其中只有 b 和 x_0，y_0 之函數關係為我們所要求的，經過一番痛苦的計算，也只能得到

$$b=[y_0-(a-x_0)\tan\gamma]\sqrt{n^2(1+\cot^2\gamma)-1}$$

$$及\ \tan\gamma=\frac{A\sqrt{(n^2+1)A^2-f^2}+f^2-A^2}{\sqrt{(n^2+1)A^2-f^2}+A}$$

$$\cdot\ \frac{n-1}{y_0}$$

你是否希望再得到更複雜的式子呢？根據其複雜性，要b與 x_0,y_0 無關是不大可能了，(但是我也不敢確定，說不定到處都有奇蹟，只有自己去「隔物致知」了。套一句物理系中的至理銘言：「大概或者也許是，不過恐怕不見得，然而個人應以為，但是我們不敢說。」眞是於我心有戚戚焉！)

最後談一談非靜態之反射及折射定律。當反射平面以u 之速度退後時，利用波前之 Huygen"s principle。設 ε 為二接觸點連線與反射面之夾角，則由入射及反射三角形全等，可得 $\gamma=i+2\varepsilon$，而再度取相等之光行路程，乃得此種狀態下之反射定律：

$$\tan\frac{\gamma}{2}=\frac{c+u}{c-u}\tan\frac{i}{2}$$

當折射面以之速度後退時，利用上面相同之ε定義，可得 $\frac{u}{c}=\frac{\sin\varepsilon}{\sin(i+\varepsilon)}$ 及 $\frac{u}{v}=\frac{\sin\varepsilon}{\sin(\gamma+\varepsilon)}$

所以 $\frac{c}{u}=\sin i\cot\varepsilon+\cos i$ 及

$\frac{v}{u}=\sin\gamma\cot\varepsilon+\cos\gamma$ 相消去 ε

則 $\frac{1}{u}(c\sin\gamma-v\sin i)=\sin(\gamma-i)$

若加以整理則得

$$\sin\gamma=\frac{v\sin i\,(c+u\cos i)-u\sin i}{c^2+2uc\cos i+u^2}$$

$$\sqrt{c^2+u^2-v^2\sin^2 i+2uc\cos i}$$

由此可得一結論，除非 v=c，γ 是永遠不等於 i 的。

至於其在此時所發生的波長改變等，則已經是物理上 approximation 的範圍了。

是否有可能使 $\gamma=i$ ？設介質橫向流速為 V，則光線取近似值，U_v 是變化很小，而

$$U_x=\frac{c}{n}\sin i+v\left[\frac{1-\sin i}{n^2}\right]$$

若 $\gamma=i$，則 $U_x/\frac{c}{n}\sin i=\frac{\tan\gamma}{\tan i}$

$$故\ 1+\frac{n^2v}{c\sin\gamma}-\frac{v}{cn}=\frac{\sqrt{n^2-\sin^2\gamma}}{\cos\gamma}$$

而得流體速度與 γ 及 n 之函數關係

$$v=nc\left[\frac{\tan\gamma\sqrt{h^2-\sin^2\gamma}-\sin\gamma}{n^3-\sin^2\gamma}\right]$$

合理否？似乎很合理哩！代代看吧！

特殊相對論裏的彈性撞碰

葉伯琦譯自 Am. J. Phys.

(Yutze Chow 原著) 1969

在古典特殊相對論裏，二個質點的彈性碰撞可以用一個非常簡單的四維向量方程式表示之：

$$q=(R\theta)P \qquad (1)$$

P 為 Lab frame 上一個質點的四維動量 (four-momentum。

q 為 Lab frame 上這個質點碰撞後的四維動量。

(Rθ)是由於在 C. M. frame 上碰撞後所轉的角度 θ 所引起的 transformation matrix (在 Lab frame 上)

嚴格講起來

$$(R\theta)=L^{-1}(R\theta)^{*}L \qquad (2)$$

L 為 Lorentz transformation 由 Lab frame 到 C. M. frame.

Rθ* 為 C.M. frame 上的 rotation matrix。(θ 為在 C. M. frame 上碰撞前後質點運動方向的夾角)

設二質點 a，b 則

$$q_a=(R\theta)P_a \qquad (3)$$

$$q_b=(R\theta)P_b \qquad (4)$$

△ 導 出 △

先定義一些符號：

m_a, m_b ≡ 質點 a,b 之 rest masses。

V_a, V_b ≡ 質點 a,b 在 Lab frame 上碰撞前之速度。

U_a, U_b ≡ 質點 a,b 在 Lab frame 上碰撞後之速度。

$\gamma_V \equiv [1-(V/c)^2]^{-1/2}$

然後我們介紹出在 Lab frame 上的 Minkowski velocitles

$$v_a = \gamma_a V_a \qquad (5)$$

$$v_b = \gamma_b V_b \qquad (6)$$

$\gamma_a = [1-(V_a/c)]^{-1/2}$, $\gamma_b = [1-(V_b/c)]^{-1/2}$

在 C.M frame 上的量可由 Lorentz transformation L_V 得之

$$L_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & -i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \qquad (7)$$

$\gamma = [1-(V/c)^2]^{-1/2}$, $\beta = V/c$

這裏V 是待求的

在 C. M. frame 上的四維動量

$P_a^*, P_b^*, q_a^*, q_b^*$

$$P_a^* = L_V P_a \qquad (9)$$

$$P_b^* = L_V P_b \qquad (10)$$

$$q_a^* = L_V q_a \qquad (11)$$

$$q_b^* = L_V q_b \qquad (12)$$

這裏 $P_a = (P_a, im_a\gamma_a c), q_a = (q_a, im_a\gamma_a c)$, etc. P_a, q_a 爲 three-momentum (三維動量)

在整個碰撞過程中，所有的三維向量($P_a P_b q_a q_b$) 在同一平面上，所以問題便簡化爲二度空間的 rotation.

定義

$$\vec{x}_3 = (P_a + P_b) \text{ 之方向} \qquad (13)$$

P_a, P_b 爲 Lab frame 上之值。

C.M frame 之定義爲：

$$P_{a3}^* + P_{b3}^* = 0 \qquad (14)$$

合併 (9), (10) 我們得到：

$$\begin{pmatrix} P_{a1}^* + P_{b1}^* \\ P_{a2}^* + P_{b2}^* \\ P_{a3}^* + P_{b3}^* \\ P_{a4}^* + P_{b4}^* \end{pmatrix} = L_V \cdot \begin{pmatrix} P_{a1} + P_{b1} \\ P_{a2} + P_{b2} \\ P_{a3} + P_{b3} \\ P_{a4} + P_{b4} \end{pmatrix} \qquad (15)$$

將 (13) (14) 代入 (15) 中我們得到

$$\begin{pmatrix} P_{a1}^* + P_{b1}^* \\ P_{a2}^* + P_{b2}^* \\ 0 \\ P_{a4}^* + P_{b4}^* \end{pmatrix} = L_V \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ P_{a3} + P_{b3} \\ P_{a4} + P_{b4} \end{pmatrix} \qquad (16)$$

右式中的二個 0 是由於$\vec{x}_3$方向的選擇

左式中的一個 0 是由於 C.M frame的定義。

展開(16)式得：

$$P_{a1}^* + P_{b1}^* = 0 \qquad (17)$$

$$P_{a2}^* + P_{b2}^* = 0 \qquad (18)$$

$$0 = \gamma(P_{a3} + P_{b3}) + i\beta\gamma (P_{a4} + P_{b4}) \qquad (19)$$

$$P_{a4}^* + P_{b4}^* = \gamma(P_{a4} + P_{b4}) - i\beta\gamma (P_{a3} + P_{b3}) \qquad (20)$$

由 Eq (19)

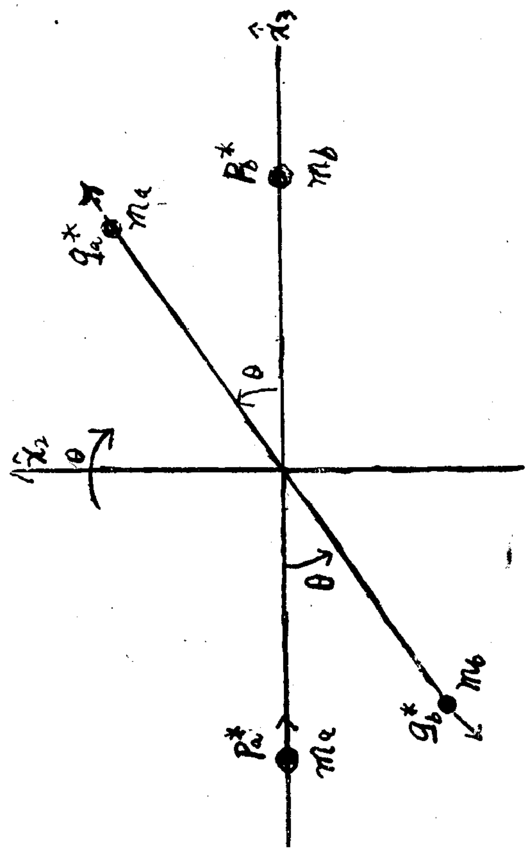
$$\beta = i(P_{a3} + P_{b3})/(P_{a4} + P_{b4}) \qquad (21)$$

但 $P_{a4} = i\, m_a \gamma_a c$, $P_{b4} = i m_b \gamma_b c$ (22)(23)

∴由 Eq (22) (23) 得

$$V = (P_a + P_b)/(m_a\gamma_a + m_b\gamma_b) \qquad (24)$$

碰撞前後動量之關係可由一 $x_2\, x_3$ plane 上之轉軸連結起來，下圖爲 C. M frame 上之碰撞。由於 conservation of four-momentum q_a^* 之大小必等於 P_a^*, q_b^* 之大小等於 P_b^*。



θ ：C. M frame 上之角度。

在 C. M frame 上之碰撞相當於座標軸轉動 θ 角 ($\vec{x}_2 \to \vec{x}_3$)

$$q_a^* = (R\theta)^* P_a^* \qquad (25)$$

$(R\theta)^*$ 爲$\vec{x}_2, \vec{x}_3$ plane 上之 rotation matrix

ie
$$\begin{pmatrix} q_{a1}^* \\ q_{a2}^* \\ q_{a3}^* \\ q_{a4}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_{a1}^* \\ P_{a2}^* \\ P_{a3}^* \\ P_{a4}^* \end{pmatrix} \quad (26)$$

P_a^* 可由 Eq (9), (24) 求得

同樣 $\qquad q_b^* = (R\theta)^* P_b^* \qquad (27)$

由Eq(25), (27) 得 $q_a = L_v^{-1} (R\theta)^* L_v P_b \qquad (25)$

$$q_b = L_v^{-1} (R\theta)^* L_v P_b \qquad (29)$$

$\therefore \qquad q_a = (R\theta) P_a$

$\qquad\quad q_b = (R\theta) P_b$

這裏 $\qquad (R\theta) = L_v^{-1} (R\theta)^* L_v$

玆舉一列以說明上述方法之益處。

設碰撞前質點b 靜止於 Lab frame 上，求碰撞後在 Lab frame 上質點b 之能量。

$P_{b1} = P_{b2} = P_{b3} = 0, \quad P_{b4} = iW_b/c = im_b c$

這裏 W_b 是碰撞前質點 b 之能量。（在 Lab frame 上）

設 W_b' 爲質點 b 碰撞後之能量。（在 Lab frame 上）

由 Eq(1), (2)
$$\begin{pmatrix} q_{b1} \\ q_{b2} \\ q_{b3} \\ iw_b'/c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ & & \gamma & -i\gamma\beta \\ & & i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \gamma & i\gamma\beta \\ & & -i\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ im_b c \end{pmatrix} \qquad (30)$$

or
$$iW_b'/c = (i\gamma\beta \ \ \gamma) \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\gamma\beta m_b c \\ i\gamma m_b c \end{pmatrix}$$

ie
$$W_b' = \gamma^2 m_b c^2 (1 - \beta^2 \cos\theta) \qquad (31)$$

由 Eq (30) 亦可知

$$q_{b1} = q_{b2} = 0$$

$$q_{b3} = (\gamma - i\gamma\beta) \cdot \begin{pmatrix} -\gamma\beta m_b c \cos\theta \\ i\gamma m_b c \end{pmatrix} \qquad (32)$$

ie
$$q_{b3} = \gamma^2 m_b c \beta (1 - \cos\theta), \qquad (33)$$

因爲 $P_b = 0$, 由 Eq(24) 得

$$V = \frac{c^2 P_a}{W_b + m_b c^2} = c \cdot \frac{(W_a^2 - m_a^2 c^4)^{1/2}}{W_a + m_b c^2} \vec{x}_3$$

$$\beta^2 = (W_a^2 - m_a^2 c^4) / (W_a + m_b c^2)^2 \qquad (34)$$

and
$$\gamma^2 = 1 + \frac{W_b^2 - ma^2 c^4}{(2W_a m_b + m_b^2 c^2 - m_a^2 c^2)^2} \qquad (35)$$

Eq (34), (35) 代入 (31) 得

$$W_b' = m_b c^2 + \frac{m_b (W_a^2 - m_a^2 c^4)(1 - \cos\theta)}{2W_a m_b + m_b^2 c^2 - m_a^2 c^2} \qquad (36)$$

如何與非利士人(PHILISTINES)在一起相處—給搞物理的人

HerryE,Duckworth 著 （星心譯）

△搞物理的人（ Physicist ）也難免要被一大堆外行人包圍，這些人有的是親戚朋友，更有其它的科學家，各種人文學科的學者以及行政人員，還有曾經與他勢不兩立的宗教家。顯然的，他必需改善他與這些形形色色的人之間的關係，免得活不下去△

爲了澄清我的標題，我必需說明『非利士人』的眞相，字典上說了一大堆：如古時南巴勒斯坦的一種好戰民族，常常襲擊以色列人；殘忍的敵人；非學生、門外漢；沒有文明的人，他們只對物質與尋常小事感興趣。而我只把這個名詞當外行人或非物理學家用。因此澄清以後，題目就等於如何與物