

Magnetic Monopoles

高朝暉

每個小學生現在都曉得一根磁棒有兩極，一個叫S極，一個叫N極，當分成兩小塊後，每小塊又是一根磁棒，每根都有N，S兩極，絕不會變成各具N，S單一極的磁棒。遠在西元1600年時，吉伯特（Gilbert）曾試着把一根磁棒分成單極磁塊，當然他也像前人一樣失敗了，不過他提出了磁分子說，指出每根磁棒就是由小磁分子整齊排列而成，表面上他好像解釋通了，但你若略加思慮，你就發現他的理論又牽出一個新問題，當一根磁棒分之又分，如此持續下去，你又墮入「無窮」的漩渦中。即使到了原子的概念相當成熟的階段，雖然假設了最小的組成因子的存在，頓時跳出「無窮」的陷穽，但你把最小的磁分子橫腰一割，將會得到什麼呢？這個問題一直留到1925年，Pauli的Exclusion principle才算解決它。

縱觀電磁學的發展，原本兩家，它們之間並無什麼關係，十六、七世紀始日有交通，直至十九世紀中，馬克思威爾（maxwell）權充紅娘，把它們兩小口子湊合在一起，他綜合安培和法拉第定律，定出了聞名的馬克思威爾四誠，它倆互信守不渝。此四誠就是：

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho$$

$$\nabla \cdot H = 0$$

$$-\nabla \times E = \frac{1}{C} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{C} J$$

$$\nabla \times H = \frac{1}{C} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{C} J$$

在人類的活動中，對稱性一直是審美觀念之基本要素，這件事實甚至可遠溯至原始先民的洞窟繪畫或雕刻，對造物主而言，這句話也是對的，120年前Pasteur用高分析力的顯微鏡發現酒石酸鹽的旋光性，這旋光性的差異正告訴我們它物理結構上的鏡像性，對稱性也存在大自然之中。

磁的現象一直被認為是電的副產品，電的額外效應，Dirac發表他的正子理論後，雄心萬丈，信心大增，如同他對負能量的繪釋，電和磁的現象是如此的相似，為何馬克思威爾方程式如此顯得不對

稱，他認為唯有假設磁單極的存在才能帶來方程式的對稱性，世界的完美性。過去的經驗告訴我們除非有一定律，它阻止一個現象或一個過程的發生，不然它有可能發生。

加入磁單極存在的假設後，馬克思馬爾方程式也就對稱了許多。

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho$$

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho$$

$$\nabla \cdot H = 0$$

$$\nabla \cdot H = 4\pi\rho_m$$

$$-\nabla \times E = \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$-\nabla \times E = \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J_m$$

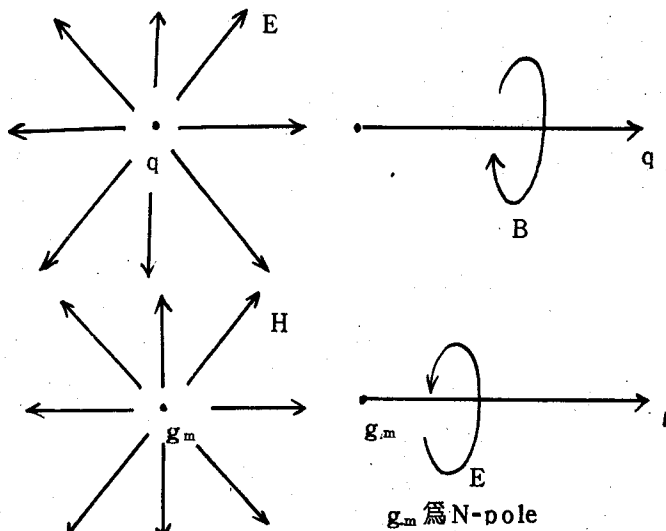
$$\nabla \times H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J$$

$$\nabla \times H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J$$

ρ_m 指 magnetic charge density

J_m 指 magnetic current density

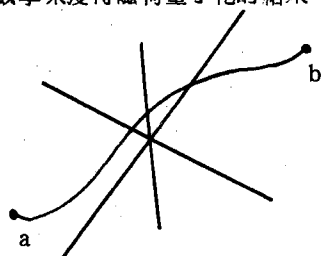
單磁極將有靜磁場，如電荷環有電場一樣，並且運動會產生電場，如同電荷運動產生磁場一樣。



Dirac認為既然古典電磁學不能說明為何沒有

磁單極的存在，他便從量子力學上著手。希望能找出一個法則，它阻止磁單極的存在。但量子電動力學同樣告訴我們並沒這種法則存在，也就是說磁單極還是有可能存在，也許只是尚未發現罷了。在1931年他提出的論文中談到一項有趣的玩意，就是若有磁單極的存在，則它的磁荷也是被量子化了，就像能量被量子化一樣。1948年他在physics Review又發表了一篇關於磁單極理論，那時量子

電動學已經發展得相當完整，所以這篇論文就建立在量子電動學上，當然不容易看得懂。我這兒試從另一角度來看磁單極，利用較簡單的觀念和較淺易的數學來獲得磁荷量子化的結果。

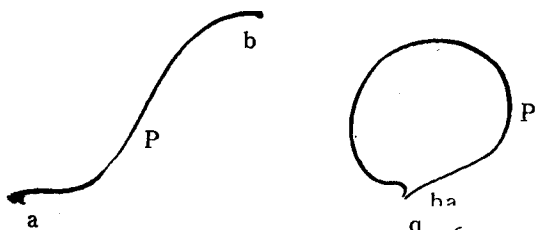


量子力學告訴我們，由於波函數的單值性，在氫原子這個例子中，磁量子數必為一整數。等一下我們就會用到這性質。

在量子力學中，波函數 $\psi = A e^{i\gamma}$ ， A, γ 皆為 x, y, z, t 的實數函數，由於 Probability 的單值性， ψ 的 phase γ 可以差上一個定值。我們不妨這樣想，在某一點 γ 並無定值，除非是相鄰兩點，這樣才有一個定差。二相異點的波相差依連接這二點的路徑而定，所以繞一整圈，其波相差並不一定消失，但 $\psi^* \psi$ 却有直接的物理意義。

$\int \psi_m^* \psi_n dx dy \cdot dz$ 有一定值，故需兩相異點之波相差為一定值，所以 $\psi_m^* \psi_n$ 繞一圈之波相差必須為零，也就是 ψ_n^* 繞一圈的波相差必須為 ψ_n 的等值而反號，即 ψ_m, ψ_n 繞一圈的波相差都相同。

若無磁場， $e^{im\theta} = e^{im(\theta + 2\pi)}$ 所以磁量子數必為一整數。若有磁場存在，則波函數必須改為。



$$\langle b | a \rangle_{m \pm 1} = \langle b | a \rangle_m \cdot \exp \left\{ i \frac{q}{hc} \int_p A \cdot ds \right\}$$

A 為 Vector potential

$$e^{im_1\theta} = e^{im_2\theta} \cdot \exp \left\{ i \frac{q}{hc} \int_p A \cdot ds \right\}$$

$$\text{但 } e^{im_1\theta} = e^{im_2(\theta + 2\pi)} \quad \therefore m_1' 2\pi = m_2 2\pi + \frac{q}{hc} \int_p A \cdot ds$$

$$\text{但是 } \int_p A \cdot ds = 4\pi g_m = \text{flux (Gauss law)}$$

$$\therefore m_1' = m_2 \pm \frac{q g_m}{2\pi hc} \cdot 4\pi, \text{ 因 } m_1', m_2 \text{ 為整數, 所以}$$

$$\frac{2q g_m}{hc} \text{ 亦為一整數, 即 } g_m = n g_m^0$$

$$n \text{ 為整數, 而 } g_m^0 = \frac{hc}{2q} = \text{基本磁荷}$$

故磁荷被量子化，為 g_m^0 的整數倍

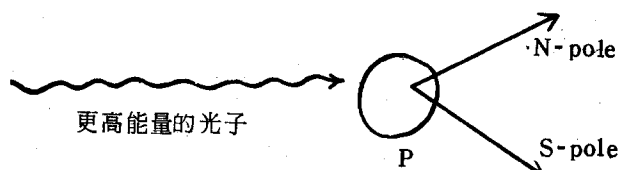
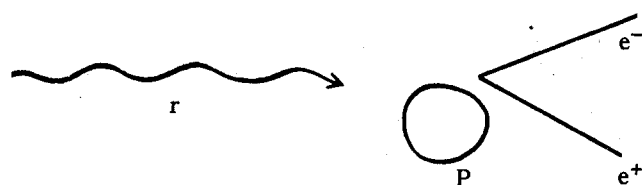
因為 g_m^0 為電荷的 68.5 倍所以作用力為其之 4692 倍。交互作用的強度約與質量成正比，

$$\frac{1}{2} \int_a^\infty E^2 d\tau = mc^2, \quad \frac{1}{2} \int_a^\infty H^2 d\tau = MC^2$$

$$\therefore \frac{M}{m} = \frac{g_m^2}{e^2}$$

$\therefore M$ 大約為質子質量的 3 倍，此目前所發現的基本粒子質量還大。電子是荷電而最輕的粒子，磁單極可能是荷磁荷而最輕的粒子。故由於磁單極的質量持大，可以說明為何尚未被發現。

1960 年代，世界各地都在探尋磁單極的存在證據。有的利用宇宙射線的高能量來產生磁單極，有的利用加速器。



由於磁荷非常大，在 10^4 高斯的磁場裡，每走一公分可獲得 200 Mev，一個 6 英尺長的加速器足夠加速至目前任何加速器所能達到的能量。

如果找到一個磁單極粒子，由於此種粒子的稀少性，其與反粒子湮滅的機會更小。也由於磁荷不滅性，像電子一樣，將是個穩定的粒子，所以磁單極粒子可以用來作 incident particle 或 target，一用再用，不至消失。

人們未能從高能量加速器找到磁單極，隕石，月球石，海底岩石中也未曾發現它的存在，但這並不表示一定沒這種東西。可能來日會被發現，也可能根本不可能存在，但還是需要從實驗上證實它的存在，或是從理論上找出它不能存在的原因。