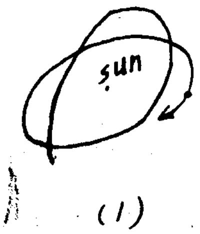
廣義相對論簡介

□姚期智□

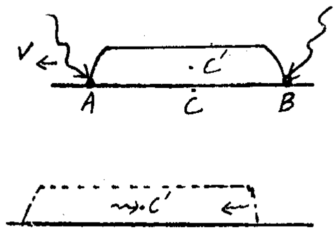
我們都知道，廣義相對論在基本上，就是一種「重力」理論。以前我們老早就學過了牛頓的重力理論，即 $F=G\frac{mm'}{r^2}$，而在絕大多數的天體運動問題上，這個理論都能推出和觀測十分相合的結果。那麼，究竟爲什麼，我們卻要建立一個新的理論呢？

I 牛頓的重力理論在那裏出了毛病？

按照牛頓的理論，太陽系裏九顆行星的軌道都應該是橢圓。但是觀測到的水星軌道，卻是一個奇怪的例外：以太陽爲中心來看，它實際上是一個有"precession"現象的橢圓！



(1)



(2)

從牛頓的理論來看，這無論如何都是一個無法解釋的現象。回想一下橢圓軌道方程式導出的過程，只有兩個地方可能出毛病：

(1) $\vec{F}=m\vec{a}$

(2) 重力理論 $F=G\frac{mm'}{r^2}$

不錯，(1)裏面確實有問題，應該用特殊相對論來修正，而修正的結果，也確實指出會有"precession"的現象，不過速率卻只有觀測到的 $\frac{1}{6}$。這當然不是一個很好的解釋，所以(2)裏面，一定也有問題！

上面，只是一個間接的推論。事實上，從特殊相對論來看，像 $F=G\frac{mm'}{r^2}$ 這樣的式子，根本就不可能正確。要明瞭這一點，讓我們回憶一下特殊相對論裏一個重要的事實吧：

Michelson-Morley 的實驗告訴我們：在任何兩個以定速度作相對運動的慣性座標 S, S′ 裏，光速均恒爲定值C。這是一個驚人的結果！從這裏，我們可以推斷出，在S裏看來同時發生的兩件事，在S′裏看來，卻不見得同時發生。換句話說，沒有一個"universal time" 的存在。讓我們還是用那個有名的「火車」來說明這件事好了。

如圖(2)，一列火車以V的速度前進，有兩個閃光擊中火車的兩端及路基A, B。現在坐在路基上AB中點C的人，如果(1)同時看到這兩個閃光的話，那麼路基座標而言，這兩件事確實是同時發生的。

現在我們瞧瞧，坐在火車中點C′的那位仁兄看到了些什麼吧。很明顯的，由於火車有速度，A點的閃光一定比B點的閃光先到C′。也就是說，對火車而言，這兩件事根本就不是同時發生的！（$V\neq0$）當然，這些推論全靠光速的一定——至少在同一座標裏各方面都相同——才能進行。

既然沒有絕對的同時，當然也就沒有絕對的"universal time" 存在。因此任何作用(interaction）的傳播速度都不可能是無限大（什麼叫速度無限大呢？想想，好嗎？不要用錶）。否則，選一標準鐘，隔一段「時間」，放出一個信號，豈不就定出絕對時間了嗎？

現在再回頭看 $F=G\frac{mm'}{r^2}$ 這個式子，就可以發現到不對勁的地方，既然F只和瞬時距離 r 有關，很明顯的，F是一種有無限大速度的作用，而這，卻正好是我們所不能容許的。

光速一定→兩個座標的「同時」不一樣→沒有"universal time"的存在→沒有傳播速度無限大的作用存在→$F=G\frac{mm'}{r^2}$有問題。

很好，有毛病。問題是，怎樣修正它呢？

II 如何建立一個「好」的重力理論：

我們都曉得，自然界最常見的兩種作用是①電磁力。②重力。關於電磁力，我們已經由特殊相對論，得到了一個令人滿意的結果。在那裏面，我們用到了兩個最重要的觀念：1）field 2）covariance

其中 field 是對「力」問題圓滿的解決的辦法，它的好處我們也都很清楚，不外是①用幾個連續函數就能完全表示了空間的性質，和②"field eqs" 能夠自動處理傳播速度的問題。至於 covariance，則是

一言難盡。扼要的說，就是物理定律的形式，在慣性座標中，都是相同的。舉一個牛頓力學裏的例子說明：在慣性座標裏，$F_a = m\ddot{x}$ 的形式永遠不變。在特殊相對論裏，通常我們以「張量方程式」來滿足這項要求。

還有一點値得注意的，就是由 "field eqs" 和 "covariance"要求，我們可以導出："Lorentz force law"。這就是說，我們又有一個可驚的成就：運動方程式包含在 "field eqs" 裏！

這眞是一個令人滿意的結構，以後我們就會注意到廣義相對論也是怎樣的合於這個結構了。

要建立一個新的重力理論，就和牛頓開始三定律一樣，沒有什麼邏輯的方法可以導出來。事實上，我們能够而且必須能够，不藉任何「以後不容許」的觀念來建立它。但是爲了要明瞭它的物理概念，又必須有所說明。所以下面在V中，我們才正式寫出："field eqs"，而在ⅢⅣ中，說明新看法的意義。當然，V並不需要ⅢⅣ就能存在。

Ⅲ 對等原理 (Principle of equivalence)

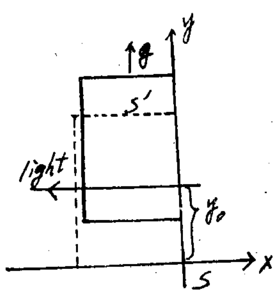
在地球表面附近，考慮一小塊空間V，那麼在V裏面，「重力」的大小和方向可以視爲一定，即g不變。

現在如果有一個人，在V中的一個小「車廂」裏做實驗，譬如讓一塊石頭自由落下等。那麼他就會得到兩個同樣合理的結論：

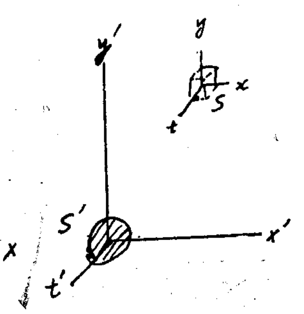
①他是在一個受均勻重力場的慣性座標裏。

②他是在S′裏，S′對某一個慣性座標S以g的加速度運動。

這兩個推論都同樣的合理。事實上 D′Alembert 老早就告訴我們，在數學上，這兩種看法是完全相同的（自然是指對牛頓力學而言。證明很簡單，只要把牛頓運動方程式寫出來一比較就可以了）。但是在「物理」上完全看成一樣，則是 Einstein 的卓見，這也就是化重力現象爲幾何現象的開始。看看「一個均勻重力場完全等於一個加速座標」，再看看下面推出的結論，我們就會了解這個想法的「有意思」了。



(3)



(4)

如圖(3)，S′對S以g的加速度上升，S是一個慣性座標。現在有一束光由 $+x \longrightarrow -x$ 射來，那麼在S裏面，它的運動方程式是：

$$\begin{cases} x = -ct \\ y = y_0 \end{cases}$$

但是在S′裏呢？

$$x' = x = -ct$$

$$y' = W(y - \tfrac{1}{2}gt^2) = W(y^0 - \tfrac{1}{2}gt^2)$$

$$= W(y^0 - \tfrac{1}{2}\frac{g}{C^2}x'^2)$$

W: 收縮係數 (contraction factor)

無疑的，不管W怎麼變化，這是一條近似拋物線的曲線。現在把剛才的V想成S′，自然的，光線在V裏應有彎曲的現象。

即使在今天，這仍然是一個驚人的成果。雖然量子論告訴我們，「光」也具有質量，所以要受重力的影響而彎曲。但是我們要注意的是，即使有一天，量子論被推翻了，「光」不再被認爲具有質量了，上面的現象解釋仍然成立。因爲它根本是一個「幾何」現象，只要我們「相信」光在某個「理想」的無重力座標中走直線，它在有重力的情況下，就要走曲線。有趣的是，以後我們會看到，廣義相對論並不「鼓勵」我們「相信」有這樣的座標存在。不過問題是這樣子，對於那些不信「光」可能在某座標走曲線的人，我們根本就不用解釋爲何「光」不走直線，有理吧！

那麼，不是所有的問題都解決了嗎？只要把重力換成加速度，不就可以解決所有的問題了嗎？不可以！上面的討論只限於均勻重力場！如果我們仔細觀察我們的重力場，就會發現各點重力的大小方向都略有不同。在這種情形下，我們就找不出一個S，而把V看成對S以某加速度運動的座標了。換句話說，在非均勻重力場中，根本就沒有什麼慣性座標的存在，再想遠一點，可能整個宇宙裏，都沒有慣性座標的存在——「光」可能根本不走直線！

既然這樣，我們何不放棄「慣性座標」這個觀念？我們可以認爲任何座標都處在對等的 (equivalent) 地位，那麼在任何的座標裏，物理定律都要有同樣的形式，這就是 "principle of covariance"——這次是對任何 (arbitrary) 座標了。

要處理任何座標的問題，我們需要"Riemannian space" 的觀念。爲了要了解「物理世界是一個 Riemannian space」是什麼意思，我們想（非必要）用慣性座標的觀念來說明——慣性座標至少在思想中，是可以存在的。

Ⅲ 利曼空間 (Riemannian space)

如圖④，爲了簡單起見，假設在地球上取一個座標 $S'(x', y', z', t')$ ——事實上應該取任意座標 $S'(x^1, x^2, x^3, x^4)$ $x^i = x^i(x', y', z', t')$ $i = 1, 2, 3, 4$，不過下面的討論仍然有效。那麼在任何一點 (x', y', z', t') 周圍一小塊，都可以看成有一個均勻重力場。現在我們假設有一個座標 $S(x, y, z, t)$ 在那裏自由「下落」，那麼在這一小塊裏，S可以視爲慣性座標（注意「小塊」的範圍有 $\Delta x', \Delta y', \Delta z', \Delta t'$ 大）。我們都知道一個自由質點 (free particle) 在 S 中的運動方程式是條直線，這可以寫成：

令 $(ds)^2=(cdt)^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2$

$$\delta\int ds=\delta\int\sqrt{c^2-(\frac{dx}{dt})^2-(\frac{dy}{dt})^2-(\frac{dz}{dt})^2}dt=0$$

（對「光」$ds=0$）

在S'裏看，這是個什麼形式呢？讓我們假設座標的關係是：$x=x(x',y',z',t')=x(x^1,x^2,x^3,x^4)$

$y=y(x^1,x^2,x^3,x^4)$
$z=z(x^1,x^2,x^3,x^4)$
$(x^1=x' \quad x^2=y' \quad x^3=z' \quad x^4=t')$
$t=t(x^1,x^2,x^3,x^4)$

那麼 $dx=\sum_i \frac{\partial x}{\partial x^i}dx^i \quad dt=\sum_i \frac{\partial t}{\partial x^i}dx^i$ etc.

現在定義 g_{ij}：$(ds)^2=c^2(dt)^2-(dx)^2-(dz)^2$
$=\sum_{i,j}g_{ij}dx^idx^j \quad (i,j=1,2,3,4)$

及 $g_{ij}=g_{ji}$

此時運動方程式可以由 $\delta\int ds=0$ 化爲：

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\sum_{j,k}T^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\quad\frac{dx^k}{ds}=0$$

這裏：$s=\int ds \quad T^i_{ij}=\sum_u \frac{1}{2}g^{iu}(\frac{\partial g_{ju}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{ku}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^u})$

$g^{ij}\sum_i g^{is}g_{it}=\delta^s_t$ 定義

又對「光」，仍然是 $ds=0$

上面這些式子的證明，可以參考任何講相對論或變分法的書。

由這些，我們知道，只要曉得這一「小塊」中所有的函數，我們就可以用S'的座標表示這「小塊」中質點運動的情形了。對於任何一個事件(x',y',z',t')，我們都可以有一個「小塊」，把所有的合起來，我們就可以得到16個連續函數 g_{ij}（不考慮數學上嚴密不嚴密的問題）。這16個函數也就決定了在S'中觀察現象的結果。這就是「物理世界是一個利曼空間的意思。

那麼對等原理在這裏面又擔任怎麼樣的一個角色呢？很簡單，當S'是固定在地球上的時候，對等原理決定$(x,y,z,t)\longleftrightarrow(x',y',z',t')$ 的關係式，所以剛才我們的討論，可以視爲一種推廣的對等原理。

剩下的工作，只是如何由物質分佈決定 g_{ij} 的問題了。至於 g_{ij} 是否有「很好」的物理意義，只是看法問題而已。

V "field eqs"和運動方程式：

下面這個方程式是經過許多失敗以後「猜」出來的正確結果——目前好像如此。

g_{ij}, $\quad T^i_{jk}$ 如前定義

令 $R_{ijk}{}^n=\frac{\partial T^n_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial T^n_{kj}}{\partial x^i}-T^n_{si}T^s_{kj}+T^n_{sj}T^s_{ki}$

$R_{ij}=\sum_n R_{nij}{}^n \quad R=\sum_{i,j}g^{ij}R_{ij}$

令 $G_{ij}=R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R$

我們的方程式是：

$G_{ij}+\alpha P_{ij}=0$

α：常數P_{ij}=stress-energy tensor

式子的正確性自然要靠推論的正確來支持，下面就是所謂廣義相對論的三大支柱：

①光線經過太陽重力場發生的彎曲。
②光譜的紅移（red shift）。
③水星軌道。

我們只把對③的解釋，錄在下面：

取時間單位爲$\frac{1}{3\times10^{10}}$秒，即令$\bar{t}=ct$。視太陽爲質點，用 spherical symmetry 的條件解，其結果爲：

$$g_{pq}=-\delta_{pq}-\frac{2Gm}{1-2Gm}\frac{x^p}{r}\frac{x^q}{r}$$

$(p,q=1,2,3.\quad m$：太陽質量）

$$g_{44}=1-\frac{2Gm}{r}$$

其他 $g_{ij}=0$

用這個所得的水星軌道和觀測到的正好相合。至於爲什麼其它行星爲什麼沒有看到這種情形，則是因爲和太陽太遠的緣故（注意 g_{ij} 和 r 的關係）。

最後我們還想討論一件事情：在重力場弱而質點速度又不大的時候，牛頓理論和它相合。

我們可以比較$G_{ij}+\alpha P_{ij}=0$ 和 $\nabla^2(-\frac{G\rho}{r})=4\pi\rho$ 得出 $\alpha=\pi G$ 的結果（見 Bergmann "Introduction to relativity"）。不過下面要進行的，則是運動方程式接近牛頓理論的情形：

$$g_{ij}\approx\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&+1\end{pmatrix}\quad g^{ij}\approx\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&+1\end{pmatrix}$$

$(ds)^2=(d\bar{t})^2-(dx)^2-(dy)^2-(dz)^2\approx(d\bar{t})^2$

$(\because \quad \frac{dx}{d\bar{t}}\approx0$ etc）

$$\begin{cases}\frac{dx^j}{ds}\approx0 \quad j=1,2,3\\ \frac{dx^4}{ds}=\frac{d\bar{t}}{ds}\approx1\end{cases}$$

此時的運動方程式：

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}+\sum_{j,k}T^i_{jk}\frac{dx^j}{ds}\quad\frac{dx^k}{ds}=0 \quad 取 i=1,2,3$$

e.g. $\frac{d^2x^1}{ds}s^2+\sum_n g^{1n}\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{jn}}{\partial x_j}+\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^j}-\frac{\partial g^{jk}}{\partial x^n})$

$\frac{dx^j}{ds}\quad\frac{dx^k}{ds}=0$

$\frac{d^2x^1}{d\bar{t}^2}+(-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1})g^{11}\cong\frac{d^2x^1}{d\bar{t}^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}=0$

$\frac{d^2x^1}{dt^2}=c^2\frac{d^2x^1}{d\bar{t}^2}=-\frac{1}{2}c^2\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$

與$\frac{d^2x^1}{dt^2}=-(\nabla V)_1$ 比較

得 $V=\frac{1}{2}c^2g_{44}+A$

重力場→0 $\quad g_{44}\to+1 \quad V\to0 \quad \therefore A=-\frac{1}{2}c^2$

$\therefore \quad V=\frac{1}{2}c^2(g_{44}-1)$ V：重力位能（單位質量）

所以，兩種理論相合。

又 "field eqs" 因爲是「張量方程式」，所以在各座標形式不變、合於 "principle of covariance"。到此爲止，我們完成了我們的理論。

註：「相對論」的很多書，寫得最淺而清楚的，是 Bergmann "Introducban to Relativity"中的特殊相對論及 Pauli "Relativity" 中的廣義相對論。有興趣同學不妨看看。