動態系統的穩定性分析

■R89 蕭智仁

0.前言

動態系統的定義是"系統狀態對時間的演化狀況，完全由前一時刻的系統狀態來決定"的系統。通常可以從"系統狀態的變化對時間是否連續"將動態系統分成兩大類：一種是系統狀態的演化對時間是連續的，它們的形式可以用像下面的微分方程式來表達

$$\dot{X} = F(X)$$

其中的X是個向量，裡面包含著系統狀態的各項資訊；而F是個向量函數。另一種的是系統狀態的演化對時間離散，而它們的形式可以用像下面的疊代式來表達

$$X_{n+1} = M(X_n)$$

如果F(X)或是M(X)是線性的函數，則這個動態系統就是線性的，反之就是非線性的。一般來說，我們對於線性系統已經算認識得相當地透徹了，由於線性系統的方程式中，具有"所有的解可以從一些基本的解疊加出來"的性質，所以只要能掌握所謂的"基本的解"就算是掌握了整個系統的性質，各種的分析法建立在這個基礎上，讓我們對線性動態系統瞭若指掌。相對的，我們對於非線性的動態系統的演化狀況卻是難窺全豹。因爲非線性系統無法像線性系統一般，從少數的解去構造出所有的解來，變成在系統中每一個演化的狀況都只能個別去討論。

但如果是討論一個非線性系統的演化狀態是否穩定，也就是說原本的系統狀態在受到些微干擾後，新的系統演化軌跡究竟是又回到原本系統軌跡呢，還是遠離原本系統軌跡呢？在這種情況下，我們就可以將非線性函數F(X)或M(X)做線性近似，以求得被干擾後的演化軌跡跟原本的軌跡之間的關係。此時就可以引入線性系統的架構來解釋系統的穩定性條件。這方面的討論將成爲這次前半部的主題。另一方面來看，我們可以研究一些系統最簡單的演化狀況，在系統的外來參數變化之下如何改變自身的構造。這種問題一般稱之爲"系統結構的穩定性"。這方面的討論將成爲這次後半部的主題。

雖然到最後，我們還是無法獲知任何一個系統狀態在任一時刻之後的演化情形，但是有了這類各種穩定性分析的討論，還是讓我們多知道一點非線性動態系統背後的秘密....

下面主要介紹的是連續性的動態系統， 然而離散性的動態系統也可以依照類似的方法來研究

1.一維動態系統的狀態演化

1.1 固定點(fixed point)狀態的穩定性

最簡單的動態系統就是一維的動態系統了，$\dot{X} = f(X)$ ，X爲實數。我們可以直接將X代入f(X)中得知X變化的趨勢: 如果f(X)>0， 因爲這意味著此時X對時間的變化率是正的，所以隨著時間的增加，X將會往正的方向跑；相對的，如果f(X)<0，則X就會往負的方向跑。 於是我們可以直接從f(X)的圖形中來認識這一點(見圖 1)。

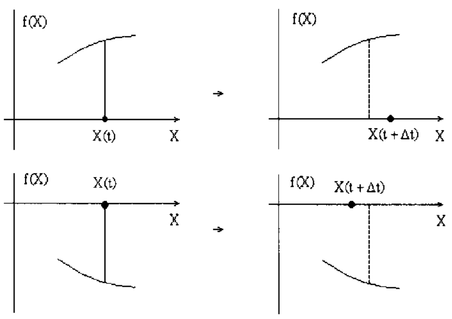

圖 1

當X所在的位置剛好使得f(X)=0的時候，系統狀態又將會如何演化呢？因爲在這裡X對時間的變化率爲0，所以我們可以預期X將不會起任何變化：它將乖乖地待在那裡。由於滿足f(X)=0的X將會一直固定在X上，所以我們稱這樣的系統狀態X

爲 " 固定點 " 。

不過在真實的世界中，系統狀態或多或少總是會受到外來雜訊的影響，使得狀態本身不斷地受到細微的擾動。如果當驅策 X 的動力 f(X)其絕對值大小夠顯著時， f(X)將會蓋過這些擾動，這時候 X 的動向將幾乎完全聽命於f(X)的值；然而當f(X)爲0的時候，這些雜訊的影響力將會彰顯出來，成爲判斷 X 動向的重要依據。

我們看看在固定點附近的狀況：如果在固定點上的f(X)斜率爲正，則f(X)在X大於固定點的地方是正的，小於固定點的地方是負的。那麼我們可以想像一下：如果原本是待在固定點的系統狀態若被干擾，而往正的方向偏離一點點，則X將會開始一直往正的方向跑，遠離固定點; 相反的，若是往負的方向偏離一點，則X將會開始一直往負的方向跑，同樣地也會遠離固定點。於是在這樣的狀況下，系統狀態無論是受到哪種方向的干擾，都將持續遠離固定點，無法穩定。

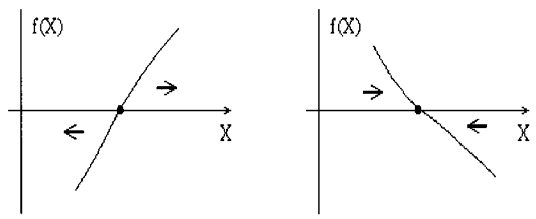

圖 2：左邊的是不穩定的固定點；而右邊的是穩定的固定點

如果固定點上的f(X)斜率爲負，則f(X)在大於固定點的地方是負的，小於固定點的地方是正的。接著，若原本是待在固定點的系統狀態若被干擾，而往正的方向偏離一些，則X將會一直往負的方向跑，直到返回固定點爲止(因爲在固定點的地方f(X)才不會繼續驅動X)；往負的方向偏離一些，則X就會往正的方向跑，也是返回固定點爲止。之後若系統狀態又持續受到干擾，則系統狀態將不斷地回到固定點上，如此X將"穩定地"在固定點附近徘徊。

於是我們可以發現：在一維動態系統的固定點上，如果在該處 f(X)的斜率大於 0 ，則我們稱這種的固定點爲 " 不穩定 " 的；而 f(X)小於 0 的時候，則我們稱這種固定點爲 " 穩定的 " 。

1.2 系統狀態演化的穩定性

討論完固定點的穩定性之後，接著來看一般狀況下雜訊干擾對系統狀態演化所造成的影響。假設 X(t)的起始狀態受到雜訊的干擾 δX 後，變成新的演化狀態 X'(t)。現在我們感興趣的是：過一段短時間後，經過干擾後的系統狀態 X'(t) 和原本的系統狀態X(t)到底是會靠近，還是互相遠離(見圖 3)？如果 δX 夠小，則這干擾的幅度對時間的變化是：

$$\delta\dot{X} = \dot{X}' - \dot{X} = f(X+\delta X) - f(X)$$

$$\approx \left(\frac{d}{dX} f(X)\right)\delta X$$

$$\equiv f^{\sim}(\delta X)$$

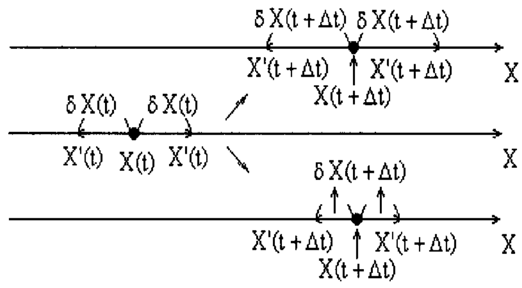

圖 3：X'(t) 和 X(t)會靠近還是遠離?

就以前面所用到的分析法來看，系統狀態被干擾的幅度 δX 在 $\delta X=0$ 的地方剛好有一個固定點，於是我們可以觀察 $f^{\sim}(\delta X)$ 在 $\delta X=0$ 處的斜率正負來判斷 δX 在附近的穩定情形: 斜率爲正會

發散，而斜率爲負會穩定。然而有趣的是 f˜(δX) 在 δX =0處的斜率，剛好就是 f(X)在原系統狀態 X 處斜率。而且若在短時間內的前提下，X 的位置變化不是很大，可以假設當時的 f(X)的斜率是定值。於是可以直接利用 f(X)的斜率判斷 δX 在固定點 0 上的穩定性。回到定義，$\delta X = X' - X$，如果 δX 逐漸發散，表示 X(t)的演化軌跡在經過干擾之後新的軌跡 $X'(t)$ 會遠離 X(t)，反之， δX 收斂穩定到固定點 0 ，則 $X'(t)$ 靠近 X(t)。我們可以直接從 X 處的 f(X)斜率知道 X(t)和 $X'(t)$ 是發散還是靠近。

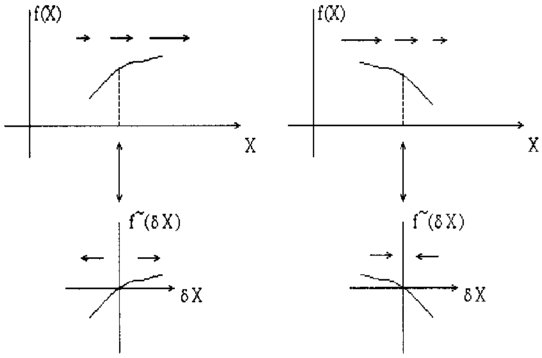

圖 4：f(X)的斜率與 δX 的穩定情形

2.二維以上動態系統的狀態演化

若用前面所提到的方法來考慮二維以上動態系統的狀態演化，明顯地會有個麻煩的地方：因爲 X 和 f(X)都變成了向量，不再有明確的 " 大小 " 、" 正負 " 、 "斜率值"，所以我們必須換個角度來看待這種系統下演化的狀況。

重新觀察一維動態系統的演化穩定性。 我們已經知道

$$\delta\dot{X} = \tilde{f}(\delta X) = (\frac{d}{dX}f(X))\ \delta X$$

所以 δX 的解是

$$\delta X = \exp((\frac{d}{dX}f(X))\ t)$$

當 f(X)對 X 的斜率爲正的時候，可以發現 δX 隨著 t 正比例的增加；若是負的狀況，則 δX 隨著 t 反比例地減少，逐步收斂到固定點 0。這種直接解微分方程式的方法是比較汎用的，可以解出在多維度狀態下的情形。下面我們將使用這種方法。

2.1 系統狀態演化的穩定性

在多維度的狀況下，"斜率值"將不再適用，因爲 F(X)對 X 的微分將會變成矩陣的形式。如果我們將多維動態系統的式子展成下面的形式：

$$\begin{aligned}
\dot{X}_1 &= F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\
\dot{X}_2 &= F_2(X_1, X_2, \ldots, X_n) \\
&\vdots \\
\dot{X}_n &= F_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)
\end{aligned}$$

如果 δX 的定義和之前的一樣，那麼 δX 的方程式 " 在形式上 " 仍然是一樣的：

$$\delta\dot{X} = \tilde{F}(\delta X) = (\frac{d}{dX}F(X))\ \delta X$$

但是

$$\frac{d}{dX}F(X) = \begin{pmatrix} \partial F_1/\partial X_1 & \partial F_1/\partial X_2 & \cdots & \partial F_1/\partial X_n \\ \partial F_2/\partial X_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial F_n/\partial X_1 & \cdots & \cdots & \partial F_n/\partial X_n \end{pmatrix}$$

雖然變成了一個矩陣，但我們能不能如同之前的"斜率"一樣，從中間抽出系統狀態的訊息呢？答案是可以的。我們可以計算這個矩陣的 " 本徵值 " ，以及其對應的 " 本徵向量 " ，獲知這個系統狀態在個別維度上的收斂發散情形。 事實上是可以把這個矩陣的各本徵值當 F(X)在該本徵向量上頭的斜率。

接下來就先以二維的系統爲例子，介紹高維度動態系統穩定性的樣貌：

1.本徵値都小於0：往中心收斂。在這附近的系統狀態將會靠近，如果在中間的部分就是固定點，那我們稱這種固定點爲"吸子"。(見圖 5)

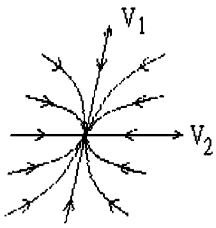

圖 5

2.本徵値都大於0：從中心發散開來。在這附近的系統狀態將會彼此遠離，如果中間的部分就是固定點，那麼這個定點上的系統狀態將不會穩定在上面。

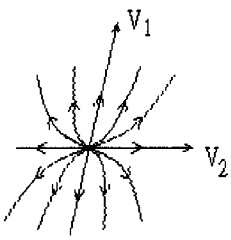

圖 6

3.本徵値一正一負：在這附近的系統狀態將會以近乎於雙曲線的軌跡行進。其中V_1所對應的本徵値爲正的，V_2所對應的本徵値爲負的。如果中間的部分就是固定點，那麼在這固定點上的系統狀態也將不會穩定。這種型態的固定點我們稱之爲"鞍點"。(見圖 7)

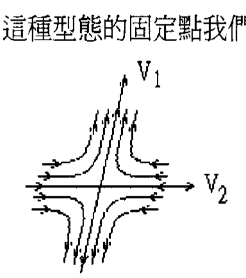

圖 7

4.本徵值爲一對共軛複數：由於我們的動態系統方程式多半是實數的方程式，所以F(X)對X的微分所形成的矩陣是實係數的。當我們解實係數矩陣的本徵値時，若出現複數的情形，那一定是一對的共軛複數。由於在一維的例子中並沒有斜率值爲複數的狀況，所以在此來特別討論。

如果這對共軛複數個別爲 a+bi 以及 a-bi ，而 a，b爲實數，則 δX的微分方程式的解就變成

$$\delta X_1 = V_1 e^{(a+bi)t} = V_1 e^{at}(\cos bt + i\sin bt)$$

$$\delta X_2 = V_2 e^{(a-bi)t} = V_2 e^{at}(\cos bt - i\sin bt)$$

δX_1 與 δX_2 經過適當的線性變換以後，可以變成 $\delta X_1'$ 與 $\delta X_2'$：

$$\delta X_1' = V_1' e^{at}\cos bt$$

$$\delta X_2' = V_2' e^{at}\sin bt$$

即可明顯發現這是在 V_1' 和 V_2'上的一個旋轉運動，其中a可決定系統狀態是旋入還是旋出，b可決定旋轉的轉向。圖 8 的例子就是 a 負 b 正的情形。這裡的系統狀態穩定與否，由 a 的正負來決定：當 a>0 ，則附近的系統將趨向於發散；相反的，則會互相靠近。如果中心爲固定點而 a<0 ，則這個固定點也是個吸子。

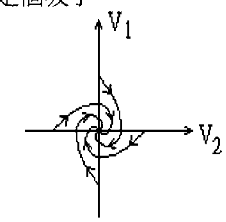

圖 8

以上將二維狀況大致提過，若是在三維以上的情形，則只要利用前面所提的各種類型在各維度

上組合起來即可，在此就不詳述了。從前面這些討論可以知道，只要F(X)對X的微分所形成的矩陣，其所有本徵值的實數部分都爲負，則無論從哪個維度去看，整個系統狀態都將收斂在一起。所以只要滿足這樣條件的系統，其狀態的演化將會是穩定的。

2.2 週期軌道(極限環)的穩定性

大於一維的動態系統，往往有機會產生出週期性的運動。觀察週期運動的穩定性也是一個相當重要的工作。 數學與理論物理學家 Poincare 發展出一種方法來作爲週期軌道穩定性的依據。

首先在動態系統的狀態空間中選取一個子空間，使週期軌道在上面只穿過一到數個點，而不會有一小段都在上面的情形。這個子空間通常稱之爲"Poincare截面"(Poincare's section)。 若選取得當，則通過在這截面上的系統演化軌道都會再次穿過這個截面，當然，也包括了週期軌道(見圖 9)。

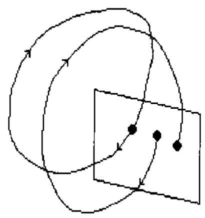

圖 9

於是，我們可以對截面上的各點，沿著軌道將方程式積分，直到再次回到截面上頭爲止。積分的結果使得原本在整個系統狀態空間的連續性動態系統方程式，變成落在 Poincare 截面上的離散性動態系統方程式，也就是在截面上的映射。令截面上的一點爲 Y，而映射爲 M(Y)，整個新的式子爲

$$Y_{n+1} = M(Y_n)$$

顯然，令週期軌道交在截面上的點爲 Y，則

$$Y_* = M(Y_*)$$

Y_* 變成在這種動態系統中的"固定點"。如果我們想知道原本整個週期軌道的穩定性，那只要知道 Y 在這種動態系統中的穩定性就好了。

我們仿照前面的方法來用。若受到干擾後的狀態 Y_n' 與原本的狀態 Y_n 相差 δY_n，若干擾很小，則經過一次映射之後

$$\delta Y_{n+1} = Y_{n+1}' - Y_{n+1} = M(Y_n') - M(Y_n)$$

$$\approx \left(\frac{d}{dY} M(Y_n)\right) \delta Y_n$$

$$= M^{\sim} \delta Y_n$$

$$\Rightarrow \delta Y_n = M^{\sim n} \delta Y_0$$

$$M^{\sim} = \begin{pmatrix} \partial M_1/\partial Y_1 & \partial M_1/\partial Y_2 & \cdots & \partial M_1/\partial Y_m \\ \partial M_2/\partial Y_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial M_m/\partial Y_1 & \cdots & \cdots & \partial M_m/\partial Y_m \end{pmatrix}$$

若原本的動態系統空間的維度是 N，則 m=N-1。同樣地我們可以從這個矩陣M的本徵值與本徵向量來推測軌跡運行的趨向。由於可以將 δY_n 分解成這個矩陣所有本徵向量的線性組合(或是再經過座標變換)，而這些本徵向量在經過映射後只有長度上的伸縮，改變的比例就是其對應的本徵值。若一本徵值 λ 所對應到的本徵向量爲V，則V經過n次映射的結果 Vn 是:

$$V_n = M^{\sim n} V = \lambda^n V$$

以圖 10 爲例，這是其中兩個本徵值都是負的

爲例子：就如同連續性動態系統的情形一般，附近的點隨著時間的增長而逐漸靠近。只是連續性的動態系統會一直沿著一條線進去，而在這邊的映射卻是一次一次地跳在那條線上進去的。

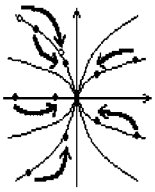

圖 10

回到週期軌道的例子。如果映射式M(Y)對Y的微分矩陣在週期軌道點Y_*上，其所有本徵值的實數部分都小於 0，則可以確定在截面上，Y_*附近任何一點在經過映射之後，將一定會更靠近Y_*點。則通過Y_*點的那個週期軌道可以預期就是穩定的週期軌道。如果有任一項是正的，就不會是個穩定的週期軌道了。

3.系統結構的穩定性分析

通常動態系統的方程式中，除了系統狀態的變數以外，還會包含一些"係數"。這些係數在動態系統演化的時候"應該"都要是常數才對，但往往還是有一些外來雜訊干擾到這些係數的可能性。由於係數的變化多半會影響到這個動態系統的"結構"，比方說固定點的位置，或是固定點的數量，甚至是固定點上系統狀態的穩定性等等。所以這些係數在些微的變化時，是否會對這些固定點的性質造成重大影響？這些範圍都是屬於 " 系統結構的穩定性分析 " 。一般稱這種係數改變造成固定點結構改變的現象爲 " 分支現象 " 。

下面先將介紹一個比較簡單的例子，並隨後列出一些常見的分支現象。

3.1 參數變化與固定點的結構: 一個簡單的例子

考慮這樣動態系統的式子：

$$\dot{X} = \mu - X^2$$

其固定點的位置 $X_* = \pm\sqrt{\mu}$ 。當μ小於 0 的時候，固定點的位置是個"虛數"，不存在於動態系統的空間中。這可以從圖 11(a) 的部分可以看出來。當μ恰爲 0 的時候，出現了一個固定點，這個固定點上頭的斜率是 0，不過還是可以從圖 11(b) 上看出來：在兩旁的系統狀態都會往負的方向跑，所以是個不穩定的固定點。當μ大於 0 了以後會有兩個固定點，其中 $X = \sqrt{\mu}$ 的點上斜率爲負的，是穩定的固定點，相對的 $X = -\sqrt{\mu}$ 上的斜率是正的，是個不穩定的固定點(圖 11(c))。

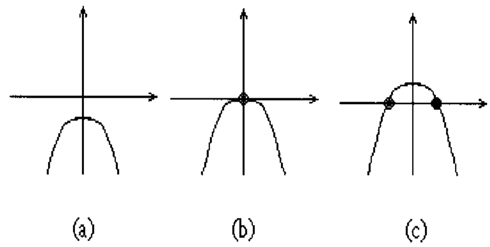

圖 11

如果把固定點X_*的位置對 μ 做圖，則可以看見隨著 μ 值的不同，X_*的位置數量與性質都不太一樣。這種圖被成爲 " 分支圖 " (bifucation diagram)。(圖 12) 類似這種方程式所造成的分支，我們稱之爲 "tangent bifucation" 。

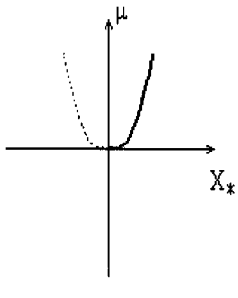

圖 12

3.2 一些常見的分支現象

a.Transcritical bifucation (圖 13)

$$\dot{X} = \mu X - X^2$$

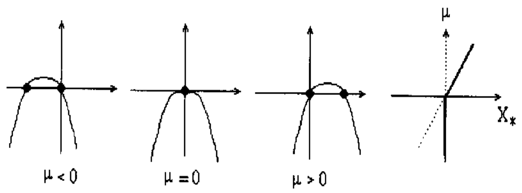

圖 13

b. Pitchfork bifucation (圖 14)

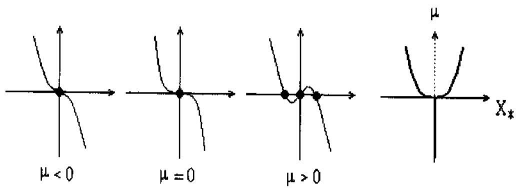

圖 14