海森堡的基本粒子統一場論

陳丕燊

I. 引　言

基本粒子的問題已經困擾物理學家二十多年了，到現在仍然進退維谷。在如斯的年代裏關於基本粒子的理論不是沒有進展，只是每一個理論都只有部分成功。然而在物理上，大家問的是：「這個理論和什麼現象相矛盾？」絕不以解釋了一部分的現象而自喜的。

海森堡的「基本粒子統一場論」發表於1966年，並且在次年的「索爾未國際物理學懇談會」上報告。這理論的發表可以算是基本粒子近年來比較重要的進展。由於發表時這個理論還頗粗糙，加上計算的複雜，目前還不能斷言全面性的勝利或是找出嚴重的矛盾。

在這篇文章裏，除了引言，有三個主要部分。第一部分是把基本粒子的主要現象歸納一下；第二部分介紹海森堡的統一場論。爲了推理完密的緣故，我用了一些公式，這並沒有暗示我自已已經能够自如地運算它們，當然更沒有拿幾個「怪」符號來壯威的意思。如果你對那些式子不感興趣，可以跳過，只讀文字而仍然得到通盤的觀念。第三部分是結論和評判。

II. 基本粒子的主要問題

基本粒子的現象很複雜，因此要說那些現象比較重要，是隨各人的主觀的。因爲我對基本粒子問題知道的不多，所以可能有「更重要的」現象，而我沒有列出來。

(1) 就現在所知，一共有四種交互作用，卽強作用、電磁作用、弱作用、重力作用。用關於這四種交互作用，有兩個重要事實。第一是所謂「交互作用的宇宙性」(The universality of interaction)，就是說一種交互作用，它的強度都是一定。譬如質子和質子的斥力，和電子與電子間的斥力完全一樣（指電磁力）；又質子和質子間的核力等於中子與中子間的核力（指強作用）等等。第二是這四種力的強弱比非常懸殊。強：電磁：弱：重力$=1:1/137:10^{-6}:2\times10^{-39}$。

一個好的理論應該能解釋這些。

(2) 已知的粒子共振態 (Resonance state) 可以依能量高低排成不連續的質譜 (Mass spectrum)。

一個好的理論應該能導出這些複雜的譜線，一如量子力學在原子光譜所扮演的角色。

(3) 除了質量（以 Mev 爲單位）以外，一「個」基本粒子還必須有許多量子數來描述它。

一個好的理論應該減少這些互相獨立的量子數到最小可能。例如電荷 (Charge)、重子數 (Beryonic No.)、輕子數 (Leptonic No.)、超電荷 (Hypercharge)、同位旋(Isospin)、奇異數 (Strangeness)，……它們在四度空間裏是一些什麼樣的「東西」？它們在動力上的意義 (Dynamical reason) 是什麼？

(4) 基本粒子的現象滿足不少的對稱性，例如電荷換反 (Charge conjugation)、空間倒置 (Space reflection)、時間逆流 (Time reversal) 等等。但是有一些粒子並不遵守某些對稱性，一個好的理論應該能解釋它。

在基本粒子發展的早期，量子場論由於能够描述粒子的動力行爲，成了主角。可是它的場方程式只是描述自由粒子的；所以在兩個以上粒子交互作用的場合，方程式中「交互作用項」的加入，顯得十分生硬而人工化。

次一個重要階段是1960年前後羣論的應用。最膾炙人口的就是「八正道(The eight-fold way)」和「夸克模型(The quark model)」。但是帶1/3電荷（或者2/3)的夸克從沒有被發現過，而且它也只能解釋重子和介子，輕子却沒有顧及。

至於「基本粒子統一場論」的情況，等到最後一節再討論。

III. 海森堡的統一場論

因爲這個理論還沒成熟，所以不可能「公理化地推展開。不過爲了閱讀的方便，而且不致陷入數學推演的泥沼，我還是找出一些這個理論的基本假

設，並不代表論點的邏輯推理很嚴格的意思。

首先解釋一個名詞：「基本場運算子 X」(Fundamental field operator)。X 和普通的量子場論的場運算子有一點不同，普通的場運算子對應的是某一特殊的場，而 X則爲一統一場，它有四個分量，它在勞倫茲轉換下是一個 2-分量 Spinor，同時在同位旋空間也是一個 2-分量 Spinor。

整個理論主要的就是從假設找出一個描述基本場運算子 X的「萬能方程式」(Master equation)；然後用近似解法解這個方程式，得到X 的各個特徵值 (Eigenvalue)，這些特徵值就是我們前面提到的基本粒子質譜的譜線，換句話說，每一個特徵值就是某一種粒子的質量。這是和量子場論的場方程式的用途極不相同的。所謂「統一場論」的意義卽在此：以「一個」場方程式，企圖得到所有粒子的特性。以上的程序，頗類似量子力學中解薛丁格方程式得到原子中電子能量的特徵值。

幾個假設如下：

(1) 在 Space-like (亦卽可以找到一個慣性參考坐標使兩個事件成爲同時發生) 下，場的反交換關係 (Anti-commutation relation)爲零。

(2) 在任意小 (但有限) 的時距 t 與 $t+dt$ 之間，足够使場運算子X 從基態 $|0\rangle$ 建立起整個希爾伯空間 (Hilbert space)。

以上兩個假設合起來導致「區域因果律」(Local causality) 的假設，就是說場不能「立刻」由基態產生，而且所產生的態經過時距 dt 仍然存在於基本場的希爾伯空間裏 (由假設(2))。另一方面，場的作用是逐漸傳播的 (由假設(1))。

(3) 場的動力行爲在勞倫茲轉換及同位旋空間轉換下不變。

由此，我們得到一些論斷：

*〔S-矩陣與希爾伯空間〕

由於勞倫茲羣是非緊密羣 (Non-compact group)，因此若要此羣有限代表 (Finite representations)，則其空間必須有「不定的測量」(Indefinite metric)。因爲由 (3)，場的行爲在勞倫茲轉換下不變，故希爾伯空間有不定的測量。另一方面，S-矩陣與能量及動量有關，它定義在能量殼層 (Energy shell) 上，當能量與動量定了之後 (卽固定了勞倫茲轉換)，則其餘各轉換所成的羣爲緊密羣。故 S-矩陣爲一元的 (Unitary)，而且有固定的測量。

*〔萬能方程式〕：

首先，由假設(1)及(2)，在某一時間 $t>t_0$ 的 X 應該與 t_0+dt 時距內的X 有一數學上的關係，且相容於假設 (1)。此關係最簡單的就是微分方程式。

其次由於「統一」場論主觀上的要求，此方程式應該能描述交互作用，因此它不會是線性的。這個式子必定有X 的交乘項。

第三，如果我們承認此式滿足勞倫茲轉換及同位旋空間轉換 (假設(3))，則此場方程式爲唯一確定 (海森堡如是說，但表示法不是唯一的，例如也可以 Dirac-spinor (4分量) 來表示)：

$$(1)\quad i\sigma^{\nu}\frac{\partial X(x)}{\partial x^{\nu}}+l^2\sigma^{\nu}{:}X(x)(X^*(x)\sigma_{\nu}X(x)){:}=0.$$

其中 σ^{ν} 爲鮑利矩陣 $\sigma^{\nu}=(1,\vec{\sigma})$，$l^2$ 爲常數。第二項中之: :代表「維克交乘」(Wick product)，一般而言，它的定義如下：

$$(2)\quad {:}X(x)X^*(x)X(x){:}$$
$$=\lim_{\delta\to 0,\varepsilon\to 0}[X(x)X^*(x+\delta)X(x+\varepsilon+\delta)-$$
$$-\langle 0|X(x)X^*(x+\delta)|0\rangle X(x\pm\varepsilon+\delta)-$$
$$-X(x)\langle 0|X^*(x+\delta)X(x+\varepsilon+\delta)|0\rangle].$$

*〔近似解法〕

由實驗事實得知，「每一個基本粒子由所有其他粒子組成」，因此我們先天上無法得到完全解 (Exact solution)。例如在質子——質子交互作用中，有「無數」可能的作用參與其間，單 π 子交換、二 π 子交換，……所以我們只好用近似解法。

由於萬能方程式中沒有任一項比其他項來得特別小，因此普通量子場論的「干擾理論」(Perturbation theory) 不能使用。海森堡介紹了一種新的方法，叫做 Tamm-Dancoff 法。

若 $|\psi\rangle$ 表示一系統的一「態」(State)，此「態」由式 (1) 所限定，則它可以由無限多組如下的函數所定義：

$$(3)\quad \tau(x_1x_2\cdots\cdots|y_1y_2\cdots\cdots)$$
$$=\langle 0|TX(x_1)X(x_2)\cdots$$
$$\cdots X^*(y_1)X^*(y_2)\cdots\cdots|\psi\rangle,$$

其中T 代表「時序運算子」(Time-ordered operator，使時刻較大的X 在較左邊)。此 τ 稱爲$|\psi\rangle$ 的「協變代表」(covariant representation)。由 τ 我們可以定義出另一種函數ϕ，使得

$$(4)\ \tau(x_1x_2\cdots|y_1y_2\cdots)=\phi(x_1x_2\cdots|y_1y_2\cdots) +(-1)^z\phi(x_2\cdots|y_2\cdots)\langle 0|\,TX(x_1)X^*(y_1)|0\rangle +(-1)^z\phi(x_2\cdots|y_1y_3\cdots)\langle 0|\,TX(x_1)X^*(y_2)|0\rangle +\cdots\cdots +(-1)^z\phi(x_3\cdots|y_3\cdots)\langle 0|\,TX(x_1)X^*(y_1)|0\rangle\cdot \cdot\langle 0|\,TX(x_2)X^*(y_2)|0\rangle +\cdots\cdots$$

ϕ 稱爲 $|\psi\rangle$ 之「第二協變代表」。我們還可以由τ得出第三、第四協變，我不再贅述。

Tamm-Damcoff 法的主要假設卽：令ϕ函數中超過 n 個變數的 ϕ，其值爲零，則其餘不爲零的可做爲$|\psi\rangle$的近似解。

現在將式(1)代入(3)中之 $X(x)$，則

$$(5)\ i\sigma_\nu\frac{\partial}{\partial x_{1\nu}}\tau(x_1\cdots|y_1\cdots) =-l^2\langle 0|T:\sigma^\nu X(x_1)(X^*(x_1)\sigma_\nu X(x_1)): :X(x_2)\cdots X^*(y_1)\cdots|\psi\rangle +(-1)^z\cdot c\cdot\delta(x_1-y_1) \cdot\langle 0|\,TX(x_2)\cdots X^*(y_2)\cdots|\psi\rangle +(-1)^z\cdot c\cdot\delta(x_1-y_2) \cdot\langle 0|\,TX(x_2)\cdots X^*(y_1)X^*(y_3)\cdots|\psi\rangle +\cdots\cdots$$

其中 δ 函數是由於在 T 之下重排所產生。

爲了解出式 (1) 的質譜，我們再介入兩個函數，其一是格林函數 $G(x)$。滿足

$$(6)\ i\sigma_\nu\frac{\partial G}{\partial x_\nu}=\delta^4(x);$$

$$G(x)=(2\pi)^{-4}\int_c d^4p\cdot e^{-ipx}\frac{p_\nu\sigma^\nu}{p^2}。$$

則 (5) 式可寫成

$$(7)\ \tau(x_1\cdots|y_1\cdots) =-l^2\cdot\int d^4x'\cdot G(x_1,x')\langle 0|T\sigma^\nu: :X(x')(X^*(x')\sigma_\nu X(x')): :X(x_2)\cdots X^*(y_1)\cdots|\psi\rangle +\langle 0|TX_0(x_1)X(x_2)\cdots X^*(y_1)\cdots|\psi\rangle$$

$$i\sigma_\nu\frac{\partial X_0}{\partial X_\nu}=0$$

(7) 式中第二項可由代入以F 的函數而簡化。

$$F_0(xy)=\langle 0|TX_0(x)X^*(y)|0\rangle$$

則 (7) 式變成

$$(8)\ \langle 0|TX_0(x_1)X(x_2)\cdots X^*(y_1)\cdots|\psi\rangle =F_0(x_1y_1)(-1)^z\langle 0|TX(x_2)\cdots X^*(y_2)\cdots|\psi\rangle +F_0(x_1y_2)(-1)^2\langle 0|TX(x_2)\cdots \cdots X^*(y_1)X^*(y_3)\cdots|\psi\rangle +\cdots\cdots$$

現在以波色子 (Boson) 爲例，要變數多於 1 的函數全消掉。則式(1)(萬能方程式) 的最低近似成爲

$$(9)\ \langle 0|TX^*(x)\sigma_\mu X(x)|\psi\rangle =-l^2\int d^4x'\langle 0|TX^*(x)\sigma_\mu G(xx')\sigma^\nu: :X(x')(X^*(x')\sigma_\nu X(x')):|\psi\rangle \approx -l^2\int d^4x' t_\tau(\sigma_\mu G(xx')\sigma^\nu F(x'x)) \langle 0|TX^*(x')\sigma_\nu X(x')|\psi\rangle$$

IV. 結論及評判

現在我們來看看「基本粒子統一場論」是不是滿足第二節所提出的要求？

(1) 據海森堡說，他算出的電磁作用耦合常數 (coupling constant) 爲 1/120，和實驗値 1/137 頗相吻合。但是瑞士物理學家耀赫 (Jauch) 認爲在繁複的計算中，近似解的取捨常是「隨心所欲」的。計算値的相近難保不是因爲我們內在的要求。但是這總比普通量子場論高明一些。在量子場論裏，耦合常數 (弱作用) 的大小全靠實驗値決定，理論的內在無法得出數値來。

(2) 質譜的得到當然不在話下。

(3) 基本粒子統一場論並沒有解決「粒子」的內部結構。第一個關鍵在於「量子場」這個觀念，「場」是一個極不清晰的概念，老子所謂「道可道，非常道」，大概類此。場在物理學中的作用是相當形上的，它是拿來作爲英國哲學家洛克(Lock) 所謂的「第一因」的。我們要問：「場」是不是「東西」呢？不能是。因爲如果是，那麼構成場的「物質」或者「基本粒子」是什麼？反之，如果場在四度空間裏的意義就像十九世紀所謂的乙太 (Ether) 的話，則由「場」的觀念跳躍到「粒子」的觀念，絕不可以想像成空氣中的水汽凝結成雲的過程，因爲場不是物質。

因此如果我們想要知道在四度時空裏電荷……的意義，我們必須重新把一些基本觀念釐淸，否則物理學家忙了半天，只是在挖肉補瘡罷了！

尋求「一以貫之」的「道」，是中國人的老嗜好，但是這不僅是一種野心而已，它往往也是基於「經濟」的要求。海森堡說：「我相信要建立一個關於僅僅一部分粒子的理論，比企圖建立一個有關整個質譜的理論還要難得多。」