狹義相對論之起源

附論 質量之變化

蔡尚芳

(一) 狹義相對論之產生

古典力學中的運動定律，雖早在牛頓手中時，即已確立，可是，科學家們却找不到一個永遠而完全遵循這些定律的座標系——稱爲慣性系。因之，牛頓力學有如空中樓閣一般，令人有虛無漂渺之感。拋開慣性系的有無不談，我們姑且假設它的存在。若以S表慣性系，則所有對S做等速度運動的座標系 S'，也將爲慣性系。換句話說，若力學定律，在某一座標系中成立，則在所有對該系做等速度運動的座標系中，力學定律也將成立，此即Galilean relativity principle（簡稱G原理）。證明之如次：在古典力學中，Classical transfmation Law成立，（簡稱C法則），故若設 $x'y'z'$ 及 x, y, z，分別表示空間一點對 S' 及S之座標，且 S' 以v速度在x方向對S做等速度運動時，則可得 $x'=x-vt$，$y'=y$，$z'=z$. 令一質點之質量爲m，（在古典力學中，質量乃視爲不變的），其座標爲 x, y, z，所受之力分量爲 F_x，F_y，F_z，則 $F_x=m\ddot{x}$，$F_y=m\ddot{y}$，$F_z=m\ddot{z}$，在 S' 系中視之，由C法則，將見其座標爲 $x'=x-vt$，$y'=y$，$z'=z$. 於是，三個分加速度爲 $\ddot{x}'=\ddot{x}$，$\ddot{y}'=\ddot{y}$，$\ddot{z}'=\ddot{z}$. 蓋t與t'相相同也。故三分力爲 $F_x'=m\ddot{x}'=m\ddot{x}=F_x$，$F_y'=m\ddot{y}'=m\ddot{y}=F_y$，$F_z'=m\ddot{z}'=m\ddot{z}=F_z$. 作用力既不變，根據同因同果律，質點之運動定律亦將完全相同。故知G原理成立。

G原理在力學中，雖然成立，但在場論的領域中，它是否也成立呢？也就是說，是否對於相互做等速度運動的座標系，自然定律均能成立呢？假設有一人靜坐於一密閉之玻璃室中央（簡稱A系），此密閉室對另一在外之觀察者（稱其所在之座標系爲B系）做等速度運動。當A系中之人說話時，B系中之觀察者，將見聲波並非各向均等，而是遵循C法則的，這是因爲介質（空氣），隨著屋子運動的緣故。若室中之人，發出一火光，那麽，對B系觀察者而言是否光速也非各向相等呢？我們雖知光波乃是電磁波的一種，但光波賴以傳播的介質——以太，我們却一無所知，（除了它是光之介質以外）。因之，上面所提的問題，也就很難作答。且讓我們假設以太所可能具有的性質，來看看答案究竟如何！考慮下列三個假設：

㈠以太隨屋一起運動，就如同空氣隨屋運動一樣。

㈡以太不隨屋一起運動。

㈢以太一部分隨屋運動，另一部分則不隨屋運動。

如果以太如㈠所述，則光波將如聲波一樣，不會每個方向上都一樣。可是，實驗與事實，完全否定了這個結論。因之，㈠是不能成立的。而假若以太存在的話，光源之運動，並不會牽動以太，光速不因光源運動而有改變。放棄了㈠，現在我們來考慮㈡。就是：有一以太海存在，所有的座標系，在此以太海中，或是靜止，或是運動。如果，這樣的以太海存在，那麽絕對等速運動與絕對運動均爲有意義的，而G原理也就不成立。爲什麽呢？在古典力學中，由G原理，得知所有做相對等速度運動的座標系，都是相等，因爲力學定律在各系中完全相同。因之，只有相對的等速運動存在，不能說，其中一個是靜止的，而其他的座標系對之做等速度運動。可是，若假設以太海的存在，那麽，在這以太海中靜止的那個特殊座標系，就是上面所說的那個靜止座標系，而絕對等速度運動也就存在，而那個靜止座標系，必有著與其他座標系不同的力學定律（否則，就無法分辨，孰爲靜止，孰在運動）。同樣地，在場論的領域中，以太海的存在，將使固定在其上之座標系，有著與其他座標系不同的自然定律，而絕對運動，也就成爲有意義的。根據上述，即使是對以太海做等速度運動的座標系，它的自然定律，也不是與以太海上的那個靜止座標系相同，也就是說，G原理不能成立。於是以太不隨物體運動的假設，與G原理，成爲互不相容之假設。現在，我們來看看如何導出一個可以判定二者，孰是孰非的結論，而用實驗的結果來決定它。

再考慮由密閉屋中之人所發出之火光，在靜止於以太中的觀察者，將見光速在各方向上，均爲相同，因以太對他而言是靜止的。然而屋內的人，將見光速不盡相同，因爲他隨屋子，在以太中運動，光到達兩壁（與該人等距離）的時間不等（即使甚微），順運動方向，光速小；逆運動方向，光速大。換句話說，只有在以太座標系上，光速是各方向均等，不因光源運動而有變更。根據這個結論，光波在順地球繞日運動方向上的速度，與逆地球繞日方向上的速度，在地球上的觀爾者，將見其不同。然而由 Michelson-

Morley 所做的實驗結果，却顯示光速並沒有不同。很多其他的實驗，也證明了這點。而㈢也同樣歸於失敗。

*所有假設以太具有某種性質，以解釋電磁波現象的*理論，全告失敗。除了說以太是傳播電磁波的介質以外，假設以太的存在，一是無處。我們也只好放棄了它，把傳播電磁波的性質，當做我們空間的一種基本性質。

但即使放棄以太之假想，我們的困難仍在。我們有如下三個原理存在：

甲、光在空間之速度，不因光源或觀察者之運動，而有不同。光速是不變的。（簡稱V原理）。

乙、在所有做相對等速運動的座標系上，自然定律都是一樣的。（簡稱爲L原理）。

丙、位置座標與速度，是根據C法則變換的。

上述原理中，丙是與甲乙互不相容的，因爲若照丙，則光速在相互做等速運動的座標系上，不該相同。可是C法則是如此的簡單與明瞭，以致人類幾乎不會懷疑它會錯誤。科學家們至此，似乎已經面臨空前未有的迷惑。然而，特殊相對論，在這上面，發現了線索，C法則應該放棄，時間不是絕對的，長度也是會隨運動而變化的。

古典力學中，時間是絕對的。那就是說，我們可以僅用一個鐘來計時，並認爲同步鐘是不會因運動而改變其韻律的。兩件事，在一座標系中同時發生，則在另一座標系上亦必同時發生，根據這個假設，我們將推得G原理是與絕對時間互不相容的。讓我們再考慮密屋中心之人所放出的火光。屋內的人，將見光波「同時」到達兩壁，因爲光速是常數而兩壁距火光同遠。屋外的人，雖然也可發現光速與屋內人所見者相同，但他另外看到屋的運動，於是光波到達兩壁，並非同時，因爲屋子在運動。於是，我們獲得一重大發現，與絕對時間是互不相容的。這就是：『在一座標系中，同時發生的兩事件，在另一座標系中，並不一定同時發生』。一個座標系中，同時發生的兩件事，「同時」是什麽意思呢？首先，讓我們回答：時鐘是什麽？任何一個可以完完全全重複無限次的物理現象，均可做爲時鐘。其一事件（可重複者）之始終即爲一時間單位。而任一時間間隔，即以此事件重複之次數來決定。其次，我們回答：如何確定兩地時鐘確實指示著同一時間呢？假使我們在一時鐘附近，以望遠鏡觀看另一地之時鐘所指示之時刻，而與附近的這個時鐘所指示的，來比較的話，那麽，因爲藉光波傳播的關係，傳到的鐘面讀數乃是過去的時刻，而附近的鐘，指示的却是現在的時刻，我們無法比較。不過，這個困難，甚易解決。我們在兩地中點，用望遠鏡觀看兩地所發出之信號。若它們「同時」發出，則它們一起進到眼裏。如此，我們即可確知，二地的時鐘，是否指示著同一時刻。如果是，則稱爲同步鐘（自然地，鐘要有相同的構造與性能，壞鐘不算）。同步鐘即是用來計算時間的許多鐘（沒有理由可以拒絕使用很多同步鐘，而堅持只能用一個。因爲同步鐘指示著同一時間。否則，買手錶也就沒什麽意思了）。

假設有二個坐標系 A與A′，在A′ 之原點置有一個時鐘，在A之上，有很多地方也置有時鐘。假設它們都是同步鐘，在某一時刻指示著相同的讀數。就在此時，A′開始對A 做等速直線運動，那麽在A′ 所經之地，其附近 A 上之時鐘，所指示之讀數，是否與 A′ 上之時鐘相同呢？古典物理學家將曰：『當然相同』。可是，相對論者却認爲有「居然不同」之可能，於是進行實驗，找事實。結果是，時鐘讀數不是一樣的。

緊接著，又有問題來了，一根米尺，在A上靜止時，有一米長。假若它在 A′ 上，對 A做等速度運動，它的長度，在A上看來會不會改變呢？古典物理學者，將曰：「當然不變」。可是，相對論者却認爲有居然改變之可能。於是，又由實驗證明了米尺的長度改變。（運動中的米尺，我們可以對它兩端，同時進行快照，看它們與靜止座標系上之那二標點重合，而決定其長度。）

因之，我們知道，不僅時鐘會因運動而改變其韻律，就是米尺，也將因運動而使長度發生變化。那麽，我們是否可以由此事實，而推得光速不變的結論（V原理）呢？我們能!!我們也可以反過來說：假設V原理L與原理成立，則時鐘將因運動而改變其韻律，棒子將因運動，而變更其長度，且變化之法則，就可確定，那就是 Lorentz transformation 可寫之如次：$x'=k(x-vt)$, $y'=y$, $z'=z$, $t'=k\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)$；及 $x=k(x'+vt')$, $y=y'$, $z=z'$, $t=k\left(t'+\frac{vx'}{c^2}\right)$；$K=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ 根據這個變換式，則所有的自然定律，在互做等速度的慣性系中都是相同的，是爲特殊相對論。

我們還有一個根本問題，尙未解決。那就是：慣性系是否存在呢？（或者說：絕對運動是否存在呢），這問題導致廣義相對論的發展，我們姑且停止吧！

（二）狹義相對論中的質量變化

在 Henry Semat的Introduction to Atomic and Nuclear Physics 第四版中，第44頁上，利用動量不滅原理而導出質量隨速度而變化的公式，即 $m=m_0\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$。但是，他却同時用了質量（質能）不滅定律，那就是第12式：

$$m_1u_1+m_2u_2=(m_1+m_2)v.$$

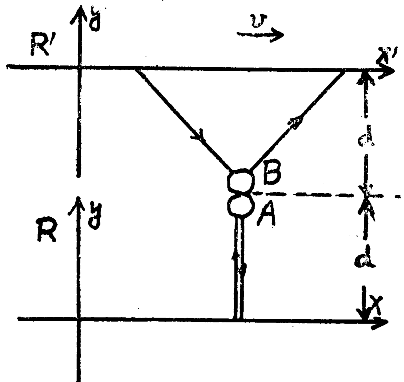
嚴格地說，質量既被認爲隨物體之速度不同而有變化，那麽，當二球具有V速度時，它們的質量，不該是m_1（速度u_1）或m_2（速度u_2），而應是m_V，除非假定已知質量不滅定律，那麽12式應是

$$m_1u_1+m_2u_2=2m_Vv.$$

比較時，O′必然顯得慢了，破壞了對稱關係。唯一的可能是O比A′慢，O′與A慢。

（三）質量

我們假定牛頓第二定律 $F=\frac{d}{dt}(mv)$ 正確，又假定兩物碰撞時第三定律成立，則我們可得動量不滅定律。取一球作爲標準質量，則其他物之質量可由動量不滅定律，及此物體與標準質量碰撞的速度關係而測定。爲方便起見，做設完全彈性碰撞。



（四）

見圖四，設AB在靜時有同樣質量，分置R系及R′系，各以直方向對各系同速拋出，在中途碰撞又各折回。圖示爲R中測者所見情形。設R測得A回到原處需時To，則R′測得B回到原處亦需時To。但由(一)所述，R所測得B回到原處所需時應比To大（T），所以R所知B之y向分速（S_B）必小於v（因 $\frac{d}{T}<\frac{d}{To}$）。由動量不滅定律（R系中），$m_A v=m_B v_B$，∴m_B應比m_A大。同理，R′中測者認爲m_A應比m_B大。

由此獲致結論，質量是速度之函數。

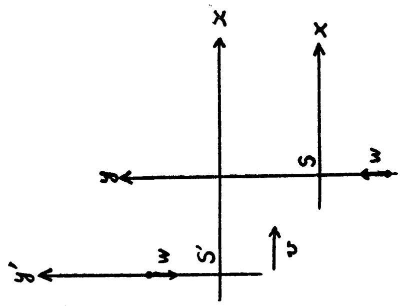
三、結　　論

物理量的意義與測量法有密切關係。例如R系測得R′系中一根棒的長度爲 l_1，但R′系所測的長度比l_1爲大，這裏並無矛盾，只是因爲兩個「長度」概念及測法不同罷了。嚴格說來，我們不應統稱之爲長度。時間與質量亦然。

上接16頁

但是此書中，却又利用由此導出之質量公式，來說明質能互換公式，$E=mc^2$。我們知道，質能不滅定律，既根據互換公式而將古典物理中的質量與能量不滅二定律，合而爲一，自不可倒果爲因，以之來推質量公式。因之，我在下面，將根據動量不滅定律及質量爲速度之函數，不利用質量不滅定律，來推出質量變化公式。

假設有兩個完全相同之小球a及b，一球a在s座標系中，沿y軸之正式向做等速運動。另一球b，以同樣大小之速度，在s′系中，沿y′軸之負向運動，設速度大小爲w，x，s′系對於s系，以v速度，沿x軸方向運動。如圖：



此二球在y′軸與y軸重合時，恰相碰撞，則若二球均爲光滑之球時，作用力將在連心線上，即y軸上，故在x軸方向上，二者之速度，並不發生改變。而根據 Galilean Relativity Principle. 碰撞後，二器在自系中之速度，應該大小相等，而方向相反，設其值爲 w′。則在s中之觀察者，將見碰撞前，二球之速度爲：$V_{ax}=o,\ V_{ay}=w;\ V_{bx}=v,\ b_{by}=-\frac{w}{k}$.

$$k=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$ 而碰撞後之速度將爲：

$$V'_{ax}=o,\ V'_{ay}=-w';\ V'_{bx}=v,$$

$$V'_{by}=+\frac{w'}{k}$$

於是，設 m(v) 表速度爲 v 時質量之大小，根據動量不滅原理，在 x 方向上：

$$m(w')\times o+m\left(\sqrt{v^2+\frac{w'^2}{k^2}}\right)\times v=m(w)\times o$$

$$+m\left(\sqrt{v^2+\frac{w^2}{k^2}}\right)\times v\cdots\cdots(1)$$

$\therefore\ w'=-w$（$w'=+w$ 與事實不合）

在y方向上：

$$m(w')\times w'-m\left(\sqrt{v^2+\frac{w'^2}{k^2}}\right)\times\frac{w'}{k'}$$

$$=m(w)\times w-m\left(\sqrt{v^2+\frac{w^2}{k^2}}\right)\times\frac{w}{k}\cdots\cdots(2)$$

$\because\ m(v)=m(-v)$（m爲無向量）

$\therefore$ (2) becomes

$$m(+w)\times(-w)-m\left(\sqrt{v^2+\frac{w^2}{k^2}}\right)\times\frac{(-w)}{k}$$

$$=m(w)\times w-m\left(\sqrt{v^2+\frac{w^2}{k^2}}\right)\times\frac{w}{k}$$

$$\therefore\ Km(w)=m\left(\sqrt{v^2+\frac{w^2}{k^2}}\right)。$$

Let $w=o$, $km(o)=m(v)$

That is, $$m=\frac{mo}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$