量子物理的新基礎

Alfred Lande′作
李羅權 譯

——對瞭解量子物理基本原則的再次嘗試。由於涉及知識論，它的處理過程常是引人爭論的。本文嘗試著由非量子的假設導出量子力學。——

六十七年前，普朗克（Max Plank）引燃了量子時代，但在量子的觀念方面却仍使學生們感到神秘難懂。從一些基本原則（如波粒雙重性和互補原理）來解釋量子論的基本數學公式，仍未解除量子論的神秘性，因爲這些基本原則本身就具有量子性。基於這事實，一些理論學家已做進一步的分析，建立起一套公設，這些公設不明顯地包括任何量子定律。然而這些公設——我指的是在 Heisenberg Festschrift 裏 Fritz Bopp 的 14 篇論文和 Günther Ludwig 在他著的"量子力學的基礎"裏的——是極具數學抽象性的，因此極難滿足物理學家對解釋量子論的要求。

即使我對這些數學上無懈可擊的公設系統頗爲讚賞，但我認爲，對藏在奇異的計算公式和量子上似爲矛盾的理論背後的眞正東西，它們並沒有發掘出很多。學生們，讀了這些公設並被灌輸了通常的解釋方式之後，將會把這些公式的演算當作一種商業遊戲，尤其當他聽到了他必須去領悟「量子力學裏是沒有什麼可瞭解的」，或者聽到了「眞正的問題是去修改物理語言，而不是徒然的做從波方面轉爲粒子方面的嘗試」，這種情形更甚。

相反地，我不滿意於這種不瞭解狀態，我認爲從非量子的假設來導出量子論是可行的。然而我認爲，爲了具有解釋性，這些非量子的假設必須是簡單有理，並且是幾乎自明的事實，這些項目並不需要精確的定義，同時，這些基本假設的結合必須導出衆所週知非相對論性的量子公式。以下新的探討並非無可瑕疵，亦非完整，然而它帶來了（不僅對我自己）這種經驗「現在我已開始來瞭解量子力學了」。無論如何，它的目的是使這個理論的神秘性解除。量子論久已以不可瞭解出名，並到了「必須對通常（亞里斯多德）邏輯重寫」的地步。

I 機遇率矩陣 （Probability Matrices）

以下的討論，我們將放棄古典的決定論，而採用非常普遍的統計或機遇形式，這以後可應用在力學上。如是，在討論能，動量，和其他物理量之前，我將先提及各種的"可觀察項"（Observables）A，B，C等等。某一特定力學系統的量A可以有各種不同的值 A_1，A_2，……。這些值是否構成一連續的值或只有一些固定値，而以特殊值（Eigenvalue）表示，在目前是不相關的。爲了數學上的簡單起見，首先假設在

A_1，A_2 …… A_m 和 B_1，B_2 …… B_n，等等 (1)

中，$M=m$ 和 $M=n$ 是有限的，當然以後可以普遍化而至於無限。在另一方面，要注意的是一個最複雜的自然裏，可以有無限多的"可觀察項"A B C…………。

假設我們有可以決定A値的儀器——叫A量器，它能確定這一系統是在某一狀態 A_α 中，當這系統由B量器來測量時，有時會出現 B_1 值，有時 B_2 不等，但我們不能決定這次那一個値要出現或不出現。統計命題上包括著如下的假設：各種狀態 B_1，B_2 …… B_n 以某種統計頻率或是機遇率：

$$P(A_\alpha \to B_1),\ P(A_\alpha \to B_2),\ \cdots\cdots,\ P(A_\alpha \to B_n) \quad (2)$$

發生，但其和爲 1。我們可以把這些連繫著原來的狀態A和後來由B量器測出的B狀態的各種或然率P排成一長方陣——矩陣如下：

$$\begin{pmatrix} P(A_1\to B_1) & P(A_1\to B_2) & \cdots\cdots \\ P(A_2\to B_1) & P(A_2\to B_2) & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{pmatrix} = P_{AB} \quad (3)$$

共m列，n行。每列之和爲 1。

Ⅱ 對稱性的假設

我們假設兩種進行方式之機遇率的對稱性，那就是:

$$P(A_\alpha \to B_\beta) = P(B_\beta \to A_\alpha) \quad (4)$$

這假設看來是有理的，因爲這是古典決定論過程的時間可逆性的統計標記。

從(4)式，可以得知矩陣 P_{AB} 的各行與矩陣 P_{BA} 的各列對應相等，而 P_{BA} 各列之和亦爲 1，因此不僅 P_{AB} 中各列之和爲 1，其各行之和亦爲 1。因爲矩陣中，所有元素 P 之和是各列之和（爲 1）之總和（爲 m），也是各行之和（爲 1）之總和（爲 n），m 必等於 n，因此矩陣 P_{AB} 必爲方形的（quadratic），可觀察項A與可觀察項B有同樣 m 種的值，在同一力學系統中的可觀察項C，D等等也同具有 m 種的值。略去箭號

，而以 $P_{\alpha\beta}$ 代 $P(A_\alpha \to B_\beta)$，則得

$$\sum_\beta P_{\alpha\beta} = 1 \qquad \text{對所有的}\alpha$$
$$\sum_\alpha P_{\alpha\beta} = 1 \qquad \text{對所有的}\beta \qquad (5)$$

注意下面的特殊情形

$$P_{\alpha\alpha'} = \delta_{\alpha\alpha'} \qquad \text{或 } P_{AA} = 1 \qquad (6)$$

這導至 P_{AA} 爲一單位矩陣（unit matrix）（對角線各元素爲 1，而其他位置爲 0）。

從現在起，“可觀察項”將只代表著上面式中的 A 量，B 量等等。如此一來，位置 xyz 不是一個可觀察項，而是位置 xyz 在時間 t_A 是一個可觀察項 A，xyz 在時間 t_B 是另一可觀察項 B，雖然我們不可能在任何時間 t 測得粒子在原子裏的位置。“可觀察項”這個名詞是個誤解，但已經建立的述語是不容易改變的。

Ⅲ 機遇率之干涉 （Probability interference）

機遇率之干涉定律被認爲是量子力學的一個特色，並是對 Schrödinger 方程式的補充。我想指出 P 之干涉是當我們加了下面的假設之後，我們的機遇計劃發展出來的自然結果，下面的假設是：

各種不同的 P 矩陣，藉由一簡單的普遍的運作，構成一個群（group），這運作對所有的“可觀察項”A B C 等是對稱的。

這裏首先要强調“普遍”這詞。一個人可用他數學上的天才，而構出一特殊的 P 矩陣群，擧例來說，可以構成一組矩陣，在各矩陣裏，各行或各列都重複著相同的元素，不是零，或是有極高的對稱性。但這些解不合於一個前提——要能表出連繫最複雜的“可觀察項對”的各種機遇率。各個 P 矩陣雖複雜岐異，但它們彼此間的關係是假設對交換 A B C………等是對稱的。這些交換由一個運作子（Operator）v 表示

$$P_{AB}\ v\ P_{BC} \ \overrightarrow{=}\ P_{AC} \qquad (7)$$

在 v 的運作下，= 表示單值，→表示多值定值。

在普遍性原則的要求下，必須除去由數學性直覺得來的特殊解。

在求得一個滿足普遍性與對稱性的一個運作子 v 中，若只限於多値定値（→），那眞難於著手，因爲它太模糊（這確需特別的天才）。因此讓我們只考慮單值定值（=），把它應用到 Ψ 上，Ψ 以後或許與 P 相等，但至少與 P 有關：

$$\Psi_{AB}\ v\ \Psi_{BC} = \Psi_{AC} \qquad (8)$$

(8)式的運作消除了中間值 B，這中間值可由 D，E 等代替。(8)式滿足了 Ψ 構成一群的第一個條件，它叫結合性，因它把 AB 和 BC 縮爲 AC，而 Ψ_{AC} 仍屬於這群裏的一個元素。

第二個使這些量構成一群的條件是必須有一個同一元素（identity element）e，使得 e v Ψ_{AB} = Ψ_{AB} v e = Ψ_{AB}。假如 e = 0 則 v 代表加號＋，若 e = 1 則 v 代表乘號×。因爲矩陣 P 包括同一元素 $P_{AA} = P_{BB} = \cdots\cdots = 1$，因此只有它的變形

$$\Psi_{AA} = \Psi_{BB} = \cdots\cdots = 1 \qquad (9)$$

能夠作爲 P 矩陣相等或有關之矩陣模型，因此 v 必爲乘號。

$$\Psi_{AB} \times \Psi_{BC} = \Psi_{AC} \qquad (10)$$

同樣地，從(10)式裏可得

$$\Psi_{AC} \times \Psi_{CB} = \Psi_{AB}$$
$$\text{和} \quad \Psi_{CA} \times \Psi_{AB} = \Psi_{CB} \qquad (10)'$$

然而，唯一不矛盾的矩陣乘法是通常列乘行的乘法，(10)的顯明表示爲

$$\sum_\beta \Psi_{\alpha\beta}\Psi_{\beta r} = \Psi_{\alpha r} \qquad (11)$$

（同樣地，一個人若有數學天才，他或許可以發現其他的符號乘法，作爲他的特殊 Ψ 矩陣之用，可以滿足群和對稱條件）。

第三個構成群的條件是，每個元素必須有倒數，這個條件已被滿足了，Ψ_{AB} 之倒數爲 Ψ_{BA}，因由(9)(10)可得

$$\Psi_{AB} \times \Psi_{BA} = 1 \qquad (12)$$

或可寫成

$$\sum_\beta \Psi_{\alpha'\beta}\Psi_{\beta\alpha''} = \Psi_{\alpha'\alpha''} = \delta_{\alpha'\alpha''} \qquad (12)$$

結論：(10)式之乘積定理及其特殊情形(12)，是唯一以單值關係，並且對 A，B，C 對稱的，連繫方形矩陣 Ψ（包括 $\Psi_{AA} = 1$）之唯一方法。（特殊和人爲的架構不算）

Ψ 不能同 P 相等，因爲後者均是正的，而前者必須也有負的，或者是複數的，在(12)′中 $\neq \alpha''$ 時 Ψ 之積之和爲 0。因爲 Ψ 定理是能滿足以上條件的唯一單值的定理，P 間之關係不能是單值的。然而，他們之間必與單值關聯的 Ψ 值有關，我們有個多值的 P 關係問題之簡單而普遍的解如下：

$$P_{\alpha\beta} = \Psi_{\alpha\beta}\Psi_{\beta\alpha} = P_{\beta\alpha} \qquad (13)$$

因此 $\Psi_{\beta\alpha} = \Psi_{\alpha\beta}$，或者更普遍的承認 Ψ 是複數（* 表示共軛複數）

$$\Psi_{\alpha\beta} = \Psi^*_{\beta\alpha} \qquad (14)$$

再次聲明，(13)式不能說是對於 P 矩陣關係問題，數學上唯一可能的解，但它是唯一以簡單而直接方式得來的解。在以下的假設下，它可說是“自然的”解：物理世界的基本定律是簡單的，而複雜的表示還未達到基本層。（或許有點兒形上學味道）。

在下面，我們將看到，爲什麼要以複數的 Ψ 作 unitary transformation，而不以實數 Ψ 作 orthogonal transformation。

Ⅳ 平均與過渡值

計算平均值時就需要機遇率，比如，從原來的 A_α 狀態透過它的各特殊值 B_β 而求B之平均值，其定義如下：

$$<B>=\sum_\beta P_{\alpha\beta} B_\beta \tag{15}$$

由(13)式，(15)式可寫成

$$B_{\alpha\alpha}=\sum_\beta \Psi_{\alpha\beta} B_\beta \Psi_{\beta\alpha} \tag{15'}$$

我們把它改叫做“從 A_α 出發又回到 A_α 中，B之平均值”或更精確地說“從 A_α 到 A_α，B之過渡值”這麼表示，並沒新東西產生出來，然而在 orthogonal 或 unitory transformation 之架構中，只有一種方法把(15′)式普遍化，如下

$$B_{\alpha r}=\sum_\beta \Psi_{\alpha\beta} B_\beta \Psi_{\beta r} \tag{16}$$

(16)式定義了“從 A_α 到 C_r 中B之過渡值”，根據通常的觀念(16)式中Ψ之值該以P代之。把(15)和(15′)當作符合 unitary transformation 之通式的特殊情形的只有(16)式。假如把矩陣元素定義如下

$$B_{\beta\beta'}=B_\beta\,\delta_{\beta\beta'} \tag{17}$$

則可把(16)式改寫為

$$B_{\alpha r}=\sum_\beta\sum_{\beta'} \Psi_{\alpha\beta} B_{\beta\beta'} \Psi_{\beta' r} \tag{17'}$$

當Ψ是實數時 $B_{\alpha r}=B_{r\alpha}$；在更普遍化情形Ψ是複數，則B像Ψ一樣，從(16)式可知

$$B_{\alpha r}=B^*_{r\alpha} \tag{17''}$$

Ⅴ 波方程式與選擇律

到現在為止之討論，只限於可觀察項A，B，C……。現在我們轉向力學，而處理特殊量q ── 位置，p ── 動量，E ──能量，t ──時間，構成共軛對在古典力學中，共軛性是從漢彌爾敦（Hamiltonian）運動方程式定義來的。這種p，q成共軛對之定義，是要假設一些方程式H（p，q）可表示能量E共軛於時間t。在量子力學裏，p，q之共軛性是以p，q本身間之關係，用三種栢等的方式來定義：由 Born 之交換律 $pq-qp=h/2i\pi$，由 Schrödinger 的運作律 $P\to 2i\pi\partial/\partial q$ 和由波動方程式 $\Psi(p,q)=\exp(2i\pi pq/h)$。這三種都引進了作用常數h和 $i=\sqrt{-1}$。在普朗克提出 E＝hv 之後 26 年，經由Max Born, Werner, Heisenberg, Paul A. M. Dirac, Erwin Schrodinger 等科學先進者之努力，量子力學之式化已完全建立，在今天這已為人所接受，因它有用。

在這裏我要指出它是結合上面非量子的假設（P之對稱和P矩陣構成一群），和以下伽利略不變式（Galilean invariance）非量子的假設起來的自然結果：

從一個狀態P過渡到P′計算出來，任何方程式F(q)之平均值

$$F_{PP'}=\int\Psi(p,q)F(q)\Psi(q,p')dq \tag{18}$$

（這是把(16)式中之和改為積分而來，因q為連續值）將只決定於差（p－p′），同樣，任何方程式G(p)之過渡值 $G_{qq'}$ 只決定於（q－q′）。 對E和t這共軛對也是如此。

從這些非量子的假設導至量子論的證明如下：

假如矩陣元素之過渡值 $F_{PP'}$，對任一函數 F_q 只決定於（p－p′），我們可在特殊情形裏，把F(q)取為 delta 函數 $D(q)=\delta(q-q')$，q′是任何選出的q的固定值。在這情形下(18)變為簡單的乘積

$$D_{PP'}=\Psi(p,q')\Psi(q',p') \tag{19}$$

對任何實數函數Ψ（p，q）＝Ψ（q，p），則(19)之右邊不可能由（p－p′）來決定。Ψ（p，q）必為複數，而滿足 $\Psi(q',p')=\Psi^*(p',q')$， Ψ必具有如下複指數之形式

$$\Psi(p,q)=a(q)\exp[ip\alpha(q)] \tag{20}$$

〔α(q) 是實函數〕因為這是唯一能使(19)式中的乘積決定於（p－p′）之函數。同理，使任何函數G(p)之過渡值 $G_{qq'}$ 決定於（q－q′）必須是

$$\Psi(p,q)=b(p)\exp[iq\beta(p)] \tag{20'}$$

〔β(p) 是實函數〕(20)與(20′)之比較，可得 a(q)＝b(p)＝常數，α(q)＝cq，β(p)＝cp（c是實常數）最後可得Ψ（p，q）＝常數×exp(ipqc)，或者以 2π／h 代表 c 則得

$$\Psi(p,q)=常數\times\exp(2i\pi pq/h) \tag{21}$$

此處h是pq的“作用常數”。以同樣的方式，可從對E，t所需之伽利略不變式得到

$$\Psi(E,t)=常數\times\exp(2i\pi Et/h) \tag{22}$$

(21)和(22)兩式是波長 $\lambda=h/p$ 與頻率 $\nu=E/h$ 之波動函數，代表“機遇振幅函數”而非真正的波。在(21)，(22)式中的Ψ函數，就與 Born 的交換律，及p，E 之運作律，Schrodinger 方程式，選擇律和測不準關係，也就是和非相對論性的量子力學的主體有關聯。

以上的推論完全是演繹性的。因此我們可以作如是想像，一個理論家，在他的研究過程中，他提出一個機遇率的計劃，加上對稱的假設並假設連接P矩陣的普通方法，並引進對力學系統中之量p和q，或E和t之伽利略不變式，如此他不必訴諸任何經驗或波粒雙重性或互補原理，即可達到式化量子力學的目的。