中考足足拖了一個月，剛從書堆中抬起頭來，期末考似乎也微笑著走近了。我們這組的「正式」討論會就在這種情況下壽終正寢，現在想起還覺不勝惋惜；別組情形不知如何，想必差不多。

寒假過後，有幾次和同學談及上學期討論會事，班代表王鼎華仍然希望在班上繼續這種風氣的培養，連著有三星期之久，活動中心，湘江飯店，一直是幾位同學相聚商討的地方，我們不斷的檢討上學期失敗的原因，每個人都提出自己的意見，大家共同討論，希望能夠尋出一條最可行的途徑。其間施純清、王克中、葉炳輝、廖榮隆、陳丕燊幾位同學一直是最熱心，出力最大的人。

一個概念的形成，常是由於不斷的討論辯談而來；終於我們有了計劃的雛形，也決定了算是正確的宗旨。我們只是三年級的學生，一般來說，還是在深奠基礎的階段，要談到有什麼創見似乎還早，所以這時候組成的討論會應該只是帮助我們磨練表達的技巧，並且藉着它來吸收一些別人的心得，複習整理已學過的觀念。

確定了這兩個基本原則，隨之而來的問題就是實行方式了。蘇德潤老師的"寒假量子力學作業"啓示了一些靈感，何不將重點置於量子力學的結構和問題上呢？這是三年級的一門主科，讀好它似乎是物理系學生感到「責無旁貸」的義務，上個學期結束後，已略具概念，這學期以它當題材最佳不過了。所以從"Principles of Q.M."開始，擬出了一串大小適當，而時間也配合完善的題目。由於不願意重蹈上學期覆轍，改變了討論報告方式，將重點由「討論」移至「報告」，每個題目人數不等，但少不會少於一人（廢話？！），多則不超過五人。每週由一組同學上台輪流報告，每組有數週時間可以搜集材料，共同研討或是獨立奮鬪則隨各人意之所趨；人少可避免過去「吵架式」的討論，規定報告日期則意在使參加者負起責任。比較起來，這種方式是可行多了；至目前（寫稿時）爲止，已進行了四次，每次都還過得去，但願這種風氣會成爲系內的一股傳統。

附：擬就的題目：

1. Principles of Q.M.
2. Schroedinger's picture and Heisenberg's picture
3. Green function, Scattering
4. Integral equations
5. Representations
6. Propagator in Nonrelativistic Q.M.
7. Simple harmoric occilator coupling
8. Symmetry
9. Group theory

SCHRÖDINGER AND HEISENBERG PICTURES —第二次討論會

主講：董斌，藍一峯，許世興，施純清
時間：六十年四月二十一日
地點：物理館二樓物四教室

I. Introduction

緊接著第一組的第一次討論會，我們深負起繼往開來的大任而致力於第二次討論會的誕生，雖然這正是期中考的前一週，但却磨滅不了我們研討的熱忱，因爲我們將還有一連串的討論會，我們不但期望能準備得更充實，更希求能澎湃起以後更大的信心，可不是？一股迸發出來的火花，不正是知識的興奮和喜悅？然而我們需要的並不是高深無窮的定理或繁瑣無比的演式，我們要求的乃是以一些簡單而基本的物理概念，作一個複習式的觀念整理，在整理中提出每一個可能遇到的問題，而從每一個問題的尋求解答中，我們或許可以發現一些求取知識的方法，故其目的應强調爲"不是知識而是方法"。

在這第二次討論會中，我們提出一個以前大家都相當熟悉的基本物理觀念 Schrödinger and Heisenberg Pictures，我們不求取深入的探求及廣泛的應用，而只是就他們的形式、種類、方程式和簡單的例子來作一個概括的說明。以下即是內容的簡介：

Ⅱ. Schrodinger Picture

幾乎就在量子力學開始發展的時期，Schrödinger 和 Heisenberg 分別以 Wave equation 及 Operator 創立了量子力學的根基。其中從 wave equation 導出的基本假設即爲

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(t)}{\partial t}=H\Psi(t)$$

其中 $H=\frac{P^2}{2\mu}+V$ 爲古典中的 Hamiltonian 而以對應的 operator 形式表示。$\Psi(t)$ 即對應於物理現象的波動函數。由這個基本方程式所作對各種物理現象的解釋，即稱作 Schrödinger picture 。對這一點我們都已相當的熟悉。可是話又說回來，我們既然特稱此爲 Schrödinger picture，那麼 picture 本身的意義又是什麼呢？

Ⅲ. Picture

其實在物理學中所謂的 Picture ，即表示"Formulation of Quantum Mechanics" ，亦是演導量子力學上的一套有系統的方法。我們通常對一個有關古典動力變數的量子 operator——observable A 無法直接量得其本身的性質，而是量得這個 observable 在狀態 a 的可能率，即

$$|<A|a>|^2$$

但是我們要解釋這些經驗得的物理現象，即必須以不同的 picture 來作解釋。顯然的，不同的 picture 只是方法上的不同，但其結果應是一致的，所以每一個新的 picture ，必須具有基本上的兩個性質：

(1)在每一個 Picture 中，Observable 所對應的 Operator 應有同樣的"eigenvalue spectrum"，若以 A, B 表示不同 Picture 中的 Operator，$|A>$, $|B>$ 表示相對應的 State，則

$$A|A>=a|A>$$
$$B|B>=a|B>$$

(2)一個狀態向量和不同 Picture 中相對應的向量作純量乘積，必得相同的純量。若 $|n>$ 爲狀態向量，則

$$<n|A>=<n|B>$$

這兩個性質必須保持的理由就是在於這些量是物理上可測得的量，他們應不隨 Picture 的不同而改變。要滿足這兩個不變性質，我們可以對 Picture 作 Unitary Transform，即不同的 Picture 中的 operator 及 eigenvector 作如下之轉換：

$$A\to UBU^+ \qquad |A>\to U|B>$$

其中 $UU^+=U^+U=I$

這兩個轉換，我們即可容易的證得每一個 Picture 都保持著上面的兩個性質。同時亦皆具有相同的期望值。

Ⅳ. Heisenderg pieture

根據 de' Broglie 的假設，可得

$$\Psi(t)=U(t,t_0)\Psi(t_0)$$

而 $U(t,t_0)=e^{iH(t-t_0)/\hbar}$

如果微分之，即得

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0)=HU(t,t_0)$$

而一般之期待值爲

$$\begin{aligned}<As>&=<\Psi(t)|As|\Psi(t)>\\&=<\Psi(t_0)|U^+(t,t_0)AsU(t,t_0)\\&\quad|\Psi(t_0)>\end{aligned}$$

假若令 $A_H(t)=U^+(t,t_0)AsU(t,t_0)$

$$\Psi_H(t)=\Psi_S(t_0)$$

則在 S 及 H 的 Picture 當中具有相同的期待值

由這個轉換，即 $A_H(t)=e^{\frac{iHt}{\hbar}}A_S\,e^{-\frac{iHt}{\hbar}}$，可得

$$\begin{aligned}\frac{dA_H(t)}{dt}&=\frac{iH}{\hbar}e^{\frac{iHt}{\hbar}}A_S\,e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\\&+e^{\frac{iHt}{\hbar}}\frac{\partial A_S}{\partial t}e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\\&+\frac{-iH}{\hbar}e^{\frac{iHt}{\hbar}}A_S e^{-\frac{iHt}{\hbar}}\\&=\frac{i}{\hbar}HA_H-\frac{i}{\hbar}A_HH+U^+\frac{\partial A_S}{\partial t}U\end{aligned}$$

故 $\frac{dA_H}{dt}=\frac{1}{i\hbar}[A_H,H]+\frac{\partial A_H}{\partial t}$

其中定義 $U^+\frac{\partial A_S}{\partial t}U=\frac{\partial A_H}{\partial t}$，此式即爲 Equation of Motion.

Ⅴ. Dirac Picture

除了上述兩種 Picture 以外，我們也遇到兩個簡單場的合成問題，如 Purturbation。通常我們可以將此系統的 Hamiltonian 分爲兩部份，H_0 不是時間的函數，H' 則爲時間的函數。那麼 Heisenberg picture 中的 equation of motion 在此 Picture 當中亦以如下形成式出現：

$$H=H_0+H'$$

$$i\frac{dA}{dt}=AH_0-H_0A+i\frac{\partial A}{\partial t}$$

其和 Schrödinger picture 中相對應的 Wave function 如下．

$$i\frac{d}{dt}\mid A> = H'\mid A>$$

其 Operator 及 State Vector 之轉換爲：

$$|A_I(t)> = e^{iH_0 t/\hbar}\mid A_S(t)>$$

$$A_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} A_S e^{-iH_0 t/\hbar}$$

上面的式子表示狀態的 evolution 是單決定於 H'，而 Operator 則由 H_0 控制時間的改變，其性質介乎 Schrödinger picture 及 Heisenberg Picture 之間，我們稱之爲 Interaction Picture（或 Dirac Picture）。

VI. Examples

現在我們就暫且根據上面所闡釋的三個不同 Picture，舉數個例子來說明他們的作用。首先我們先來看一個電子在均勻磁場中的進動現象。在近代物理中我們知道一個電子具有磁距 $\vec{\mu} = (\frac{e}{m}) S$，故此系統的 Hamiltonian 即爲此磁距和磁場的交互作用能量 $H = -(\vec{\mu}\vec{B}) = -(\frac{e}{2m})(\vec{\sigma}\vec{B})$

$\vec{\sigma}$ 爲 Pauli Matrices，而 B 之分量爲一個參數。

我們假設磁場方向爲 Z 軸，則 $H = -(\frac{e}{2m})(\sigma_z B)$，要解 H 的 eigenvalue，則必須知道 operator σ_z 的 eigen-value 及 eigen-vector。由於 $\vec{\sigma}$ 代表著在某一方向的旋轉，所以我們若以 $\bar{\sigma}_z$ 表示期待值，則必和古典的互相對應。亦即 $\bar{\sigma}_z = \cos\theta$，同時 $\bar{\sigma}_x = \sin\theta\cos\varphi$、$\bar{\sigma}_y = \sin\theta\sin\varphi$，這些都表示著單位向量在三個軸方向的投影。假設其 Statevector 爲 $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$，則 $\bar{\sigma}_z = (\alpha^*, \beta^*)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$ $= |\alpha|^2 - |\beta|^2 = \cos\theta$，加以 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ 的條件，可得其爲 State vector 爲 $\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ e^{ix}\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$，加上 $\bar{\sigma}_x$，$\bar{\sigma}_y$ 的討論，我們可知 $x = \varphi$。根據 Söhrodinger picture。

$$i\hbar\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = H\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = -(\frac{e}{2m}) B_3 \sigma_3 \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

$$= (\frac{e}{2m}) B_3 \begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}$$

因上式，比較二矩陣的分量，即得

$$\alpha(t) = \alpha(o) e^{iW_L t}\ ,\ \beta(t) = \beta(o) e^{-iW_L t}\ ,$$

其中 $W_L = \dfrac{eB_3}{2m\hbar}$

我們若對二者作比，（其比顯然絕少物理的特殊意義而是數學上我們觀測得的方法）。

$$\frac{\beta(t)}{\alpha(t)} = \frac{\beta(o)}{\alpha(o)} e^{-2iW_L t}$$

$$= \tan\frac{\theta(o)}{2}\ exp\ i[\varphi(o) - 2W_L t]$$

比較 $\dfrac{\beta(t)}{\alpha(t)} = \tan\dfrac{\theta(t)}{2} exp\ i\varphi(t)$

即知 $\theta(t) = \theta(o)$，$\varphi(t) = \varphi(o) - 2W_L t$

上面的結果表示“旋轉的期待值”隨著時間等速進動於磁場方向，進動頻率爲 $2W_L$。

我們如換以 Heisenberg picture 來看，其基本運動方程式爲：

$$i\hbar A = AH - HA + i\hbar\frac{\partial A}{\partial t}$$

考慮 A 爲 Pauli Matrices，則

$$i\hbar\sigma_x = \sigma_x H - H\sigma_x = -W_L\hbar(\sigma_x\sigma_z - \sigma_z\sigma_x)$$

$$= 2iW_L\hbar\sigma_y$$

$$i\hbar\sigma_y = \sigma_y H - H\sigma_y = -W_L\hbar(\sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_y)$$

$$= -2iW_L\hbar\sigma_1$$

$$i\hbar\sigma_3 = \sigma_3 H - H\sigma_3 = 0$$

由上式可看出一般的結果，即 $\vec{\sigma} = 2(\vec{W}_L \times \vec{\sigma})$，這式子在動力學上即表示 $\vec{\sigma}$ 的期待值以頻率 $2\vec{W}_L$ 繞著磁場 B 而進動，和上面由 Schrödinger Picture 所得的結果相同，而這進動頻率是可測得的。這些結果可以和大家所學的 Polarization vector 動力方程式比較，即 $\dfrac{\partial\vec{p}}{\partial t} = -(\dfrac{e}{m\hbar})(\vec{B}\times\vec{P})$，由 $M = \frac{1}{2}(I + P\sigma)$，我們可知道 $P_1 = \sin\theta\cos\varphi$，$P_2 = \sin\theta\sin\varphi$，$P_3 = \cos\theta$，所以這個 State 亦在以 $2W_L$ 之頻率對磁場進動。

現在我們來看看一個有關 Dirac picture 的淺顯例子，假設 $\vec{B}_1$ 磁場繞 $\vec{B}_0$ 而旋轉，則磁場可表示爲：$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1 = B_0\vec{k} + B_1[\vec{i}\cos(wt) - \vec{j}\sin(wt)]$

若磁場爲 $\vec{\mu} = \gamma\vec{S}$，則 $H = -\gamma(S\vec{B}_0) - \gamma(S\vec{B}_1)$

$$= H_0 + H_1$$

由 operator 的 time evolution，

$$A_0(t) = e^{iH_1 t/\hbar} A_0(o) e^{-iH_1 t/\hbar}$$

及 Pauli-Matrices 的交換關係，

$[\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2$， $[\sigma_3[\sigma_3\ \sigma_1]] = -(2i)^2\sigma_1$

我們可以得到 $\sigma_1(t)$ 及 $\sigma_2(t)$ 的表示方法：

$$\sigma_1(t) = \sigma_1(o)\cos(2w_L t) + \sigma_2(o)\sin(2w_L t)$$

$$\sigma_2(t) = \sigma_2(o)\cos(2w_L t) - \sigma_1(o)\sin(2w_L t)$$

其中 $w_L = \frac{\gamma B_0}{2} = \frac{w_0}{2}$

同時設 $w_1 = \gamma B_1$，則因 $i\hbar|\dot{b}> = H_1|b>$

所以 $i\hbar|\dot{b}> = -(\frac{w_1}{2})[\sigma_1(t)\cos(wt) - \sigma_2(t)\sin(wt)]|b>$

$$= -(\frac{w_1}{2})\{\sigma_1(o)\cos[(w_0-w)t] + \sigma_2(o)\sin[(w_0-w)t]\}|b>$$

若 $|b> = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$，則 $\dot{\alpha} = (\frac{iw_1}{2})e^{-i(w_0-w)t}\beta$

$$\dot{\beta} = (\frac{iw_1}{2})e^{i(w_0-w)t}\alpha$$

所以 $-\ddot{\alpha} - i(w_0-w)\dot{\alpha} - (\frac{w_1}{2})^2\alpha = 0$

設 $\alpha(t) = \alpha(o)e^{i(\Omega/2)t}$

則得 $\Omega^2 + 2(w_0-w)\Omega - w_1^2 = 0$，二根各爲 Ω_1，Ω_2。

即 $\alpha(t) = \alpha_1(o)e^{i(\Omega_1/2)t} + \alpha_2(o)e^{i(\Omega_2/2)t}$

$$\beta(t) = \alpha_1(o)(\frac{\Omega_1}{w_1})e^{-i(\Omega_2/2)} + \alpha_2(o)(\frac{\Omega_2}{w_1})e^{-i(\Omega_1/2)}$$

設在 $t=0$ 時，旋轉在 Z 軸之分量爲 $+1$，

即 $|b(o)> = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

則 $\alpha(o) = \alpha_1(o) + \alpha_2(o) = 1$，$\beta(o) = 0$，

故 $\alpha_1(o) = \frac{\Omega_2}{\Omega_2 - \Omega_1}$ $\alpha_2(o) = \frac{\Omega_1}{\Omega_1 - \Omega_2}$

現在我們就可以計算在 t 時，出現 $|b_-> = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的概率有多少，稱爲 "Spin Flip"。

$$P = |<b_-|b(t)>|^2 = |(0\ 1)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}|^2 = |\beta(t)|^2$$

因 $\Omega_1 - \Omega_2 = -w_1^2$

$\Omega_1 - \Omega_2 = 2\sqrt{(w_0-w)^2 + w_1^2}$

$$故 P = \frac{2\Omega_1^2\Omega_2^2}{w_1^2(\Omega_1-\Omega_2)^2}[1 - \cos(\frac{\Omega_1-\Omega_2}{2}t)]$$

$$= \frac{w_1^2}{w_1^2 + (w_0-w)^2}\sin(\frac{\sqrt{(w_0-w)^2 + w_1^2}}{2}t)$$

當 $w_0 = w$ 時，P 有最大値 1，稱爲"共振"。

多體論中的 Green Function 和 Quasi—Particle—第三次討論會

主講：李 文 忠

時間：六十年五月五日

地點：物理館第四教室

I. 導 言

本文主要的目的在於介紹單質點格林函數（single particle green function）及其在於討論費米粒子系統在極低溫時的一些性質，這些性質可由 quasi-particle 能譜（spectrum）的知識得到，quasi-particle之意義見後述，而單質點格林函數G正是討論 quasi-particale 最有用的數學工具，此外格林函數與量子場論中所用的U矩陣與S矩陣的關係亦將述及。本文主要內容乃是由物三的討論會中第三次討論的講稿加以整理而來。

II. 多體系統的擾動理論（many body perturbation theory

設有一費米粒子（Fermi-Dirac Particle）的系統，其粒子間以一二體的位能（two-body potential）交互作用，且設若質點運動甚慢不必慮及相對論的效應，則此系統之Hamiltonian爲：

$$H = H_0 + H'$$

其中 H_0 包含質點之動能及外加位能，H' 是質點間的交互作用位能，我們將 H' 視爲該系統之擾動（perturbation）。