Relativistic Theory of the Electron 吳詩聰

姑且不論量子力學的完美性，它在近代物理中的確佔有重要的地位，所以研究量子力學的精神所在是必要的。本文將要淺談量子力學與古典力學的類比關係；及强調量子力學的基本原理和相對量子力學。

I. Principle of Quantum Mechanics

如果外界對系統的干擾可以忽略時，則可以用古典的方法來處理。以此爲出發點，我們希望在古典力學中重要的性質在量子力學中也是主要的。本著這個精神，我們將以「類比於古典」的方法來建立量子力學。

首先，在古典定律中，所有的Dynamical Variable 是可交換的。即對一個可測星的物理量，測量的先後次序無關。在量子力學裏不太一樣。若A，B表任意的observables 或dynamical variables 當 $AB=BA$ 時，表示A，B可以同時很準確的測量；如果 $AB-BA\neq 0$ 則A，B不可以同時準確的測量，蘊涵著測不準原理。所以到底 $AB-BA$ 應該滿足什麼條件才能將古典力學推廣到量子力學呢？這就是我們所要追求的量子條件。

在古典力學裏，Poisson Bracket 是很重要的觀念。任兩個dynamical Variables u和v，它們的P，B以 $[u,v]$ 表示，定義爲

$$[u,v]\equiv\sum_r\left\{\frac{\partial u}{\partial q_r}\frac{\partial v}{\partial p_r}-\frac{\partial u}{\partial p_r}\frac{\partial v}{\partial q_r}\right\}\text{-----------}(1)$$

u，v都是一組Canonical Coordmates q_r 和 momentum p_r 的函數，(1)式的右邊和我們所選的 q_r，p_r 無關，所以 P，B $[u,v]$ 是well defined 幾個重要的性質

$[u,v]=-[v,u]$． $[u,c]=0$．c是常數

$[u_1+u_2,v]=[u_1,v]+[u_2,v]$． $[u,v_1+v_2]=[u,v_1]+[u,v_2]$

$$[u_1u_2,v]=[u_1,v]u_2+u_1[u_2,v]\text{-----------}(2)$$

$$[u,v_1v_2]=[u,v_1]v_2+v_1[u,v_2]\text{-----------}(3)$$

及Jacobi Identity $[u,[v,w]]+[v,[w,u]]+[w,[u,v]]=0$

我們將分別利用(2)，(3)的性質來計算 $[u_1u_2,v_1v_2]$，有很重要的結果

由(2) $[u_1u_2,v_1v_2]=[u_1,v_1]v_2u_2+v_1[u_1,v_2]u_2+u_1[u_2,v_1]v_2+u_1v_1[u_2,v_2]$

由(3) $[u_1u_2,v_1v_2]=[u_1,v_1]u_2v_2+v_1[u_1,v_2]u_2+u_1[u_2,v_1]v_2+v_1u_1[u_2,v_2]$

$\therefore\ [u_1,v_1](u_2v_2-v_2u_2)=(u_1v_1-v_1u_1)[u_2,v_2]$

因爲對任意u，v都對 $\therefore u_1v_1-v_1u_1=i\hbar[u_1,v_1]$

$u_2v_2-v_2u_2=i\hbar[u_2,v_2]$

所以我們定義Quantum P.B $[u,v]$

$$uv-vu\equiv i\hbar[u,v]\text{-----------}(4)$$

我們希望量子P．B和古典P．B有相同的值

在古典理論 $[q_r,q_s]=0$． $[p_r,p_s]=0$． $[q_r,p_s]=\delta_{rs}$ ---------(5)

的方程式是十分複雜的二階微分方程式組。漢彌爾頓將位置座標和動量座標二者視爲獨立的變數，成功地將 Lagrangian方程式轉換成含有兩倍多變數的一階綫性微分方程式組。它們是 variational problems 的微分方程式組所能轉換成的最簡單和最理想的形式。因此我們現在都稱它們爲 Canonical equations

漢彌爾頓也同樣地利用數學方法將d'Alembert's principle 轉換成最小作用的原理，我們現在通常都稱它爲漢彌爾頓原理。至於尤拉和 Lagrange所導出的最小作用原理則僅適用於「守恒系統」(conservative system)。

漢彌爾頓另一項重要的發明是以一個統一的觀點來處理幾何光學和力學的問題。他在光學和力學裏都使用著一個稱爲principal或characteristic function的函數。這個函數有壹個性質，即只須經過微分的程序，就可決定一個移動質點的路徑和一束光綫的路徑。並且無論在光學或力學裏，這個函數滿足同一個偏微分方程式。而這個偏微分方程式的解在適當的條件下和運動方程式的解相同。

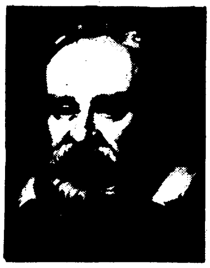
11. Jacobi (1804—1851)：他是少數幾個能了解漢彌爾頓的方法的重要性的數學家之一。他發展了一套有關 Canonical transfirmation 的理論。他根據這套理論解釋漢彌爾頓的 principal function ，並且證明漢彌爾頓的函數只是產生一個適當的 Canonical transformation的一個特例。Jacobi 因此使得漢彌爾頓的方法更爲有用。他證明了，若我們除去漢彌爾頓在研究光學和力學的相似性時所使用的條件，則漢彌爾頓偏微分方程式的解可以充分地告訴我們這個運動問題的解。

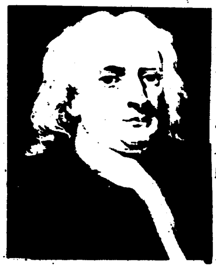
Jacobi 也將尤拉和Lagrange所導出的，在 time-independent 的情況下的最小作用原理給予重新的敍述。他批評尤拉和Lagrange的敍述，認爲他們的積分式的積分範圍沒有滿足在兩個固定的界限 (limit) 之間變化的條件。雖然尤拉和Lagrange所導出的原理沒有錯誤，但是 Jacobi 將時間從積分式中消去得到一個新的原理，這個原理，使我們可以直接決定移動質點的路徑，而無須知道運動和時間的關係。並且這個原理和Fermat's principle of least time 的相似性直接地說明了光學現象和力學現象之間的相似性。

12. Gauss (1777—1855)：這位著名的數學家高斯所導出的原理，"the principle of least constraint" 則和前面所提到的解析原理稍有不同。這個原理不是以一個對時間的積分式作爲要決定極小值條件的函數，而是在一個任意的瞬間，定義一個稱爲constraint 的大於零的量，並假定在那瞬間的位置和速度爲已知，然後使這個值爲極小的條件，決定在那瞬間的加速度。高斯原理因此是一個貨眞價實的極小值原理，而不僅是一個穩定值(Stationary value) 原理。但是由於他所使用的 constraint包含有加速度，以致他沒有其它的解析原理所具有的優點，例如使用廣義坐標。

Hertz將高斯原理中的constraint給予一個幾何上的解釋，認爲它是在 3N demensional configuration space 中的「短程綫的曲率」(geodesic curvature)。在這樣的空間中，高斯原理可以被解釋成最直路徑原理 (The principle of the straightest path) 。這個解釋使高斯原理和 Jacobi 原理有密切的關係。

這篇文章就介紹到這裏，其它有關近代的科學家對解析原理的貢獻和解析原理與近代物理的關係這兩部份，不屬於這篇文章的討論範圍。

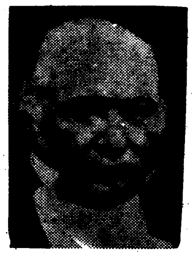

Galileo


Newton


Leibniz


Euler


Lagrange


Hamilton


Gauss

能和兩者所描述的是整個系統的狀態。第二個優點是，在某些情況，功可以用19.世紀時 J-Rankine所介紹的觀念～位能～來取代。位能本身只是一個純量函數，這意謂著我們只要使用一個純量函數，就可以說明了作用於一個力學系統衆多和複雜的力。這使得我們將整個力學問題以 variational problem的形式陳述成爲一件可能的事。

因此，牛頓和萊布尼兹之間關於力的爭論主要是一個方法上的問題。牛頓所採用的定義較適用於向量力學（牛頓力學）的觀點，萊布尼兹的觀點則是解析力學的基石。

6. D'Alembert （1717—1785）：他所作的研究工作使解析力學的發展向前邁進了一大步。他使用「慣性力」的觀念，將動力學問題轉換成靜力學問題，使原先只使用於平衡問題的虛功原理同樣地適用於動力問題。他認爲當作用於一個力學系統的力不能使該系統保持平衡時，則該系統將運動以產生一新力，此力即稱爲慣性力，使該系統保持平衡，亦即慣性力和原有的作用力聯合起來，將滿足虛功原理。於是 D'Alember's principle 使所有的力學系統的運動方程式都可以一個 variational principle表示出來。

7. Maupertuis（1698—1759）：Maupertuis 想到可能存在著一個稱爲action 的量，而自然所選擇的事件，都須使這個量爲一最小值。這個大膽的假設非常吸引人，也合乎18.世紀的宇宙觀。但是他的數學能力和當時的水準比較起來相去甚遠，以致他一直未能令人滿意地找到那必須是極小值的量。他利用這個原理去導彈性碰撞定律。碰巧，這個現象如果當作一個極小值的問題去處理，非常困難並且要十分地有技巧。以完全不正確的方法得到了正確的結果。較令人滿意的是，他利用這個觀點證明the principle of least action 如何才能取代 Fermat's principle of least time 。這個結果是 John Bernoulli 較早就知道的。

最令人感到有趣的是是Maupertuis和尤拉（ Euler ）之間的一段小插曲。 Koenig 認爲萊布尼兹早就在一對私人信件中表示過和Maupertuis相同的意見，企圖杯葛 Maupertuis發現的優先權。但是這封信一直沒有被找到。在緊接著的辯論中，尤拉傾全力支持Maupertuis。在這場保衛戰中最令人覺得莫名其妙的是，尤拉自己至少在 Maupertuis 一年以前就已經發現了這個原理的正確形式。尤拉知道不論是實際上發生的運動(actual motion)還是虛擬的運動(virtual motion)都必須滿足能量守恒原理。沒有這個條件，Maupertuis 的 action quantity 就根本沒有意義。雖然，尤拉當時一定已經知道 Maupertuis 理論的弱點，但是他仍然避免作任何的批評或發表他自己在這方面的成就，而傾全力支持 Maupertuis爲最小作用原理的發明者。尤拉這種寬宏的度量和謙遜的態度在科學史上是無人可與其匹敵的。

8. 尤拉（1707—1783）：尤拉對理論力學的發展有很重要的貢獻。他是使用「運動變數」(Kinematical variable) 的第一人。他使用角速度的三個分量作爲運動變數來解析旋轉剛體(votating rigid body) 。除此之外，他首先對 variational problems或isopertimetric problems 作有系統的研究。並且從微分學的基本觀點，他導出了一個微分方程式，將這些問題部分地解決了。

9. Lagrange（1736—1813）：Lagrange 這個18.世紀最偉大的數學家，他的研究工作和尤拉的研究在許多方面十分相似。他單獨地以一種完全新的方法導出了 variational problems 的解。他所發明的新方法就是我們現在稱爲 Calculus of variations 的數學。他也首先知道解析力學的另一項優點，就是我們可以使用任何一組參數（parameters）來說明一個力學系統的位置，這種參數就是我們現在所謂的廣義座標（generalized coordinates）。因此，如果虛功原理和 d'Alembert's princ 的主要優點是我們可以將一個力學系統當作一個整體來處理，而無須分割成互相獨立的粒子，那麼 Lagrangian 方程式增加了另一項重要的優點，對座標轉換的不變性（The invariance with respect to arbitrary coordinate transformation）這意謂我們可以根據問題的性質選擇適當的坐標。

在他所著的「解析力學」這本書中，他創造了一種新且有力的武器；利用它，只要我們知道了一個力學系統的動能和位能的抽象形式，可以無須物理或幾何上的考慮，將整個力學問題的解析建立在純粹的計算上。Lagrange因此奠定了解析力學的基礎和指了了進一步研究的方向。

Lagrange 的另一項不朽的成就是利用「未定乘子」(undermined multiplier) 來處理「補助條件」(auxiliary conditions) 的方法，這個方法在理論力學裏占有十分重要的地位。漢彌爾頓，這位在解析力學的研究史上最傑出的人物之一，因爲 Lagrange 的這項發明，稱譽他爲「數學界的莎士比亞」。

10. Hamilton （1805—1865）：漢彌爾頓在 Lagrange的發明之外，開啓了另一片嶄新的領域。我們知道Lagrange