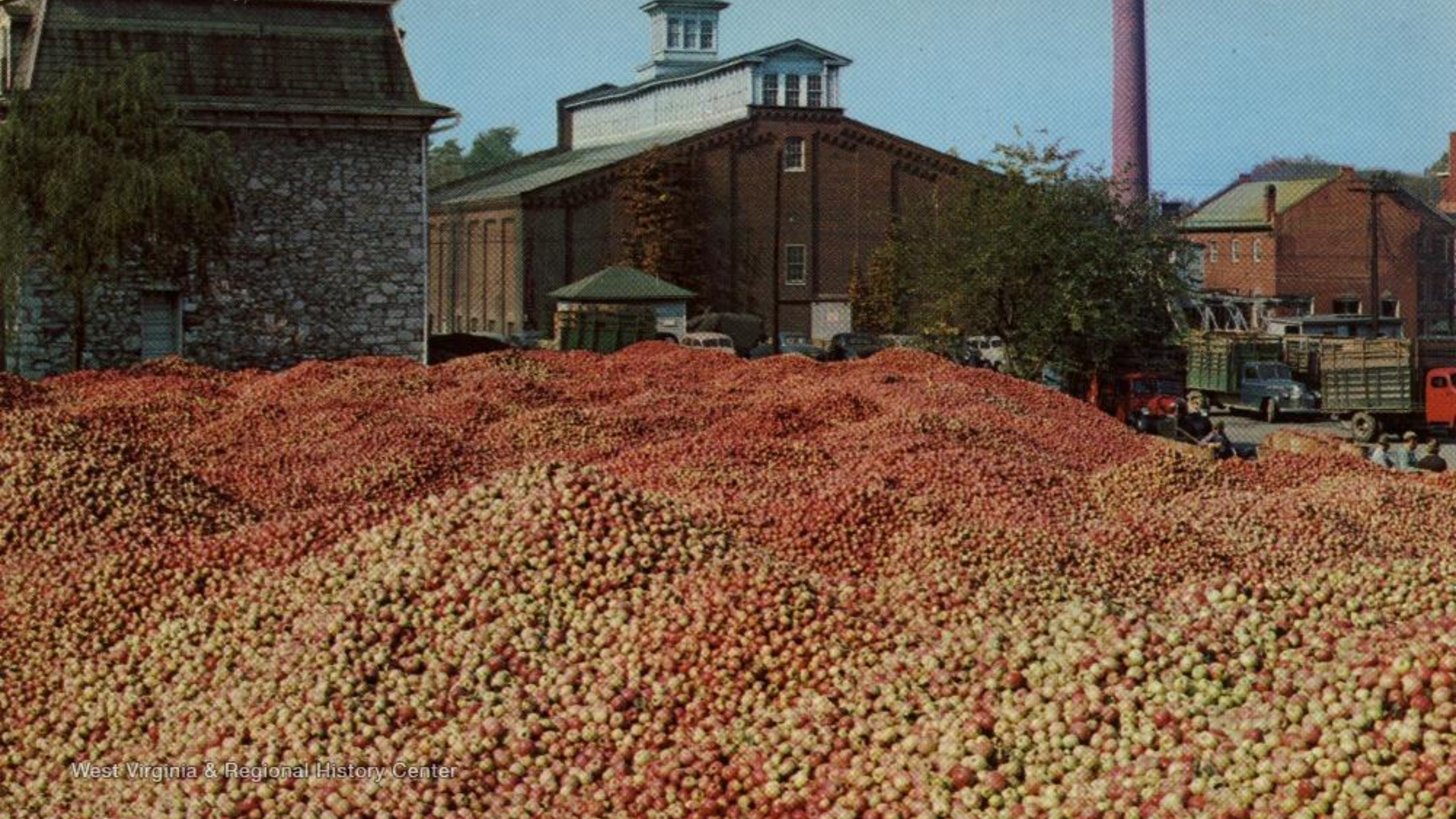
Banyaknya **atom** di seluruh semesta: **100 quinvigintiliun (10^{80})**



Bayangkan 3 apel.
Gampang kan?



Sekarang bayangkan sejuta apel. Bisa?



Manusia, memikirkan apapun, selalu ada batasnya.

Umur manusia: batasnya adalah mati.

Ukuran suatu benda: batasnya adalah sisi-sisi bendanya.

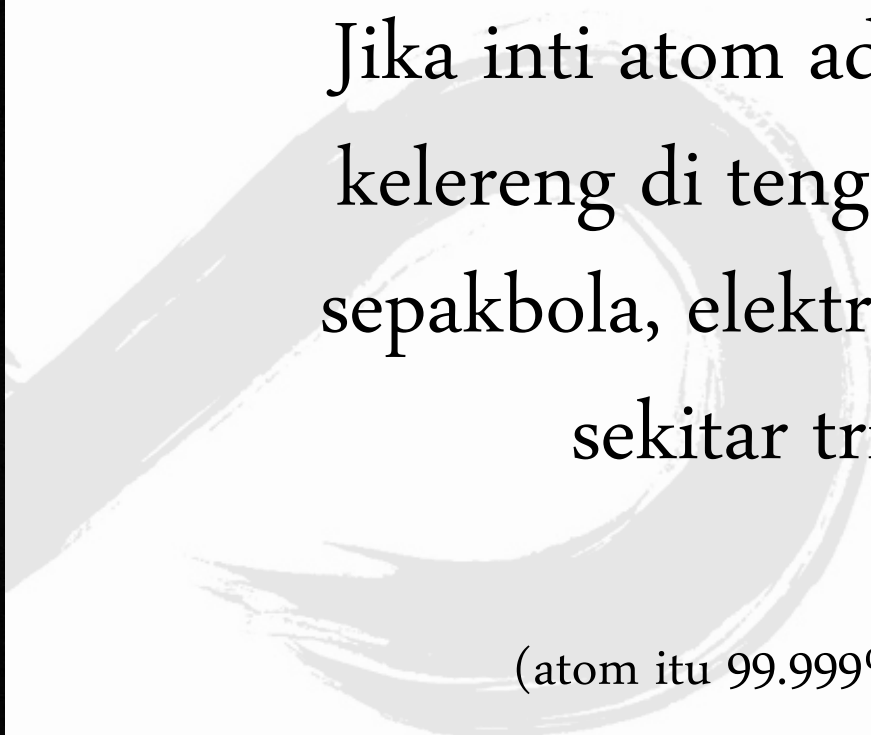
Jumlah barang: batasnya adalah wadahnya (tempatnya)

Pikiran manusia, juga hanya berbasis **rasio (perbandingan)**

Kita memahami sesuatu selalu relatif terhadap yang lain.
Dan patokan paling dasar, adalah keseharian manusia sendiri.

Jika Bumi sebutir pasir, tata
surya akan seukuran piring
makan, dan galaksi Bima Sakti
kita akan kira-kira seukuran
Amerika Utara.





Jika inti atom adalah sebuah
kelereng di tengah lapangan
sepakbola, elektron berada di
sekitar tribun.

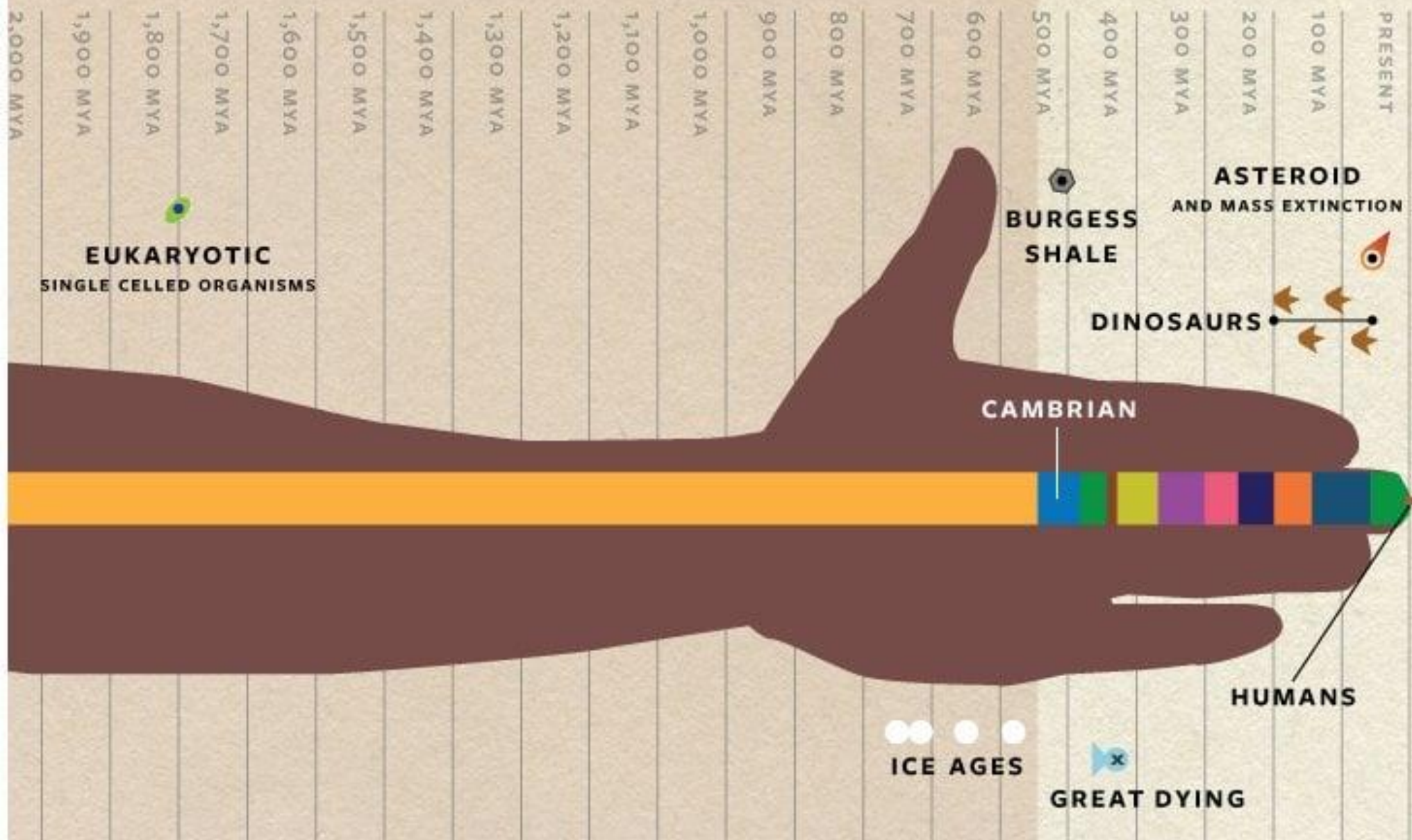
(atom itu 99.999% kosong)

PROTEROZOIC EON

2500-542 MYA

PHANEROZOIC EON

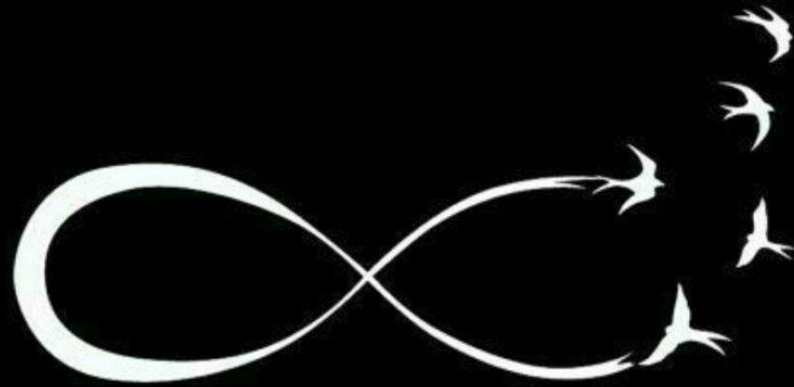
542 MYA-PRESENT



Kita sebut saja suatu yang sangat besar itu konsep tersendiri sebagai
sesuatu “di ujung sana”:

limitless, boundless, endless, infinite

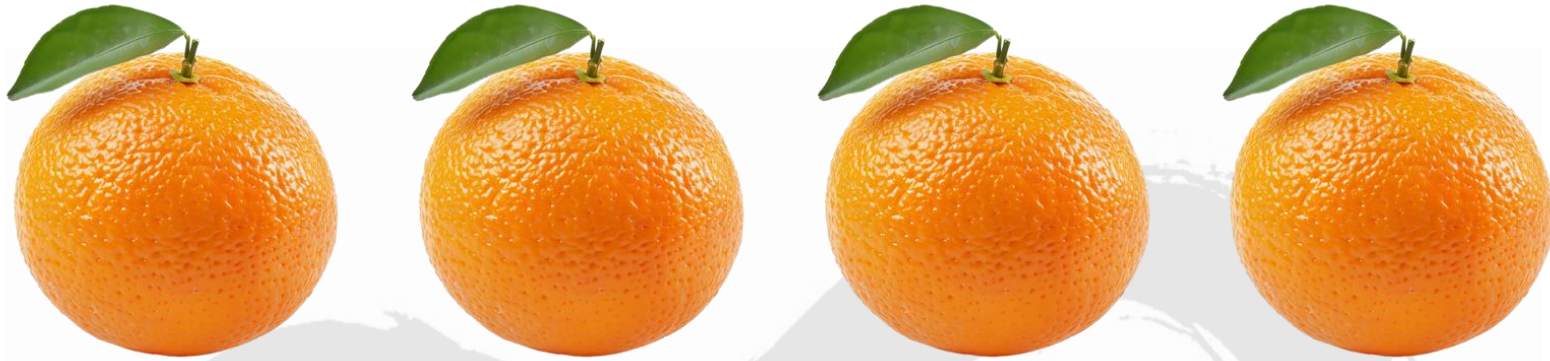
Tapi apa artinya? Kita pahami dulu apa itu bilangan



Apa itu bilangan?

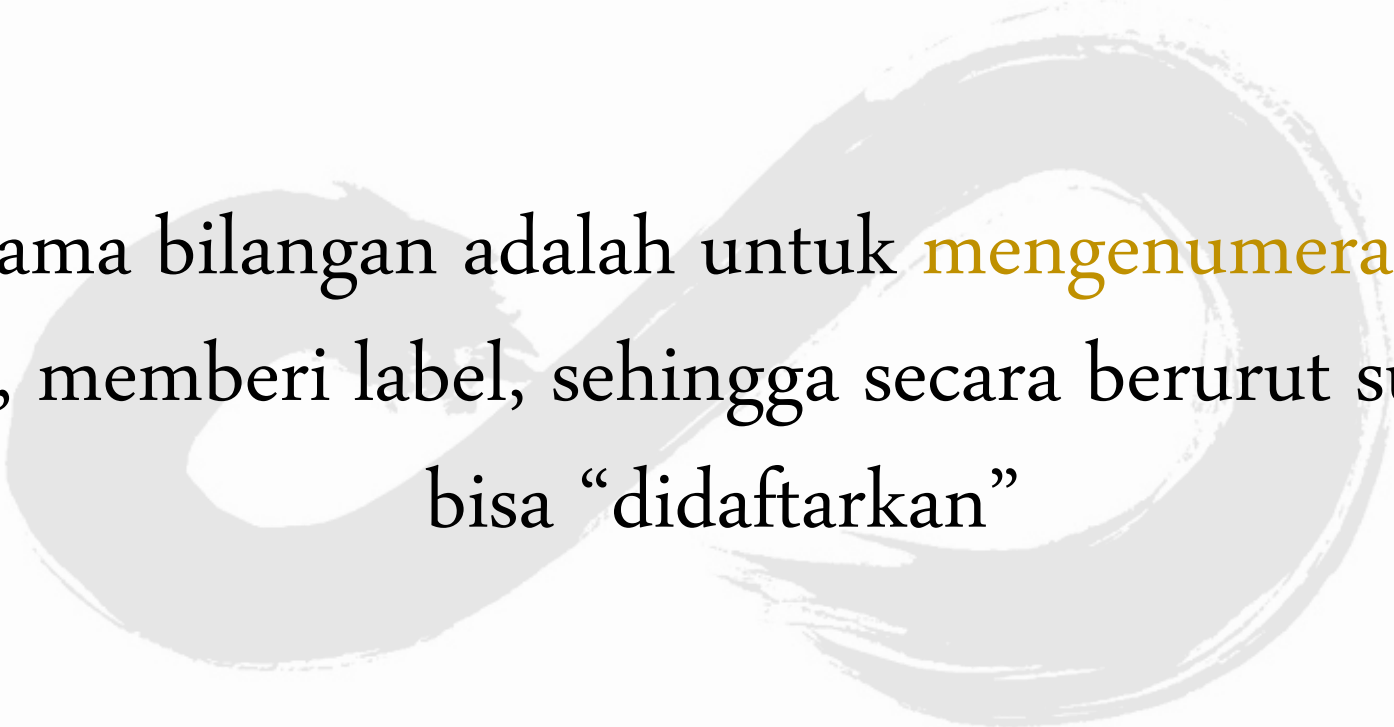
[seharusnya]

bilangan adalah apa yang terbilang (*counted*),
atau cara/nama untuk membilang



Ada empat jeruk.

Kita tahu dengan cara berurut membilang tiap jeruk: (satu jeruk, dua jeruk, tiga jeruk, empat jeruk)



Tujuan utama bilangan adalah untuk **mengenumerasi**, memberi “indeks”, memberi label, sehingga secara berurut suatu objek bisa “didaftarkan”



Bagaimana proses mengindeks ini dapat dilakukan?

Ketika kita membilang (*count*) dengan suatu urutan (*order*), kita butuh paling tidak

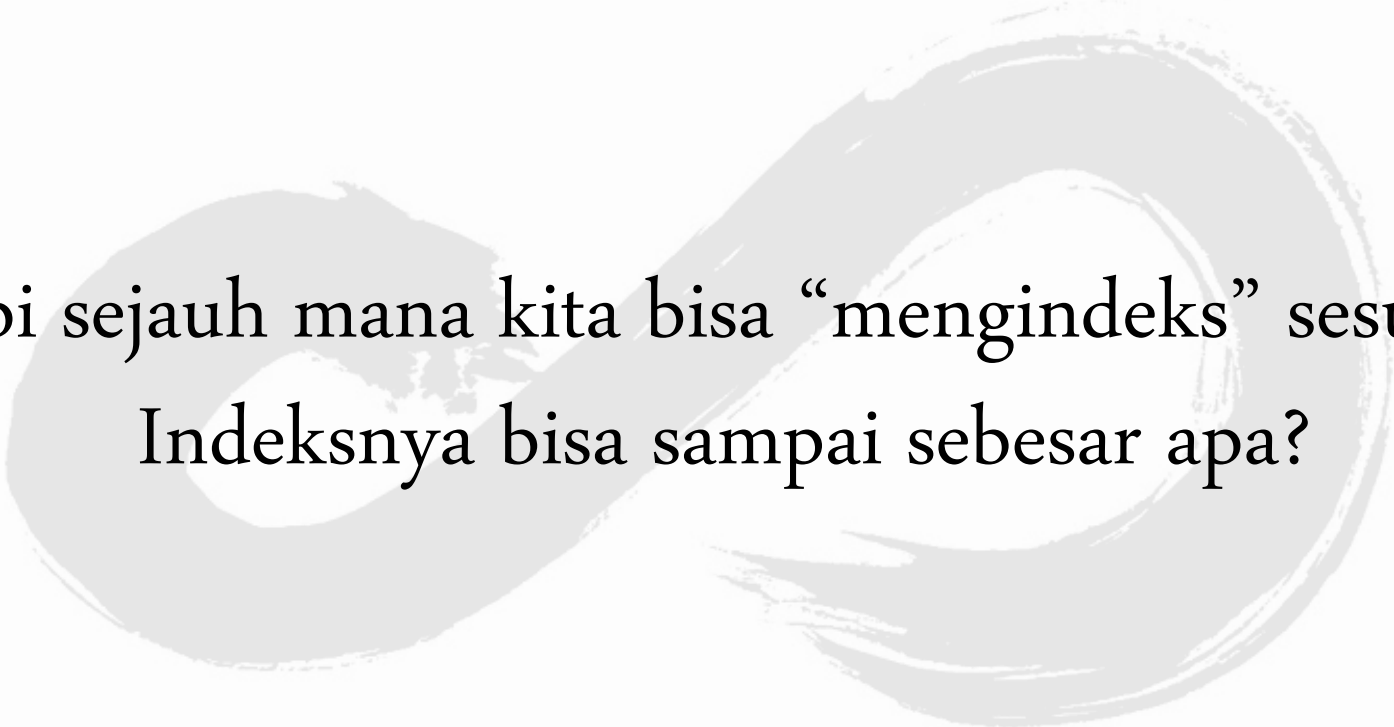
(1) Nilai awal; (2) penambahannya [nilai berikutnya]

Seperti domino



Contoh.

Dalam bilangan natural, awalnya adalah 1 (atau 0). Kita juga memiliki sistem bagaimana membangun nilai berikutnya (bahwa setelah 1 itu 2, bahwa setelah 10 itu 11, bahwa setelah 235 itu 236)



Tapi sejauh mana kita bisa “mengindeks” sesuatu?
Indeksnya bisa sampai sebesar apa?

Dari mana nilai awal itu berasal?

Di matematika, bahan utamanya Cuma himpunan.

Dan yang bisa dijamin selalu ada adalah



Untuk nilai selanjutnya, didefinisikan *successor* (penerus):

$$a^+ = a \cup \{a\}$$

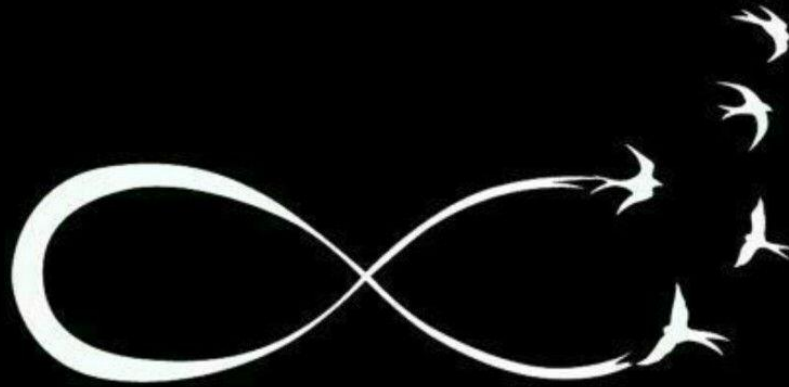
Dengan definisi ini, kita langsung bisa mendapatkan satu per satu bilangan natural awal dari 0 (\emptyset), yakni

$$1 = 0^+ = \{\emptyset\}$$

$$2 = 1^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$$3 = 2^+ = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$

$$4 = 3^+ = \left\{ \emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \left\{ \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \right\} \right\}$$



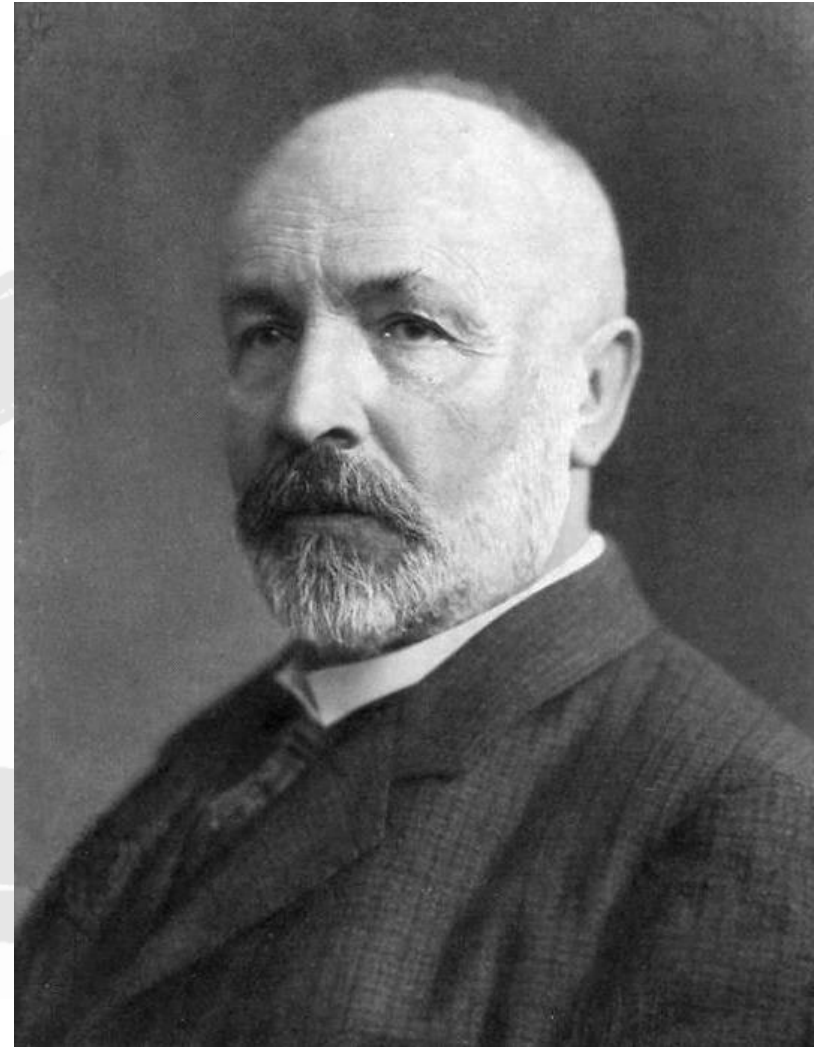
Sampai mana enumerasi dapat
dilakukan?



Tapi kita lihat sebelumnya,
sistem penambahan ini tak ada batasnya!

Madman of Math
Father of Infinity

Georg Cantor



Cantor mendefinisikan bilangan ordinal, sebagai bilangan untuk enumerasi. Dia menyebut 3 tipe ordinal

Ordinal awal (nol)

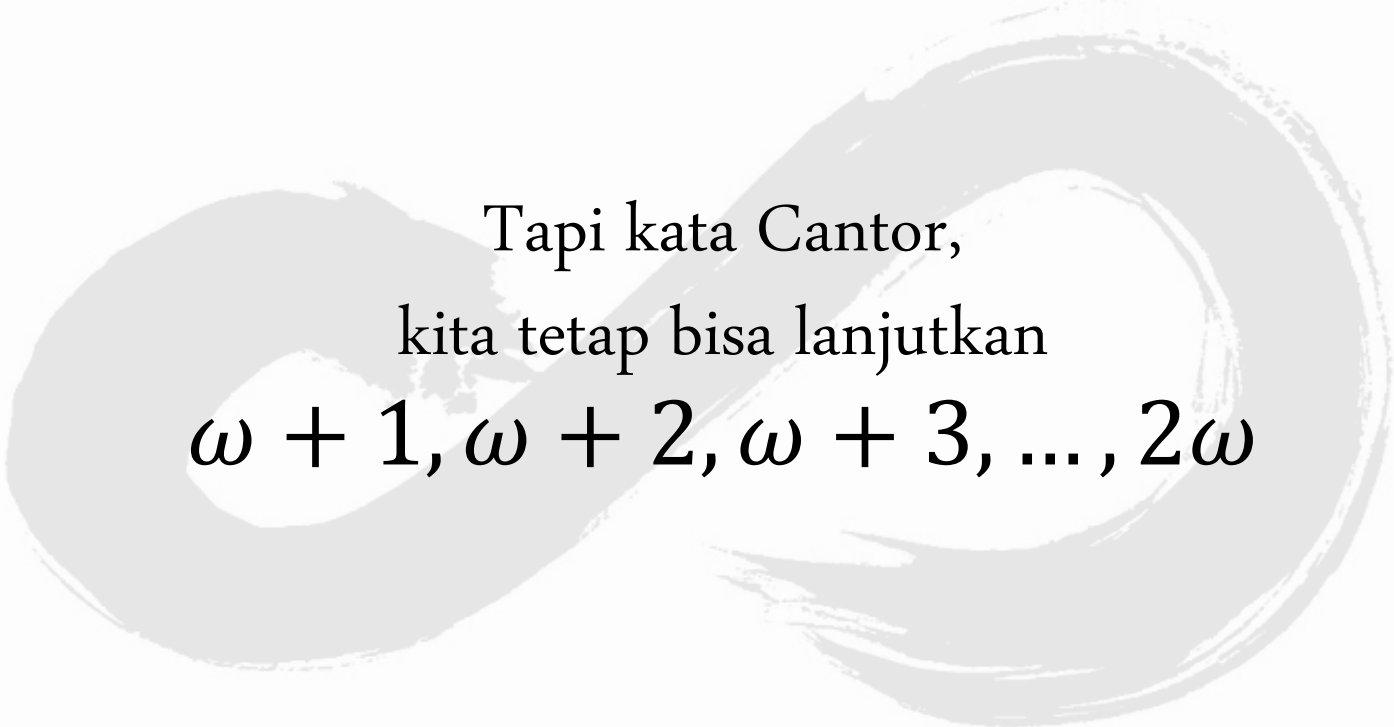
Ordinal penerus (untuk setiap c ada *successor* c^+)

Ordinal batas (Jika a ordinal batas, maka untuk setiap $c \in a$, $c^+ \in a$)



$1, 2, 3, \dots, \omega$

ω = ordinal tak hingga (batas) pertama

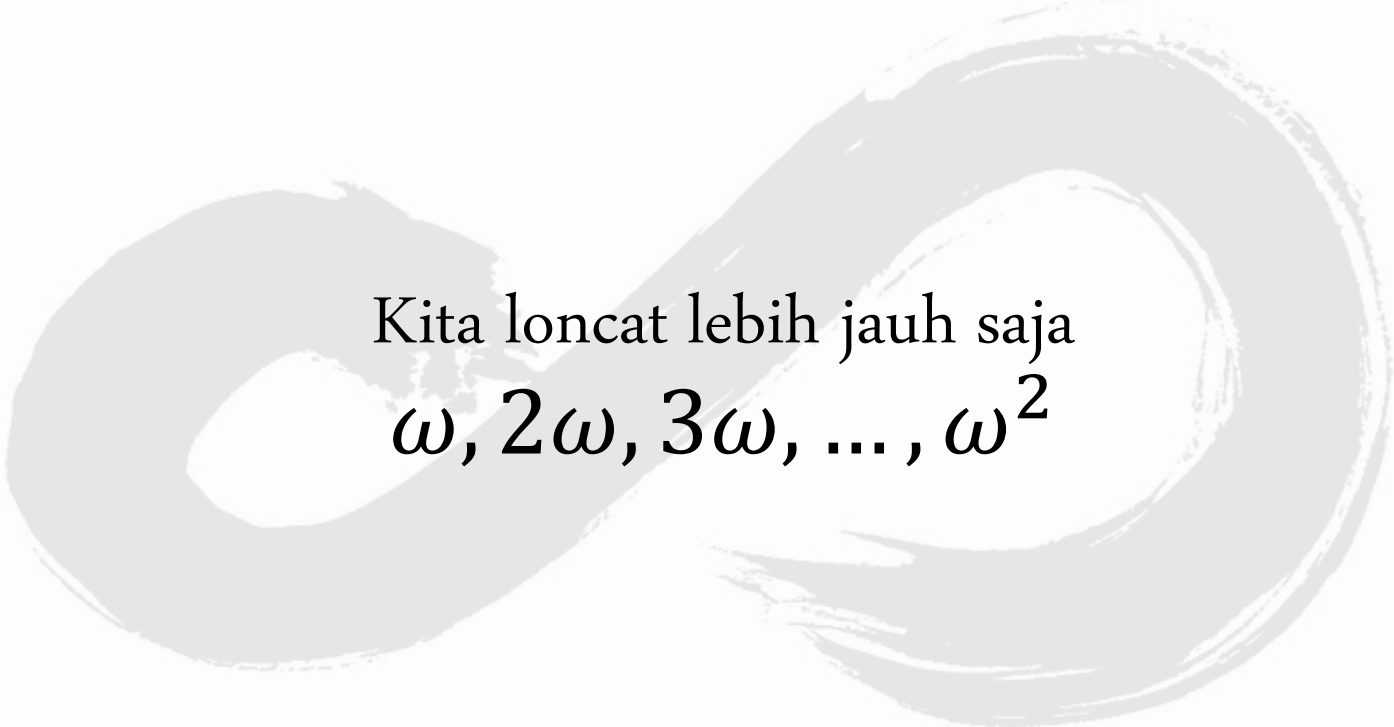


Tapi kata Cantor,
kita tetap bisa lanjutkan
 $\omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \dots, 2\omega$

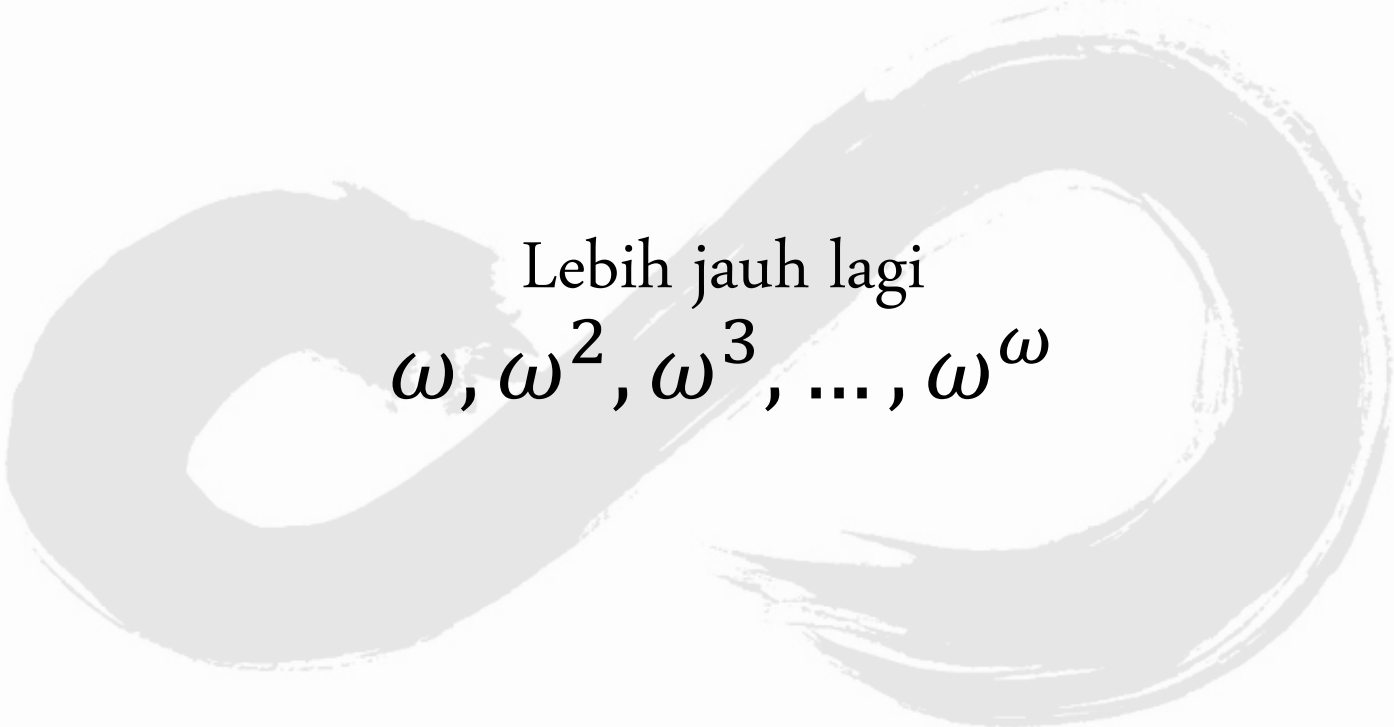


Lanjut terus lagi

$$2\omega + 1, 2\omega + 2, 2\omega + 3, \dots, 3\omega$$



Kita loncat lebih jauh saja
 $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots, \omega^2$

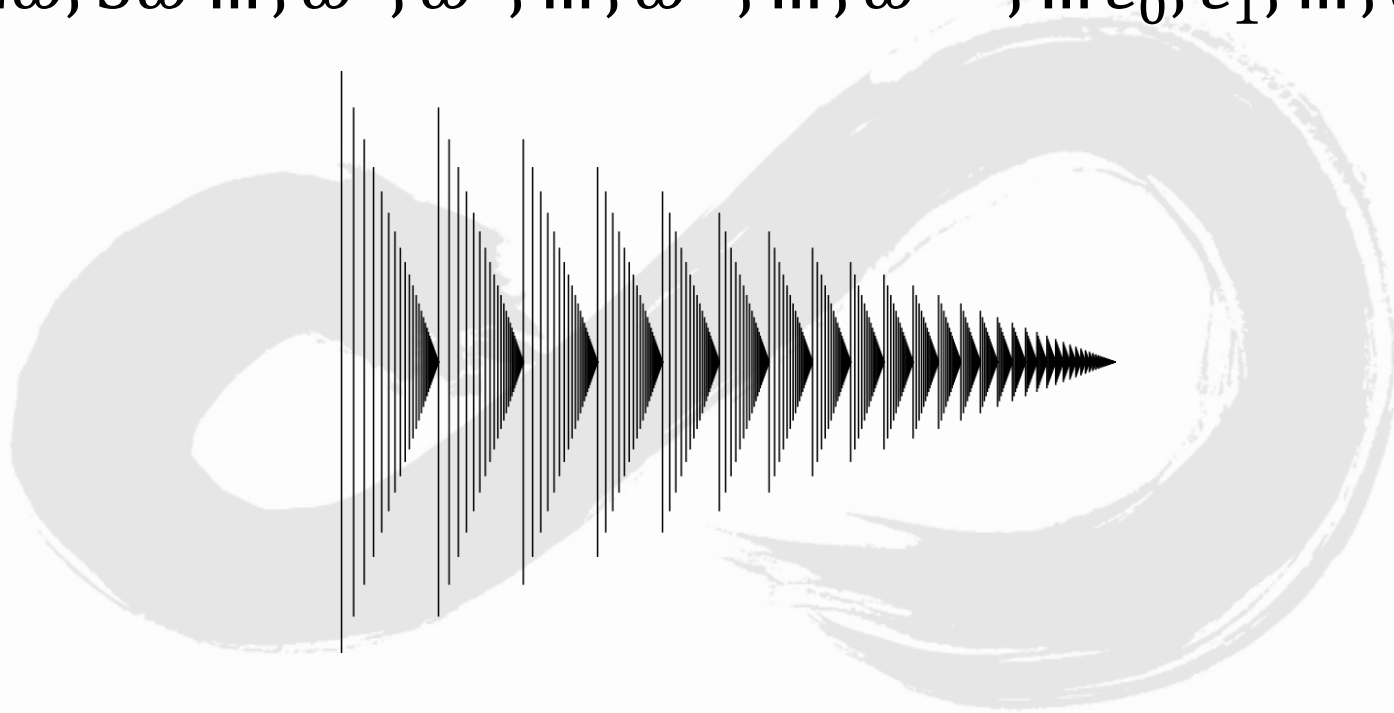


Lebih jauh lagi
 $\omega, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^\omega$

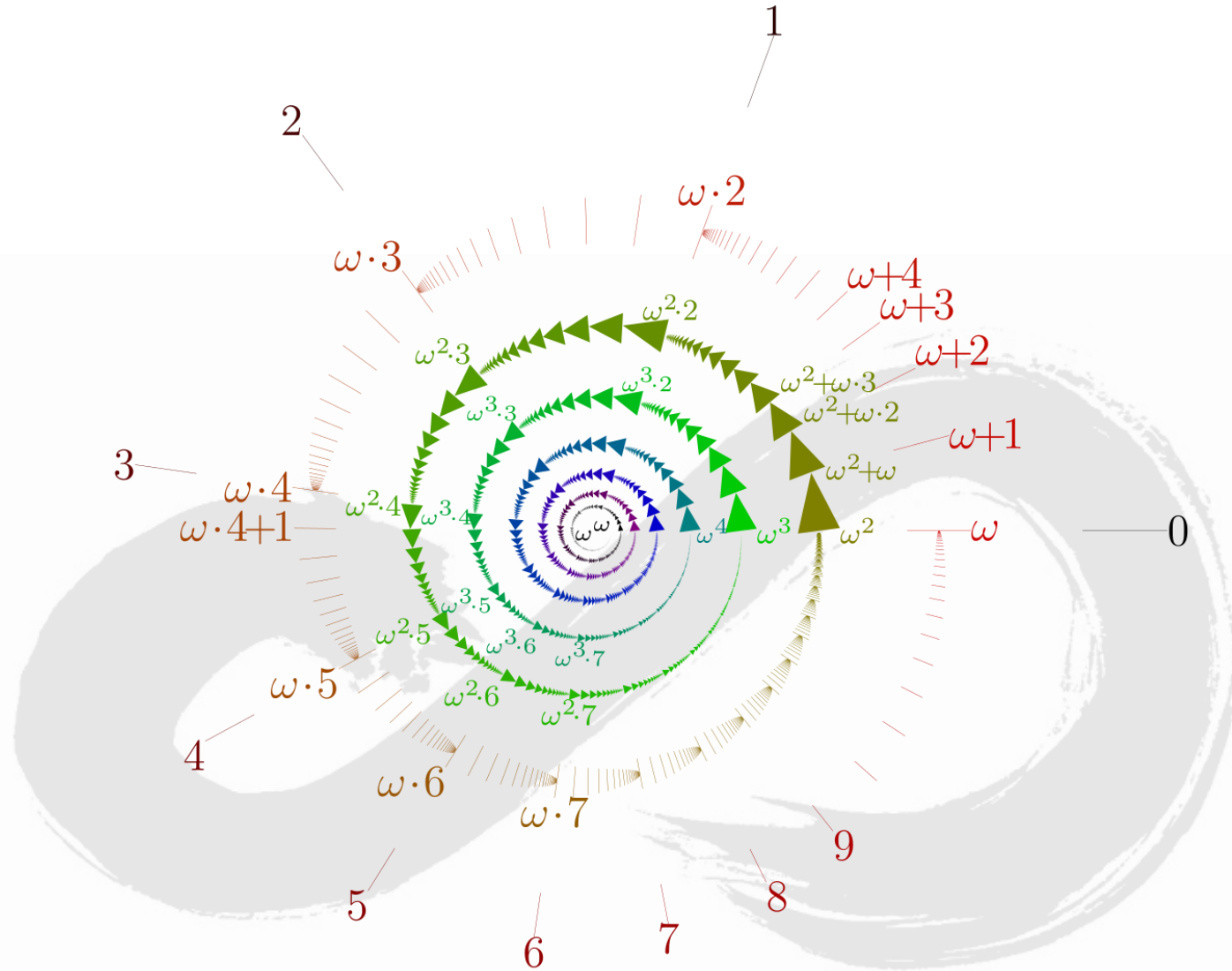


Sampai kapan?

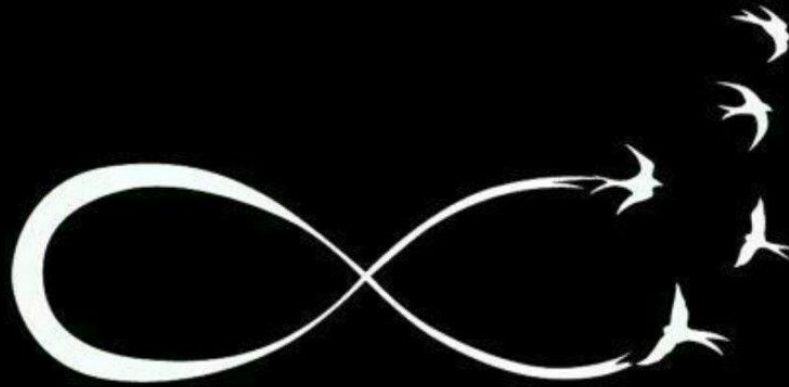
$\omega, 2\omega, 3\omega \dots, \omega^2, \omega^3, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\omega, \dots$



$$\varepsilon_0 = \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}$$



Ordinal batas ini disebut Cantor sebagai *transfinite* (bukan infinite), karena itu hanya transisi untuk enumerasi. Lantas batas atas sesungguhnya seperti apa?



Apakah ada makna bilangan selain
enumerasi?



Hot candle



Cold yoghurt



Hot kettle



Cold milkshake



Hot fire



Cold ice cubes



Hot sun



Cold iceberg

Benda bisa memiliki beberapa ciri yang sama, sehingga bisa diberi suatu “sifat”



Apa persamaan semua ini?





4 jeruk



4 mobil

Semua “bersifat” empat (4)



4 singa



4 kursi

Bilangan menjadi “sifat” (*property*)

atau spesifiknya

sebuah tipe tanda/label/nama yang terurut

Lahirlah konsep: **Bilangan Kardinal**

Banyaknya anggota suatu himpunan.

Hanya bisa ditentukan dari komparasi antar himpunan
(bukan dengan dienumerasi)

Korespondensi satu-satu

Misal, jika diasumsikan tidak ada satupun orang yang poligami di suatu masyarakat dan setiap orang dewasa di masyarakat itu sudah menikah, maka kita bisa jamin bahwa jumlah laki-laki dan perempuan dewasa di masyarakat itu sama

Korespondensi satu-satu

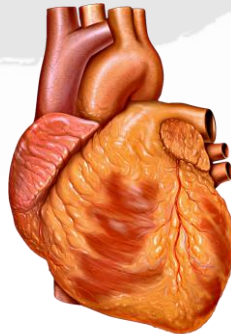
Angka 3 \rightarrow sifat semua benda yang berjumlah 3
Bahwa 3 apel dan 3 durian itu berjumlah sama,
karena ada korespondensi satu-satu.

Korespondensi satu-satu

Ada berapa banyak jantung manusia yang berdetak di dunia ini?

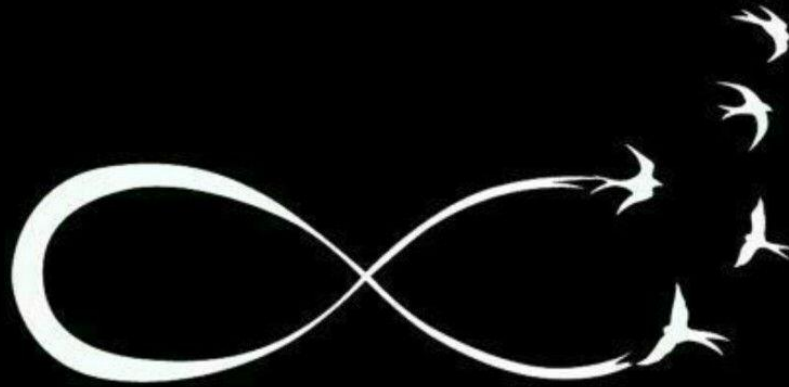
Ya sama dengan banyaknya manusia yang hidup.

Kita katakan jantung dan manusia memiliki kardinalitas yang sama



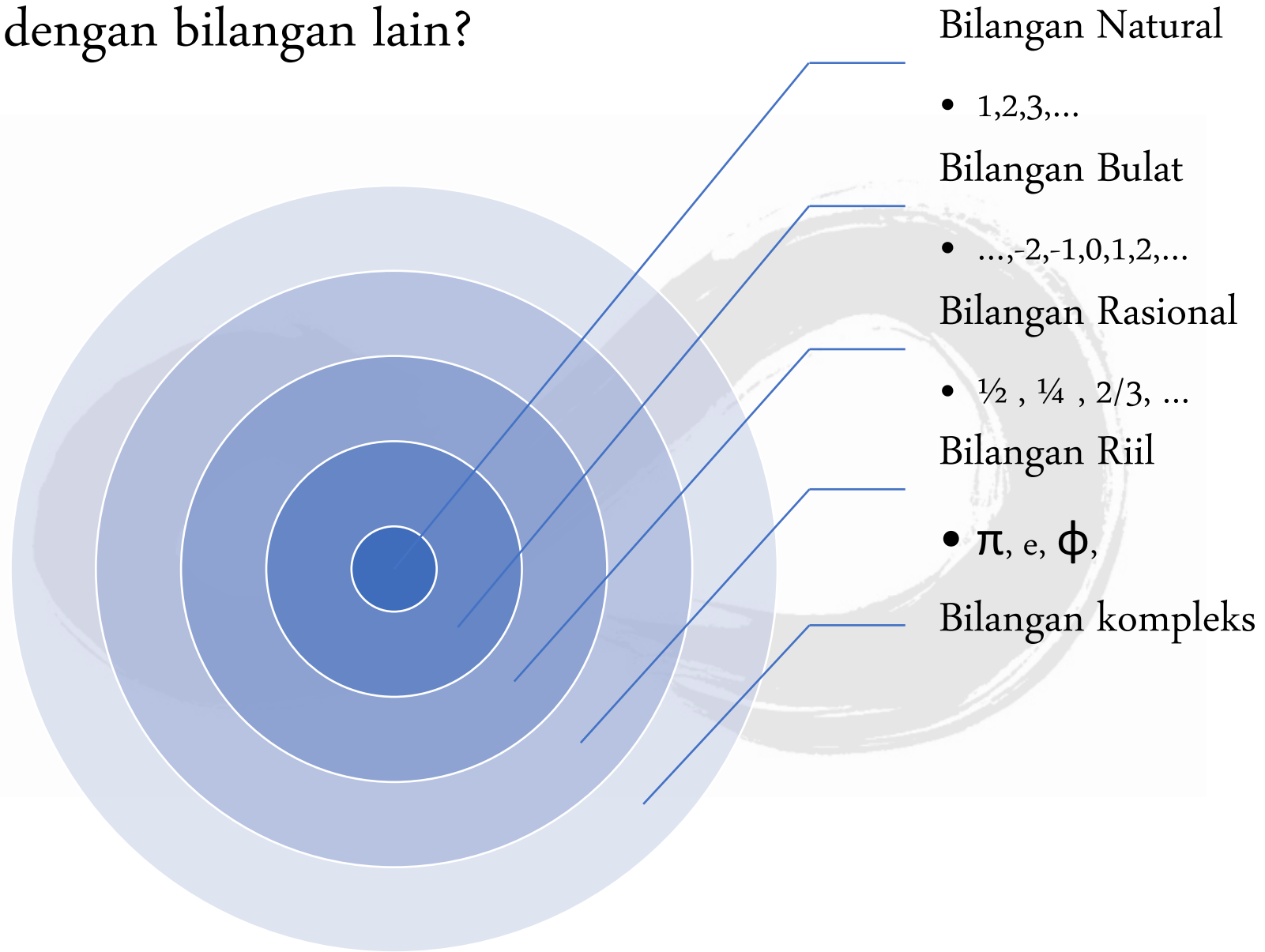
Sekarang, bayangkan seluruh bilangan asli.
Ada berapa banyaknya?

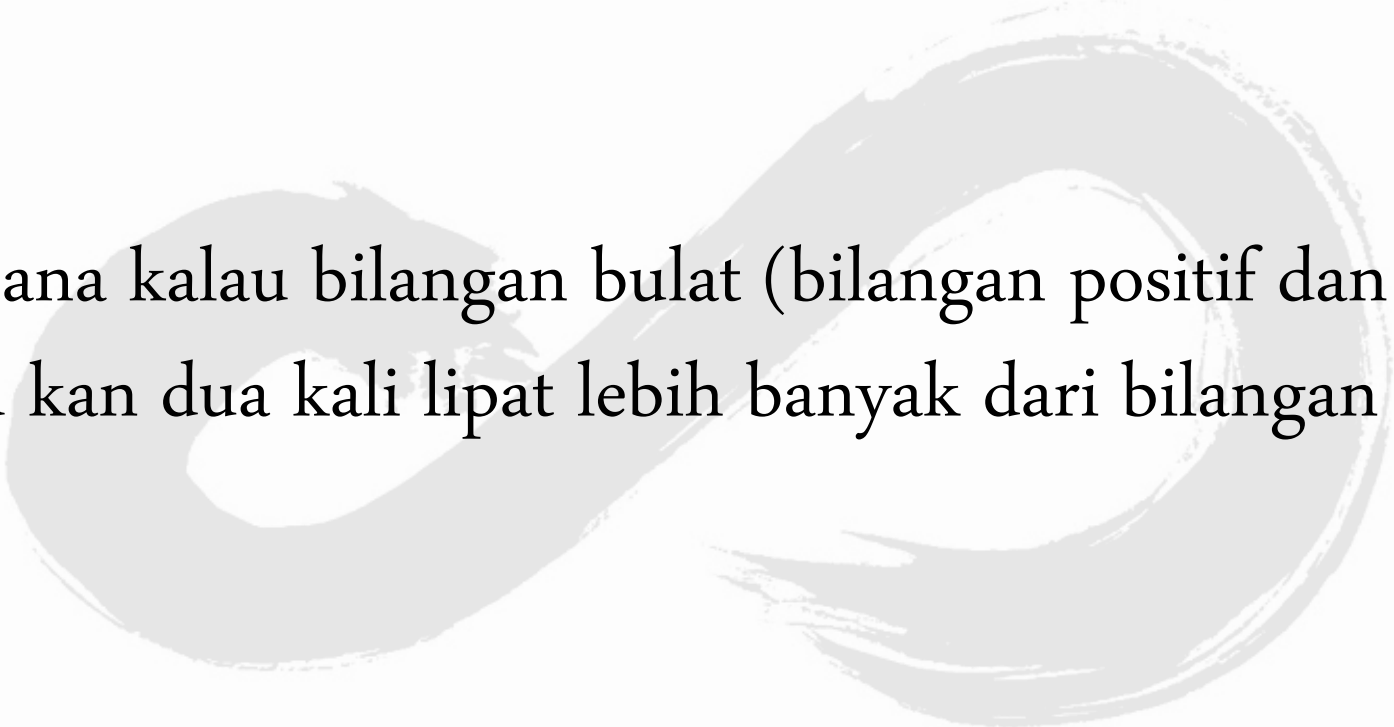
Tidak penting. Kita sebut saja \aleph_0
(agak beda dengan ω)



Kalau kardinalitas bilangan lain?

Bagaimana dengan bilangan lain?

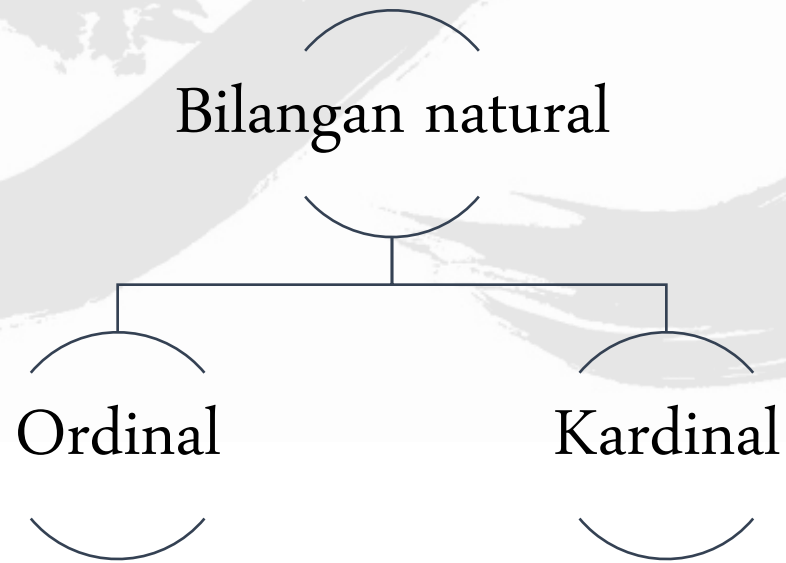


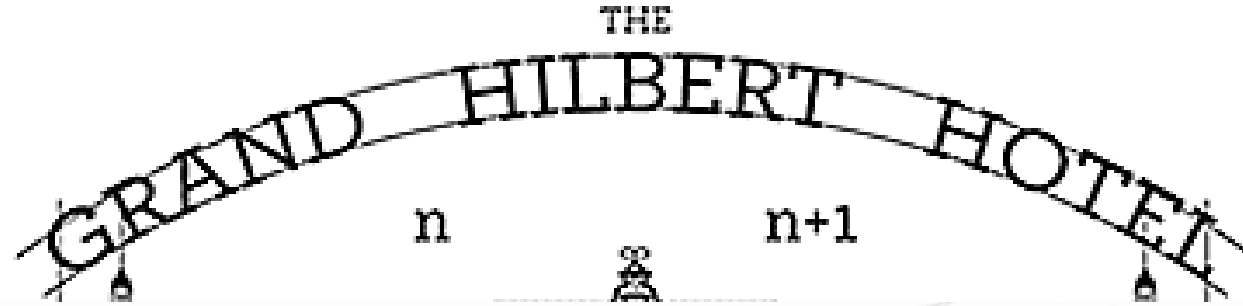


Bagaimana kalau bilangan bulat (bilangan positif dan negatif)?
Itu kan dua kali lipat lebih banyak dari bilangan asli?

Disclaimer: Oh ya yang kita sebut selama ini “bilangan” itu sebenarnya lebih tepat hanya untuk ke bilangan natural, baik dalam makna ordinal atau cardinal.

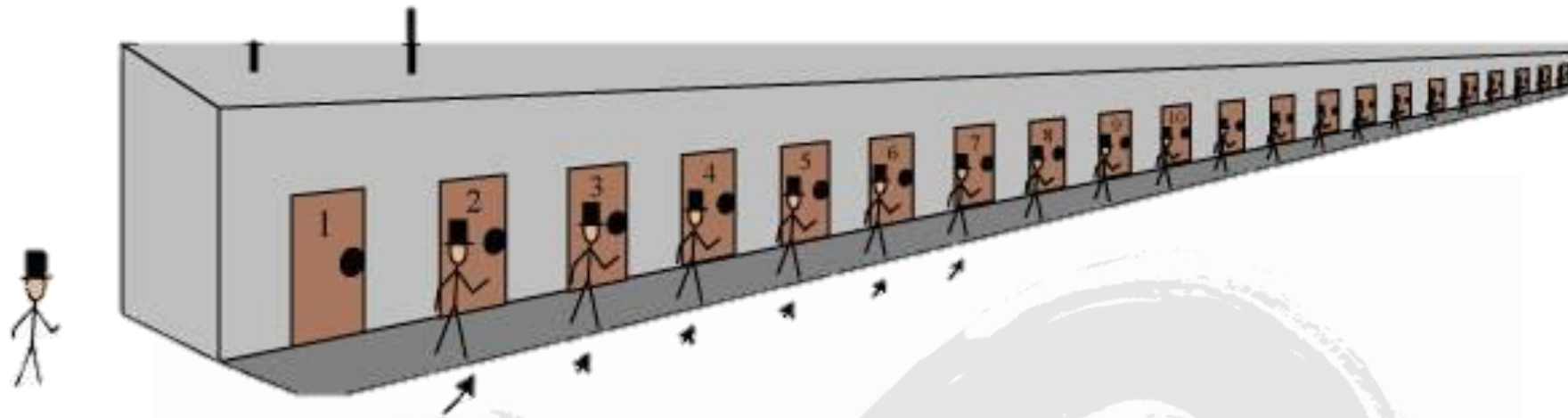
Selebihnya, seperti 3.1, -31, dll, lebih pantas disebut angka



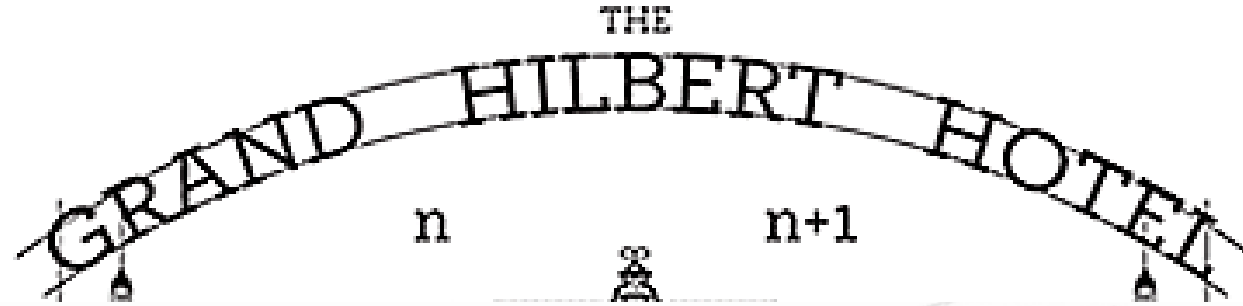


Selamat datang di Hotel Hilbert,
hotel dengan kamar tak terhingga banyaknya.

Sayangnya, kamarnya saat ini sudah penuh.
Kamu mau masuk? Tenang saja, masih bisa kok.

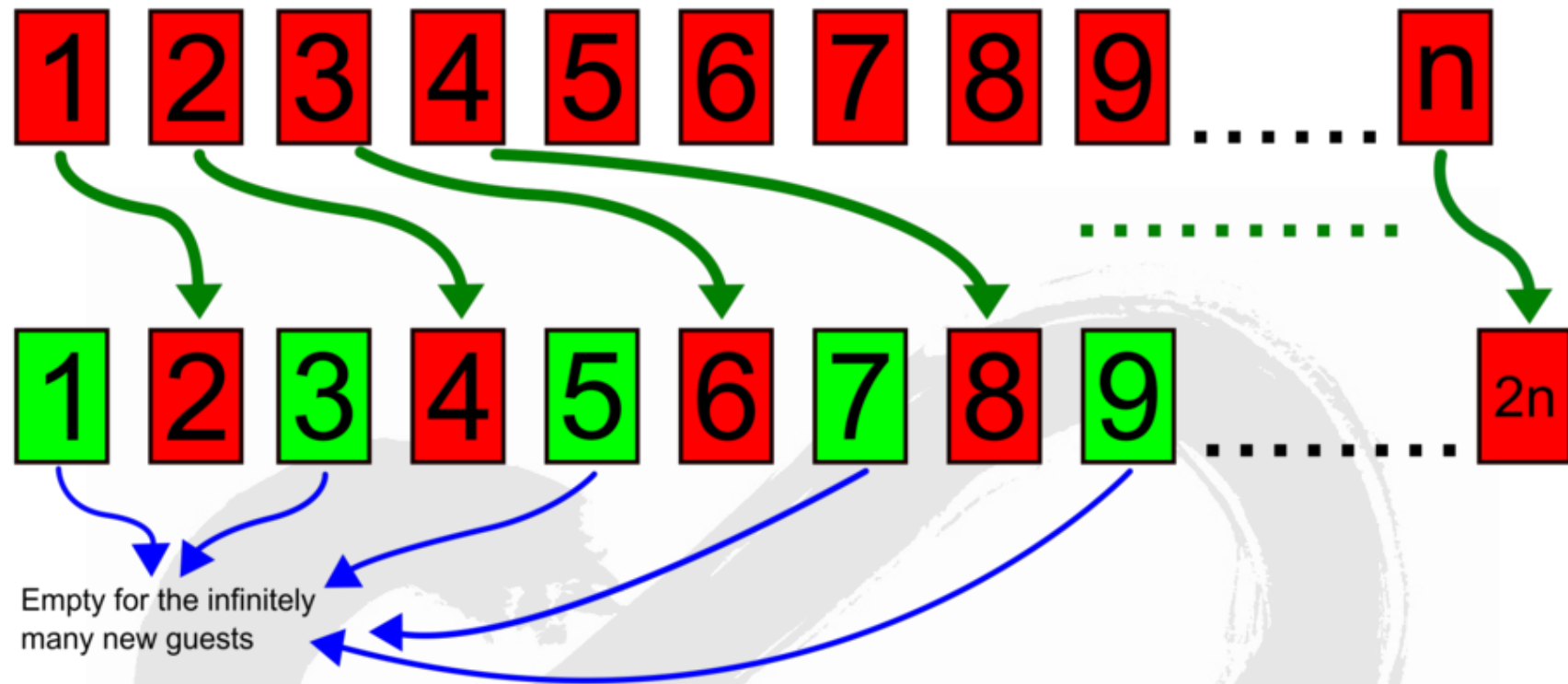


Beberapa saat kemudian,
penghuni setiap kamar keluar dan berpindah ke kamar sebelahnya.
Penghuni kamar 1 ke kamar 2, kamar 2 ke kamar 3, dst.
Alhasil, kamar 1 kosong.



Besoknya. Suatu bis panjang berisi tak terhingga banyaknya penumpang datang dan semuanya ingin menginap.

“Tenang saja” kata resepsionis.



Beberapa saat kemudian, setiap penghuni kamar keluar dan berpindah ke nomor $2x$ dari nomor kamar ia sebelumnya.

Dengan itu, seluruh kamar nomor ganjil kosong semua.

Ilustrasi itu memperlihatkan hal sederhana:

0	1	2	3	4	5	6	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
0	1	-1	2	-2	3	-3	...

Bilangan bulat punya kardinalitas sama dengan bilangan asli

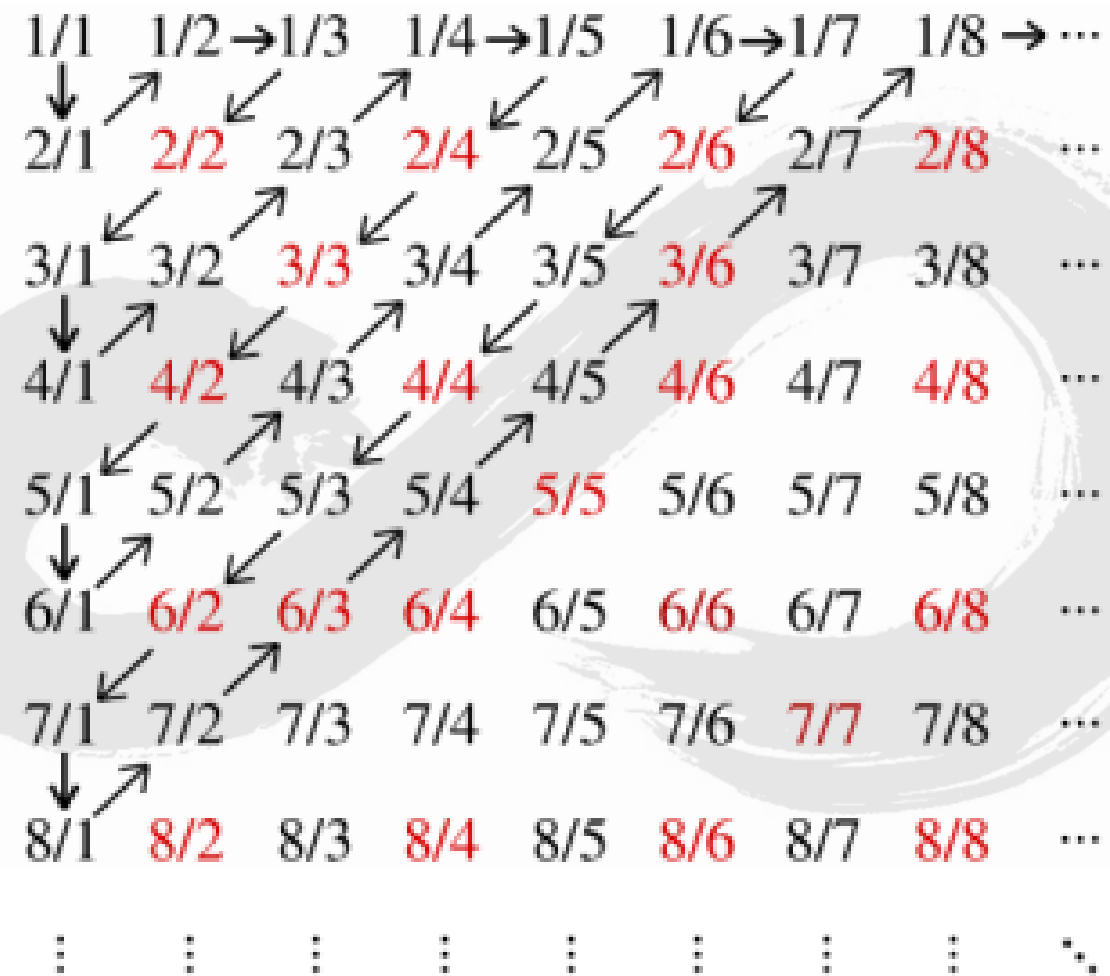


Oke. Bagaimana dengan bilangan rasional?

Tentu jauh lebih banyak kan?

Fun fact: banyaknya bilangan rasional antara 0 dan 1 saja tak hingga banyaknya. $[0.1, 0.001, 0.0001, 0.00001, \dots]$

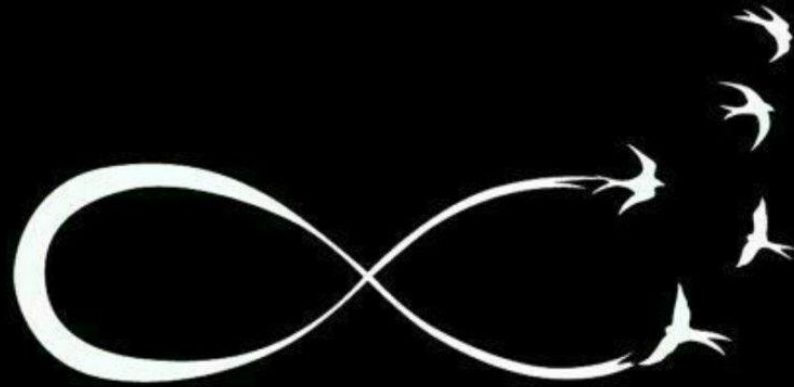
Well, cukup ikuti aturan berikut:



Ilustrasi itu memperlihatkan hal sederhana:

0	1	2	3	4	5	6	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
0	1/1	2/1	1/2	1/3	3/1	4/1	...

Bilangan rasional pun punya kardinalitas sama dengan bilangan asli



Apakah ketakterhinggaan ini nyata?



Aspek penting dari bilangan:
untuk setiap bilangan, selalu ada bilangan sesudahnya

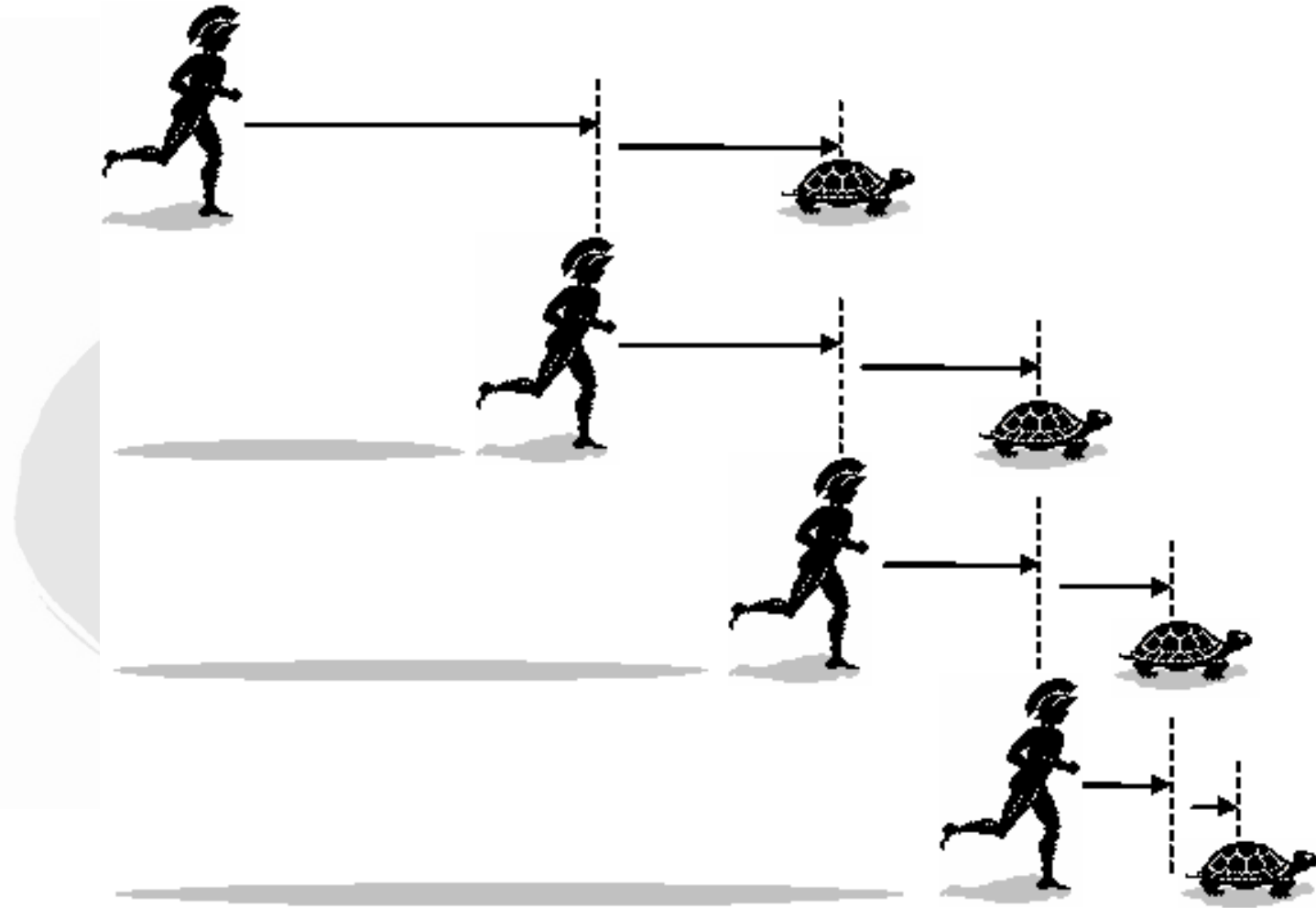


Konsep tak terhingga bermula dari **proses yang tak terbatas.**

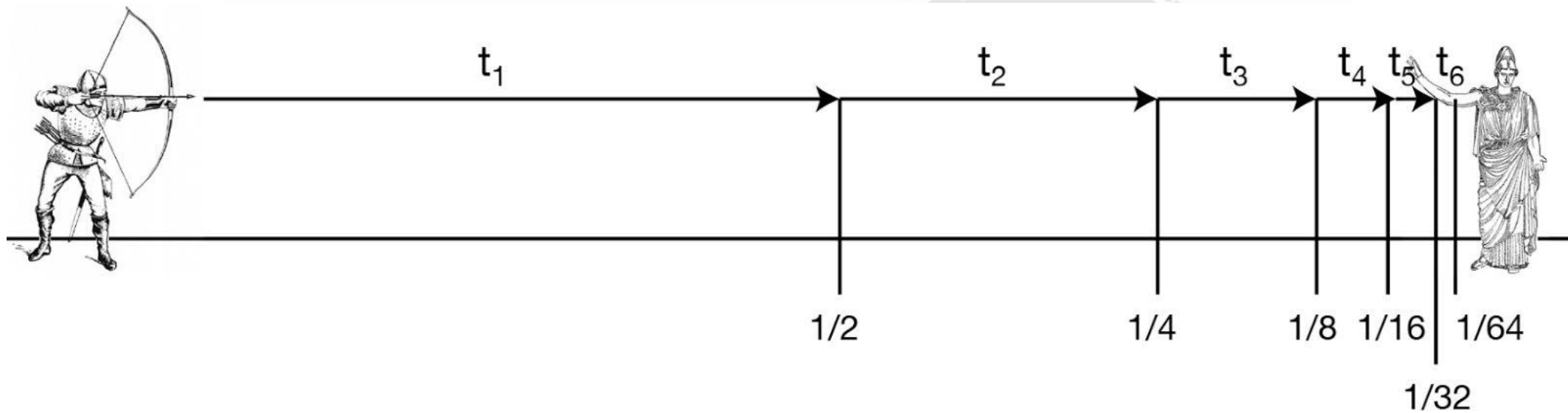
Apa yang duluan, ayam atau telur?



Achilles vs Kura-kura



Panah yang tak pernah sampai



Tak terhingga di atas muncul dari proses berulang (yang kurang jelas batasnya).

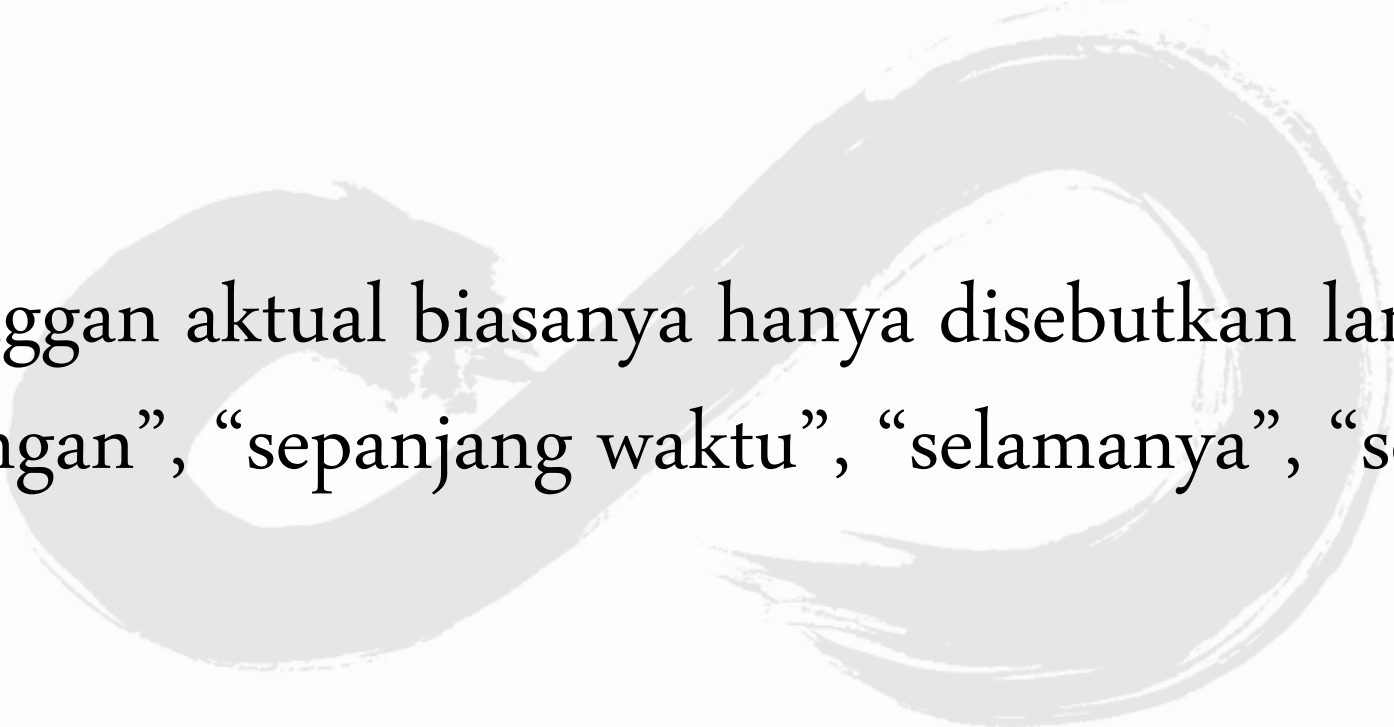
Ini disebut **ketakterhinggaan potensial**

Konsep tak terhingga paling tidak muncul dari 2 cara, yakni

(1) menetapkan proses iteratif (tanpa batas)

(2) ditetapkan begitu saja

Yang kedua disebut **ketakterhinggaan aktual**



Ketakterhinggaan aktual biasanya hanya disebutkan langsung, misal “seluruh bilangan”, “sepanjang waktu”, “selamanya”, “sealam-semesta”

infinite regress -> proses argumentasi berulang (rekursif)

Infinite regress adalah salah satu bentuk paradoks

Paradoks menghasilkan kemustahilan dalam mendapatkan kesimpulan yang tunggal dan jelas. Hal ini disebabkan karena memang konsep ketakterhinggaan sendiri bukan hal yang bisa ditangani dengan baik oleh pikiran.

3 penyebab paradoks:

1. **Infinite regress** (proses berulang)
2. **Self-reference** [misal: pernyataan ini salah]
3. **Konsep “super”** [misal: benda terbesar, makhluk terkuat, waktu abadi, dst]

Contoh paradoks:

Jika Tuhan Maha Kuasa, dapatkah Dia membuat "batu yang sangat berat" sehingga Dia sendiri tidak sanggup mengangkatnya?

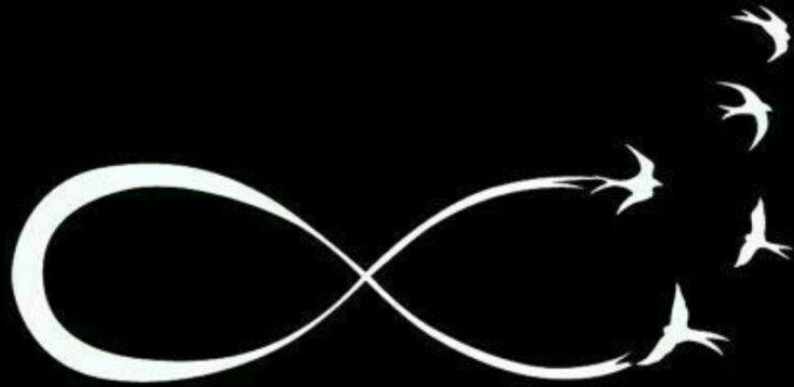
Self-reference dan konsep super penyebabnya



Apakah ada ketakterhinggaan aktual?
Tidak bisa dibuktikan.



Sudah selesai masalah tak terhingganya?



Bagaimana dengan ∞ ?

Note:

Sejauh ini ada 2 notasi tak terhingga

ω , \aleph_0

Tapi keduanya pada dasarnya ketakterhinggaan aktual, sudah ditetapkan langsung dari awal.

Matematika menjembatani konsep ketakterhinggaan potensial dengan konsep limit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

Simbol ∞ baru punya makna dalam notasi limit.

Sederhananya mengatakan cuma katakan “intinya kita menuju kesana”

Semua bentuk aritmatika pada ketakterhinggaan, seperti

$$\infty + 1 \text{ atau } 2\infty$$

tidak punya makna, kecuali dia bagian dari limit.

Misal $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 1)$ setara dengan $\infty + 1$

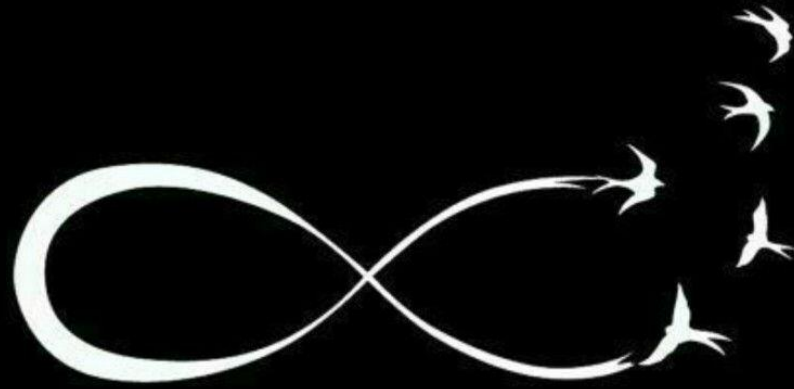
yang pada akhirnya sama saja dengan ∞

Bentuk-bentuk seperti

$$\infty - \infty, \infty \cdot 0, \frac{\infty}{\infty}$$

(dalam konteks limit tentunya)

menghasilkan ketidakjelasan sehingga bahkan disebut
limit tak tentu



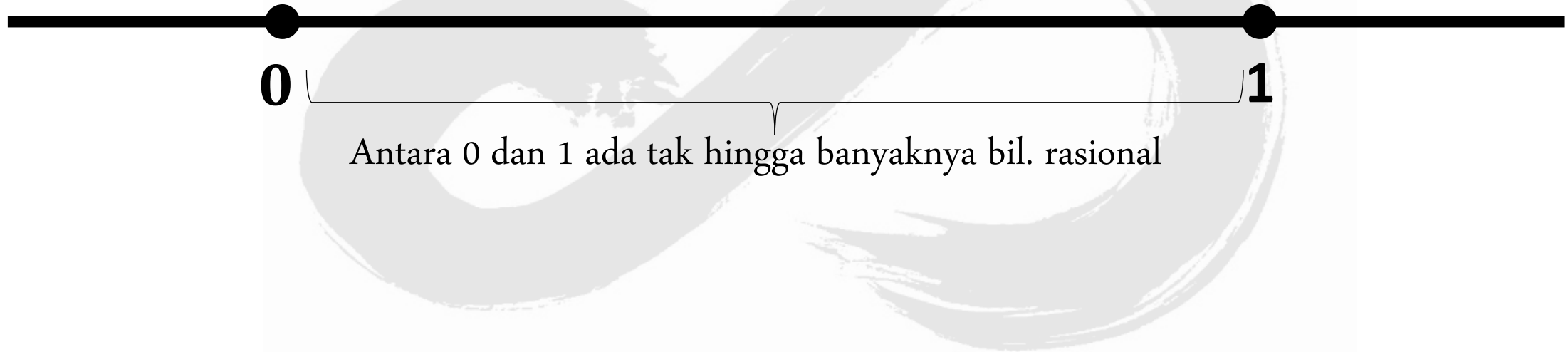
Final Boss:
Tidak Riilnya Bilangan Riil

Manusia dari awal peradaban menggunakan “bilangan riil”
tanpa tahu itu apa.



Intinya bilangan riil itu mengisi seluruh bilangan.

Bilangan rasional sendiri sudah “memenuhi” garis bilangan



Dan bilangan rasional itu banyaknya sama dengan bilangan asli

Di antara bilangan rasional yang sudah “padat” itu, masih ada jauh lebih banyak bilangan irasional.

Tapi seberapa banyak? Bisakah dienumerasi juga sehingga sama dengan bil. Bulat?

Di antara bilangan rasional yang sudah “padat” itu, masih ada jauh lebih banyak bilangan irasional.

Tapi seberapa banyak? Bisakah dienumerasi juga sehingga sama dengan bil. Bulat?

Misal kita ingin enumerasi bilangan riil

Andai semua bilangan riil sudah dapat dipetakan semua ke bilangan asli.

\mathbb{N}	\leftrightarrow	<i>reals in (0,1)</i>
1	\leftrightarrow	.835987...
2	\leftrightarrow	.250000...
3	\leftrightarrow	.559423...
4	\leftrightarrow	.500000...
5	\leftrightarrow	.728532...
6	\leftrightarrow	.845312...
\vdots		\vdots
n	\leftrightarrow	$.r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 \dots r_n \dots$
\vdots		\vdots

Sekarang, ambil desimal ke- n dari setiap bilangan riil di urutan ke- n

Tambahkan satu, dan susun menjadi satu bilangan

Contoh di samping (dari yang merah), kita dapatkan **0.960043...**

Tapi ini adalah entri baru, karena setiap digitnya berbeda satu dari salah satu bilangan di list.

Kardinalitas bilangan riil jauh lebih banyak dari kardinalitas bilangan asli, bulat, atau rasional!

Mereka sebut ini “continuum”

Dalam paradigma kardinalitas, hanya ada 2 “tak terhingga”

- Tak terhingga yang terbilang (*countably infinite*) -> semua yang bisa enumerasi [dipetakan ke bilangan asli]
- Tak terhingga yang tak terbilang (*uncountably infinite*) -> selain itu

Uncountability

contohnya: bilangan Riil

Setiap interval apapun sama banyaknya dengan seluruh bilangan riil itu sendiri

Misteri Continuum Hypothesis:

Ada ketakteringgaan antara yang *countable* dan *uncountable*

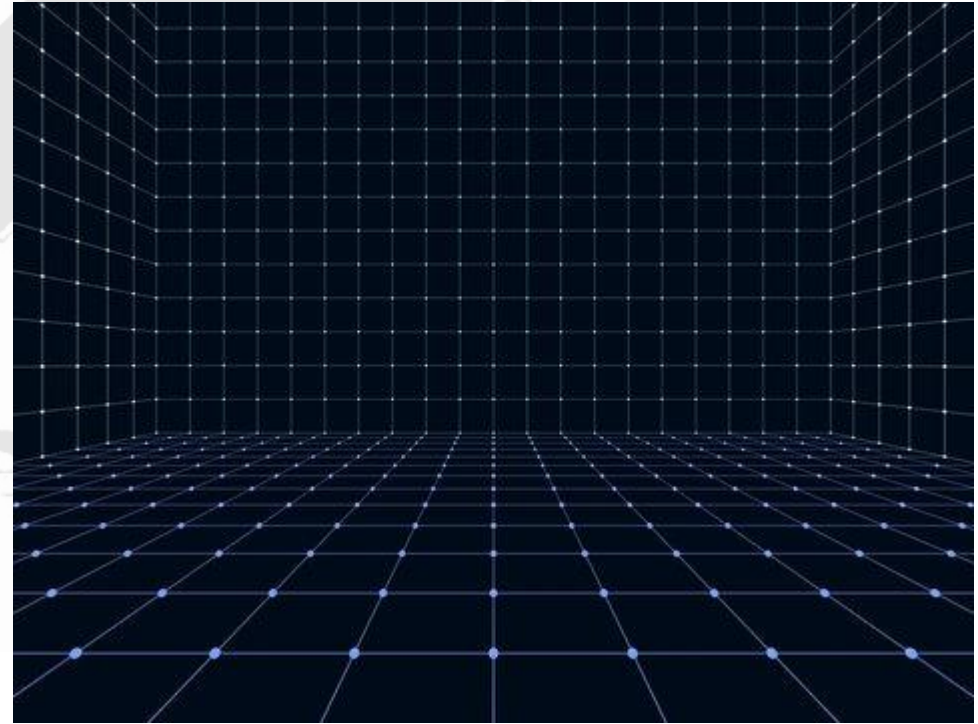
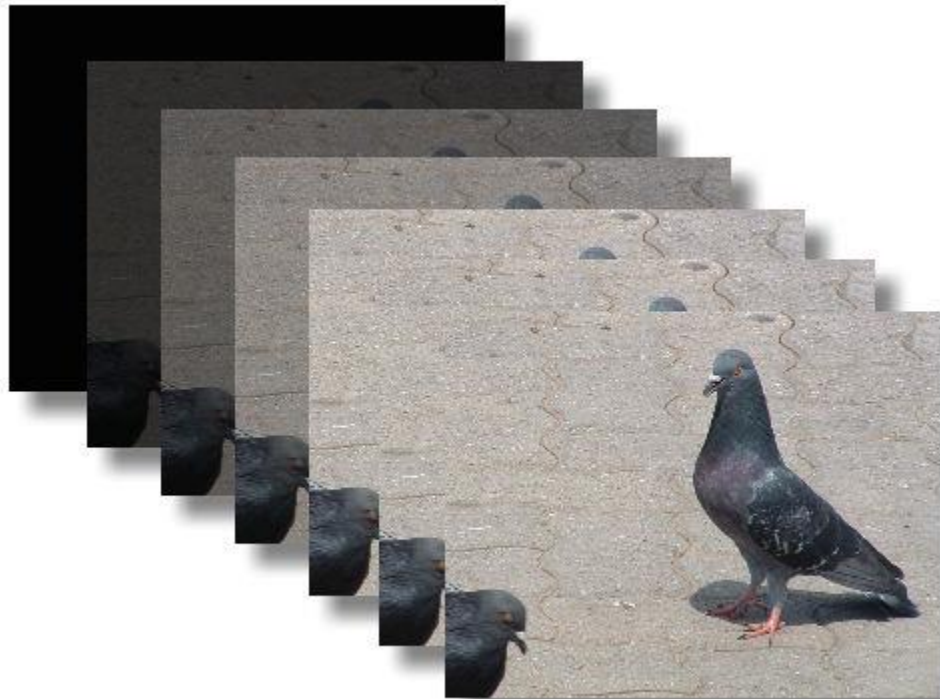


Ini semua adalah konsep abstrak matematis.
Apakah *continuum* itu sendiri riil?

Diskrit vs Kontinyu

Semua yang kita ketahui di dunia ini diskrit.
Namun beberapa hal “diasumsikan” kontinyu, seperti ruang dan waktu.

Ruang & Waktu diskrit?



Belum ada bukti ruang dan waktu diskrit atau kontinyu.
Banyak perhitungan fisis mengasumsikan kontinyuitas agar kalkulus
dapat diterapkan
[kalkulus adalah ilmu tentang perubahan kontinyu]

Dualisme Diskrit dan Kontinyu

