光學顯微技術的新進展

朱士維

眼見爲憑

從十七世紀發明顯微鏡開始，顯微技術就在包括生物、醫學、材料、物理等各領域扮演不可或缺的角色。其發展原動力來自人類對自然探索的好奇心，希望能看見肉眼無法看見的微細結構，因此促成了各種顯微技術不斷發展。其中又以光學顯微技術發展的最早，但在十九世紀中葉，德國科學家 Ernst Abbe 提出繞射極限概念，讓人們瞭解光學顯微鏡的鑑別率極限約在半個波長之譜。以人眼最敏感的綠光來說，能分辨的最小距離約爲 250 nm，即使將放大率不斷提升，影像也無法更清楚。要如何突破這個限制便是接下來許多人努力的目標。在二十世紀初，由於 de Broile 物質波的理論，促成了接下來利用高能電子束的極短波長來成像的構想，並在 1931 年由 Ernst Ruska 實現。不過電子束控制不易，雖然波長小於 1Å，但電子顯微鏡一般只能做到數奈米的解析度。以空間解析度而言，目前最佳的技術仍是掃瞄式穿隧探針顯微鏡 (STM, scanning tunneling microscope)，可以達到原子級的解析度。

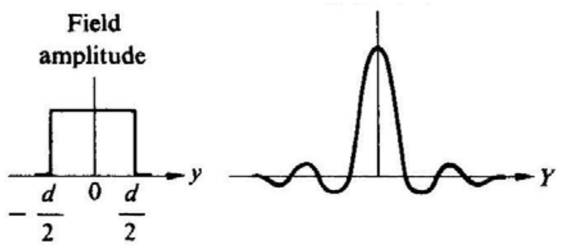
雖然光學技術解析度不若電子顯微鏡或是 STM，但是電子顯微鏡的樣本需要經過繁複的處理手續且幾乎都是在真空中方能觀測，STM 則只能觀察表面原子的結構。光學顯微技術可以提供的主要優勢之一在於非破壞性的檢測，樣本準備非常容易，這點對於需要觀察活體細胞組織的生物醫學應用格外重要。而且一般細胞對光而言相對透明，因此光學技術能夠提供數釐米的穿透深度。從醫學影像角度來看，大概就屬核磁共振造影、電腦斷層造影、和超音波成像發展的最爲成功，但是它們的解析度一般都在毫米等級。光學技術則可達到微米級解析度，提供了細胞甚至分子尺度上的訊息。另一項光學顯微技術的主要優點就是有多種對比可供選擇，例如傳統的顯微技術多是以吸收量的差異來成像，但若要觀察接近透明的樣本時，樣本上吸收量和環境的差異就非常小，此時就可以靠相位差異來提供對比。近年來更引進了許多光譜學技術，例如激發螢光、拉曼散射、非線性吸收或散射等。其中螢光顯微技術發展的尤爲成熟，利用樣品本身或外加的螢光對比，可以精確得知目標分子的分佈，這樣的技術目前已經是分子生物學研究上一項不可或缺的工具。基本上可以說，每一種光和材料的交互作用，經過適當的設計，就可以提供一個新的顯微技術對比機制。

由於「科技始終來自於人性」，顯微技術就在人類好奇心的驅使下，朝向看的更小、更快、更深入的方向不斷發展。換成比較科學性的描述就是希望能增加空間解析度、時間解析度、及穿透深度等要素。限於篇幅之故，我們先從最直觀的空間解析度上來看看目前光學顯微技術的進展。

繞射極限 [1]

由於主編希望我能和課堂上的學習做一點連結，我們就由何謂繞射極限以及它如何限制了光學顯微鏡的解析度開始。首先，我們知道光源通過樣本（例如一隻草履蟲）後在遠場上會產生繞射現象，繞射圖形可視爲通過樣本後的光場分佈做傅立葉轉換的結果，且繞射角度和樣本的空間頻率有關，而透鏡聚焦成像只是把無限遠處的繞射圖形移到焦點處。因此，我們可以說，

透鏡焦點的光場分佈就是物體空間分佈的傅立葉轉換結果。樣本上有越細微的變化，相當於空間頻率越高，便會產生越大角度的繞射光線偏折。理論上，若能將所有的高頻偏折光全部收集起來成像，應該可以完整重現樣本的面貌。但實際上，物鏡就像一個空間上的低通濾波器，收集光時角度有限而會損失許多高頻成分。因此造成細微部分無法在成像時看清楚，也即解析度受到限制。舉大家耳熟能詳的單狹縫爲例，單狹縫的繞射圖形爲 sinc 函數。如圖一所示，此遠場 sinc 繞射圖形即爲此狹縫空間函數的傅立葉轉換。經一面透鏡可將此繞射圖形由無限遠處移至透鏡焦點。由此可看出點光源經透鏡聚焦後，焦點光場強度截面將會形成一個二維的 sinc 圖形，也就是所謂的 Airy disc。以三維空間來說，點光源經聚焦後的空間分佈我們稱爲點擴散函數 (PSF, point spread function)。



圖一：左爲單狹縫（或點光源）的光場強度分佈，右爲遠場繞射光場分佈 [1]。

因此，爲了要提高解析度，就必須增加物鏡收光範圍，才能收集到空間頻率的高頻項。通常我們用「數値孔徑」(NA, numerical aperture) 來代表物鏡收光範圍：$NA = n\sin\theta$，其中 n 是環境折射率，θ 是物鏡最大收光角度的一半。由計算 Airy disc 的強度分佈，可發現解析度能用 $0.61\lambda / NA$ 來估算。瞭解了這個解析度極限的計算方式，就能體會爲何電子顯微鏡的解析度比起光學顯微鏡好上許多。由於光學聚焦能力受到繞射極限限制，一般光學顯微系統的空間解析度最多只能達到約半個波長的尺度。講到這裡，先請大家想一下，如果是你想要提高光學系統解析度，有哪些可能的方法？

突破繞射極限 I – 近場光學技術

若由 $0.61\lambda / NA$ 來想，提高解析度的方法就是縮短波長、提高折射率、和增加物鏡收光角度。有沒有其他的方法能縮小光點的直徑呢？譬如說，若能將光源限制在一個很小的點上，將這個小光點在樣本上移動掃瞄，就可以將每一點的信號收集起來拼成一張顯微影像了。這就是所謂近場光學掃瞄顯微術的概念。那要如何做出小於波長的光點呢？藉光纖通訊科技蓬勃發展之便，把光限制在數個微米寬的孔徑中傳播已是非常容易。那如果把光纖做的更細呢？若把光纖導光的部分拉細到直徑比波長還小，是不是可以做出次波長級的光源呢？目前的近場光學顯微技術就是由光纖一端注入雷射，另一端拉尖並鍍上金屬膜，使光出口小到只有 50 奈米或更小。這樣的細長光纖端就可以用來做爲掃瞄光源，得到解析度小於光學波長的影像。不過，由於光纖結構改變，光輸出效率相當低，是此技術的一大限制。稱爲近場顯微鏡的原因是由於光的繞射特性使得我們必須把這個光纖尖端放置得非常靠近樣本，近到只有數奈米左右的距離，否則光點會非常快速的散開，就不再具有高解析度的優勢了。因此在實際實驗上，需要非常好的迴授控制機制。目前由於掃瞄式探針顯微術的蓬勃發展，使得這種精準控制探針的技術已經相當成熟，有許多商業化產品是將兩者整合在同一個平台上。若想對近場光學技術有更深的瞭解，本系蔡定平教授的實驗團隊對此研究領域有相當多的貢獻，有興趣的同學不妨向蔡教授請

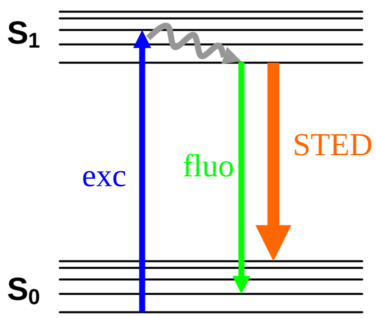
教。

突破繞射極限 II – STED

另一個將光學影像空間解析度向前邁進一大步的是由德國 Stefan Hell 教授所發展的遠場光學奈米顯微術。這個技術是由掃瞄螢光顯微術出發，也即將雷射光用高倍率的物鏡聚焦在螢光樣本上，移動焦點在樣本上掃瞄並不斷收集每一點的螢光強度，累積起來即可組合成一張螢光影像。Hell 教授重要的突破點在於想出要提高解析度，除了盡可能把聚焦光點弄小之外，能不能讓發出螢光的範圍縮小？要知道，所謂繞射極限並沒有限制我們觀察距離很遠的個別單分子螢光的能力，但是當這些螢光分子間距離近到小於繞射極限時，我們就會無法分辨個別分子位置。假設有兩個同樣的螢光分子 A 和 B 靠的非常近，正常的聚焦光點一定會同時激發這兩個分子的螢光，如果有某種辦法在激發時強迫旁邊的 B 不發光，只有 A 發光。接著再移動樣本或光點使得 B 發光 A 不發光，便有可能在空間上解析出 A 和 B 的影像來。因此，Hell 教授提出的概念基本上是想辦法將焦點附近的螢光分子的發光能力暫時抑制掉，他將之命名爲 STED (stimulated emission depletion) [2]。

從名稱中我們便可以看出 STED 是靠受激放光的機制來抑制周邊螢光分子的發光能力。其原理可簡單解釋如圖二，S_0 和 S_1 是螢光分子團的電子躍遷能階，平常在未被激發時，分子多處在能量最低的基態 S_0 上。若加以適當的激發光源（藍色箭頭），則可將分子激發到 S_1。在激發態 S_1 的分子，會停留一段時間才又回到基態，並產生螢光（綠色箭頭）。我們把這段時間稱爲此螢光能態的壽命 (lifetime) τ_{fl}。所謂受激放光就是當分子還處在激發態時，便送入一個能量和能階差一致的光子，此時分子便會受激向下躍遷，且同時產生一個波長和相位都和激發光子一樣的光子。這種造成光同調放大的現象，就是產生雷射最重要的原理之一。發現受激放光現象的愛因斯坦曾說過：「電子停留在受激原子的高能階上，猶如懸崖邊的卵石，輕輕一推便會墜落」[3]。也就是說，當螢光分子停留在激發態尚未放出螢光時，若適時加入一道 STED 光（橘色箭頭），將可使得此螢光分子無法發出本來綠色躍遷代表的螢光。

聰明的你，此時或許已經想到，螢光是從 $S_1 \rightarrow S_0$ 的躍遷，受激放光也是由 $S_1 \rightarrow S_0$ 的躍遷，那要如何分辨這兩者不同機制的放光呢？這點也可由圖二的示意圖看出，就是激發受激放光所用的雷射波長並不需要和螢光波長完全一樣。由於分子能階除了電子躍遷外，尚有振動能階，故一般螢光光譜範圍均相當寬。若選擇 STED 的光源波長落在螢光光譜中能量最小、波長最長的部分，此時被 STED 激發而放光的螢光分子也會放出和 STED 光一樣波長較長的光。而其他處在激發態的分子則有很大的機率會產生波長較短的螢光，於是便可以用適當的濾光鏡將受激放光和螢光信號給分開來了。不過要將這樣的技術用在顯微造影上並提高解析度，還需要能夠當緊鄰的一群螢光分子都被激發至激發態時，選擇性的抑制周邊大部分分子的螢光，只留下小部分分子能夠放出螢光。

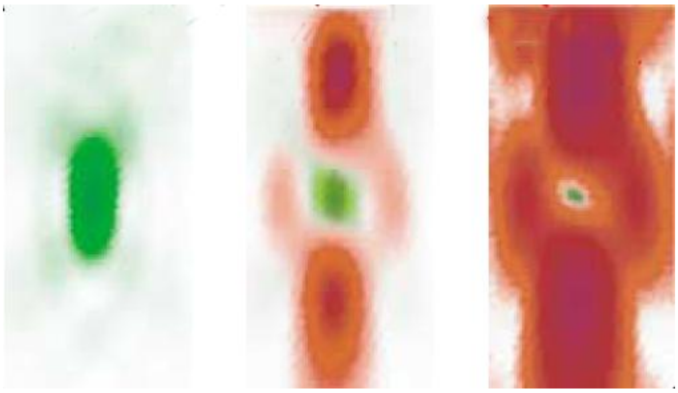


圖二：用能階躍遷及受激放光的概念解釋 STED 原理。

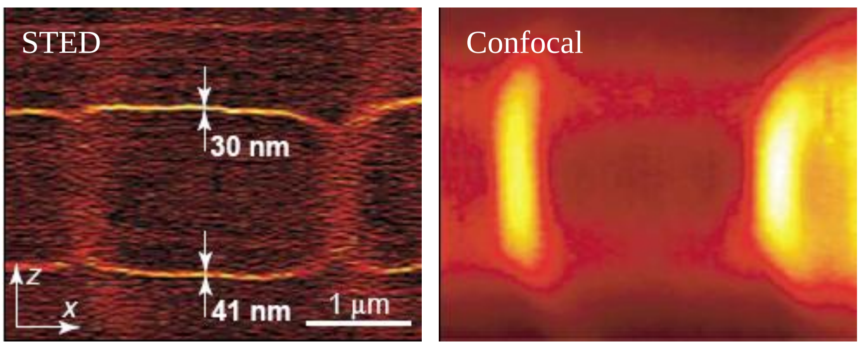
要做到這種選擇性的抑制，其概念可用圖三來說明，最左方是雷射光經顯微物鏡聚焦後光點的結構（由垂直光前進方向觀察），這個光點的大小就相當於這顆物鏡的點擴散函數。可以想像，若拿這個光點在螢光樣本上掃瞄，其橫軸半高寬就代表這個鏡頭的橫向解析度，縱軸半高寬就代表縱向解析度。若樣本中充滿了螢光分子，則只要在點擴散函數範圍內的都會發出螢光，而無法辨別個別分子位置。Hell 教授的重要貢獻就在於巧妙的改變了焦點的形狀和應用過飽和受激放光的現象來有效地縮小螢光放光的範圍。如圖三中，藉由適當控制其波前相位差，可使另外注入的 STED 光（橘紅色）聚焦成中空的形狀，造成周邊許多原本會發螢光的分子都被抑制掉。但事實上這個中空的範圍仍然受到繞射極限的限制，光靠這種焦點形狀的改變，無法使解析度有效提升。

另一個重要的概念就是過飽和受激放光。受激放光所需的飽和強度可計算為：

$I_{sat} = {}^{1}\!/_{\sigma\tau_{fl}}$，其中$\sigma$ 為此受激放光躍遷的等效截面積。其物理意義可想成當光子在空間上的密度達到 $1/\sigma$，時間上的密度達到 $1/\tau_{fl}$時，在光場中所有停留在激發態的分子都會產生受激放光的現象而使螢光被抑制，因此稱為飽和強度。由於所謂中空形狀的光場並不是真的中間完全沒有光場強度，只是因為干涉的結果，比外圍強度低了很多。若使 STED 光場強度遠較飽和強度高上許多，則可由圖三右看出原本沒有產生受激放光的區域也會達到飽和強度而使綠色螢光完全被抑制。藉由調整 STED 光場強度，便可以任意的調整空間上發出螢光的範圍，因而使光學影像解析度不再受繞射極限所限制。有了這樣極小的螢光 PSF，再配合樣本的精密平移或適當的光學掃瞄系統，便可以取得遠超過繞射極限解析度的影像。如圖四所示，利用 STED 的技術，目前已經達到將光學顯微鏡的縱向解析度降到 30 奈米，而橫向解析度更僅有 16 奈米的驚人成就。比起繞射極限足足小了一個數量級以上，而且完全不需近場光學的複雜迴授控制，一切都在遠場光學的環境下完成！



圖三：STED 造成螢光範圍大幅縮小，因而提高解析度 [2]。



圖四：染色後的芽胞桿菌的細胞膜，其 STED 螢光影像解析度遠較傳統光學系統為佳 [2]。

事實上，我們可以想像，只要能有適當的機制把分子從會發出螢光的激發態轉移到其他不會發螢光的能態，便可以選擇性的抑制螢光而達到類似 STED 的效果。例如所謂的 GSD (ground state depletion)，即是將處在激發態的分子進一步激發到另一個不會發螢光的三重態 (triplet state)。對於某些螢光分子，當激發光強度過大時，便會使相當比例的螢光分子被激發到三重態。而由於三重態的壽命較長，若使用連續光源激發，將會使所有基態的分子最終都停留在不發螢光的三重態，故稱爲基態耗盡 GSD。

GSD 和 STED 相比，主要的差別在於所需要的激發強度差異。不論是 GSD 或是 STED，其解析度都是取決於過飽和的程度，也就是最大激發光強度能超過飽和強度多少；可用 $\dfrac{0.61\lambda}{NA\sqrt{1+I_{\max}/I_{sat}}}$ 來估計。但由於三重態的壽命一般比激發態的壽命長許多，因此 GSD 的飽和強度比起 STED 來要小很多。例如螢光素 (fluorescein)，是常用的一種螢光分子，其激發態的壽命約 4.5 ns，而三重態的壽命則長達 1 μs。換算成光場強度，以等效截面積爲 10^{-16} cm^2 計算，STED 的飽和強度約爲 10 MW/ cm^2，而 GSD 則只需要這個數値的百分之一不到即達飽和強度。因此可以不必用瞬間強度很高的脈衝雷射，只要找到適當的螢光分子，有夠長的三重態壽命，用價格便宜很多的連續波雷射，也可以完成突破繞射極限的顯微技術。

除了上述的受激放光和三重態激發等光物理反應可以用來抑制螢光、提高解析度外，也可以利用分子本身結構的化學性改變來調控發光特性。有些分子會受到光激發而改變本身的結構，例如視網膜上的感光分子視黃醛 (retinal)就會受光激發而從順式異構物變成反式異構物 (cis → trans)。而若這樣的受光激發造成化學結構改變的同時也改變了螢光分子的放光特性，就可以產生類似光敏開關 (photoswitch) 的特性，對局部的發光特性進行調控。而且一般這種光化學反應的結構改變，其壽命又比三重態更長，因此所需的激發強度可以更低。

這個技術看起來這麼理想，有沒有啥缺點或限制呢？事實上，從剛剛的討論之中，就可以看出其最大的限制就是要找到適合的螢光分子。首先是螢光分子本身需要有適當的能階分佈或是特殊的化學結構變化，而且能夠靠外加光場造成螢光效應的抑制。此外，這些螢光分子還最好要能很快的從被抑制的狀態中恢復，才能繼續進行下一個點的掃瞄。如果一旦一群螢光分子被抑制後得花上一秒才能恢復，那麼掃瞄一張 256 × 256 的影像就要耗費將近一天的時間，不太實際。其次是針對想觀察的生物化學反應，不見得都能找到適合的螢光分子做標定。雖說如此，只要有適當的螢光標定分子，STED 也能做到每秒超過 28 張影像的即時觀測 [2]，讓研究者們對活體細胞中奈米尺度的生物化學現象有更直接的觀察與體會。

結語

自 1872 年 Abbe 提出繞射極限的概念以來，科學家們一直試圖突破這個障礙，讓我們能看到更微觀的世界。經過了一百多年的努力，終於在 1980 年代隨著控制技術的進步而有近場光學顯微技術的發展，對奈米尺度的光學特性研究有了重大的突破。但受限於以光纖尖端掃瞄

成像的方式，只能觀察樣本表面。而後在 90 年代中，Hell 教授提出 STED 的概念之後，到目前已經成功在遠場觀測下驗證了小於繞射極限一個數量級以上的解析度，同時依據螢光分子的特性，設計出許多原理類似，手法不同的遠場奈米顯微技術。相信在不久的將來，光學技術將有可能達到相當於電子顯微鏡的解析度，且讓我們拭目以待。

參考文獻：

[1] E. Hecht, Optics 4th ed., Ch. 13.2 (Addison-Wesley, 2002)

[2] http://www.mpibpc.gwdg.de/groups/hell/ .

[3] S. Perkowitz 著，林志懋譯，「光的故事」（貓頭鷹出版，2005）

[4] 去年的科學期刊有一篇專文報導，提供大家參考： S. W. Hell, Science 316, p. 1153 (2007)

時空 31-物理系列 統計物理中的動力學、隨機過程及其應用

高憲慶

統計物理是爲了處理具有高複雜性與多自由度的系統，而在物理和數學中所發展出來的一個研究領域。與其它研究主題相當不同的特點，在於統計物理相當著重於處理問題的方法上，而非僅是處理問題的對象，所以相對於其它領域來說，它的應用層面也相當廣泛。由於所要描述的對象相當複雜，想要把每一個物理量的動態表現完全求解出來，再藉以求得系統的一些巨觀表現和統計行爲，往往是不切實際且相當難以達成的，所以在處理上必須做一些假設和簡化。而統計物理的成功，在於約化系統的複雜性，並取用適當的變數，來掌握系統的行爲。在此所打算討論的重點，在於遍歷性以及隨機這兩個概念以及方法。

遍歷性是在動態系統中的一個概念，而這邊所指的動態系統，是在一個集合Ω上，搭配著一個映射$T:\Omega\to\Omega$。我們可以把T作疊代，而得到離散的動態系統，當然如果有一些好的性質的話，可以延伸到連續的情形。通常我們會在上面多賦予一些結構以方面進一步的討論，像是測度以及拓墣，使的我們方便作一些討論，像是計算平均或是期望值以及分辨局部和大域的結構。就物理上的意義而言，集合Ω所代表的是一個系統所有可能的組態，而映射T則是系統的組態隨著時間上演進的法則。對於遍歷性的詮釋，就物理上的說法而言是指隨著時間的進行，系統會「均勻」的「走遍」所有可能的狀態。在這邊我們必須把「均勻」和「走遍」兩個意義分開來說。「走遍」的意義是拓墣上的意義，它所指的對於所給定的初始狀態ω，那麼$\omega,T^1\omega,T^2\omega,T^3\omega,....$這個路徑在$\Omega$上是稠密的；而「均勻」的意義是測度上的意義，也就是說對於定義在Ω上的函數X，以及初始狀態ω，隨著時間的演進在路徑上的平均會等於對在整個狀態空間上的平均，也就是：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}X(T^m\omega)=E[X]$$

顯然的，並非所有的系統都會滿足這種情形，在此我們考慮一個簡單的例子。假設有一個多自由度的力學系統，但它的 Hamiltonian 可以分解成許多個別獨立的 Hamiltonian 的和，也就是：

$$H(p,q)=\sum_{i=1}^{N}H_i(p_i,q_i)$$

假設一開始給定每個 Hamiltonian 上的能量爲$\{E_1,E_2,...,E_N\}$，那麼不論經過多久的時間，個別的部分還是以原先所給定的能量在作運動。那麼系統的點在相空間中的軌跡，就侷限在$\bigcap_{i=1}^{N}\{H_i=E_i\}$這樣的集合中，但它只佔了相空間的一小部份而已，自然也就不滿足遍歷性。而這樣的系統，無論它的自由度多麼大，統計物理都不適用。

在統計物理之中，最基本的系綜是微正則系綜，對應在相空間中就是H等於常數的集合，如果系統的自由度爲N，那麼所對應到的就是一個$2N-1$維的超曲面。在 Liouville 定理中闡明了，古典力學的動力學是一個保持相空間體積的映射，但如果系統有著總能量的限制，那麼它也是一個保持超曲面面積的映射。由 von Neumann 和 Birkhoff 在 20 世紀初期有關遍歷論方面所獲致的一些成果指出，對於保持測度的映射而言，如果這個動態系統無法被「分解」，那麼遍歷性就會成立。要討論這個「分解」，必須談論到一些其他的概念。給定一個 Hamiltonian，可以產生對應到相空間的一組相流—g_t。g_t是在相空間中一個帶時間參數t的映射，其中映射

所得的軌跡滿足所對應 Hamiltonian 產生的軌跡方程式。如果 $A \subset \Omega$ 是一個閉集合且滿足 $g_t^{-1}(A) = A$ 的條件，那麼我們就稱 A 對於 g_t 是不變的。就我們先前所舉的例子來說，$\bigcap_{i=1}^{N}\{H_i = E_i\}$ 這個集合就是不變的。在這個情形之下，系統的狀態只能在這樣的集合裡移動。利用這個概念，我們可以把對應能量爲常數的超曲面分解成爲許多對於 g_t 不變的部份，且各個部分無法再被進行分解。這個分解的結果，主要是取決於系統 Hamiltonian 的表現。

由以上的討論可以知道的，如果系統之中有著獨立於 Hamiltonian 的守衡量存在，遍歷性就不會成立了。但就一般情形而言，對於力學系統來說，要確定守恆量是否存在並不是一件容易的事。我們有著許多現成的定理可以用來判斷在某些特定的情況下，可以找到新的守恆量。像是系統存在某些對稱性時，或是用既有已知的守恆量，去作 Possion Bracket 已得到或許是新的、獨立的守恆量。但卻很少有定理指出，在某種情形下，系統不存在除了 Hamiltonian 外的守恆量。在此我們舉一個經典的例子—Toda Lattice。Toda Lattice 是一個一維的非線性系統，個別的粒子只和鄰近的粒子間有著交互作用。它的 Hamiltonian 可以表示如下：

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} p_j^2 + \sum_{j=1}^{N} e^{2(q_j = q_{j-1})}$$

這樣的系統可以變換成 Lax 方程式的形式。

$$\frac{dL}{dt} = [L, B]$$

其中 $L_{ii} = p_i, 1 \le i \le \mathrm{N}$　 $L_{i,i+1} = L_{i+1,i} = e^{q_i - q_{i+1}}, 1 \le i \le N-1$ 其餘爲 0

$B_{i,i+1} = -B_{i+1,i} = -e^{q_i - q_{i+1}}, 1 \le i \le N-1$ 其餘爲 0

在這種形式的系統中，對應到 L 的 N 個本徵值都是守恆量。其中的証明只和方程式本身的形式有關，在此簡述如下：
考慮 $N \times N$ 的矩陣 V 滿足下列的 ODE 的初始值問題。

$$\frac{dV}{dt} = -BV,\quad V(0) = I_n$$

I_n 所代表的是 $N \times N$ 的單位矩陣。計算 $V^{-1}LV$ 對時間的微分，可得到它的量值爲 0，所以有下面的等式：

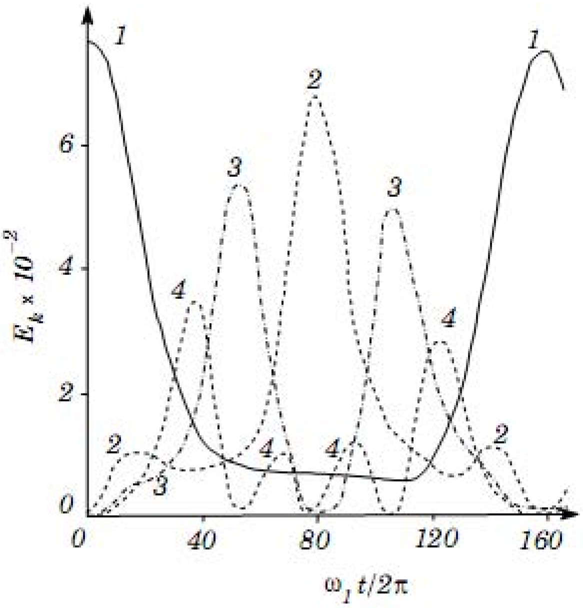
$$V^{-1}(t)L(t)V(t) = L(0)$$

對應不同的時間只差一個相似轉換因此對應的 N 個本徵值都是守恆量。

對於自由度爲 N 且有界的可積系統來說，存在 N 個彼此獨立且 Possion Bracket 爲 0 的守恆量，這種系統是等價於 N 維的環，它顯然不是遍歷的。但一個值得討論的問題是，把這樣的一個系統，加上一項微擾的 Hamiltonian，使系統變爲不可積的，那麼系統的表現會有著什麼樣的改變呢？1954-5 這段期間，Enrico Fermi、John Pasta 和 Stanislaw Ulam 等人在 Los Alamos 的 MANIAC 電腦上模擬了如下的晶體模型，後來被稱爲 FPU Model：

$$H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}p_j^2+\sum_{j=1}^{N+1}\frac{1}{2}(q_i-q_{i-1})^2+\frac{\alpha}{3}(q_i-q_{i-1})^3,\quad q_0=q_{N+1}=0$$

其中三次方的交互作用項是非線性耦合的部份。當時的預期爲只要有著非線性的耦合存在，那麼經過足夠長的時間，系統應該會有能量均分的情形。但是將各個振動模態的能量對時間做圖，可以得到如下圖的結果(其中$\alpha=0.25$、$N=32$、ω_1是第一個模態的振盪頻率，$t=0$時僅有對應第一個模態的能量被激發)：



如果系統具有遍歷性，那麼能量的分布應該逐漸趨向於能量均分的情形。但就所做出的結果來看，這種傾向似乎不是相當明顯，反而是各個模態的能量對於時間有著類似於回歸的情形。這個現象即便經過相當長的時間，還是維持原先的狀況。但隨著自由度的增加以及微擾項的增強，這樣的行爲就逐漸消失了，系統很快的就回復到能量均分的情形。爲了對這個模型有著更進一部的了解，一種處理方法是利用作用—角變數，把線性的部份和微擾的部份分解開來，利用處理微擾的技巧來計算在不同模態上能量擴散的情形。而另一種則是考慮連續性的極限，在適當的變數代換之後可以把原先的式子轉換爲 Korteweg-de Vries 方程式(描述淺水波的 PDE)

$$w_\tau+\frac{1}{24}w_{\xi\xi\xi}+\alpha w w_\xi=0$$

在這個情形之下，初始的正弦波形會分解成一系列的孤立子，個別的孤立子維持個別的波形和波速，在邊界條件的限制下，經過足夠的一段時間，整體的波形會再疊和成與原先波形接近的情形，因而有著回歸的情形。對於這一類接近於可積的不可積系統的動力學理論，首見於 KAM 理論之中，其中的 KAM 分別所指的是 Andrey Kolmogorov、Vladimir Arnold 和 Jürgen Moser 三個人。這個領域的重要性，在於很多不可積的系統，可以利用可積的部分作爲第一階的近似，以得到一些有用的資訊。對於傳統的微擾方法來說，我們或許可以知道在一段有限長的時間間隔下，系統大略的軌跡爲何。但我們無法瞭解在時間接近於無限長的情形之下，系統的表現是否是否穩定、是否有界…等等。他們證明了在非簡併的情形之下，只要微擾小於某個限制，那麼系統結構還是維持原先等價於 N 維的環的情形。

　　以上所介紹的，是古典系統要滿足平衡統計力學的假設，所應遵守的一些限制。但平衡統

計力學的方法，對於非平衡的系統，或是說對於系統在時間上演進以及空間上分佈的表現，並沒有辦法給出太有用的預測。其實對於非平衡系統的探討，早在 19 世紀末，Ludwig Boltzmann 就已經對於理想氣體系統在進行研究，並得出了著名的 Boltzmann 方程式。而這些發展也成爲了之後動力論和非平衡統計物理的重要根基。雖然我們可以由 Boltzmann 方程式當中，去得到系統隨時間演進的相關資訊，像是熵對於時間的關係，以及在接近平衡時物理量的一些分布表現，但要徹底的將方程式的解找出來卻不是一件容易的事。好在所考慮的問題當中，有一類問題僅僅是考慮局部的或整個系統所衍伸的物理量，而這些量值與週圍的系統間有著交互作用或是受到整體系統的驅策而不停的隨著時間在做改變。在系統自由度很大的情形下，這些效應可能呈現著類似於渾沌的情形，以至於無法精確的去預測它對於時間上的關係。而在這種情形之下，其中一種可能去處理問題的方法，就是在動態方程式中，引入隨機的想法。由於就算不知道確切的動態表現，但在某種程度上，我們還是可以去預測當中在驅策的效應是呈現著什麼樣的機率分佈，或在時間和空間上有無任何的相關性。這些資訊，可能從最基本的方程式中得到，也可能是經驗或實驗上所累積的結果，而這些結果提供了建構許多系統現象學理論的一些依據。舉例來說，在布朗運動中，所關注的重點在於一個特定粒子的軌跡。它的運動受到週圍許多其它小分子的碰撞影響，因而產生類似於隨機的運動表現。如果只考慮它的位置以及速度的變化，可以把它的運動方程式寫下：

$$dx = vdt, \quad dv = -\beta vdt + d\xi$$

其中$-\beta v$是黏滯力的效應、$d\xi$就是週遭分子碰撞的效應，ξ本身是對時間的函數。定義$N(t)$是時間從 0 到t所經歷的碰撞次數。若在短時間之內($\Delta t \approx 0$)，存在一次碰撞的機率是正比於$\lambda\Delta t$，存在兩次碰撞的機率幾乎是 0，且每次的碰撞事件之間是獨立的，那麼$N(t)$是遵守 Poisson 分佈。再假設每次碰撞所造成的影響是獨立且具有相同分佈的隨機變數η，那麼我們可以把ξ寫爲

$$d\xi(t) = \eta dN(t)$$

在黏滯係數相當大的情形之下，$-\beta vdt + d\xi \approx 0$，所以$x(t)-x(0) \approx \frac{1}{\beta}(\xi(t)-\xi(0))$。

在這個情形下，計算$x(t)-x(0)$的特徵函數，可以得到：

$$Ee^{is(\xi(t)-\xi(0))/\beta} = e^{\lambda t(\phi(s/\beta)-1)}, \text{ 其中 } \phi(s) = Ee^{is\eta}$$

如果η的平均爲 0，二次方以上的期望值存在，我們可以取ϕ的展開式。再假設$x(t)-x(0)$是一個有限且不爲 0 的量，那麼$\lambda = O(\beta^2)$。由於β相當大，其它高階項的部分就被壓制住，因而在特徵函數的部分是對應到常態分佈的情形。從以上的討論，我們可以得出關於布朗運動的幾點性質：

1. 如果 $0 \le t_0 < t_1 < ... < t_n$，那麼$x_{t_0}, x_{t_1}-x_{t_0}, x_{t_2}-x_{t_1}, ..., x_{t_n}-x_{t_{n-1}}$之間是獨立的隨機變數。
2. x_t是連續的。
3. 對於$0 \le s < t$，$x_t - x_s$滿足常態分佈，且變異數正比於$t-s$。

而這些性質也是在數學上，對於布朗運動的定義，但一般所指的布朗運動是變異數等於$t-s$的情形，而且習慣上利用B_t來代表這樣的一個隨機過程。這個隨機過程之所以重要，除了它的物理意義外，我們可以利用這樣的隨機過程作爲基礎來建立模型並衍生出新的隨機過程。其中相

當重要的一類，是 Ornstein-Uhlenbeck 過程，它可以寫成下列的 SDE(在此我對於隨機變數的積分都是採用伊藤積分的定義)：

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

在選擇權定價中最基礎的一個模型—Black-Scholes-Merton 模型，而當中用於模擬所依賴資產價值變化的方程式，就是屬於這一類過程中被稱爲幾何布朗運動的隨機過程。其中有一點要特別注意的是，對於具有布朗運動這種高度振動特性的函數而言，在作展開的時候，比方說考慮 $f(X_t)$ 局部的展開。對於一般的微積分而言，$df(X_t) = f'(X_t)dX_t$，但這對具有布朗運動項的函數而言是不對的。事實上，由於 dB_t 的貢獻，在展開到第二階的時候，會有 $dB_t dB_t = dt$ 這種一階的量存在。所以正確的寫法是：

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + 1/2 f''(X_t)b(t, X_t)^2 dt$$

數學上，SDE 與二階的拋物線型 PDE 間，有著許多的聯繫；就如同一般的 ODE 與一階的線性或非線性 PDE 之間一般重要。在處理一階的 PDE 問題中，其中一種對於解的建構方式，是利用特徵線。以傳輸方程式的柯西問題爲例：

$$\partial_t u(x,t) + a(x,t)\partial_x u(x,t) = g(x,t) \quad u(x,0) = f(x)$$

想像真的有流體隨著時間在空間中流動，如果我們選取其中一小塊去看，它是順著一定的軌跡在空間中行走。我們可以依據傳輸方程式的形式，把所對應的軌跡滿足的 ODE 找出來。由於在 $t = 0$ 時的初始條件是給定的，可以把它想成在 $x - t$ 空間中，隨著時間的進行，許許多多的曲線從對應 $\{t = 0\}$ 的面長出來，而在長的過程中，u 的量值也被帶著走，並且在空間上作變化，這樣就得出對應的解。但反過來看，給定一組 ODE，但想要去探討空間中對應這個 ODE 所產生的流所造成的物質、能量、動量……密度變化，直接在 PDE 上所呈現的形式就是傳輸方程式。回到 SDE 的情形來看，比方說我們要探討粒子在空間上的機率分布隨著時間的變化，所用於描述的工具就是傳輸擴散方程式，其中擴散的效應就在於布朗運動的隨機行走造成的影響，在此把其間的數學關係簡要的敘述一下。就之前所提及的 Ornstein-Uhlenbeck 過程而言，定義機率密度對時間的關係爲 $\rho(x,t)$。任取一個平滑的測試函數 $f(x)$，然後去計算 $f(X)$ 在時間 $t+h$ 以及 t 的期望值。考慮兩種不同的展開方式，一個是考慮機率密度對時間的變化，一種是考慮 X_t 在空間上的流動，可以得到：

$$\int_t^{t+h}\int_{|R} f(x)\partial_t\rho(x,s)dxds = \int_t^{t+h}\int_{|R}[f'(x)a(x,s) + 1/2 f''(x)b^2(x,s)]\rho(x,s)dxds$$

經過分部積分後，取 h 趨近於 0 以及 f 集中在空間中一點的極限，就可以得到傳輸擴散方程式的形式：

$$\partial_t\rho = -\partial_x(a\rho) + \partial_{xx}(b^2\rho/2)$$

這個 PDE 也被稱爲 Fokker-Planck 方程式。就如同在 ODE 的情形一般，我們也可以利用 SDE 的方法去建構一些 PDE 的解，像是在場論以及選擇權定價中的 Feynman-Kac 公式，就是這樣的一個例子。而這些方法也提供了蒙地卡羅數值模擬在處理一些 PDE 方面的基礎。比方說就處理橢圓 PDE 當中的 Poisson 方程邊界值問題。給定定義域 $\Omega \subset R^n$，考慮：

$$-\Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \quad u = g \quad \text{on} \quad \partial\Omega$$

對於任意一點 $x \in \Omega$，考慮 $u(B_t)$，在此 B_t 是 n 維各個方向分量之間獨立的布朗運動。設 $B_0 = x$，T 是 B_t 接觸到邊界的時間，是一個隨機變數。那麼

$$g(B_T) = u(B_T) = u(x) + \int_0^T Du \cdot dB_t + 1/2\Delta u dt = u(x) + \int_0^T Du \cdot dB_t - 1/2 f dt$$

對全式取期望值，就可以得到：$u(x) = E[g(B_T) + 1/2\int_0^T f(B_t)dt]$，一個形式和概念上簡單但解析的計算十分困難的形式。當中如果我們改變 B_t，使的在不同分量間存在著相關性，那麼可以去求解更一般性的橢圓 PDE 問題。

在介紹完這些之後，我們來考慮一組線性的 SDE。

$$dX_t = HX_t dt + \sigma dB_t$$

其中 X 是一個 n 維的向量，H, σ 是 $n \times n$ 的矩陣，而 B_t 是 n 維且彼此間獨立的布朗運動。利用一般處理線性 ODE 的方法，我們可以把對應的解找出來。這個方程式雖然簡單，但用於描述一些偏離期望值的擾動情形，仍然有著相當重要性。回到之前的 Fokker-Planck 方程式來看，在初始條件 $\rho(x,0) = \delta(0)$ 的情形下，我們定義一個新的函數 $\tilde{\rho}(q,t)$ 用以探討擾動隨著時間的分布：

$$\tilde{\rho}(q,t) = \rho(\bar{x}(t) + q, t)$$

其中 $\bar{x}(t)$ 滿足的是原先 SDE 當中軌跡的期望值。藉由計算 $\tilde{\rho}$ 對時間的偏微分，並且把原先的 Fokker-Planck 方程式以 $\bar{x}(t)$ 作最低階的展開，就可以得到下列的形式：

$$\partial_t \tilde{\rho}(q,t) = -\partial_q (Hq\tilde{\rho}) + \partial_{qq}(\sigma^2 \tilde{\rho}/2)$$

從這邊就可以看出，在近似之下，所對應的隨機過程就是線性 SDE 的形式。所以藉由計算一些這個 SDE 的統計量，便可以獲知一些關於擾動的統計現象。其中一個相當重要的關係式，被稱爲 Fluctuation-Dissipation Theorem，就是在描述 q 的相關性矩陣 $C(t)$ 在時間趨近於無窮大時的一些關係，它可以寫成：

$$HC + CH^T = -\sigma\sigma^T$$

以上這些關係式，可以被應用在化學反應，或是更一般性的在描述粒子碰撞的隨機過程。

隨機過程除了應用在一般的 ODE 之外，還有一部分是應用在 PDE 的系統上，特別是在對於時間演進的 PDE 中，而這些模型很多是與利用場論的方式來建構連續體的現象學有關。像是描述連續體系統在趨向穩定態的過程、反應擴散系統、 Pattern Formation……等等，都是這樣的例子。而就一般而言，這樣的系統都可以寫成下列的形式：

$$\partial_t \Phi(x,t) = G(\Phi, D\Phi, D^2\Phi, ..., \eta(x,t))$$

其中 Φ 所代表的可能是濃度、磁化強度、高度…..。而其中所對應的 η 則是隨機的擾動，在時間和空間上不同的擾動間可以有著相關性。

無論是在平衡或是非平衡的系統中，從巨觀的尺度來看，好像是相當均勻的；但從微觀的尺度上來看，每個小部分則隨著時間不斷的有著起伏與改變。平衡統計物理中對期望值的計

算，以及非平衡過程中所假設的隨機性，背後都隱含著豐富的動態表現作為基礎。在處理問題時，無論是從上而下的現象學理論還是由下而上的基礎理論，都應該注意著訊息從巨觀到微觀之間是有著相互的關聯的。微觀作用機制的改變可以使巨觀系統的行為起相當大的變化，而對於巨觀系統的作用可以隨著內部小單位間的聯繫而將高階的訊息散佈在系統之中。自然界的真實現象，往往是複雜、不單純的，但也因為如此才有著許多的細微的變化存在著。

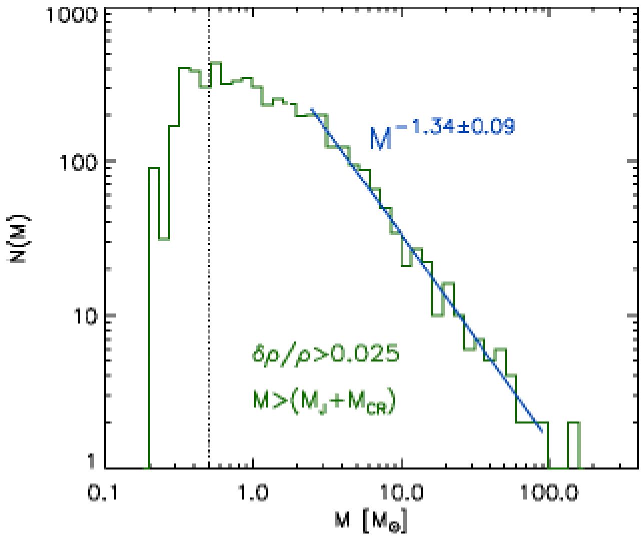
參考資料：

1. V. I. Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Springer-Verlag
2. Joel Keizer, Statistical Thermodynamics of Nonequilibrium Processes, Springer-Verlag
3. Rick Durrett, Probability: Theory and Examples, Thomson Learning
4. Raul Toral, Computational Field Theory and Pattern Formation
5. M. Toda, Nonlinear Waves and Solitons., Mathematics and its Applications, Kluwer
6. S. E. Shreve, Stochastic Calculus for Finance, Springer-Verlag

類太陽恆星的形成過程

當你在夜空中抬頭一望，滿天的星斗閃爍著。這些光點幾乎都是恆星，很自然地，我們想瞭解這些無盡數的恆星是如何生、老、病、死。經過多年的努力，人類已經知道恆星是用核融合提供能量而發光，也清楚當氫消耗殆盡時，重力與電子簡併壓力的競爭會決定恆星是變成白矮星、黑洞、中子星。但是關於恆星如何形成，一直困擾著天文學家。

恆星的種類很多：質量從 10^{11} 到 10^{-1} 倍的太陽質量；大小從 10^{12}~1 個太陽半徑都有。而且恆星所處的星系種類、是否爲第一代恆星(primordial star)、雙星或多星系統…種種不同的客觀條件都會影響恆星的形成機制。然而宇宙中的恆星其質量大多與太陽相近。[圖 1]



[圖 1：恆星數目與質量的關係，此關係稱 initial mass function。大多數的恆星質量落在 1 個太陽質量的大小。參考資料 1]

因此研究類太陽恆星的形成不只是增進對太陽的瞭解，同時也能解開宇宙中大多數恆星如何形成的奧秘。很幸運地，在眾多不同種類的恆星中，天文學家對類太陽恆星的形成過程最爲清楚。這篇文章將概述類太陽恆星形成的過程，然後再對其中一些細節做進一步的探討。

恆星形成的溫床是來自星系內的自行聚集成團的星際物質，稱之爲巨分子雲(giant molecular cloud, GMC)。[註一：巨分子雲(giant molecular cloud, GMC)，著名的獵戶座大星雲(Orion,M42)即是一例。典型巨分子雲的大小約爲數百光年、重量約 10^{6} 倍太陽質量。巨分子雲溫度低，因此不會發光，而密度比一般星際物質要高。溫度低、密度高是必然的，因爲壓力才能與周遭物質相同。巨分子雲其實並不均勻，雲內密度較高之處稱雲塊(clump)、雲塊中更密的地方稱雲核(core)，恆星即是在雲核所生成。觀測上所稱的黑暗星雲(dark nebula)，即是巨分子雲在背景的亮光下所顯現的陰影。參考資料 2 的 2.1 節有詳盡的解釋。]分子雲內又會有許多高密度的雲核(core)，當雲核因本身的重力收縮至一定程度後，中心形成一個密度較高的核，稱爲原恆星(protostar)。物質聚集的過程中所放出的重力位能，會轉成熱運動，其黑體輻射使得原恆星發光。吸積的過程也伴隨雙極外流(bipolar outflow)、圓狀盤(accretion disk)的出現。當溫度逐漸上升，氘(deuterium)會先發生核融合，最終溫度高到使氫產生核融合，發光。一顆恆星就此形成。

年輕星體的光譜與分類：

[註：年輕星體(Young stellar object, 簡稱 YSO) 泛指恆星形成前的系統。包括前期的原恆星與周遭的雙極外流、盤…等；與吸積停止後(accretion)的前主序列星]

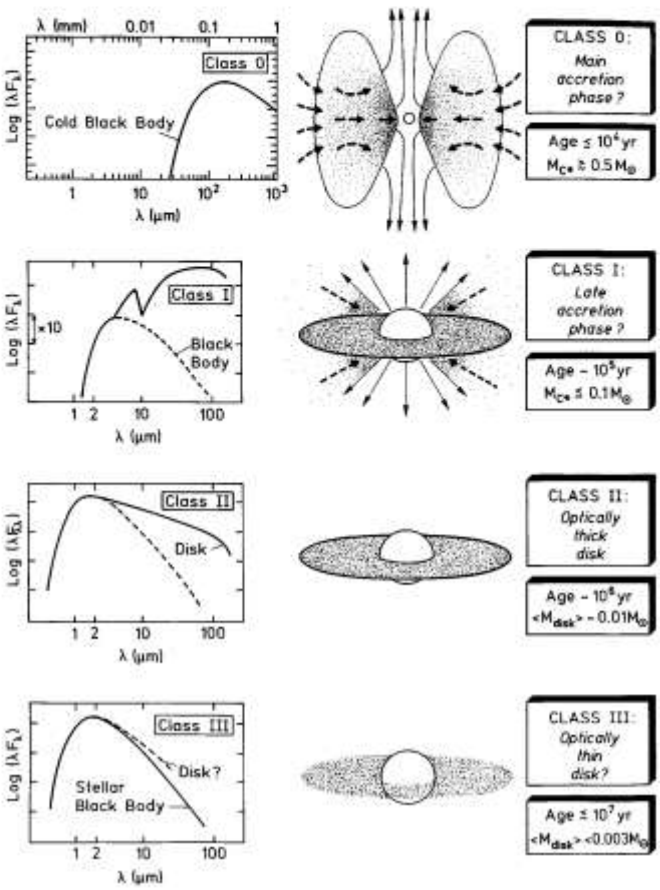
一開始天文學家觀測到許多~~年輕星體~~光譜形狀不同，Adams 等人[參考資料 3]在 1987 年時提出不同的形狀其實代表年輕星體不同的演化階段。因此天文學家利用光譜，將年輕星體分爲四個階段：第 0 階段、第 1 階段、第 2 階段、第 3 階段(Class 0, 1 ,2, 3)。以下是每個階段所對應到的特徵[圖 2]：

第 0 階段(Class 0)：原恆星(protostar)剛生成，外圍仍有大量的塵埃、雲氣包圍。因此觀測上的光譜能量分佈(之後將簡稱 SED, spectrum energy distribution)只會看到溫度較低的外圍物質所發出的黑體輻射。外圍物質不斷落入(infall)原恆星內。而原恆星會噴發雙極外流(bipolar outflow)，釋放多於的角動量。

第 1 階段(Class 1)：物質大部份已累積至圓狀盤(circumstellar disk)。因此可以觀測到原恆星與外圍物質的黑體輻射。原恆星表面溫度高(物質落入將釋放重力位能轉爲熱能)、外圍物質的溫度主要是受受原恆星間接的加熱，因此溫度低。所以 SED 會有長波與短波各會出現一個峰(高溫、低溫)的出現。

第 2 階段(Class 2)：此時物質的落入幾乎停止，僅剩下一個不透明的盤面。SED 主要是原恆星疊加上低溫的盤面，因此在 SED 長波長(近紅外光、中紅外光)的地方會隆起。我們稱此時年輕星體由原恆星進入前主序列星(pre-main-sequence star)。金牛座的 T Tauri star 即屬於此類。

第 3 階段(Class 3)：盤中的物質一部份從外流離開，一部份用來形成行星，使得盤變爲稀疏而透明的。此時 SED 就只會看到前主序列星的黑體輻射光譜和少量近紅外光的隆起。



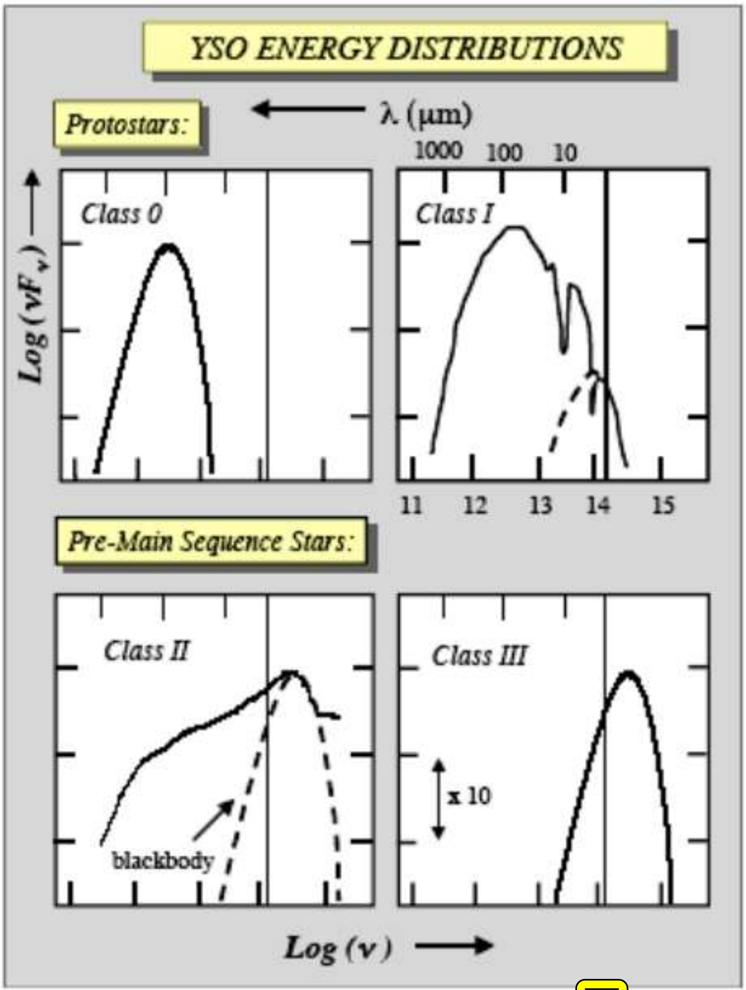


圖 2：年輕星體四個階段的光譜與示意圖。
[參考資料 4,5]

年輕星體在重力下的演化：

恆星如何形成，最重要的是巨分子雲的物質，如何收縮成一顆恆星。在研究恆星形成的進展上，天文學家一開始就是先把問題簡化至球對稱的分子雲的收縮，之後才漸漸發現盤、噴流…等現象所扮演的角色。

雖然僅考慮重力，但分子雲並不是單純的收縮、一直持續升溫到使氫足發生核融合就結束了！本篇將介紹 Larson 所提出的原恆星模型[參考資料 6]。Larson 所提出的模型雖不盡正確，但我們可以從中一窺重力塌縮過程中，核的形成、膨脹、收縮，核表面與中心對流以交換能量的各種變化多端的現象。我們首先觀察一團起始溫度、密度均勻，由氫分子與其它塵埃所構成的球狀分子雲。[註：以前許多重力塌縮的模擬常用人工加入一些特殊的邊界條件，以使物質能夠塌陷。Shu 在 1977 年[參考資料 7]提出重力塌陷的解析解，此結果顯示塌縮過程中內部的一旦塌陷，外部物質也會跟著塌陷，代表之前模擬的結果是可信的。]忽略其中的磁場、亂流，僅考慮分子雲受重力影響而塌縮的過程。整個分子雲的初始質量必須大於 Jean's mass，整個分子雲的重力位能才足以克服熱能。[註：就尺度分析上，單位莫耳的熱能為：RT；單位莫耳的重力位能的大小為：GMm_{mole}/r。Jean's mass 就是當重力位能與熱能平衡時的質量大小。]利用

徑向上的動量方程、能量方程、質量守恆，我們可以模擬整個雲氣收縮的情況。
質量爲 1 個太陽質量、半徑爲 10^7 倍太陽半徑的分子雲演化結果如下：

原恆星前期：

1. 初期的等溫階段

   整個分子雲一開始是等溫、密度均勻的。由於重力的影響，物質以自由落體的方式(收縮初期可忽略壓力梯度)開始向中心收縮，中心的密度逐漸增加。物質掉落會把損失的重力位能以熱輻射的方式釋放出來，但初期密度低，輻射可自由傳播，所以整個分子雲的溫度約相等。

2. 第一個核(不透明核(opaque core))的形成

   當中央的密度提高(~10^{-13}g/cm^3)，物質開始變得不透明。熱輻射被物質擋住，無法把熱能傳出去，可近似爲絕熱。因爲絕熱的氣體滿足 $PV^{\gamma} = const\,(\gamma = Cp/Cv > 1)$ ，γ 大於 1，所以比起等溫過程 $PV = const$ 而言較難壓縮。中央的溫度、壓力很快的上升，向外推的壓力梯度已足夠抵抗重力，形成一小顆靜液平衡(hydrostatic)、絕熱的核。分子雲分成兩區：中央是一小顆不透明的核，外圍是透明的分子雲。核外的物質依舊以自由落體的方式掉到核上，但核是幾乎是靜液平衡的，因此掉落的物質速度突降至 0，在核的表面形成撞擊面(shock front)，在此面上大量的動能轉爲熱能。核形成時，質量約爲 0.005 太陽質量、溫度爲 170K、半徑爲 10^3 太陽半徑。

原恆星時期：

3. 第二個核(星核(stellar core))的形成

   當前面所述的核質量增加至兩倍大，半徑略爲收縮。核中央的溫度約爲 2000K，此溫度已高至可使氫分子分解爲氫原子。由於壓縮做的功主要使氫分子解離，溫度不易上升。因此 Cv 變大，γ 減低，使第一個核開始變得不穩定。第一個核的中央會再度塌縮，等到氫分子幾乎完全解離，Cv 又再度變回正常，中央塌縮的區域再度回到靜液平衡，因此在第一個核的中央形成第二個氫原子組的核稱星核(stellar core)，也就是原恆星。從此進入原恆星的階段，其形成時質量爲 1.5*10^{-3} 太陽質量、大小爲 1.3 倍的太陽半徑，溫度爲 2*10^4K、密度爲(2*10^{-2}g/cm^3)。

4. 星核的膨脹

   第一個核的物質不斷掉入星核內，掉到星核物質的密度逐漸降低，因此比熵(specific entropy)上升[註：熵爲 $S = Nk\ln V + NCv\ln T = NCv\ln(TV^{\gamma-1})$ 。因此單一分子體積越大，比熵越大]。比熵上升使星核膨脹[註：比熵越大代表此團氣體 PV^{γ} 越大，因此體積變大]，當原恆星質量達 1.0*10^{-2} 太陽質量時，半徑可膨脹至 12 倍的太陽半徑。

以上的階段，原恆星所發出來的光被外圍落入的物質所吸收，因此僅能觀測到外圍塵埃(dust grain)吸收後再發射出的紅外光。隨著越來越多的物質掉入原恆星，我們開始可以直接看到原恆星所發出的光。接下來的階段，我們把原恆星的演化畫在赫羅圖上[圖 3][註：赫羅圖,Hertzsprung-Russell diagram(H-R diagram),是以亮度對溫度用對數座標作圖，但溫度刻度反向，越往原點越高。常被用來標示星星的演化過程]

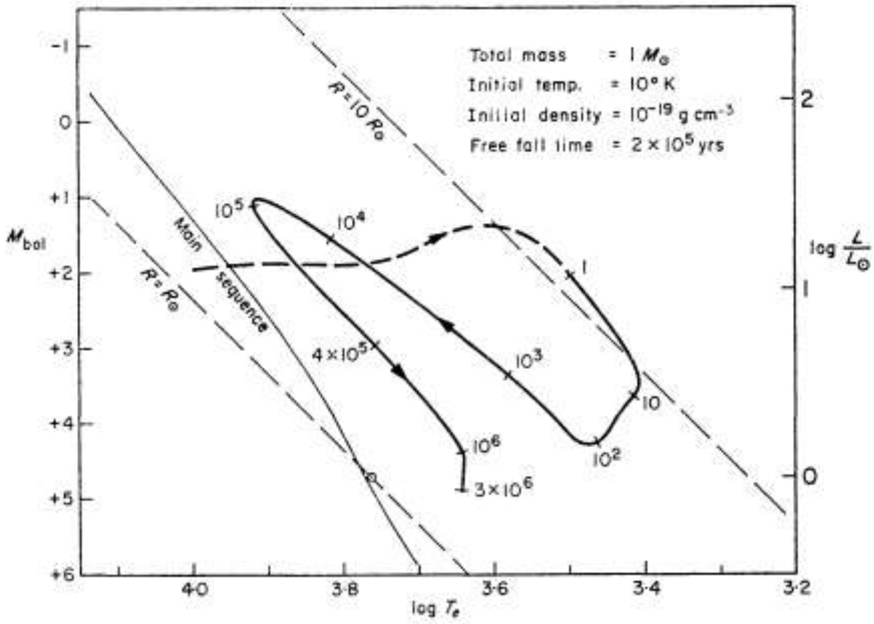


圖 3：此模型下原恆星在赫羅圖上的軌跡。軌跡上的數字代表距星核形成後的時間(單位：年)

5. 輻射冷卻與星核的收縮

當核逐漸膨脹，外圍物質的密度降低至 10^{-8}g/cm^{-3}，星核所發出的光可穿出外圍雲氣，不再被擋住。亮度快速升高至 10 倍的太陽亮度，且在撞擊面因輻射散失能量，使掉落核之物質的比熵開始減少。比熵小的物質密度高，傾向在重力位能較小的內部。因此內外物質開始交換，形成對流區。當核內的溫度、密度都減低，最後使輻射在核內也可傳播。在輻射與對流兩者一起作用下，核內的能量大量散失。赫羅圖上 1~10 年代表此降溫過程。能量散失後，核會劇烈收縮。此收縮過程對應到圖上 10~10^2 年軌跡。

6. 主要吸積過程(main accretion phase)

經過收縮後，表面溫度略為上升、由核內流失的能量減少。所以進入核的物質的比熵增加，使得核停止收縮，且對流區逐漸變小而消失。星核形成後的這 10^2~10^5 年，物質不斷掉到核內，但核的半徑變化不大。隨著核的質量增加，物質撞擊到核表面的重力位能增加，亮度、溫度也伴隨上升，赫羅圖上往左上角移動。這是原恆星累積質量的主要階段，最後約半個太陽質量的物質都進入核內。

前主序星時期：

7. 吸積結束

雖然物質撞擊核表面的速度隨核的質量增加而上升，但在物質持續掉入核內，核外物質的密度持續降低的影響下，星核形成後 10^5 年後撞擊到核表面物質的單位體積動能($\frac{1}{2}\rho v^2$)開始下降。所以在 10^5 年，核的質量約 0.56 太陽質量的時候，表面溫度達到 8000K 的最大值，之後原恆星的表面溫度與亮度開始下降，並且落入物質的比熵又開始減少，對流區重新出現。10^6 年後，幾乎所有物質皆掉入核中，不再提供動能；且溫度降低使核變透明，因此能量向外傳播，如同一般的恆星。此時從表面到半個核半徑都是對流區，整個原恆星進入前主序列(pre-main sequence)。因為外圍雲氣變得稀疏，所以可以直接觀察到中央的

星體，金牛座的 T Tauri star 即屬於此類。

8. 前主序類(pre-main sequence)演化(參考圖 4)

當原恆星主要以對流傳遞能量時，亮度下降，溫度保持不變[註三：這些原恆星的溫度接近 Hayashi limit。Hayashi limit 是日本天文學家 Hayashi 所提出的理論，若星體溫度低於此溫度(約 3000~4000K，與質量有關)則會不穩定。因此在赫羅圖上星星總是出現在 Hayashi limit 之左，所圖上空出來的區域稱 Hayashi forbidden region。(參考資料 8)]，在赫羅圖上以垂直向下的軌跡(即 Hayashi track)演化。當溫度升高，氘(deuterium)會先發生核融合，使電子游離。接著核的中央內部開始以輻射傳播能量，當此能量傳到表面時，溫度升高，亮度增加，所以赫羅圖上的軌跡轉爲水平方向(此以輻射爲傳播能量途徑時所走的水平軌跡稱 Henyey track)。此時重力與熱能對抗，約 10^7 年後，溫度與密度已高到可使氫產生核融合，正式形成恆星，進入主序列 (main-sequense)。

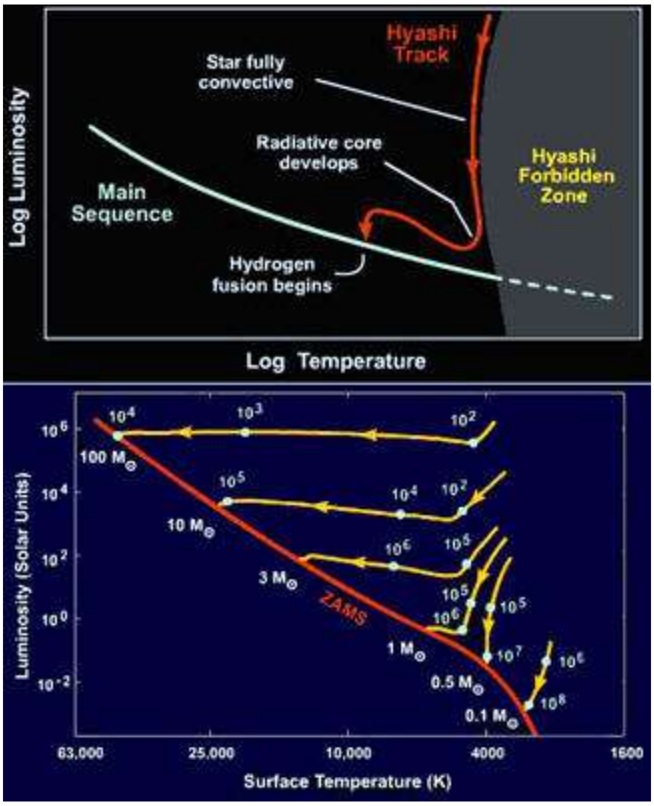


圖 4：前主序星在赫羅圖上的演化軌跡。參考資料 9

此類的模擬在 Larson 之後又有許多人改進[註：如 Stahler 見參考資料 10]結果也複雜許多。但是，只考慮重力的話無法解釋爲何許多年輕星體(young stellar object, 簡稱 YSO)有許多盤、噴流等非各向均勻的現象；且只有重力收縮，那麼一塊巨分子雲應該每年可生成 250 個太陽質量重的恆星，，但觀測到每年只有 3 個太陽質量重的恆星生成[參考資料 11]。這代表我們忽略了恆星形成中重力以外的其他物理機制。

磁場在恆星形成中所扮演的角色：

在觀測上，我們發現形成中的恆星都會有盤(disk)的出現，與盤的垂直方向也常有雙極外流。這是一件有趣的事，因爲分子雲應該是各向均勻的，恆星形成應是對稱的。但「盤」與「外

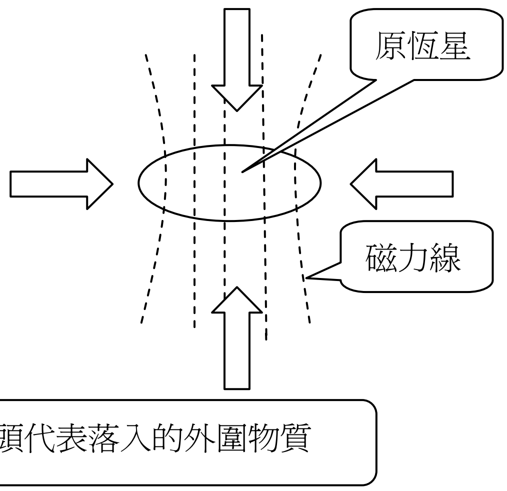
流」，如此違反球對稱的現象爲何會發生呢？

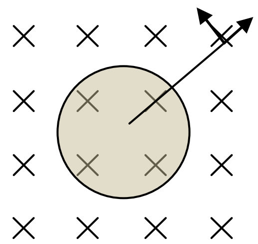
破壞對稱性的是巨分子雲的磁場，其來源可能是來自整個銀河的背景磁場。磁場的出現使垂直、平行磁場方向有不同的現象。

分子雲中雖然只有極少量的離子，但透過離子受羅倫茲力移動時，與中性的原子、分子產生摩擦，因此整個分子雲仍會受電磁場的影響。當分子雲內出現一個密度高的核，周遭物質會受到重力的吸引向核靠近。然而帶電粒子在磁場中會受到 Lorentz force:

$$F = q\vec{V} \times \vec{B}$$

如下圖所示，周遭物質落入核時，圖中上下方的物質運動方向與磁場平行，因此不會受到 Lorentz force 的作用而可以順利進入原恆星。但圖中水平方向的物質受重力吸引時，速度垂直磁場，因此會受磁力影響。我們用簡單的計算來分析磁場的影響。





$$F_r = \text{gravitational force} - \mathrm{q}V_t B = m\frac{dV_r}{dt}$$

$$F_t = qV_r B = m\frac{dV_t}{dt}$$

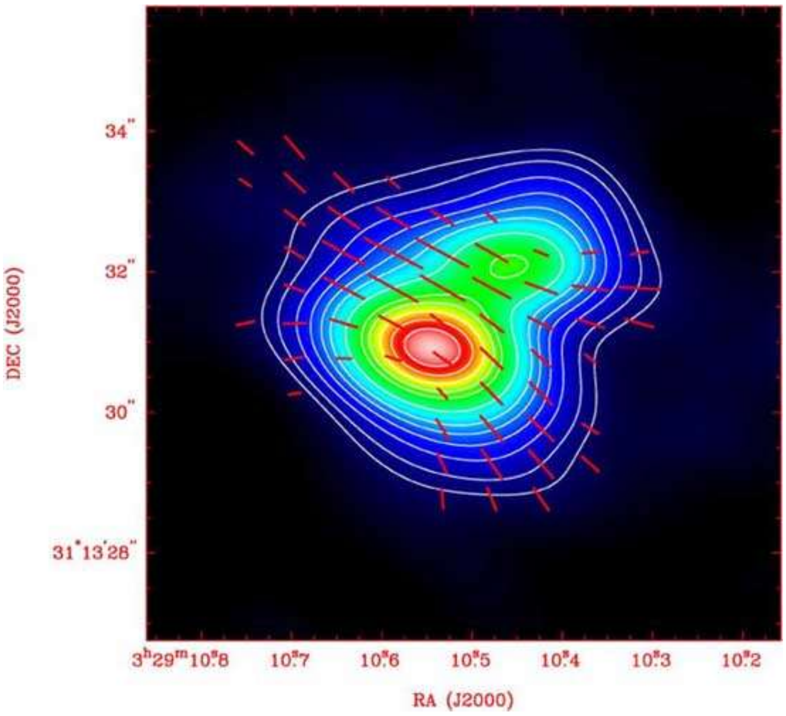
參見上圖以原恆星爲原點所設立的極坐標，假設一開始物質的速度僅有往原恆星的分量(向心,Vr<0)，根據上面的運動方程，會產生負的 Vt，負的 Vt 又會使磁力的方向遠離原恆星。直到磁力與重力達到平衡，Vr=0;Vt=(gravitational force/qB)，最終物質會繞著原恆星旋轉。因此物質不會無止盡的因重力落入原恆星內。這個計算反映了在電磁學中所提到：「電磁場可以帶有角動量」。一開始系統角動量爲 0，但在磁場作用下，最終物質有角動量。而磁場帶有反方向的角動量以維持角動量守恆。

磁場可以帶給物質角動量的重要性在於，一旦物質有角動量，在落入原恆星的過程中，角動量 L=mVt*r 需守恆。因此當 r 越小，Vt 越大。對物質而言，離心力 $mVt^2/r=L^2/mr^3$；重力 $=GMm/r^2$，物質越接近原恆星，離心力增加的速度會比重力快，因此當 r 越小，總有一天重力與離心力會平衡，使物質繞原恆星旋轉，停止落入原恆星。因此磁場可以抵抗重力，使恆星不容易形成。

然而，僅有分子雲內少量的離子、電子可以感受到磁力。中性物質需透過與帶電物質的摩

擦力間接感受磁場的存在。當大量物質受限於磁場，累積在與磁場垂直方向繞原恆星運動時就形成盤的結構。

下圖 5 是利用 SMA，以偏振方向探測雲氣中的磁場，可看到盤的方向與磁場的確是垂直的。參考資料 12



但是當物質密集聚集在盤的時候，粒子密度增加，碰撞次數變多，因此離子與電子容易再結合成中性物質，一旦電性消失，磁力不再作用，物質會再度落入原恆星(僅受角動量守恆的制約)。因此原恆星的質量可以持續增加。

之前提到，角動量守恆會限制物質落入原恆星。要增加原恆星的質量，我們可以把一部份物質的角動量給另一部份物質，角動量變少的物質就可以繼續掉入原恆星；角動量增加的物質就因重力無法提供足夠的向心力而被丟出去。雖然我們目前不清楚角動量是怎麼交換的，但在 YSOs 中觀測到的雙極外流，即是那些帶有多餘角動量的物質噴出的現象。因爲垂直磁場移動會受到磁力的阻擋，這些物質會平行磁場移動，繞著磁力線旋轉，帶走多餘的角動量，構成「雙極外流」。

雙極外流的模型：

雙極外流成份主要是 CO,SO…等分子，所以觀察雙極外流最常使來的媒介就是觀測這些分子的發射譜線。這些譜線波長大約在毫米、次毫米波段，此波段的觀測技術在 90 年代才有大幅度的進展。[註：中研院天文所與美國史密松天文台(Smithsonian Astrophysical Observatory (SAO))合作興建的 SMA(Submillimeter Array)就是屬於此波段的望遠鏡。]在觀測資料輔助下，人們才對雙極外流的現象有進一步的瞭解。

關於物質如何從落入原恆星轉爲向外噴發的雙極外流，必須觀測極靠近原恆星處才能瞭解。但核心地帶在外圍雲氣重重包覆下不易觀測，所以目前仍沒有清楚的答案。因此現今的模型多半不考慮雙極外流如何從原恆星內部驅動的，僅專注在如何解釋噴發後的型態，即現象學

上的瞭解。現在共有四個模型[圖 6]：Circulation model, Turbulent jet model, Jet bow shock model, Wind-driven model。在 Circulation model 中，噴流是外部物質落入原恆星時方向偏折所造成的。其餘的三個模型，雙極噴流的來源均是原恆星所驅動的噴流(jet),風(wind)推動外圍物質，形成雙極外流。目前最熱門、最有潛力的模型就屬於 Jet bow shock model(一般簡稱為 Jet-driven model)與 Wind-driven shell model(一般簡稱為 Wind-driven model)，底下將介紹這兩個模型與各自的優缺點：

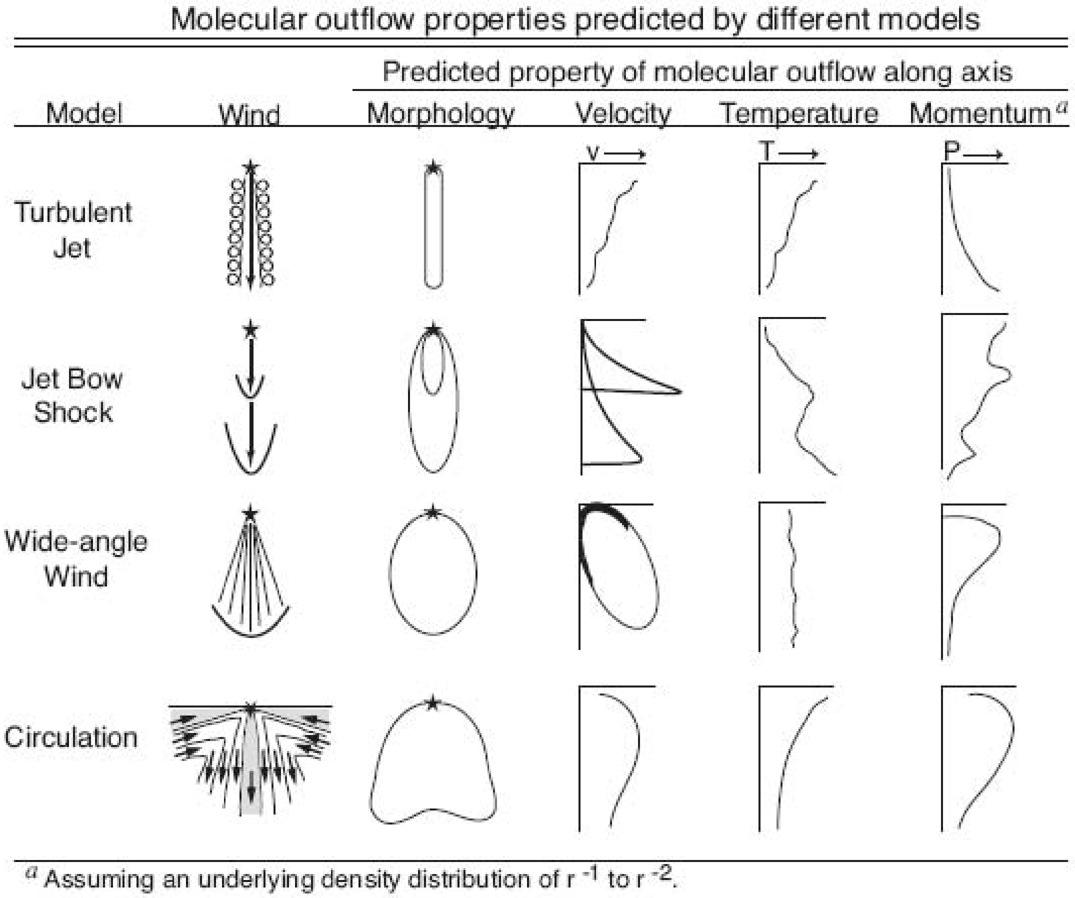


圖 6：四種雙極外流的示意圖與其對應到外流所應具有的特性。[參考資料 13]

噴流驅動模型(Jet-driven model)

Jet-driven model 假設雙極外流是高度集中的噴流(jet)，當撞擊到外面的物質時受擠壓形成 jet shock，外圍物質受擠壓形成 bow shock。兩者之間高壓的氣體於是兩旁散開從 bow shock 處開展形成外殼(shell)，這以噴流為中心的外殼往外推進，行成雙極外流。Bow shock 處因噴流的碰撞釋放大量能量，溫度升高。在 CO 發光圖中所辨認出 bow shock 之處(即高亮度之處)可以看到 H_2 發光。這種 CO 高密度處與 H2 光點的契合，印證此模型的正確。[圖 7]

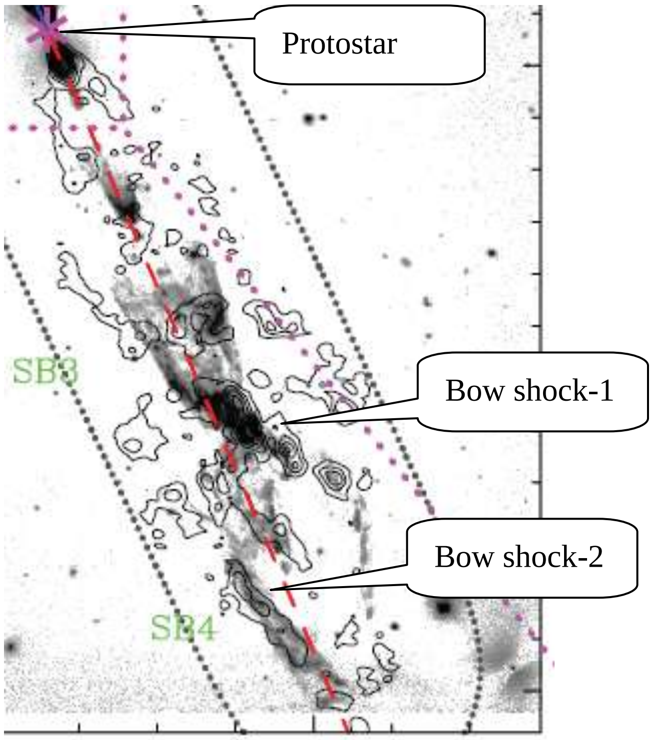
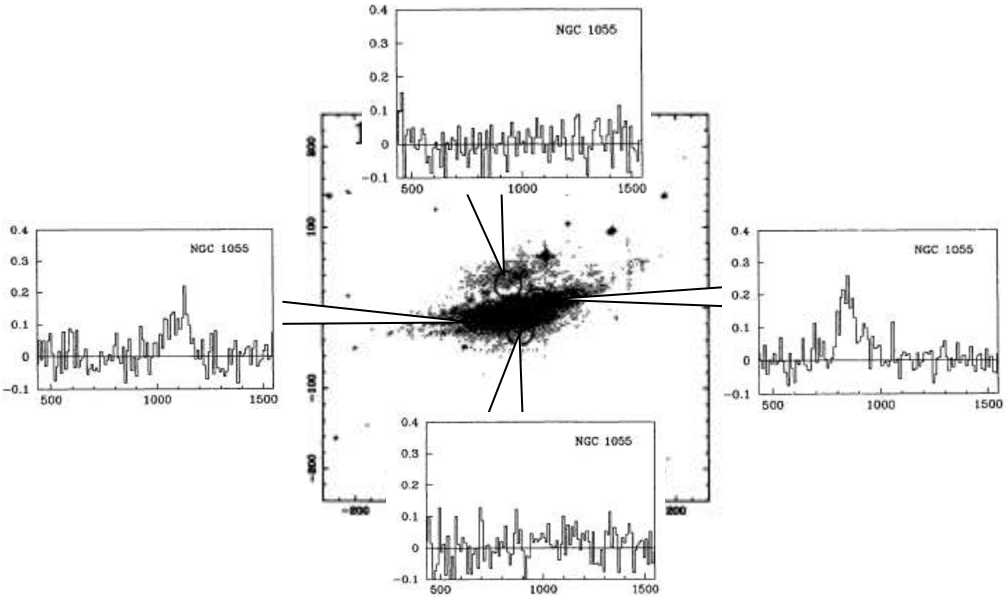


圖 7：此 HH212 的觀測結果，等高線圖是 12CO 的累積亮度；灰階圖代表 H2 放射譜線的亮度。從圖中可見到在 CO 密集之處，也會有明亮的 H2 放射。參考資料 14

[註：CO 分子在 20-100K 即會發射毫米、次毫米波的的光，一般雲氣以 CO 所放射光的波段觀測，越強代表越密度越高。但 H_2 分子需要~2000K 才能發光(可見光)，因此只有高溫處才會有 H_2 的亮光。]噴流不一定會持續發生，如果斷斷續續噴發的話，就會出現數個 bow shock。Bow shock 處有很大的速度分佈，從氣體速度從噴流中的每秒數十公里的高速瞬降至零。所畫出的 PV diagram

[由於觀測到星體是把三維的結構投影到二維的平面上，此平面每一個點的光其實是此方向一連串的位置所發出的共同貢獻的，因此二維的平面圖每個點都有一個頻譜。不同速度的分子經由都卜勒效應，發光頻率不同。所以透過頻譜可瞭解方向上，有分子數量隨速度的分佈。為顯現這樣的資訊 PV diagram (Position-Velocity diagram)就是把此二維平面上的一條線，線上每個點的頻譜以等高線表示。把 PV diagram 以同一位置(P)切開，等高線反應的高度及代表不同頻率(代表速度)的光強度。] 參考資料 15



最大的特點是 bow shock 處在形成一長條狀的速度分佈。這也符合某些 YSOs 的觀測結果。[圖 8]

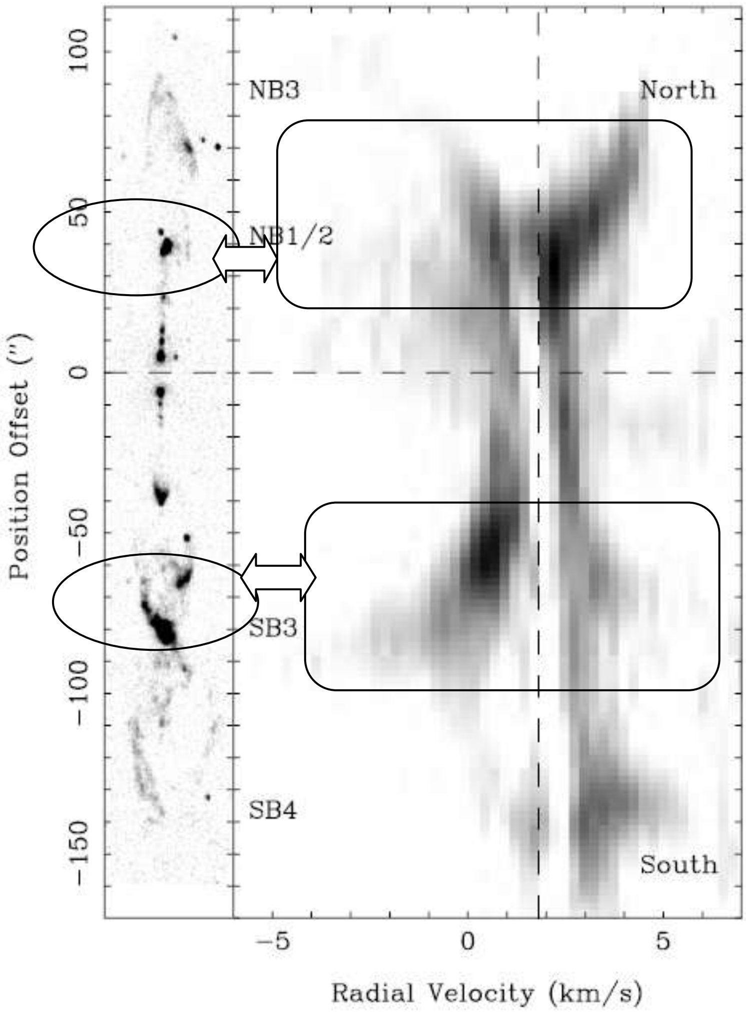


圖 8：左圖爲 HH212 實際噴流的圖；右圖爲沿噴流方向的 PV diagram。可見到在 bow shock 處，PV diagram 均有大幅度的速度分佈，可與圖 6 比較。參考資料 14

然而對於具有大幅度張角外殼的 YSOs，高度集中的噴流難以推動周遭的物質張開至大角度。因此對於此種 YSOs，此模型不論是外殼的型態或 PV diagram 都不適用。(參見 wind-driven model 的附圖)

風驅動模型(Wind-driven model)

Wind-driven model 假設雙極外流是從原恆星所發出張角很大的風(wind)，風在雙極密度最高，往兩旁密度越低。周圍物質直接被風推動形成拋物線狀的外殼，造成雙極外流。此模型下的 PV diagram 也呈現拋物線的形狀。

其示意圖如下：

此模型的優點是很自然的產生拋物狀的外殼與拋物狀的 PV diagram。[圖 9]相對的，它卻不能產生 bow shock 也不能解釋為何有些 YSOs 的 PV diagram 在某些點具有速度的大幅分散。

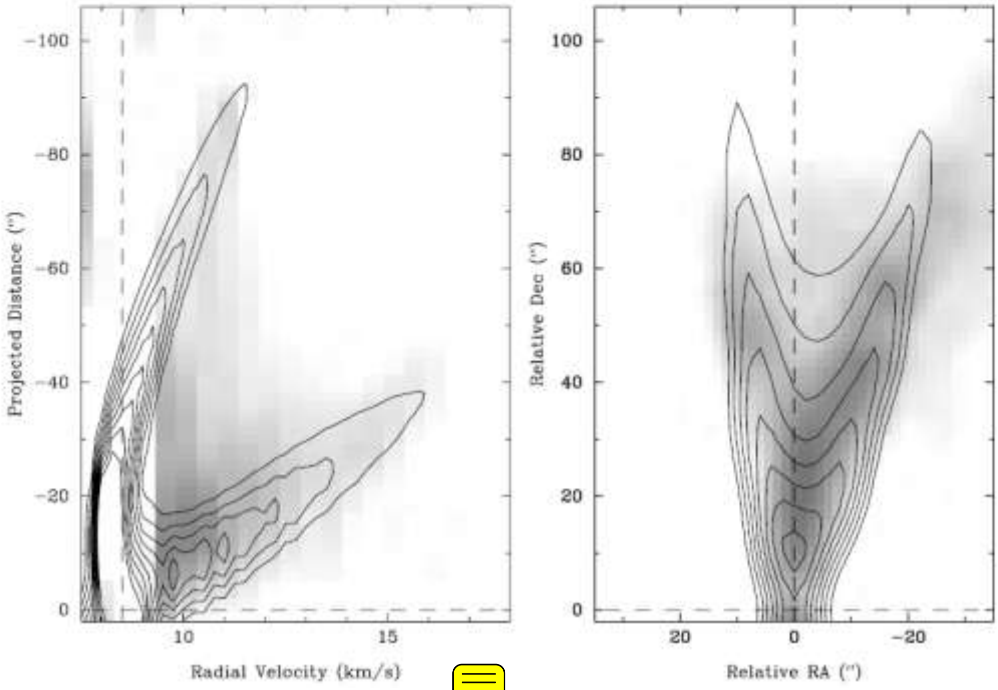


圖 9：這是 VLA05487 的模擬(等高線圖)與觀測(灰階圖)比較：左圖是沿噴流方向的 PV diagram；右圖是 CO 的發射圖，可看見拋物狀的外殼以星體為中央展開。參考資料 14

在兩個模型均有各自的優缺點的情況下，有些天文學家試著提出新式噴流與周遭物質的交互作用方式，或是讓噴流會進動而能產生大角度的外殼；有些人則將 wind 設為中央密度非常高，以產生類似噴流的效果，並將速度隨時間變化，產生 bow shock。也有天文學家綜合噴流與風，以祈能解釋觀測到的現象。更有人提出雙極外流一開始是噴流的形式，後來張角逐漸擴張形成風…關於雙極外流理論會如此眾說紛紜，一方面是不同的星體適用不同的模型，有的則兼具有兩者的特點，所以無法確定何者才是正確的。另一方面，現今觀測的解析度仍不夠精細到作進一步的檢驗。相信在日後完工的 ALMA[註：ALMA 是 The Atacama Large Millimeter/Submillimeter Array 的簡稱，由美國、日本、歐洲、台灣共同建造的電波天文望遠鏡。它位於海拔 5000m，智利北方 Atacama 沙漠，由 64 個直徑 12m 的天線所構成，其解析度可達 0.005 角秒。現今此波段的干涉儀，如中研院所使用的 SMA，只有 8 個天線、每個天線直徑只

有 6m，解析度最佳只有 0.5 角秒。由此可見 ALMA 的威力。]強大解析能力的幫助下，可以釐清我們對雙極外流的種種疑問。

結語：

我們用下面的示意圖總結類太陽恆星的形成過程[圖 10]：

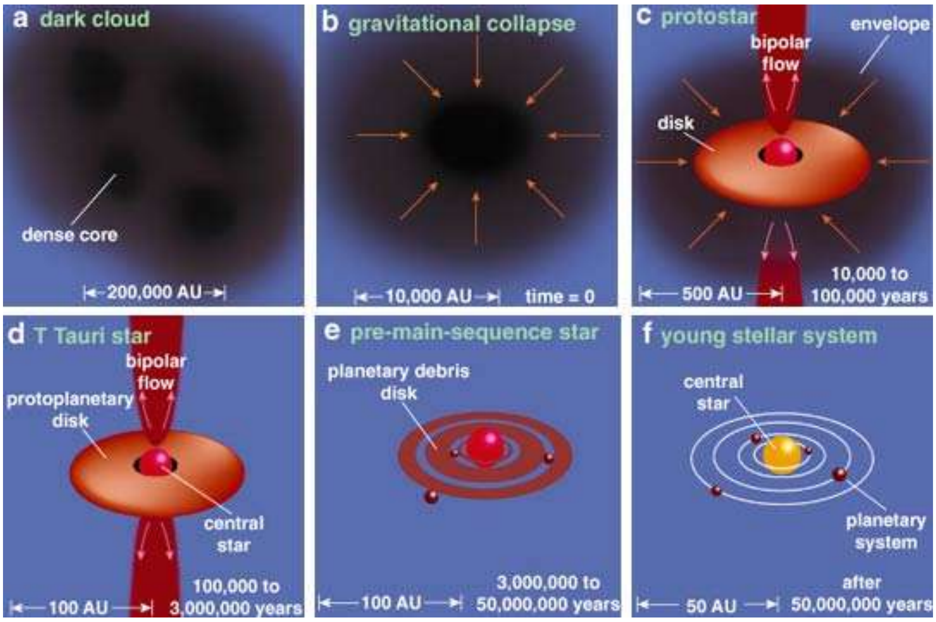


圖 10：類太陽恆星形成過程圖[參考資料 16]

a.在溫度僅有數十度(K)而黑暗不發光的巨分子雲內，有些核密度較高。這些核是恆星形成的起源。不過在亂流、磁場的支撐下，不會立即塌縮。

b.某些核突破亂流、磁場的支撐，在重力的拉扯下開始收縮。

c.約一萬年後，這團雲氣中央出現一顆核心稱原恆星，在接下來的一百萬年，大量物質堆疊至原恆星上。而外圍物質在磁場的抵抗下不容易垂直磁場運動，因此形成一個垂直磁場的盤面；而爲了釋放多餘的角動量，原恆星會沿磁場方向噴出雙極外流。

d.百萬年後，大多數的物質已落入中央的核心，我們稱之爲前主序列星。其表面溫度約 3000~4000K，比起一開始高出許多。由於外圍已沒有物質阻擋，因此可直接觀察到中央的星體。接下來重力與熱能持續對抗，先以對流傳遞能量在赫羅圖上沿 Hayashi track 前進；接著氘被點燃，改以輻射傳遞能量，在赫羅圖上沿 Henyey track 前進。

e.原恆星形成後所遺留下來的盤面，有些物質向外散失，而有些可能凝聚形成行星。約三千萬年後，盤內物質均散失，整個年輕星體剩下中央的前主序列星與周圍的行星。

f.最終氫被點燃，整個星球以核反應供給自身能量，一顆恆星就此誕生。

從一大團、低溫的雲氣，經過盤、雙極外流的過程，物質逐漸形成一顆緊緻的星體，歷經對流、輻射來交換能量，最終引發核反應。整個恆星的形成過程，在重力、磁場⋯種種物理機制的作用下，呈現多變的面貌。雖然現今對類太陽恆星的形成機制已瞭解許多，然而如同其他科學一樣，我們瞭解越多，也發現越多問題。不管是雙極外流如何噴發、雙星的形成、重質量恆星的誕生，都現今熱門的研究題材，相信不久之後會有更精彩的結果出現，讓人體會大自然美妙的安排。

參考資料與延伸閱讀：

恆星形成概述-

1. theory.gsi.de/~**langanke**/vorlesung**6**.pdf
2. Shu, F., Adams, F. and Lizano, S. “Star formation in molecular clouds: observation and theory”, 1987, Ann. Rev. Astron. Astrophys, 25, 23-81

此篇文章回顧了當時整個與恆星生成有關的理論與觀測，內容既深且廣。Sec.7 提綱挈領的把恆星生成分成五個階段，不可不讀。

年輕星體的光譜與分類-

3. Adams, F., Lada, C. and Shu, F. “Spectral evolution of young stellar objects”, 1987. ApJ., 312, 788-806

利用盤與中央星體的疊合，解釋不同光譜形狀的成因。

4. Bachiller, R., “Bipolar outflow from young stars and protostars”, Ann. Rev. Astron. Astrophys, 34, 111-54
5. astro.berkeley.edu/~ay216/08/NOTES/Lecture24-08.pdf

年輕星體在重力下的演化-

6. Larson, B., “Numerical Calculations of the dynamics of a collapsing protostar”, 1969, MNRAS., 145, 271-295

此即本文介紹的模型，雖然許多結果不盡正確，但簡單易懂，適合初學者閱讀。

7. Shu. F., “Self-Similar Collapse of isothermal spheres and star formation”, 1977, ApJ., 214, 488-497
8. Hayashi, C., “Evolution of protostars”, 1969, Ann. Rev. Astron. Astrophys, 4, 171-191

對於如何從前主序列進入主序列，此篇文章有詳盡的描述。

9. http://www.daviddarling.info/encyclopedia/H/Hayashi_track.html
10. Stahler, W., Shu, F. and Taam, R., 1980, ApJ., 241, 637-654

-1980, ApJ., 242, 226-241

-1981, ApJ., 248, 727-737

11. www.mpia.de/homes/dullemon/lectures/starplanet/chap_04_gmc_gravstab.ppt

磁場在恆星形成中所扮演的角色：

12. Girart, Rao, and Marrone, ASIAA

雙極外流的模型

13. Arce, H. G. et al. (2007). Protostars and Planets V, p.245-260
14. Lee, C-F. et al. 2000, ApJ., 542, 925-945
15.
16. Greene, T., “Protostars”, 2001, American Scientist, Vol.89, No.4 (http://www.americanscientist.org/issues/feature/protostars/1)

以科普程度概述恆星形成的過程，適合普羅大眾閱讀。

量子物理的發展和牛頓力學以及相對論不同，它不是由單獨幾個天才型的人物所獨創出來的理論；它沒有太多令人匪夷所思、靈光乍現的意外發現。量子物理是經由許多物理學家在一片黑暗中漫自摸索，經歷許多的錯誤猜想、不成熟的理論，最後才逐漸形成一個看似合理的理論雛形。然而在這理論背後，又隱藏了許多歷史上著名的爭辯，那些看似科學卻又富含哲學的思想，直到到現在仍然讓許多人摸不著頭緒。

然而現在我們所見到的量子物理，都是經過數十年來眾多物理學家整理之後，所呈現出來最美麗的結果。許多理論的架構已經不是當初原創者所發明的模樣。教科書爲了邏輯順序的需要，許多最初的想法都被斷章取義，取而代之的是一套完整嚴密的推理過程。而這篇文章主要就是想探索量子理論的最原始模樣，重新檢視量子力學史上具有重要地位的文獻。這些論文中，不時充滿著矛盾與錯誤的觀念，然而這些卻都是在建立理論過程中不可或缺的一環。

第一篇論文是普朗克(Max Karl Ernst Ludwig Planck)的黑體輻射能量分布理論。普朗克被後世尊稱爲量子物理之父，就是因爲在這篇文章中他首次提出粒子能量量子化的觀念。當時黑體輻射一直是物理學界爭論已久的議題。偉恩(W. Wein)與瑞利(B. Rayleigh)都分別提出一道黑體輻射的頻譜強度公式，他們分別是 $\rho = \alpha f^{3} e^{-\beta \nu T}$ 與 $\rho = \dfrac{8\pi f^{2} kT}{c^{3}}$ 。然而這兩道公式卻分別只適用於長波長與短波長的區域，而且這兩道公式的推導一直頗受爭議。

普朗克是研究熱力學出生的，他在大學畢業不久之後就開始研究黑體輻射的問題。1900年十月，他首先在德國柏林物理學會向在場的物理學家公佈他的發現：他利用一點數學技巧，巧妙的湊出一個可以完美符合黑體輻射頻譜強度的公式。同年的十二月，普朗克又再度站在在德國柏林物理學會的講台上。這次他發表的就是黑體輻射公式的推導。普朗克先從一個系統的熱力學性質出發，他說，像黑體這樣的系統可以看做是很多簡諧振子的集合，不同的簡諧振子頻率可能不同，所以我們先只看頻率是 f 的振子，假設這樣的振子一共有 N 個，那麼如果這 N 個振子在做均勻的簡諧振盪，那麼每個振子的能量都會相同，而且此時系統的熵爲 0。但如果這些振子在震盪過程中有一些微擾，那麼每顆振子的能量就可能不同了，此時系統因亂度增加，所以熵大於零。假設每顆振子的平均能量和平均熵分別爲 U 和 S ，則系統總能量和熵的總和就分別是 $U_N = NU$ 以及 $S_N = NS$ 。接下來，由波茲曼關係式得知， $S_N = k\ln W + const$ ，其中 W 是這 N 個振子擁有總能量 U_N 的可能數。

接下來的工作就是把求出 W 。普朗克說：「爲了找出 U_N 分布於這 N 個粒子的各種可能排列方式，我們必須假設 U_N 不是連續的數值，也就他不能被無窮分割。U_N 只能是某種基本單位的整數倍，我們稱這個基本單位爲『能量子(Energieelement)』 ε 。」Energieelement 是德文，顧名思義，就是能量的元素。由這個假設可知系統的總能量爲 $U_N = P\varepsilon$ ，其中 P 是一個很大的正整數。把這 P 個基本能量分布於 N 個粒子中的排法數是 $Z = \dfrac{(N+P-1)!}{(N-1)!P!}$ 。將 Z 取對數之後再取適當常數可得到

$$S_N = k\ln Z = k\left[(N+P)\log(N+P) - N\log N - P\log P\right]$$

再由 $U_N = NU$ 與 $U_N = P\varepsilon$ 兩式，將上式提出 N 後可得

$$S_N \equiv NS = kN\ln\left[(1+\frac{U}{\varepsilon})\log(1+\frac{U}{\varepsilon}) - \frac{U}{\varepsilon}\log\frac{U}{\varepsilon}\right] 。 \tag{1}$$

以上是普朗克論文的第一部份，裡面包含了他最令人稱著的量子假設，然而我們要注意，普朗克在文章中從頭到尾都沒有提示出他是如何會有這樣的想法，普朗克事後堅稱他自己也不明白能量爲何會量子化，量子化的假設只是因爲最後可以得到正確的輻射公式。

接著普朗克對塞森(M. Thiessen)形式的偉恩位移定律$E_\lambda \cdot d\lambda = T^5\psi(\lambda T)\cdot d\lambda$做變數變換，把$\lambda$全部換成$c/f$，所以$E_\lambda$會變成$f$的函數。爲了避免混淆，我們將$E_\lambda$改寫成$\rho$，而$d\lambda = cdf/f^2$，所以賽森關係式可改寫成$\rho = T^5\dfrac{c}{f^2}\psi(\dfrac{cT}{f})$。可是克希荷夫-勞克修斯定律指出，黑體輻射的功率和c^2成反比，所以輻射能量密度又可以改寫成$\rho = \dfrac{T^5}{f^2c^3}\zeta_1(\dfrac{T}{f})$，其中$\zeta_1$是一個與$c$無關的普世函數(universal function)。如果再令$\zeta_2(x) = x^5\zeta_1(x)$，上式還可以再化簡成$\rho = \dfrac{f^3}{c^3}\zeta_2(\dfrac{T}{f})$。最後因爲能量是由電磁波的形式放射，所以利用電磁波在空腔中的簡併態公式$\rho = \dfrac{8\pi f^2}{c^3}U$和上式對照，可以得到$U = \dfrac{f}{8\pi}\zeta_2(\dfrac{T}{f})$，或者可再簡便一些，將上式取$\zeta_2(\dfrac{T}{f})$的反函數，可以得到$\dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{f}\zeta_3(\dfrac{U}{f})$，其中$\zeta_3$也是一個普世函數。最後由熱力學基本公式，$\dfrac{1}{T} = \left(\dfrac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} = \dfrac{1}{f}\zeta_3(\dfrac{U}{f})$，對 U 積分後可得

$$S = \zeta_4(\frac{U}{f}) \tag{2}$$

ζ_4仍舊是普世函數。

上面不斷的利用變數變換以及以不斷的引進新的普世函數，目的只是要化簡數學運算，讓幾個重要的變數，如f、T以及U之間的關係能夠更加清楚的表示。到這裡，普朗克的黑體輻射公式已經呼之欲出了！觀察(1)(2)式，不難看出ε正比於f，所以令$\varepsilon = hf$，而(1)式就變成

$$S_N \equiv NS = kN\ln\left[(1+\frac{U}{\varepsilon})\log(1+\frac{U}{\varepsilon}) - \frac{U}{\varepsilon}\log\frac{U}{\varepsilon}\right]$$

再利用一次熱力學基本公式$\dfrac{1}{T} = \left(\dfrac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N}$，對上式微分可得

$$\frac{1}{T} = \frac{k}{hf}\log\left(1+\frac{hf}{U}\right), \quad 即U = \frac{hf}{e^{hf/kT}-1}$$

到這裡我們看到普朗克已經成功的推出正確的簡諧振子平均能量。不但如此，系統能量密度即爲

$$\rho = \frac{8\pi f^2}{c^3}U = \frac{8\pi f^2}{c^3}\frac{hf}{e^{hf/kT}-1} 。\tag{3}$$

或改回以波長爲變數

$$E_\lambda = \frac{8\pi ch}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/k\lambda T}-1} \tag{4}$$

這就是普朗克著名的黑體輻射密度公式，它不但在長短波近似之下可以推導出偉恩和瑞利的結果，更重要的是它可以完全符合實驗所測量出來的數據圖形。

論文第三部份是在找出普朗克常數 h 以及波茲曼常數 k 的精確數值。由克爾伯(F. Kurlbaum)1898 年的實驗數據，每單位面積時間裡黑體輻射能量在溫度 $T = 373K$ 與 $T = 273K$ 的差值爲

$$R_{373} - R_{273} = 7.31\times10^5\left(\frac{ergs}{cm^2 s}\right)$$

而 $R = \sigma T^4$ ，所以 $\sigma = \dfrac{7.31\times10^5}{373^4 - 273^4}\left(\dfrac{ergs}{cm^2 sK^4}\right)$。而由(3)式，將 T 代 $1K$ ，並把所有頻率所貢獻的輻射都積分起來：

$$u = \int_0^\infty \rho\, df = \int_0^\infty \frac{8\pi f^2}{c^3}\frac{hf}{e^{hf/k}-1}df = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty f^3\left(e^{-hf/k}+e^{-2hf/k}+e^{-3hf/k}+\cdots\right)df$$

$$= \frac{8\pi h}{c^3}\left(\frac{k}{h}\right)^4\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\cdots\right) \approx \frac{8\pi k^4}{c^3h^3}\cdot 1.0823$$

又 R 與 u 的關係爲 $R = \dfrac{1}{4}cu$ ，故 $u = \dfrac{4}{c}\sigma\cdot 1^4 = \dfrac{4}{3\times10^8}\dfrac{7.31\times10^5}{373^4-273^4} = \dfrac{8\pi k^4}{c^3h^3}\cdot 1.0823$。由上式可以得出 $\dfrac{k^4}{h^3} = 1.1682\times10^{15}$ 。

最後由偉恩位移定律，$\lambda_m T = 0.294(cmK)$，而賽森形式的偉恩位移定律又知道這個常數就是(3)式對 λ 微分：

$\dfrac{dE_\lambda}{d\lambda} = 0 \Rightarrow \left(1 - ch/5k\lambda_m T\right)\cdot e^{ch/k\lambda_m T} = 1$，得 $\lambda_m T = \dfrac{ch}{4.9651k}$ 。所以 $\dfrac{h}{k} = 4.866\times10^{-11}$ 。

既然知道 $\dfrac{k^4}{h^3} = 1.1682\times10^{15}$ ，$\dfrac{h}{k} = 4.866\times10^{-11}$ ，馬上就可以推出

$$h = 6.55\times10^{-27}(erg\cdot s)\text{以及}\ k = 1.346\times10^{-16}\left(\frac{erg}{K}\right)$$

至此，普朗克也成功的推測出兩個重要的物理常數， h 和 k 的數值。

這篇論文後世的評論有褒有貶，大部分人都認爲最後的公式幾乎是拼湊出來的。但是我覺得雖然公式的推導不是那麼的簡潔一貫，然而普朗克提出了最重要的量子觀念以及熵的數學表示式，如果沒有這兩點，光從幾道熱力學公式也沒辦法推出正確的黑體輻射能量密度關係。即令如此，普朗克也有觀念錯誤的地方，例如普朗克假設黑體輻射出的電磁波是因爲組成黑體的原子做簡諧震盪所激發出來的，不同頻率的簡諧振子貢獻出不同頻率的電磁波，而這個頻率可以從 0 到無窮大。然而，從德拜的晶體比熱理論，我們知道任何週期性晶體都有震盪最大截止頻率。想像一個由許多相同彈簧串聯起來的一維粒子系統，考慮系統的本徵震盪模式，最大的震盪頻率發生於奇數號粒子不動、偶數號粒子震盪(或相反)，這時候震盪中的粒子感受到的等效彈力常數是一個彈簧的兩倍，所以頻率會最大，除此之外的震盪模式頻率都會比較小。但是

普朗克的理論卻認爲每個簡諧振子之間沒有交互作用、而且彈力常數可以從 0 到無窮大，這是明顯有問題的。更明確的說，普朗克所計算到的能量和熵其實並不是組成黑體粒子所擁有的，而是空腔中電磁波的能量和熵的特性，電磁波本身不會有最大截止頻率，每種頻率的電磁波都有可能出現。雖然文章中有一點小瑕疵，但普朗克這篇論文在量子物理史上的貢獻與地位，仍然是無法動搖的。他帶給人們一個全新的觀念，一個普朗克本身也無法相信的觀念。即使在普朗克發表論文數十年之後，他仍然不斷思考要如何不用量子論來解釋量子現象。量子論的發展一路上崎嶇坎坷，連他的創始人都不想承認它的誕生，但是他卻仍然屹立不搖，而成爲現代物理學中解釋原子尺度現象的最佳模型，似乎冥冥中有天意？

愛因斯坦大約在 1905 看到普朗克的黑體輻射論文，他對這種量子的觀念非常感興趣。於是他在往後的幾年也發表了幾篇探討黑體輻射問題的論文。愛因斯坦的觀點和普朗克不同，愛因斯坦很喜歡用動力學的觀點來解釋輻射問題。他在 1905 年一篇發表在 Annalen der Phsik 雜誌的文章提到，空腔中因爲有原子、有電子，而電子就像附著在原子上的一個震盪體，和原子一樣具有比熱、可以傳導能量，而電磁波就是藉由電子和其他原子之間的交互作用來傳遞。所以在愛因斯坦的想法裡，黑體在發出輻射時，其實空腔中是有很多原子電子不停的在快速運動。如果電子和原子還沒有傳遞能量時，每一個電子都在原子附近做簡諧振盪，所以每一顆電子的平均能量是$U = kT$。現在電子和原子開始傳遞電磁波，有些電子吸收電磁波、有些放出電磁波，吸收電磁波的電子能量提高、放出電磁波的電子能量降低，然而，我們所看到的黑體輻射是一個穩定平衡的系統，所以吸收和放射兩個過程最終會達到動態平衡，所有電子的平均能量還是$U = kT$。而從普朗克的黑體輻射公式$\rho = \frac{8\pi f^2}{c^3}U$可知，如果直接把$U = kT$帶入，就會發現黑體總輻射能量$u = \int_0^\infty \rho\, df$發散，所以上面的模型必然有問題。但是如果在普朗克的公式$\rho = \frac{8\pi f^2}{c^3}\frac{hf}{e^{hf/kT}-1}$中令$T/f$很大，則該公式會近似於$\rho = \frac{8\pi f^2}{c^3}kT$，也就是和直接把$U = kT$帶入的結果相同。所以愛因斯坦明確的說，當溫度很高，他的電子原子模型是可以適用的；然而當溫度很低的時候，就必須做一些額外的假設。

愛因斯坦的結論從現在的觀點看來非常直觀，但是在 1905 的當時，他是第一個首先明確指出普朗克公式的高溫極限其實就是瑞利公式的人。在他論文的後半部分會接著推導出能量量子化的另一種觀點，並且也指出普朗克公式的低溫極限—偉恩公式。

愛因斯坦首先因用偉恩的方法，探討黑體輻射系統的熵。首先黑體輻射系統的特性一定和他的輻射能量密度ρ有關，所以系統的熵應該就是把所有頻率的ρ所貢獻的熵加起來，也就是

$$S = V\int_0^\infty \phi(\rho, f)\,df \tag{5}$$

其中ϕ是一個未知的雙變數函數。現在的工作就是讓S在$\delta\int_0^\infty \rho\, df = \delta\left(\frac{4}{c}\sigma T^4\right) = 0$的約束條件下求到最大值，進而找出$\phi$和$\rho$的關係。利用變分法中的拉格朗日未定係數法，可以將有約束的問題變成無約束問題：

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial\phi}{\partial\rho}-\lambda\right)\delta\rho df=0$$

注意積分中 f 是固定的，所以$\frac{\partial\phi}{\partial f}=0$。

由上式我們可以得知，一個黑體輻射系統，$\frac{\partial\phi}{\partial\rho}$與頻率無關。另一方面，如果我們把體積固定，讓溫度T升高一點點，則由(5)式可得$dS=V\int_{f=0}^{f=\infty}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}d\rho df$，而我們已經知道$\frac{\partial\phi}{\partial\rho}$與頻率無關，且系統總能量$U=V\rho df$，所以$dS=\frac{\partial\phi}{\partial\rho}dU$。而從熱力學基本公式我們又知道$dS=\frac{1}{T}dU$，因此

$$\frac{\partial\phi}{\partial\rho}=\frac{1}{T} \tag{6}$$

最後，當溫度很低的時候，普朗克公式的極限是偉恩公式$\rho=\frac{8\pi hf^3}{c^3}e^{-hf/kT}$，即

$$\frac{1}{T}=-\frac{k}{hf}\ln\left(\frac{c^3}{8\pi hf^3}\right) \tag{7}$$

對照(6)(7)式並積分發現$\phi=-\frac{k\rho}{hf}\left[\ln\left(\frac{c^3\rho}{8\pi hf^3}\right)-1\right]$。利用$U=V\rho df$，可以得到頻率在 f 及 f+df 之間電磁波的熵是$S=V\phi(\rho,f)df=-\frac{kU}{hf}\left[\ln\left(\frac{c^3U}{8\pi Vhf^3df}\right)-1\right]$，或

$$S-S_0=-\frac{kU}{hf}\log\left(\frac{V}{V_0}\right) \tag{8}$$

其中V_0和S_0是一個參考體積及其熵。從另一個角度來看，S可以看成空腔中 N 個粒子平均分布於V的熵，而S_0是N個粒子恰巧分布在V中一個小體積V_0內時的熵，而系統處於後者的機率為$W=\left(\frac{V}{V_0}\right)^N$，所以由波茲曼關係式，

$$S-S_0=kN\log\left(\frac{V}{V_0}\right) \tag{9}$$

比較(8)(9)兩式不難發現頻率f的電磁波能量為$U=N\times hf$，於是愛因斯坦成功的從動力學的方式重新得到了系統能量量子化的結論。

除了這篇論文之外，愛因斯坦在 1916 年又發表一篇論文，這次他仍然使用動力學的方式探討黑體輻射問題。他一樣假設黑體空腔中充滿了許多原子，與上次不同的是，他現在多了一個原子能階的假設，他認爲每一個原子都有許多容許的能階，每一個能階都具有特定的能量，也就是能階 1、2、3…分別具有能量ε_1、ε_2、$\varepsilon_3 \dots$。而處在第n個能階的原子數應滿足波茲曼最可幾分布$W_n = P_n e^{-\varepsilon_n/kT}$，其中$P_n$是第個能態的簡併數。愛因斯坦認爲，黑體輻射的電磁波應該就是原子在這些無窮多種能階之間躍遷時所放射出來的能量。每一種特定頻率f的電磁波都是原子在特定兩個能階中躍遷所放射的。假設我們只考慮原子在第n個能階與第m個能階之間的躍遷行爲：因爲黑體輻射系統處於熱力平衡狀態，每一個能階的原子數目統計起來也是在平衡狀態，也就是我們不必考慮n、m能階與其他能階之間的躍遷運動，他們的行爲平均起來不會影響處在n、m能階的原子數目，因此我們可以單獨考慮n、m之間的躍遷行爲即可。

愛因斯坦假設躍遷行爲有兩種，一種是自發性發射，即原子會自動從高能階m降到低能階n而放出一能量爲$\varepsilon_m - \varepsilon_n$的電磁波；而每單位時間自發性發射的原子數應該和正比於第m個能階的原子數，即發射速率爲$A_m^n N_m$。另一種躍遷行爲是吸收，即原子會吸收一個能量爲$\varepsilon_m - \varepsilon_n$的電磁波而從第$n$個能階提升到第$m$個能階、或從第$m$個能階降低到第$n$個能階。因爲原子是因爲吸收空腔中的電磁波而發生吸收行爲，所以吸收速率不但正比於能階粒子數，還會正比於電磁波在該頻率的能量密度ρ。亦即n到m的速率爲$B_n^m N_n \rho$；同理m到n的速率爲$B_m^n N_m \rho$。最後由系統處在平衡態的條件可知，

$$A_m^n N_m + B_m^n N_m \rho = B_n^m N_n \rho$$

再由波茲曼分布$W_n = P_n e^{-\varepsilon_n/kT}$知道$\dfrac{N_n}{N_m} = \dfrac{P_n}{P_m} e^{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)/kT}$，所以

$$\rho = \frac{A_m^n P_m}{B_n^m P_n e^{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)/kT} - B_m^n P_m}$$

但是直觀上我們可以猜測，當溫度T不斷的增加，電磁波的能量密度也會無限制的增加，以就是$T \to \infty$時上式分母必須趨近於 0，故$B_n^m P_n = B_m^n P_m$。最後愛因斯坦正確的推出了普朗克公式

$$\rho = \frac{\alpha_m^n}{e^{(\varepsilon_m - \varepsilon_n)/kT} - 1}$$

其中$\alpha_m^n = \dfrac{A_m^n P_m}{B_n^m P_n}$。實驗上$\rho$和$T$的關係和材料無關，所以$\alpha_m^n = \dfrac{A_m^n P_m}{B_n^m P_n}$是一個常數，亦即無論對於什麼樣的材料，即使不清楚自發性發射和吸收行爲的詳細機制，我們仍然可以判定$A_m^n P_m$、$B_n^m P_n$這兩個與機制有關的係數相除一定會是個常數。

將上式與偉恩公式比較又可以得到$\varepsilon_m - \varepsilon_n = hf$，於是愛因斯坦非常自豪的在論文中說：「我由幾個簡單的假設就可以輕易的由動力學觀念推導出普朗克的黑體輻射公式，而且這些假設都很直觀，並不是特別爲最後結果而設計的。」

然而，愛因斯坦的論文在當時備受質疑，因爲他從來不討論黑體中電磁波在傳遞時的詳細運作機制，而是純粹利用動力學系統平衡的觀念就導出許多重要的結論。愛因斯坦第一篇論文發表後，普朗克、愛因斯坦本人以及其他物理學家曾齊聚一堂討論愛因斯坦的論文，在這場討論會中普朗克不斷的質疑愛因斯坦的推論過程，普朗克說，愛因斯坦假設空腔中電磁波在原子和電子之間不斷的傳遞，但是對於傳遞的機制卻全然不知，於是避而不談。普朗克說他雖然也假設電磁波是由組成黑體的原子震盪而放出的，但電磁波與器壁的交互作用能量很小，至少利用古典電磁理論估計，電磁波對器壁施加的光壓數量級非常小，所以可以忽略電磁波回過頭來與黑體原子交互作用的過程。普朗克又說，使用古典動力學的前提是能量可以連續傳遞，現在一旦能量被量子化，整個動力學理論就要重新改寫，就像我們以前曾經把電流當作連續流體看待，後來一旦發現電荷有基本單位，有關電流的運動方程式都要重新推導。現在發現能量有基本單位，所以所有動力學理論就應該做修正，而不能隨便的引用動力學的結論。

隨著時間的流逝，那場辯論會的景象在人們心目中逐漸淡去。但是量子理論的發展仍然潛伏暗藏在世界上每個角落的物理學家身上。繼愛因斯坦之後，波爾(N. Bohr)和(Arnold Sommerfeld)等人紛紛提出許多量子世界的本質，波爾在原子能接量子化上著墨最多。這部份教科書上都有提過，所以我把這部分略過。最後我想提一下有關德布羅依(Louis de Broglie)和薛丁格(Schrödinger)的論文。

經過波爾等人的努力，量子現象在 1920 年代已經是每個物理學家都具備的觀念了，只是物理學家還找不出一套完整的力學體系來描述這樣的現象。直到德布羅依、克拉瑪、海森堡以及薛丁格等人相繼出現後，量子力學的架構才逐漸被建立起來。首先來看德布羅依發表於 1924 年的一篇論文。這篇論文的目的是要建立物質波的觀念，德布羅依假設一個質點靜止質量是m_0，以速度v向$+x$方向運動，則對質點本身的座標系(以下稱爲靜止座標系)而言，可以賦予它一個頻率爲$f_0 = \dfrac{m_0 c^2}{h}$的「內在波」。對於地面觀察者而言，由相對論知質點的能量變成

$\dfrac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$，所以如果我們一樣在地面座標系中賦予質點一個波，他的頻率應該是

$f = \dfrac{m_0 c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}$，因爲在地面座標系中質點是在動的，所以不妨再令這個波具有一個相速度，而且會隨著質點向右移動，所以稱此波爲「行進波」。但是如果地面觀察者去看質點在靜止座標系被賦予的「內在波」時，因爲地面觀察者看質點的時間會延遲，所以內在波頻率變成

$f_1 = \dfrac{m_0 c^2}{h}\sqrt{1-\beta^2}$。德布羅依指出，$f$和$f_1$兩者大小完全不同，但是如果我們令行進波的相速

度爲$V_\phi=\dfrac{c^2}{v}$，則這兩個波的項角差不會隨時間而改變，因爲一開始靜止座標系與地面座標系原點重合，而經過時間 t 後，內在波的相位爲$2\pi f_1 x/v$，而行進波的相位爲$2\pi f\left(t-\dfrac{vx}{c^2}\right)$，而將 f 與 f1 帶入就可以發現這兩個相位完全相等。所以爲了不產生矛盾，我們在賦予一個波給質點時，必須令其相速度爲$V_\phi=\dfrac{c^2}{v}$，如此不論在哪個座標系觀察到的波其相角都是一樣的。也就是我們賦予一個質點的波必須長成

$$\sin 2\pi f\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)=\sin 2\pi\frac{E}{h}\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)=\sin\frac{2\pi}{h}\left(Et-E\frac{vx}{c^2}\right)=\sin\frac{2\pi}{h}(Et-px)$$

的形式。然而一旦波被設定成這樣，它的群速度就是

$$V_g=\frac{dE}{dp}=\frac{1}{2}\frac{2pc^2}{\sqrt{(pc)^2+(mc^2)^2}}=\frac{pc^2}{E}=v$$

即質點的運動速度。

~~直~~得注意的是，德布羅依在建立物質波的概念時就已經有考慮相對論效應，並非教科書所說的直接把$p=\dfrac{h}{\lambda}$和$E=hf$移項後就束手不管了。德布羅依更成功的地方在於，他利用物質波理論，證明了古典力學中最小作用原理等價於物質波所遵循的費瑪定理：

$$\begin{aligned}0&=\delta\int fdt-f_0 d\tau=\delta\int\frac{mc^2}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-\sqrt{1-\beta^2}\right)dt\\&=\delta\int\frac{m\beta^2c^2}{h\sqrt{1-\beta^2}}dt=\delta\int\frac{m\beta c}{h\sqrt{1-\beta^2}}ds=\delta\int\frac{fds}{V_\phi}=\delta\int\frac{ds}{\lambda}=\delta\int d\Phi\end{aligned}$$

其中Φ是物質波的相角。上是左邊第一個等號是最小作用原理，而等最後一個等號是費瑪定理。除此之外，德布羅依又利用波動方法順利解釋電子的繞射以及干涉行爲。在論文的最後，德布羅依也利用物質波的概念和古典統計力學中的正則系綜結合，又再次的導出普朗克的黑體輻射公式。直到如此，眾人才發覺德布羅依這篇論文是如此的驚爲天人！物理學家不但追求真理，還會追求物理定律的形式美，而德布羅依如此精簡的波動假設，正滿足了物理學家的胃口，於是眾人開始相信，物質其實也具有波動的一面…

最後~~揲們~~來看一篇薛丁格的論文，後人所說的「薛丁格方程式」就是在這篇論文中誕生。這篇論文所要解的問題是氫原子模型，薛丁格的作法是這樣子的：在古典力學中，這樣的系統可以利用哈密頓—雅可畢方程式(Hamilton—Jacobi Equation)來解，即

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)=E \tag{10}$$

其中S是系統的作用量。S通常可以寫成幾個不同小作用量的和，薛丁格猜測每個小作用量的和可以寫成$S=\hbar\ln\psi$的形式，所以許多小作用量的和相當於許多ψ的乘積。將$S=K\ln\psi$帶入

(10)式，並且令電子的位能為$V=-\frac{e^2}{r}$，可得

$$L=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2-\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)=0$$

再利用變分原理$\delta\iiint Ldxdydz=0$得到

$$\oint\delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}\hat{n}\cdot d\vec{S}-\iiint\left[\nabla^2\psi+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)\right]\delta\psi=0$$

於是我們得到薛丁格方程式

$$\nabla^2\psi+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E+\frac{e^2}{r}\right)=0 \tag{11}$$

以及其邊界條件

$$\oint\delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}\hat{n}\cdot d\vec{S}=0$$

接下來的工作就只是把ψ球出來而已，這在一般量子物理或量子力學課中都有討論，所以在此不再贅述。我們要注意的是，在薛丁格的眼中，薛丁格方程式只是個再普通不過的解題手法，他的論文中他只是先猜測一種解的形式，就好比在解偏微分方程式的時候，如果邊界條件是勻稱的(homogeneous)，就可以猜此方程式具有分離變數的解。然而經過幾次代換之後，薛丁格方程式(11)就出現了。在一般教科書中，通常會說薛丁格第一次是從自由粒子的特性而引導出(11)式，然而這種說法並不是完全正確，歷史上薛丁格的確有試著從自由粒子推導(11)式的記載，但那已經是在這篇論文發表之後的事情了，薛丁格方程式的誕生應該還是要歸諸於本篇論文。至於從自由粒子推導一事，是因為薛丁格發表這篇論文之後，經過德布羅依的啓發，才開始想像能否將(11)式推廣到其他場合。最後也如他所願成功的將德布羅依的物質波規範在薛丁格方程式之下。

量子物理的發展至此已經達到一個前所未有的輝煌時代，後來薛丁格又證明了他的波動力學和海森堡的矩陣力學在數學上的等價性，可以說是為量子理論樹立了一座至高無上的寶塔，量子力學的架構也終於完美地被建立起來，人類又可以輕而易舉的解釋自然界萬事萬物的道理，似乎可以不費吹灰之力即可掌握自然脈動的規律。

然而二次大戰的烽火卻在這時候無情的燃起，各國科學家，有的像海森保等人一一被征召，進行一系列的軍事研究；有的被軟禁在英國，從此與世隔絕。許多國家紛紛投入大量資金研究核子武器，量子力學在學術上的發展此時已經乏人問津了，大家關切的頂[illegible]是量子物理在核子武器的應用。量子力學於是又回到它那當初發展時的荊棘坎坷道路上了。

小框框 1.

直得注意的是，這道公式雖然名為波茲曼關係式，但最先發表這道公式的人卻是普朗克。普朗克比波茲曼晚了好幾年出生，在這篇論文他首次寫下這道關係式，甚至連公式中的波茲曼常數 k 也是普朗克在本文中首先引用，並且在論文最後還計算出他的數值是 $k = 1.34 \times 10^{-16} erg/K$。然而因為在波茲曼的氣體動力論中有提到，「熵應該與各種亂度的對數值有關⋯」，衝著這句話，這道方程式就變成波茲曼方程式了。後來普朗克在 1918 諾貝爾獎得獎演說中也提道：「大家都叫 k 為波茲曼常數，但是在我的印象中，波茲曼從來沒有提過這個常數，各位可能覺得這件事很奇怪。我想這是因為波茲曼根本沒有想過這個常數可以被算出...。」

小框框 2.

塞森(M. Thiessen)形式的偉恩位移定律 $E_\lambda \cdot d\lambda = T^5 \psi(\lambda T) \cdot d\lambda$，其中 E_λ 就是黑體輻射在波長和溫度分別為 λ 與 T 之下的輻射強度密度，ψ 是一個普世單變數函數。這道關係式其實就是由 Stefan-Boltzmann 定律 $E = \sigma T^4$ 與 Wien’s Displacement 實驗定律 $\lambda_m T = const$ 所猜出最簡單的結果。我們可以簡單驗證一下，把 E_λ 對 λ 積分後可得

$$E = \int_0^\infty E_\lambda \cdot d\lambda = \int_0^\infty T^5 \psi(\lambda T) \cdot d\lambda = T^5 \int_0^\infty \psi(u) \cdot \frac{du}{T} = \sigma T^4$$

另外把 E_λ 對 λ 微分後可得

$$\frac{dE_\lambda}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_m} = T^5 \psi'(\lambda_m T) T \equiv 0 \text{，所以} \psi'(\lambda_m T) = 0$$

但 ψ 是一個固定的函數，所以會讓 ψ 微分為 0 的點是一個固定常數，因此 $\lambda_m T = const$。總之，這道公式是 Stefan-Boltzmann 與 Wiens Displacement 實驗定律的結合體。

小框框 3.

愛因斯坦的結論 $B_n^m P_n = B_m^n P_m$ 從現在看起來非常直觀，因為 $\left|\langle m | \vec{r} | n \rangle\right|^2 = \left|\langle n | \vec{r} | m \rangle\right|^2$，由與含有時間的為擾理論(Time-dependent perturbation theory)知道，兩個方向的吸收行為機率相等。而 $\alpha_m^n = \dfrac{A_m^n P_m}{B_n^m P_n}$ 是常數的問題，也可以用量子場論中真空微擾(Vacuum fluctuation)理論推得。

小賀曾在課堂上說過：「培養好的 notation 的習慣，是計算正確很重要的一步。」這句話的確有道理，以一個物理系的學生來說，讀書、寫作業時都離不開大量符號，如果沒有好的符號習慣，常常會被花花綠綠的符號弄到頭昏腦脹。由於符號本身是抽象的，才造成這些混亂。

但是，實際上符號之所以被創造出來，是因爲他們能夠簡化思考過程、節省計算時間、方便使用者互相溝通。而代表著各種觀念或物理量的符號更力求簡潔，絕對不是爲了讓使用者混亂而創造的。當跳脫物理的視角，而改由欣賞的角度去看待符號，常常會有物外之趣呢。在這篇文章中，我想要以一些我學習物理、數學的過程中所遇到的符號爲例來觀賞符號的美與趣味。

好符號的資格

要讓物理定律看起來有數學美，就必須用美麗的符號來描述。好的符號應該要具備確定性、簡明性、方便性、啓發性與和諧性。

所謂確定性是說符號不應該造成混亂，要能明確表示其意義。簡明的符號則是用來節省語句，不讓多餘的符號花邊或文字敘述將重要的事物稀釋掉。最簡單的例子便是以 na 取代 n 個 a 相乘。再來談談最重要的方便性，如果符號不比直接書寫文字更方便，那這個符號也不必用了。事實上，根據我們書寫的工具，我們不可能寫出長相超過二維的符號，所以三維矩陣雖然勉強可寫，卻不夠方便。但是我們還是必須使用類似的東西，例如三階張量。目前被多數人所接受的張量符號正是一種既確定、簡明，又方便的符號。張量符號的產生，也是人類爲了克服書寫工具的限制而絞盡腦汁的結果。

再來是啓發性，這點比較不容易達成。試想，在創造符號的時候，還要能考慮各種相似的概念，以使看到這個符號的人能夠觸類旁通。這種事，不是每個人都辦得到的。例如微分連鎖律，如果用拉格朗日(J. L. Lagrange)的記號寫，是

$$f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$$，

但是用萊布尼茲(G. W. Leibniz)的記號寫，就是

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\cdot\frac{dg}{dx}$$。

後者看起來像是把 dg 約分了，是一種有啓發性的符號。

最後一項和諧性，就是造成符號美感最不可或缺的一點，底下列出三條相當具有對稱美感的恆等式。

$$\int_{\Omega} dV \vec{\nabla} f = \oint_{\partial\Omega} \overrightarrow{da} f$$

$$\int_{\Omega} dV \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \oint_{\partial\Omega} \overrightarrow{da}\cdot\vec{A}$$ ，其中 $\partial\Omega$ 是 Ω 的表面，而 $\overrightarrow{da}$ 是其朝外的有向面積元。

$$\int_{\Omega} dV \vec{\nabla}\times\vec{A} = \oint_{\partial\Omega} \overrightarrow{da}\times\vec{A}$$

這三條恆等式的證明不難，有興趣的人可以自行驗證看看。特別的是，還可以從這裡面抽取出很漂亮的積分算子恆等式：

$$\int_{\Omega} dV \vec{\nabla} = \oint_{\partial\Omega} \overrightarrow{da}$$。

這個等式正好將微積分符號的美感表現出來。

能夠同時具備這些特性，才是能夠將物理的美展現在眾人面前的好符號。而這樣的符號也才是物理最好的工具。

好像看得懂又好像看不懂

物理上常用的符號很多。最常見的符號是以其所代表的字的字首爲記號的。像是 E 代表了電場(electric field)；dx 則是 x 的微分(differential)的意思；m 也被用於表示質量；萊布尼茲把「相似」(similar)的 s 旋轉翻轉後成爲幾何上用來表示相似的符號──「~」；克卜勒(J. Kepler)則將對數(logarithm)簡寫爲 log。

雖說對數的簡寫是很容易就可以理解的，但是他的中文翻譯「對數」卻真是讓人有點摸不著頭腦。關於這點，要回溯到對數剛傳入中國的時候才能說清楚了。在清代時薛風祚與來華教士穆尼閣(J. S. Smogolenski)合編的《比例對數表》中，log b 的 b 被稱爲「真數」並沿用至今，但 log b 有個現在不再使用的名稱──「假數」，將真數與假數對列成的表，就稱爲對數表。假數這個名詞現在大概已經沒有人在使用了，所以對現在的學生來說，才會對「真數」、「對數」這種名詞感到困惑。

令人不容易看懂的還有有理數系的符號 $\mathbb{Q}$，這是因爲有理數就是整數與整數的商(quotient)，才以字首 Q 來代表全體有理數。類似的情況發生在整數系，德文中的 zahlen 就是整數的意思，故取其字首化爲整數系的符號 $\mathbb{Z}$。其實會發生看不懂符號來源的事情，最主要的原因是不了解創造符號的人是誰，是哪國人，在什麼背景下創造這個符號，以及創造的過程。而看不懂符號來源時，常常容易記錯定義，進而開始混亂了。

說到光看字面不容易了解的符號，熱力學中有許多常見的例子。內能(internal energy)以 U 爲其代號，是從克勞修斯(R. Clausius)開始的，當時克勞修斯只知道這是 H 與「內功」的和是一個狀態函數，但因不清楚內功的表達式，所以才用一個代號 U 表示。至於他的理由就難以考證了，或許是因爲個人喜好吧。後來凱爾文(W. Thomson)才稱 U 爲內能，所以 U 這個符號確定不是來自於「內能」，而是先有符號 U 才有內能這個名詞的。還有一個常見的熱力學變數 S，也是克勞修斯所命名的。原本 S 被克勞修斯拿來代表「轉變的當量值」，後來他又在自己的論文中更名爲熵(entropy; 德文爲 entropie)。字源是希臘字「轉變」(τροπη)，並且他故意讓拼字與能量(energy; 德文爲 energie)相仿，因爲他認爲熵與能量關係密切，所以連名稱也讓他們看起來很像。

發展史長達千年的符號

大多數符號並不像是這樣由一個人確定下來之後就傳頌千古，通常都必須經過些許時間演變才發展成爲今天所使用的形狀。以最廣泛被使用的運算符號而言，人類曾經覺得加法等運算是非常顯而易見、不須要特地描述、只要看到就能理解的過程。所以起初這些運算是沒有符號的。

但是，一旦要記錄的不只是數字，必須將運算的過程詳細寫下來時，人們就必須開始煩惱應該用何種符號來表示。以加法符號「+」爲例，古埃及人用的符號是他們最拿手的象形符號，形狀像一個向右走的人的兩條腿。至於古巴比倫人剛開始並沒有將加法的過程寫下，也就是用

楔形文字直接寫出經過加法運算後的結果，後來才漸漸出現使用文字「tab」表示加號的文件。而在過去一千年內，爲了尋找用來表示加法的符號，也有人嘗試過「&」的原形，也就是拉丁文「et」，甚至也有人用過古德文 Plus 的字首 P。

後來在十五世紀末，有人開始使用現在我們所習慣的加號——「+」。在漫長的歷史中，還有許許多多嘗試創造加法符號的故事，可是這些符號後來也都被淘汰了。直到十六、十七世紀，那時的論文開始大量使用「+」，這才算是確立了「+」的正統地位。即使德國數學大師萊布尼茲曾提出以「∪」代表相加，也不能再動搖「+」的地位了。在傳入中國後，清代數學家李善蘭爲了避免算符「+、–」與中文數字「十、一」混淆，特以篆文的上(⊥)、下(⊤)表示。

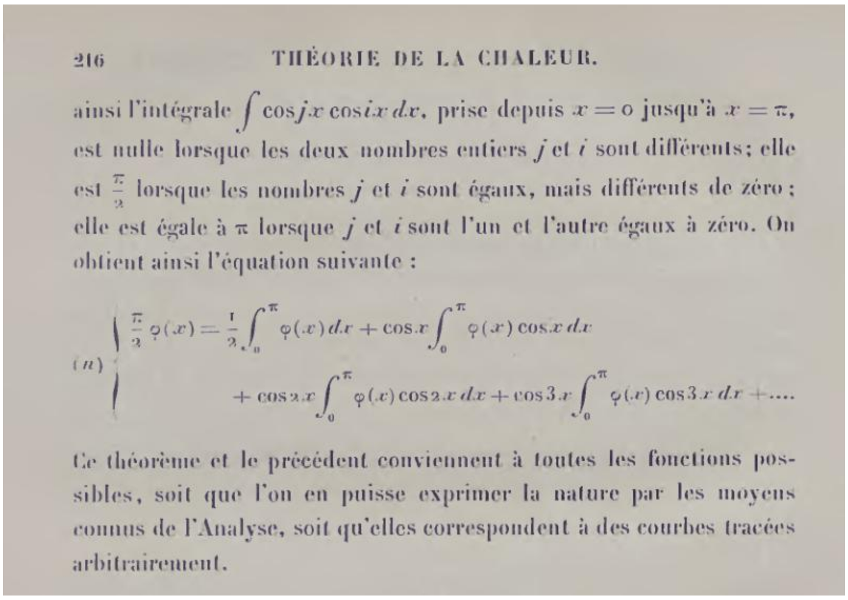
萊布尼茲巧設微積分符號

另外值得一提的是微積分符號的發展。與運算符號相似，也嘗試過各種想到的文字圖形才有了今天簡單、好用而且美妙的符號。眾所皆知，歷史上承認的微積分創始人是牛頓(I. Newton)與萊布尼茲，而這兩人分別創用了不同的符號。

牛頓所創的導數符號是 $\dot{x}$，至今雖仍被一些物理界人士使用，但仍沒有萊布尼茲給出的符號 $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ 普及。後來漸漸有人需要更高階微分的符號，於是 ddx、dddx 等符號開始流行起來。但是再更高階的微分還這樣記就太過繁瑣了，於是萊布尼茲又用了 $d^n x$ 來表示 n 階微分。拉格朗日則在這段歷史中貢獻了 $f'(x)$、y' 兩種記號表示導數。

至於積分符號就沒有微分這麼幸運。由於積分的概念雖然簡單但是要符號化卻很困難，所以它不是在一開始就有那麼方便的符號可以使用。最初萊布尼茲用「omn. L」表示「$\int$ dx」其中 omn.相當於$\int$，而 L 相當於 dx。類似於 d 取自拉丁文「分細」(differentia)，omn.是拉丁文「全部」(omnia)的縮寫，之後萊布尼茲寫出更有用的積分符號$\int$ 時，還是用拉丁文「和」(summa)的字首變形而成。有了不定積分的符號後，要創造別的積分符號就相對簡單多了，歐拉(L. Euler)在這個基礎上寫出二重積分$\iint$，拉格朗日則開始使用三重積分$\iiint$。然後，法國數學家傅立葉(J. B. J. Fourier)也在 1822 年正式發表了他的著作《熱的分析理論》(Théorie analytique de la chaleur)，其中他使用了形如$\int_0^\pi \varphi(x)dx$的定積分符號。他使用定積分符號時，從圖一也可以看出傅立葉級數的概念已經誕生。圖一是節自該書的一頁。

圖一



216 THÉORIE DE LA CHALEUR.

ainsi l'intégrale $\int \cos jx \cos ix\, dx$, prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = \pi$, est nulle lorsque les deux nombres entiers j et i sont différents; elle est $\frac{\pi}{2}$ lorsque les nombres j et i sont égaux, mais différents de zéro; elle est égale à π lorsque j et i sont l'un et l'autre égaux à zéro. On obtient ainsi l'équation suivante :

$$(n)\quad \begin{cases} \frac{\pi}{2}\varphi(x) = \frac{1}{2}\int_0^\pi \varphi(x)\,dx + \cos x\int_0^\pi \varphi(x)\cos x\,dx \\ \qquad + \cos 2x\int_0^\pi \varphi(x)\cos 2x\,dx + \cos 3x\int_0^\pi \varphi(x)\cos 3x\,dx + \ldots . \end{cases}$$

Ce théorème et le précédent conviennent à toutes les fonctions possibles, soit que l'on en puisse exprimer la nature par les moyens connus de l'Analyse, soit qu'elles correspondent à des courbes tracées arbitrairement.

至此，常微分與積分的符號發展終於算是告一段落了。既然連微分、積分的符號都不是一開始就很好用，當然偏微分符號的誕生是更加困難了。剛開始多數人也不太會分辨常微分與偏微分的差異。直到拉格朗日採用 $\frac{\partial y}{\partial x}$ 表示偏導數、勒讓德(A. M. Legendre)創用偏微分算符 $\frac{\partial}{\partial x}$ 、雅可比(C. G. J. Jacobi)強調 d 表示全微分、∂表示偏微分後，這個符號才獲得眾人的認同。

雖然說，符號發展通常都歷經千辛萬苦，然而，歷史上也有一些符號沒有經過多少修改就已經長成我們今天所見到的模樣了，函數符號就是個例子。不過這倒不是因爲草創期的符號太美妙才如此，而是因爲函數的概念實在不容易嚴格陳述，這個使千萬學子陷入混亂中的東西，在幾百年前也同樣困擾著各大數學家。

歐拉早在 1734 年就已經使用 $f\left(\frac{x}{a}+c\right)$ 表示 $\frac{x}{a}+c$ 的函數了，同時期也出現過用 φx 或 Π_x、Φ_x、Δ_x 來代表函數的人，看起來不過跟現在習慣的符號是大同小異而已。至於早先對函數的定義卻很模糊，有「將其他量經過四則運算或開方所得」、「任意畫出的一條曲線代表 x、y 的關係」種種說法。就現在的角度來看，這都不精確。後來經過柯西(A. L. Cauchy)、狄利克雷(P. G. L. Dirichlet)、黎曼(B. Riemann)的努力，近代的定義終於產生。當集合論誕生後，再引入定義域、值域等名詞，才出現我們今天所看到的函數符號系統。這種符號的特點就是：自變量的位置只是個符號而已，想放什麼進去都可以，例如：f(皮卡丘) =皮卡丘+1。在這個例子中，看起來很荒謬的「皮卡丘」取代了我們熟悉的 x，但是並沒有改變函數 f 的本質。如果容易被函數符號混淆的時候，不妨試試看這種看似荒謬的想法，一定會有幫助的。

中國人的符號翻譯

在明末清初，各種科學新知隨著傳教士來到了中國，伴隨而來的是大量科學書籍與早已被廣泛使用的符號，包括前面述及的微積分、函數等。這時候翻譯這些符號就會變得很重要了。

中國當時有個很聰明的數學家，名叫李善蘭，第一本有關微積分的中譯本就是他翻譯的。

他將大部分名詞翻譯得很不錯，只可惜，他在符號上的翻譯在今天來看就實在令人難以接受。他的翻譯努力遵循著中國固有的代數——「天元術」，也就是以「天」、「地」、「人」、「物」來當作變數。「函數」一詞也是他翻譯的，理由是「凡式中『含』天，爲天之函數」，有表現函數符號的特性。

關於符號的翻譯，除了前文提過的加減號以外，積分符號$\int$ 被「積」字的部首「禾」代替，而微分符號 d 則是改用「微」字的部首「彳」，各個常數就以十天干和十二地支來表示。還有，爲了依循中國人寫字由上而下的習慣，居然還將分數倒過來寫。在表一中是幾個真實的例子：

表一

原文	翻譯
$\int 2x^3 dx$	$禾二天^{三}彳天$
$\int \frac{dx}{a+x} = \ln(a+x)+c$	$禾\frac{甲\perp天}{彳天} = (甲\perp天)對\perp丙$
$\frac{dy}{dx} + by^n = ax^m$	$\frac{彳天}{彳地}\perp乙地^{卯} = 甲天^{寅}$

李善蘭的工作當然不只如此，歐拉所創用的取和符號$\sum$ 也給他譯了一番，這次他沒有想到什麼部首可以拿來用，所以改用音譯，取 sigma 的最後一個音節創造了一個「口昴」，所以在他筆下的無窮級數$\sum x^n = \frac{1}{1-x}$，很「自然」就變成了「口昴」天$^{寅} = \frac{一\mathrm{T}天}{一}$。本來$\sum$ 是源自於希臘文σογΜαρω的字首，其意爲「增加」，但是經這一譯，就成了一個長相奇怪的符號了。

當然李善蘭對於當時中國的科學進步是有貢獻的，事實上，許多今天常用的名詞就是從他的譯文中流傳下來的，諸如：函數、代數、微積分、級數、細胞等。不過從李善蘭的翻譯被中國人的習慣所限制來看，符號發展緩慢也是造成中國人的科學知識不夠系統化也不夠豐富的一個原因。以代數方程式爲例，雖然中國早就有天元術來解代數方程，但是所使用的符號書寫不便，所以一直沒有辦法仔細探究多項方程式等數學領域。

符號也要正音

有了符號的形狀與意義之後，還要再配上唸法，才能算是一個完整的數學符號。因爲這些符號可說是爲了便於討論科學計算而受造，而不論是在授課或討論，總是用口說比較快速。不同的人有不同的習慣，也有不同的符號讀音，就會發生溝通困難。但是如果有一套全世界通用的標準符號讀音，那麼想必溝通會更加順利。

整個物理發展的過程中有各種符號被創造出來，而且可能來自各個不同的國家。我認爲符號的讀法應由發明者決定，或視符號的出處而定，如果還是無法論定，可考慮發明者的母語。

實際上，由發明者決定的讀法多已不可考，所以就不多加討論。而正弦(sin)、餘弦(cos)是由英國人所創，以英語發音是理所當然的。圓周率π是希臘字母，應該用希臘字母的讀法才對，但是π的正確讀法是[pi](KK 音標)，與英文字母 p 的發音相同，現在爲了避免混淆，常常以[paɪ]來讀它。雖然這並不是正確的讀音，但是兩個字母都很常使用，仍然情有可原。至於同爲希臘字母並且常被錯讀的ϕ、χ、ψ等，則分別應該讀作[fi]、[ki]、[psi]。令人費解的是，這幾個完全不會與其他符號混淆的讀音，居然被錯讀。現在這種錯誤的讀音已經被廣泛使用了，但是對我而言，希臘語並非死語言，亂唸他們的字母實在是沒有道理。另外，有一個希臘字母是ϕ的書寫體卻常常被誤認，那就是φ，希望有人能可憐可憐他，不要再把他看成其他字母了。

除此之外，還有一些常用符號既非拉丁字母、亦非希臘字母，只是幾乎沒有人知道他們其實是某種語言的字母。多數人都以爲集合論中的空集合符號 Ø 是希臘字母，但其實是丹麥字母，其發音近似英文字母 O 的讀音。微分的記號 d 很好讀，而且西歐各語系中這個字母的發音差異不算太大，不論是法國、德國、英國，這個子音都是一樣的。但是每當微積分老師教到偏微分並介紹偏微分的符號「∂」時，幾乎所有學生都會問「這個符號怎麼唸」。一般常聽到的說法是，這個符號是希臘字母δ的變體，因爲是微分算符，所以將之讀爲[di]，而較常使用的稱呼還有 del、partial、[rɔŋ]，也有人讀作 der。實際上，這的確是一種δ的變體，只不過這個符號本身是斯拉夫字母，所以我想用斯拉夫語來讀或許比較是適當的，其發音爲[dɛ]。

如今，在多數人口中或某些教科書上，許多有名科學家的名字被誤讀，這可以說是不尊重先賢的舉動。Euler 讀音較接近「歐拉」，而非「尤拉」；Hermite 則音近「厄米特」，而不是「赫麥特」。如果要比較發音的接近程度，中國以前所翻譯的人名，都比用英文唸出的發音更接近該國的語言，像勒讓德、雅可比就是相當不錯的音譯。

符號之美激發物理之美

以上都將符號當成獨立的個體來看待，看似與科學理論的發展沒有多大的關係。也就是說，符號的誕生都沒有對各種建構理論模型有任何幫助。如果有什麼相關之處，大概是藉由方便的符號節省計算的時間，也沒有妨礙到科學的進展；頂多也只是像「因爲使用了代數，所以產生了代數學」如此而已吧。美麗的符號，對於理論計算絕對不是只有節省時間而已。舉個例子，現在我們所熟知的馬克士威(J. C. Maxwell)的電磁場方程式

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

當法拉第初見馬克士威在電磁理論的工作時，大讚：「這個數學加得很妙！」在這組方程式中，很容易看出電場與磁場有很不錯的對稱性，特別是在沒有電荷、電流的時候。若再深究下去，會發現電場與磁場根本是在不同慣性坐標系下所看到的相同現象。但是，如果想要讓這四道方程式有更漂亮的對稱性，就會希望磁單極存在於這個宇宙；可惜，直到今天都還沒有人能找到磁單極。由此可見，當將一些物理概念符號化後，常常會有更耐人尋味的解釋。

古典物理藉由符號化而留下了精美的定律與公式。近代物理的蓬勃發展，則使得物理對於更方便的記號有著極大的需求。在此，就讓我們以相對論爲例來一窺其符號的演化吧。

本來想像起來有點困難的狹義相對論，當以矩陣形式表達勞倫茲轉換後，計算突然簡化許多。在這之中用到了兩個相當有名的參數β跟γ，但是卻不見α的蹤影。這點雖然讓人覺得很奇怪，不過很快就會聯想到，或許是因爲α另有用途，所以才不用它。我認爲那個用途有兩種可能，第一種是精細結構常數，也就是$\alpha = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$，不過當時量子物理應該還不夠成熟，人們對精細結構了解應該還不多，所以這個可能性比較低。至於第二種，則是以古典理論研究光速時會遇到的參數：曳引係數α，其中$\alpha = 1 - \dfrac{1}{n^2}$，$n$ 爲介質折射率，這是一個在探討介質如何帶動以太時所使用到的參數。曳引係數的相關研究與相對論的關係較密切，所以其可能性自然高了些。

如果進入廣義相對論，就會遇到很多有上標、下標的符號，那些符號大多是張量，而相對論使用大量張量無非是因爲相對性原理要求物理定律應該寫成具有不隨坐標改變的特性的張量式。慶幸的是，數學家已經大致摸清張量的代數運算，所以這些符號可以直接從微分幾何借過來用。早在十九世紀，高斯(C. F. Gauss)沒有使用張量記號就在算曲面論的問題了，結果他的度規表示成

$d^2s = \quad E^2 d2 u \qquad F + d$，

而兩條曲線的夾角餘弦值就變成

$$\cos\theta = \frac{Edudu' + F(dudv' + du'dv) + Gdvdv'}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{Edu'^2 + 2Fdu'dv' + Gdv'^2}}\text{。}$$

這還只是二維的狀況，如果要研究更高維度的空間，類似這樣的寫法會讓人寫到手痠，畢竟 n 維空間的 ds^2 可是會有$\dfrac{n(n+1)}{2}$項的。

到了 1854 年，黎曼幾何正式問世。較早期的黎曼幾何已經有使用張量記號，直到二十世紀初，才引入愛因斯坦取和規約。不過，值得一提的是，選擇使用取和規約固然有其方便性，但是卻減少了一種符號自由度。$A^i{}_i$ 不再代表類似 $A^1{}_1$ 這樣的東西，而是 $\sum_i A^i{}_i$；也就是說，當我們有須要用 $A^i{}_i$ 表示 $A^1{}_1$、$A^2{}_2$、$A^3{}_3$ 等數字的時候，只好另外用一些文字註記。不過一般而言，正是在不會引起誤會的情況下，才能夠順利使用取和規約，所以不用對其不便之處太過操心。

其實，符號的能耐不只如此。使用符號是真的可以帶動科學發展的，歷史上就發生過幾樁爲了追求符號之美而找出美妙定律的事件。外勒(H. Weyl)是一個德國數學家，他對於近代物理

有深入的研究，也有許多貢獻。有一個以他爲名的波動方程式，描述自旋爲 $\frac{1}{2}$ 且無質量的粒子。幾乎沒有物理學家把這個當一回事，但外勒卻基於對美的直覺而相信這是有意義的。他說過：「我的工作總是力圖把真和美統一起來，但當我必須在兩者中挑選一個時，我總是選擇美。」後來才證實，這方程式可以用來描述微中子是相當良好的。

這樣的事還有一件，狄拉克(P. A. M. Dirac)覺得 Klein-Gordan equation 從數學的角度來看不夠漂亮，所以他設法結合量子力學與相對論建立了新的方程式，後來被稱爲狄拉克方程式。從這裡，他可以自然闡述電子的自旋和自旋角動量，甚至還能夠預言存在正電子。之所以能發現這些，只是由於對美的單單追求而已。正如狄拉克本人所說：「具有數學之美的理論，比起那些難看的理論似乎較吻合實驗數據，且來得正確」、「物理定律必具有數學之美」。

符號的藝術

千百年來，人類爲了計算而製造出的符號不計其數，有些因爲不方便而被淘汰了。剩下來的符號，不論是形、是音、是意，可以說是都具有藝術美感的。所以要是覺得符號很枯燥，那可真是冤枉它們了。符號的藝術說穿了也沒什麼困難的，就是兩個字——方便。好的符號就應該要方便記憶、方便分辨、方便使用。以前的人們，即便讓具體的物理抽象化，卻仍然執意要創造這些符號來表示，也都是因爲使用它們可以帶來極大的方便。這種便利可以讓人不容易計算錯誤，所以使用方便的符號就正能培養出「好的 notation 的習慣」。最後，我引一句拉普拉斯(P.-S. Laplace)的話作結：「這就是結構好的語言的好處，它簡化的記法常常是深奧理論的源泉。」

參考資料：

1. 劉雲章著。《數學符號學概論》。合肥市：安徽教育出版社，1993。頁 57-59、132-146。
2. 徐品方、張紅著。《數學符號史》。北京市：科學出版社，2006。頁 108-118、244-253、268、283、、315-325、327。
3. 馬文蔚、唐玄之、周永平主編。《物理學發展史上的里程碑》。新竹市：凡異出版社。1995。頁 87-88、92、188、287。
4. Fourier, Jean Baptiste Joseph. Théorie analytique de la chaleur. p. 216.
5. Morris Kline. “The Differential Geometry of Gauss and Riemann” Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. New York: Oxford University Press US, 1990. p. 883.
6. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Derivative
7. URL: http://yinjunfeng.spaces.live.com/Blog/cns!30FB2A15288FEA61!317.entry

理性還是迷信？

漫談邏輯的能力與侷限

一，序文

假日的廣場上，聚集了一票熱鬧的群眾，圍著一個小小的攤販，議論紛紛。攤販的主人是個留著些許鬍渣的中年人，臉上帶著狡獪的笑容，而在他身旁，則立著一個木牌子，深黑的大字清楚了寫明了小攤販的遊戲規則。

「桌上有一枚正常的硬幣，你可以將其拋出許多次，直到你拋出反面爲止，計算你之前出現過正面的次數，一次你可獲得 2 圓，兩次 4 圓，四次 8 圓…依此類推，但參加一次遊戲需付一百萬元的費用」

簡單舉個例子：如果你連續投擲五次銅板，依次出現，正面、正面、正面、正面、反面，則你可以獲得 2^4=16 圓。

正當群眾對著這詭異的遊戲規則和天價般的遊戲籌碼感到疑惑時，突然一位衣衫不整的數學家走了過來，笑了聲說：怎會沒人敢玩？這遊戲怎麼算都賺啊。眾人隨即帶著訝異的眼光望著數學家，這令數學家感到更加的光榮。於是他續道：「你們得到 2 圓的機率是 1/2，得到 4 圓的機率是 1/4，得到 8 圓的機率是 1/8…，依此類推，並將這些加總起來，2*(1/2)+4*(1/4)+8*(1/8)…這場遊戲的期望值可是無限大啊」。圍觀的眾人頓時露出恍然大悟的佩服表情

但這時攤主人臉上的笑容更燦爛了，他接著開口說道，那麼這位先生，請問您要和我玩這場遊戲嗎？數學家思索了半天，最後卻決定放棄了…

故事到此結束，試想看看，今天如果是你，會做同樣的決定嗎？

我想大多數人最後也會做出放棄的判斷吧，這代表了什麼？或許人的直覺判斷其實是不怎麼理性的吧，所以常常會做出錯誤的判斷，或者明知何者爲正確的判斷，也不敢隨便行動。

不過...等一下，再想想，什麼叫”明知有正確判斷卻不行動”，什麼才是正確的判斷啊？對啊，誰說理性邏輯分析的結果就一定是對的呢？又到底理性邏輯是何等樣的角色，竟然能被所有人如此的深信不疑，似乎一切判斷與邏輯牴觸無效般，而只要和邏輯判斷不符，就會被灌上，有錯誤，有問題，有瑕疵等罪名而加以批判呢？現在就讓我們來談談理性邏輯的能力和極限吧，首先，來看看邏輯的起源。

二、邏輯的起源

邏輯的產生在於對辯論議題是否正確的關注上。現代邏輯的形式明顯流傳自古希臘傳統。中世紀時期，在亞里士多德的邏輯被給予很大強調。在中世紀的後期，邏輯更成爲哲學家的一個主要焦點，他們想要從事與哲學相關的重要邏輯分析。而邏輯的最基礎形式，則建構在論證上，例如：

所有生命都有價值。

即使謀殺犯也是個生物。

所以，即使謀殺犯也有價值。

前句話叫做前提，如果這個論證是有效的，這兩句話（前提）邏輯上蘊涵了第三句話（結論）。結論的真實性建立在前提的真實性和它們之間的聯繫之上。
而如果要把這些東西，很有系統且精簡的寫成符號和證明，而非一堆文字的敘述的話，就是數理邏輯。它是數學的一個分支，其研究對象是對證明和計算這兩個概念進行符號化以後的形式系統。數理邏輯也是數學基礎不可缺少的一個組成部分。數理邏輯的研究範圍是邏輯中”可被數學模式化”的部分。也稱爲符號邏輯（相對於敘述上較爲口語的哲學邏輯）。

稍微對邏輯的出現有了點了解，那我們現在可以來看看，邏輯到底該怎麼使用和其所擁有的能力了。

二、如何使用邏輯，純理性邏輯判斷是否一定有用？

其實，講求精確的邏輯，往往不是我們每天在做的事。例如我們說：「如果下雨的話，地會濕」。這句話看似很有道理，其實隱藏了一大堆的毛病。或許要更精確的說這句話，應該這麼講：「如果下雨，且在雨落下的那塊區域中有一塊地（而不是落在海裡），而且雨能確實落下而非中途蒸發，又那塊地上並沒有任何防雨設備，則，那塊地會濕…」。好吧，如果每天都這麼說話，大概不是自己先發瘋，也是被別人當作發瘋而送進精神病院。

或許有人會問，日常說話當然該輕鬆點啊，但當要做判斷或討論問題的最佳答案時，擁有越準確、越嚴密的邏輯不是越好嗎？例如以下的小故事。

有一天，在一個小島國上，有一位死刑犯，正要接受行刑，但那天正逢國王六十歲生日，心情大好的國王決定給這位死刑犯一個重生的機會，他對死刑犯說道，你面前現在有左、中、右三道門，其中兩道會通像死亡的陷阱之中，卻有一道是平坦的道路，如果你猜中了，那今天就放你離去。死刑犯戰戰兢兢的挑了中間的一扇門，彷彿等待著生死命運的審判般，偷偷抬眼

望像國王。國王卻微笑著說到：其實你不用那麼緊張的，不如我再給你放大逃生的機會吧。說著國王打開了右邊那扇門，門後則是令人不寒而顫的死亡陷阱，圍觀的人都為死刑犯捏了把冷汗，國王繼續說道，現在，我再給你一次選擇的機會，要繼續走中間的門，還是換成左邊那扇？這時死刑犯露出了痛苦且為難的表情，不知道如何選擇，底下的人卻開始紛紛鼓譟：不用猶豫了，反正都是 1/2 的機率，隨便選擇一扇吧！

故事到此結束，請問你覺得，死刑犯該不該更換自己原來的選擇呢？

正確答案是，應該要更換，但為甚麼機率不是 1/2 呢？其實實際上，換的逃生率是比不換多了整整兩倍的，因為我們一開始如果選到陷阱，交換則能逃脫，反之選到平坦的道路，交換則會落入陷阱，但，一開始選到陷阱的機率是 2/3，選到逃生大道的機率卻只有 1/3，所以應該選擇交換，會得到更大的逃生機率。

有沒有開始覺得邏輯還不錯用了？擁有好的理性邏輯能力，甚至可以用來救命呢。或許做任何決定前都該先用邏輯來好好的演繹、推算一下，才不會吃虧。但，如果你真的這麼想的話，那我們再來看個例子。

露西和彼特從遙遠的太平洋小島旅遊回來，結果發現他們各自購買的同款骨董給飛機震壞了。航空公司經理說他們很樂意賠償，只是有一點小問題，因為這個長相古怪的東西價值多少，他毫無概念。他認為直接向這兩人詢問價格沒什麼指望，因為兩位旅客一定會藉機哄抬價格。

於是，經理設計了一個比較複雜的方法。他要求兩位旅客在未經討論的情況下，寫下這個骨董的價格，好比 2~100 之間的整數值。如果兩個人寫的價格一樣，他就以此為真正的價格賠償他們；但是如果他們寫的價格不同，他就假設少一點的數字才是真正的價格，而價格寫高的旅客則是有意欺瞞。在這種情況下，這位經理會以低的價格來賠償他們，再加上一些獎勵和懲罰，因為價格寫低的旅客誠實，可以多得到 2 元，而價格寫高的旅客則被罰 2 元。舉例來說，如果露西寫的是 46 元，彼特寫的是 100 元，結果就是露西得到 48 元，彼特得到 44 元。

那我們來揣測聰明的露西最可能的思路吧。露西的第一個想法是，她應該寫下最大可能的數字——100，如果彼特和她一樣貪心的話，她就會賺到 100 元（如果骨董比 100 元便宜很多，她可能正興高采烈地感謝航空公司經理愚蠢的設計）。

但很快的，露西靈光一現，想到如果自己選擇 99 的話，豈不是可以再多賺一點，因為這樣選可以得到 101 元。不過，彼特顯然也會想到這個要點，這樣兩人就變成都選擇 99，於是露西得到的是 99 元。如果彼特選 99，這時露西選 98 會比較好，因為可以得到 100 元。但是同樣的道理會讓彼特也寫下 98，這時她可以選 97，贏得 99 元，以此類推。結果，這樣的推論會讓這對旅客的選擇一路下墜，最後停在可容許的最小數——2。露西真的會按照這種思路選擇 2 的可能性似乎非常低，但這不重要（事實上這正是重點），因為這就是邏輯思考的結果。

結論是：經過最理性，最符合邏輯的判斷，你卻得到最糟的結果…而這便是有名的旅人兩難問題。是否對邏輯的實用性有點失去信心了呢？看來邏輯是否這麼有用可還真有帶商榷。

不過，不管這結果是令人欣喜或非常糟糕，邏輯好處還是普遍存在我們的心中，那，到底邏輯有什麼樣的好處的呢？當我們想認識，或者說，精確的去”解釋”和”預測”一些事情時，就必須要靠邏輯了。如果把邏輯視作一種語言，或許他用起來很囉唆，或許他不會帶來最好的判斷結果，但，他一定是個最有把握不會產生自相矛盾的語法。其每句話都是由前幾句話所推得，而只要前面的話是對的，後面也”一定”是對的。所以其能具有對正確性的說服力和預測未知結果的能力。

在科學革命以前，邏輯的研究處於哲學的領域，只有少數人對於思考有狂熱的興趣，對任何事情或任何話語都想一探其目的與，如柏拉圖、或亞里士多德等人，而他們最後大多思考到人生的目的、生存的信仰、道德、倫理等議題去。邏輯、論證、判斷、辯論、等等也只是少數人的遊戲，但到了十七八世紀，邏輯漸漸爲科學所重視，並加以運用。例如，牛頓力學發現，只要能了解簡單圓周運動的力系統，就可經由邏輯推斷去預測遙遠行星間的行動模式，而他真的成功了，甚至還可以用橢圓形的數學軌跡去描述它。理性邏輯的妙用，一夜之間衝擊了所有人的思想，幾乎將人類所擁有的能力上綱至無限。

邏輯推理，給了人們探究真理的能力，以至於數學家希爾伯特（David Hilbert）曾在 1930 年發表了的演說中所說道：「我們必須知道，我們將會知道」 (原文：Wir mussen wissen. Wir werden wissen.) 想想這是多麼天大的豪語？這代表著我們人類是有權力，也有能力知道一切萬物的真相與規則的。

當然，對於人類是否真能有擁有這樣的能力，還有許許多多的挑戰和疑點。

例如：
1.混沌理論，這裡論說明了一種我們無法算準的情況，就是如果有一個系統，他在輸入數據時有一點點微小誤差，就會造成非常大的影響，而他接受誤差的尺度近乎無限小，所以我們永遠無法得到完全肯定的答案。所以我們的氣象報告常常錯的惹人破口大罵，也是源自於此。

2.人類腦活動能力有其極限，且生命有限，對於太複雜的問題，即使知道有辦法理解，卻永遠無法達到理解的那天，例如有一樣科學的證明，但任何人必須花上兩百年的時間累積足夠的知識才能看懂他，那就是說，雖然他是一個完美的證明，且人類理論上有可能理解他，但實際上是我們沒有人能理解他。

3.人類的感知器官並無法正確的做出判斷，視覺會有錯覺，聽覺會有幻聽，嗅覺味覺有可能麻痺…等等狀況告訴了我們一件事，就是我們賴以建立前提的各種器官，都有可能是錯誤的，那

基於這些錯誤的前提，我們怎麼能得到正確的結果呢？

…類似的挑戰還有許多，但他們似乎都沒有真正駁倒我們的信心，因爲，即使認知似乎是有其極限，限於人類的器官、人類的能力、人類的天賦，但理性呢？理性有沒有極限呢？我們依然相信，只要有正確的前提，完美的論證，就能得到一切事物的答案，而前提和論證如何出來，或要花多久才會出來，則是另一回事了，起碼我們有了努力的方向，知道只要慢慢走下去遲早會找到的。

邏輯的妙用，猶如僅存的希望之火般，告訴了黑暗中的人們，即使廣闊的前路是無限的黑暗與未知，但我們仍看得見道路，順著他走下去，在無限遠的未來，我們還是有可能認知一切。這實在是不得不令人喜悅的。爾後，十七～十九世紀的科學家果真做了許許多多的預言，且一一被證實爲真。這如魔法般的超能力，令人們猶如在海邊撿到漂亮貝殼的小孩一樣，開始手足舞蹈的將邏輯捧在手心上疼，並發出一陣陣喜悅的讚嘆。

三，理性認知和邏輯的極限

哲學家 Pierre Boutroux 曾說過：
邏輯是不可戰勝的，因爲要反對邏輯還得使用邏輯。

這就是我們對邏輯的信念，根深蒂固且無法自拔。但這信念真的能站得住腳嗎？是的，先別高興的太早，我們說正確的前提遲早會找到，是真的嗎？此外，即使暫時不理會前提打哪來，對於邏輯系統自身內部是否真的都不會產生矛盾？能找到一個真正完美的系統嗎？

二十世紀的一波波新的科學革命，推翻或修訂了許許多多現有理論，例如愛因斯坦的相對論，就徹底修正了牛頓力學的弊病與謬誤。讓我們頓時如夢初醒般，發現了我們賴以爲”真”的許多前提和理論原來並非是正確的。從此，尋找最正確前提與最完美理論的遊戲便展開了，物理學家希望找到大一統理論，同樣的，不少數學家也希望能找到一個完美的系統與公設，可以用以包含、解釋所有系統。的確，由物理數學來定義最精確的前提的方法，畢竟比起文字敘述，是簡潔有力的多，也少了許多字句語意上的爭議。

但，這樣完美的理論真的存在嗎？通常我們會希望一個好的系統能符合兩樣性質：

1.一致性: 對所有在系統中的事物，不會經由推論而導出兩個不同卻矛盾的答案。
2.完備性: 對所有在系統中的事物，都能被明確定義，可能定義其是真的，或是假的，或者是其他特殊定義。

如果覺得太抽象的話，這裡可以舉幾個較爲生活化的小例子：

1. 例如我說：[本語句爲假]，如果我們本語句爲真，則會推得本語句爲假，如果說本語句爲假，又會推得本語句爲真，如此就會在爲真，爲假，爲真，爲假間跳動，得到既真又假的矛盾結果，違反了一致性
2.一家賣票處規定，身高 150 公分以下者算半票，160 公分以上者算全票，則這算是一個不完備的規定，因爲 151～159 公分的人無法被定義。

於是，有人追求，便有人挑戰，許許多多的悖論、詭論，就被提出來，攻擊各各系統的完備和一致性質，當然數學家和哲學家們也盡力更新或擴充新的公設或假設，來排除這些疑點。

在此舉幾個有趣的悖論當例子：

1. 芝諾悖論：古希臘一百公尺賽跑冠軍阿基里斯跟烏龜賽跑，他的速度比烏龜快十倍，讓烏龜先跑一百公尺。那麼，當他跑完一百公尺時，烏龜又在他前面十公尺處；如此下去，阿基里斯永遠追不上烏龜? 其實這個悖論已經被解決，甚至國中小學生可能都能解釋清楚，但在當時對於無限、極限等概念還建構不完全的時代，這可是煩惱了當代人非常之久，或許由此也可看出數學家們的進步吧。

2. 全能悖論：最常出現在宗教的爭議文中，例如如果上帝是全能的，他能否做出一顆自己舉不起來的石頭，即使捨去宗教的問題，似乎”全能”本身在語句的定義上就有自身的瑕疵。

3. 理髮師悖論：在薩維爾村有一個理髮師，他掛出了一塊招牌規定著：「我給而且只給村民中不給自己刮鬍子的人刮鬍子。」於是有人就問他：「你給不給自己刮鬍子呢？」這也是個經典且古老的例子，說明了語言系統上是有許多問題的，往往隨便說句話就會自相矛盾。

4.羅素悖論：這是個較爲數學的例子，首先我們來定義了一個集合 A={集合 X：X 不屬於 X}；說白話一點，A 集合就是由所有本身不屬於本身的集合所形成的集合。羅素詭論就是問：A 是否屬於 A？若 A 屬於 A，則根據 A 的定義，A 應該不屬於 A；若 A 不屬於 A，則根據 A 的定義，A 應該屬於 A。這便是當時羅素攻擊集合論的最佳例子，也另大數學家希爾伯特苦思不得其解。

當然許多人爲了排除這些悖論做了很多努力，例如之前提到：[本語句爲假]的悖論中就有人提出，他們藉著區分不同層次的語言，例如塔斯基區分了「對象語言」與「後設語言」，以這樣的方式避免掉自我指涉的困難，也就是說，他們認爲「本語句」與「本語句爲假」是不同層次的語言，所以不能互相帶入。當然這理論還有問題，也還有挑戰和修改。

提出與消弭各式各樣悖論的遊戲持續進行著，邏輯遭受到嚴重的挑戰，卻也沒人能徹底打敗他，他是數學家們最後的堡壘，也是科學家們自信與能力個根源，每次成功的解決了一項論，

人們對於邏輯終將成功的信心就更上一層樓，但，最後終於有人給了邏輯致命的一擊，那就是歌德爾的不完備定理，因為他證明了兩件事情。

1.任何一個足夠強的一致公設系統，必定是不完備的。
(即除非這個系統很簡單，能敘述的不多，或是包含矛盾的，否則必有一真的敘述不能被證明。)
2.任何一個足夠強的一致公設系統，必無法證明本身的一致性。
(所以除非這個系統很簡單，否則你若在此系統裡，證明了本身的一致性，反而已顯出它是不一致的。)

就是這兩條鐵率徹底粉碎了數學家們的希望，再講白一點，不完備定理就是說，不論在什麼公設系統之內，總會有個 "看起來很合理" 的敘述，而無法在系統內被證明，因為不管你加多少公設，總有一個敘述是證不到的。用更簡單的物理例子來說明，例如牛頓三大運動定律，必定無法由其證明本身是對的，所以要證明靜者恆靜，可能需要有更大的系統來解釋，而那個系統也並定會存在本身無法解釋的事情。

所以要造出一個完美的公設或系統，使系統能包含一切且不會產生矛盾，你將無法由理學中得到，你必須靠數學以外的東西，最後也許是你個人的哲學、信仰或神學…。而幾乎在同一時期，物理學界也爆發了量子理論的爭論，彷彿歌德爾不完備定理告訴了我們，沒有系統是完備且一致的，沒有能被完美設定的公設。
那海森保測不准原理就告訴了我們，即使想用實際觀測而非定義來確定前提，也沒有事件是可以測的準的。沒有了測的準的前提，沒有了完備的論證，邏輯思考的神聖地位，人類終將達到全知全能的夢想終於宣告粉碎。

結語：

看來，理性邏輯，以至於科學發展，也未必是建構在完美的基礎之上呢，或者說，它也只是人類許多能力中，較為發達且實用的一種吧，卻未必是達到究竟知識的最好方法。人們也同樣擁有了許多其他、甚至還未開發的能力，又有誰能肯定邏輯是認識真理唯一且正確的路徑呢?或許，不久的將來，我們的子孫們能找到更好的方法認識這個世界，例如直覺、第六感…等，那時，就像我們對那些信神拜佛的長輩們感到可笑一般，也會有些小孩指著我們這群老人說：「你們怎麼還在相信邏輯科學啊，真是迷信。」

所以我們有時也該多敞開心胸，接納許多不科學的聲音，當我們指責他人不理性，沒邏輯的時候，或許是該多想想，符合邏輯的你，是否真的是站在真理的一方呢?

第一次看賽車就上手

現在書店裡面很流行一種書：「第一次 XXX 就上手」。XXX 可以填的東西包羅萬象：正常一點的諸如「下廚」「化妝」「買基金」，奇怪的好比「帶母乳寶寶」「當客服人員」「網聚」，但筆者看過最有用的大概就是「把妹」了吧……不管那些主題是什麼、有多怪，書總是薄薄一本，而且還要人花個兩三百塊去買，簡直沒有天理！富有正義感的筆者深深感到這個社會的扭曲，也深深感到自己有著爲這個社會注入一股清流的責任！於是，筆者決定下筆寫一篇淺顯易懂又不用收錢的「第一次看賽車就上手」，藉著筆者對賽車的一點了解，讓各位從車子的構造、駕駛的基本技巧、對時下流行的甩尾的觀念，到欣賞一場精彩的賽車，都能有通盤的認識！廢話不多說，我們趕快開始吧！

(註：如果「時空 31」這本書要收錢，請洽詢總編茅耀元。)
(如果不用付錢就可以拿，那當然就不用這個註了啦 XD)

(這段我想放這張圖，然後把引擎傳動等等的系統圈出來稍微註解一下，不過這跟版面有很大的關係，所以我暫時沒有做，看到時候怎麼跟美編協調。)

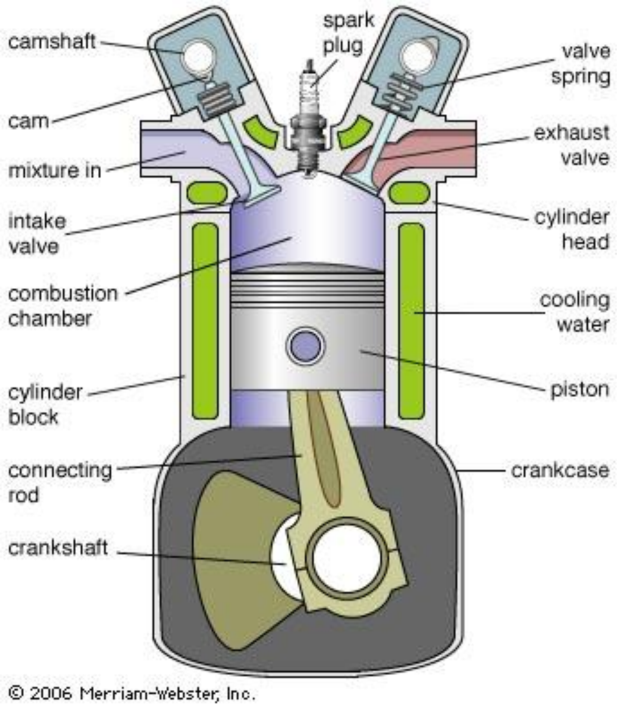
<u>車子是什麼？可以吃嗎？</u>

當然不能吃！

那這個不能吃的東西到底是什麼呢？車子這玩意兒，不像大家想像中那麼複雜、可怕。先讓我們來想想車子是怎麼動起來的：第一是提供動力的引擎，再來是把動力傳遞到輪胎上的傳動系統，最後是真正接觸地面、讓車子往前跑的輪胎。車子能動起來，也得能夠停下來，執行這項工作的就是煞車系統。上面提到的這些車子的「器官」都得放在一個「骨架」上，這個「骨架」就是底盤系統。最後，是要讓車子看起來像台車子的東西，也就是車殼。說穿了，車子也不過就是能動起來、能停下來、有個殼的無生命體罷了！

看完上一段，各位可能會心想：「廢話！誰不知道車子能跑能停有個殼啊！」如果各位想要看些有點學問的，沒問題！讓我們依照順序一個一個來看看吧！

引擎，是車子的心臟，是動力的來源。引擎是怎麼運作的呢？我們來看看右圖(就是下面那張)。引擎最主要的部分有燃燒室(combustion chamber)、進氣門(intake valve)、排氣門(exhaust valve)、活塞(piston)、曲軸(crankshaft)，而引擎的一個工作循環分爲四階段：進氣、壓縮、膨脹、排氣。在進氣階段，進氣門打開、活塞下降，原本在進氣門外的油氣混合物被吸進燃燒室中。在壓縮階段，進氣門關閉、活塞上升，燃燒室內的油氣混合物被壓縮而使得溫度、壓力皆上升，等到活塞上升到接近最高點時，油氣混合物會被點燃，汽油引擎是由一個叫做火星塞(spark plug)的點火裝置點燃、柴油引擎是靠壓縮過程引起的溫度上升來點燃。在膨脹階段，被點燃的油氣混合物膨脹，進而推動活塞往下移動，這個階段是真正動力輸出的階段。在排氣階段，排氣閥打開、活塞上升，把燃燒完成的廢氣推出燃燒室，準備下一個循環。



(小 column，介紹爲什麼 F1 引擎轉速可以這麼高)
爲什麼 F1 的引擎聲聽起來比一般的車尖銳這麼多？
F1 的引擎最高轉速可以到 19000rpm，而一般汽車到 6000~7000rpm 就是極限了。
引擎的一個先天設計限制是活塞的移動速度(注意是移動速度而非轉速)，而因爲 F1 引擎的衝程(活塞上下行走的長度)非常短，所以在同樣的移動速度底下，F1 引擎的轉速可以比一般汽車引擎高出非常多。

傳動系統，是負責把引擎的動力從曲軸接出來，並傳遞到輪胎上的一套系統，其中最重要的就是變速箱與離合器。有騎過變速腳踏車的想必是對變速箱已經有點概念了，裝在腳踏車後輪上面的那一堆齒盤就是所謂的變速箱，只是在汽車上的變速箱不一定會直接連接在輪上罷了；而變速箱的功用就是改變輸入端轉速(也就是汽車的引擎轉多快或腳踏車的腳踩多快)和輸出端轉速(輪子實際轉多快)的比例。舉個例子，假設引擎轉速最高可以到 8000rpm(rpm=revolution per minute，每分鐘轉幾圈)，而變速箱一檔的輸入：輸出是 4：1，那輪胎的轉速就是 2000rpm；如果變速箱六檔的輸入：輸出是 1：1，那輪胎的轉速就是 8000rpm。

那離合器又是什麼呢？腳踏車上沒有聽說過什麼離合器啊？大家可能有試過把腳踏車放在最輕檔，拚了老命踩快，再突然換到最重檔，然後腳就會突然覺得好像堵到什麼東西一樣，瞬間就踩不快了。筆者只能說，盡量別這樣玩，很傷膝蓋……汽車也是一樣的道理。同樣拿剛才的例子好了，假設車子現在在一檔，所以輪胎的轉速是 2000rpm，但現在突然從一檔跳到六檔的話(千萬別這麼做！)，理論上輪胎的轉速應該瞬間變成 8000rpm。各位物理都很好，單位時間內角速度改變量越大，意思就是力矩越大。在很大的力矩之下引擎和變速箱都是很可能壞掉的，就像人的膝蓋一樣。離合器就是爲了避免這種突然的劇變所產生的，它其實就是連在輸入與輸出端、跟著它們一起轉動的兩片東西，而這兩片東西是靠彈簧及一些機構給頂在一起的。當變速箱換檔時，輸入與輸出端出現了轉速差，這時候這兩片東西之間就開始產生相對滑動；經過一段時間之後，因爲動摩擦力的關係，兩片東西之間的相對滑動就消失、變成一樣的轉速在轉動。動摩擦力越小，那段讓兩片東西轉速同步的時間就越大，突然的劇變就可以被避免。而讓動摩擦力越小的方法就是讓那兩片東西不要頂那麼緊，這個工作以前是靠人去踩離合器踏板來達成，但現在越來越多的自手排車都可以靠電腦來幫忙做了。另外，自排車雖然也有同樣功用的機構，名叫扭力轉換器，但作用原理卻是不盡相同。

接下來要提的是輪胎和煞車系統。各位可能覺得輪胎沒什麼好提的，錯！如果要選出一個整台車上最重要的地方，那一定是輪胎！女生可以試想穿著高跟鞋跑操場是多麼痛苦的感覺；男生可以試想運動會的時候穿釘鞋的人衝得比穿慢跑鞋的人快多少。輪胎就是車子的鞋子，鞋子不好，再會跑也是枉然！對於輪胎來說，最重要的兩個參數就是胎寬和直徑了。胎寬越寬，輪胎與地面的接觸面積越大，抓地力也就越好；直徑越大，施力臂就越長，同樣輪胎轉速下可以跑更快。於是很多人改裝輪胎的時候，就是一昧得把胎寬換寬、直徑換大。看似很合理，其實完全錯誤！胎寬越寬抓地力越好，換個說法就是摩擦力越大，這可是耗油的元凶啊！直徑越

大同樣輪胎轉速下跑越快，但問題是直徑越大代表著輪胎轉動慣量越大，要達到一樣的輪胎轉速是更困難、甚至是不可行的！談到煞車系統，現在大部分汽車的煞車系統都是碟式煞車，也就是在車輪上再鎖上一片圓形的碟盤，再利用一個名叫卡鉗的機構去夾那片碟盤，達到煞車的效果。那碟盤是不是也是越大越好呢？畢竟半徑越大力臂越大，煞車起來應該更有力吧？很遺憾，答案還是錯！煞車力道的極限是要看輪胎與地面之間的摩擦力來決定的，如果這個摩擦力很小，但碟盤太大、煞車力太強，那麼輪胎就會直接被鎖死，車子不但停不下來，還控制不住呢！由此我們可以看見，輪胎和煞車雖然看似簡單，學問可是多多喔！

底盤系統大致包含了車架部分與懸吊部分。不管是引擎、傳動系統、輪胎、懸吊、車殼，通通都是裝在車架上，裝上去聽起來很簡單，但裝在哪可是大大的影響車輛的表現喔！基本上最好的狀況就是車架前半部的總重量跟車架後半部的總重量剛好爲 50：50，這樣的車重分配可以讓車輛的操控性最好；同時重量越集中在中心越好，這樣可以讓全車的轉動慣量下降，提升轉彎時的靈敏度。另外，車架的剛性(施力與形變量之間的比例)是非常重要的一個參數，試想你的車是由「統一布丁」所做成的，那我想這台車只要一轉彎就扭得亂七八糟，更別提什麼車輛的平衡性、操控性了。那麼懸吊系統呢？懸吊系統大家都學過：$F_{ext} = m\frac{d^2}{dt^2}x + c\frac{d}{dt}x + kx$，這就是最基本的懸吊系統：外力經過了彈簧的緩衝、減震器的能量吸收、最後變成施加在車上的力。彈簧與減震器就是懸吊系統的核心：彈簧負責支撐全車的重量、緩衝路面施加在車上的力；減震筒負責吸收路面施加在車上的力。沒有了懸吊系統，車子就只是一個方塊，撞到東西就飛起來，不僅坐起來不舒服，也沒辦法讓車輪乖乖地貼著地面。

最後我們來看看車身。車身的長相是很多人喜不喜歡一台車的最主要原因，但車身可不只是爲了好看而已！空氣阻力的公式各位應該也都不陌生：$F = \frac{1}{2}C_d\rho Av^2$，其中 ρ 是空氣密度、A 是物體迎風面的截面積、v 是物體速度、Cd 是與物體幾何形狀有關的風阻係數。如果車身設計得不好，風阻係數很大，那麼它在高速行駛下的空氣阻力就會很大，結果就會是高速下的加速性能減弱、極速降低、油耗還上升。另外，好的車身設計還可以增加所謂的下壓力：下壓力指的是空氣流經車身時，施加在車身得向下的力。增加下壓力可以使得輪胎抓地力上升(因爲正向力上升的關係)，進而使得車子在彎道的速度可以更快。各位可能會覺得：不過就是空氣嘛，是能產生多大的力量？讓我告訴各位：現在的 F1 賽車，可以在時速 300km/h 的速度下產生 1.5 噸的下壓力，是賽車本身重量的 2.5 倍！多了這麼多的正向力，各位就可以想像 F1 賽車爲什麼可以用快得不可思議的速度通過彎道了吧！

<u>賽車技巧大解密！</u>

當筆者在升大三暑假，籌辦迎新宿營時，系學會正流行玩一款叫作 Gran Turismo 4 的擬真賽車遊戲(應該可以寫吧 XD)。大家都以爲玩賽車是很簡單的事情，但當他們玩過了才覺得奇怪：爲什麼彎道都過不去，都會衝出跑道呢？爲什麼前面的車旁邊明明都有很大的空位可以超車，可是都超不過去呢？玩不起來的結果就是，擬真賽車遊戲就被大家玩成暴力賽車遊戲，比賽的目的從獲勝變成了撞爆敵車，好好的一款遊戲就這樣被糟蹋了……身爲熱愛賽車的筆者怎麼可以放任這種傷天害理的事情不管呢？！在這裡筆者就要義不容辭地告訴各位如何輕鬆寫意地成爲賽車大師！

首先，要成爲賽車大師，第一件要學的事情就是*「踩煞車」*！Sounds funny right? Absolutely not! 就像只會微分不會積分的人考試一定完蛋一樣，只知道踩油門不知道踩煞車的人的下場只有一個：撞上所遇到的第一面牆壁……所以，請務必記得：在進入彎道前確實地踩下煞車！

再來要介紹的是一個簡單的高中物理公式：(a=V^2/R)，固定向心加速度 a，速度平方與曲率半徑成正比。這個簡單的觀念告訴我們什麼呢？它告訴我們：過彎時，因爲輪胎的抓地力有一定的極限(也就是向心加速度有最大值)，所以要提高速度，就必須尋找曲率半徑最大的路線走，也就是所謂的*「外內外」*！外內外的意思是在入彎時靠近外側、在彎道中靠近內側、在出彎時再度靠近外側，以達到曲率半徑最大的效果。

接下來各位要學習的事情是：欲速則不達。我拿這種老掉牙的話來說教，不是沒有原因的：各位一定認爲要把車子開快，就要在不會衝出跑道的前提下盡量踩油門吧？很遺憾，這是錯的。車子在入彎時的速度越快的結果，就是車子的行進方向就越不容易改變(想想 a=V^2/R 吧)；車子方向不容易改變的結果，就是都已經要出彎了，車頭還沒對準下一條直線跑道；沒對準直線跑道的結果，就是不能大腳踩油門加速，甚至必須減速，除非你想衝出跑道；出彎不能加速的結果，就是跑不快。See? 從入彎速度快的前提竟然得到了出彎跑不快的結果！這時候 dilemma 就來了：我到底應該選擇入彎快一點、出彎跑不快，還是應該選擇入彎慢一點、出彎跑得快？在一般的情況下，彎道的長度是遠遠不及直線的長度的，更不用提彎道的前面一小段了。所以爲了在較長的直路上跑得更快，比較好的做法應該是在入彎時慢一點，讓車頭更早一點對準下一條直線，然後就可以更早一點加速，這就是所謂的*「慢入快出」*！

各位在看熱血的賽車卡通時，是不是覺得激烈地轉動方向盤的主角真是帥呆了呢？可惜，激烈地轉動方向盤，真的就純粹只是帥呆了而已，沒有任何其他好處啊！實際上，前輪所轉的角度比起車子真正轉向的角度，總是要來得更大一些，這兩者之間的差叫做滑動角(slip angle)，它的物理意義是：由於輪胎是彈性體，所以在轉動時，與地面的摩擦並不是完美的靜摩擦，而是含有動摩擦的成分在。而滑動角與轉向力的關係是非線性的正相關：大約在滑動角小於 4~6 度時，滑動角與轉向力成正比，大約超過 8~12 度後，轉向力即達到臨界值，不會再隨著滑動角的增大而增加。所以，當車子在過彎時，如果轉向力已經到達了極限，那麼方向盤轉得再多，車子也不會轉向得比較快，只會讓輪胎與地面的動摩擦成分更大，更快把輪胎磨光而已；相反地，如果可以準確的轉動方向盤，不做劇烈的轉動，那麼不僅可以維持速度、保護輪胎，駕駛

起來也會輕鬆順暢，也就容易開得快。這就是所謂的*「舵角越小、速度越快」*！

談完了基本的賽車技巧，各位是不是感覺到自己已經是個賽車大師，摩拳擦掌地準備下場，跑出個嚇死人的成績，再好好炫耀一番呢？Nonono，我敢說現在的你還沒出師！一場真正的賽車比賽，可不是開得快的人就是贏家！大多數正式的賽車比賽會分成排位賽與正賽：排位賽是比較最快單圈成績，以決定正賽的起跑順序；正賽才是真正有積分可拿的比賽。排位賽是只看單圈成績，開得快的人也許可以在排位賽時取得第一，而在正賽時排在最前面起跑。但正賽是長時間、長距離的比賽，就算是一般的房車賽也要跑個二十多圈、四十多分鐘，這時候比較誰開完一圈的時間最短就沒有太大的意義了：用最快的速度開完每一圈的代價是消耗大量的體力與集中力、磨損大量的輪胎、燃燒大量的油料，結果好的話可能每一圈都比別人快半秒，但是爲了換輪胎和加油多花了別人半分鐘，結果不好的話可能就是體力不足開不完、集中力不足失誤連連、輪胎磨損太嚴重而失去抓地力、油花得太兇而跑到沒有油……所以，不是能跑出最快單圈的車手就是最快的車手；能在需要超車或擺脫對手追擊的時候展現驚人的速度、也能在需要保留實力的時候展現穩定性的車手，才算是最快的車手！同樣的道理，真正的賽車比賽是比一整年的，冠軍是在一整年中拿到最多積分的車手，所以不是能跑贏一場比賽的車手就是最快的車手，能在一整年中的每一場比賽都穩定地拿到前面的名次的車手，才是最快的車手！

甩尾好帥啊！怎麼不甩呢？

「阿斯拉，在下一個彎道使用過彎加速！」——《閃電霹靂車》

「AE86 還是利用嫻熟的飄移技術超越了 GTR，眾人都相信了平時不作聲的拓海已經身懷絕技……」——《頭文字 D》

不管是從伴我們走過童年時光的卡通《閃電霹靂車》、《頭文字 D》，還是從時下諸多的好萊塢動作電影，相信各位一定都看過類似的橋段：一輛又一輛的車後輪摩擦著地面、冒著白煙，像是溜冰般地滑行在彎與彎之間，速度好快、好刺激啊！沒錯，這種極具速度感與視覺張力的高難度動作就是所謂的「甩尾」！

其實，在這些華麗炫目的甩尾動作底下，其實可是潛藏著各式各樣不同的技巧的喔！比較主要的技巧有利用手煞車來鎖死後輪的 hand-brake drift、利用強大動力來達成的 powerslide、利用換檔時引擎與傳動軸的轉速差的 shift lock、利用點放離合器來破壞車輛平衡的 clutch kick、利用煞車和油門改變車身重心的 brake drift 和 lift off、利用車身的左右擺動來使車尾甩出的 inertia drift，和把後輪開進泥地的 dirt drift 等等。說了這麼多，只是充充版面而已(編按：還敢講！)。其實萬法歸一，不管是使用什麼樣的技巧甩尾，主要原理就是想辦法破壞後輪與地面之間的靜摩擦，使其進入並維持在動摩擦的狀態，就這麼簡單嘛！

不過，當我們看著電視，享受著車子在彎道中驚險地甩進又甩出所帶來的快感的同時，有

沒有仔細地想過車子要如何在彎道中穿梭才會快呢？而行文至此，各位是否有發現，在甩尾的速度感底下，其實是另有蹊翹呢？我深信擁有深厚物理基礎的各位一定知道我在說什麼：車子在甩尾的時候，後輪是處於動摩擦的狀態，所以地面施給後輪的反作用力，也就是推動車子的力，是動摩擦力；而動摩擦力又比最大靜摩擦力來的小，所以車子想要開得快，應該要利用地面給車輪的最大靜摩擦力，也就是用一般的循跡開法才對。這麼說來，甩尾過彎的時候，車子怎麼可能會快的起來嘛！聰明的你，猜對了嗎？

「蛤～好失望喔～」當筆者把上述事實告訴筆者的姐姐的時候，她很沮喪地這麼回應，「那電視上看到那些車子在甩尾，全部都是騙人的、好看而已囉？」看樣子她可得 low 上好一陣子了……可是，真的是這樣嗎？真的只是好看而已嗎？甩尾真的一丁點兒好處也沒有嗎？臣服在物理學定律下的各位想必認爲甩尾已經走到窮途末路了吧。不過，事情沒這麼簡單！

讓我們來看個比較特殊的例子：當一台車在冰上過彎時，因爲輪胎在冰上的抓地力很低，所以用一般的循跡開法時，不管是入彎或出彎的速度都會很慢。但如果是用甩尾來過彎的話可就不一樣了，甩尾時車輛可以很快地進入彎道，不需要太過考慮抓地力的問題，這是甩尾的一大好處；同時，車頭所指的方向也會很快地改變，使車頭更早指向彎道的出口，也就更早出彎，這是甩尾的另一個好處。看完了特殊的例子，現在來看看比較貼近日常生活的例子吧：各位可能多數都有汽車駕照了，沒有駕照的也都看過長輩們開車，所以想必各位都很了解路邊停車的困難吧！又要前進，又要後退，橋了個老半天才終於硬塞進那小小的停車格中間，光用想的就覺得很麻煩，要是可以很快地停進去就好了……沒問題，只要會甩尾，一切就迎刃而解了！就算是再難停的停車格，只要車頭一轉、車尾一甩，車子一下就塞進格子裡面囉！

看完上面的兩個例子，大概就可以歸納出適合甩尾的情況了：第一，輪胎與地面的摩擦力很小，例如在泥地、沙地、雪地和冰上，或是使用較差的輪胎，所以越野賽車都是採取甩尾的跑法；第二，彎道彎曲的程度很大或路面很狹窄，例如狹小的巷道或是連續的彎道。所以《頭文字 D》裡的拓海在山路飆車使用甩尾來過彎是來其有自，不完全是隨便胡謅的！

成爲一位賽車迷！

(小 column—旗語)
旗語
黃旗

表示前方車道上有障礙物，比如一輛撞壞的或者出現故障的賽車。出現黃旗時不允許超車。

白旗

表示前方有慢速行駛的車輛。可能是救護車、拖車，或是賽會安全車輛。

紅旗

表示比賽或者試車因故提前結束。車手應該回到賽道末端的檢修車道並待命，以得知是否與何時恢復比賽。

黑旗

如果車手的號碼顯示在出發線，同時旁邊有黑旗出現，表示車手在跑完這一圈之後需要向檢修站匯報。當一名車手在比賽中犯規的時候，需要向車手出示黑旗。出現這種信號時，一般來說車手有可能被取消比賽資格。

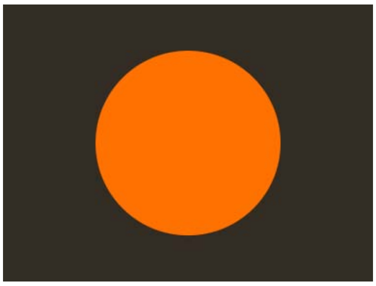
藍旗

表示後方有領先一圈的車輛正在接近，並且準備超車。車手就應該往側靠攏，為後來居上的賽車讓路。

綠旗

表示前方存在的障礙已經得到清除，比賽恢復正常。

黑底橘圈旗



如果車手的號碼顯示在出發線，同時旁邊有黑底橘圈旗出現，表示車手需要立即與檢修站取得聯繫。當比賽官員懷疑車手的賽車存在機械問題而需要檢修的時候，會出示黑底橘圈旗。

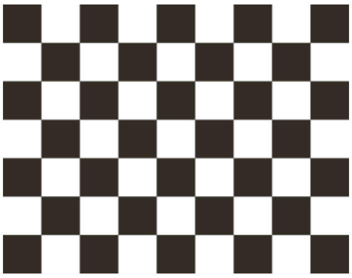
紅黃條紋旗

表示賽到前方路面有油，或者路面較滑，車手應該小心駕駛，直到信號旗收回爲止。 如果比賽官員揮動紅黃條紋旗，代表著前方不遠處就有所謂的濕滑地帶。

半黑半白旗

如果車手的號碼顯示在出發線，同時旁邊有黑底橘圈旗出現，表示車手的　　行爲違反運動精神，若不馬上改正，則會被取消參賽資格。

方格旗



當出現方格旗的時候，表示比賽或者練習賽結束了。

在台灣這個賽車運動不盛行的國家，喜歡賽車的人在家裡是很沒有地位的……拿最高等級的 F1 賽事來說，大部分的比賽時間都在台灣時間的周六日晚上或是凌晨，在這種尷尬的時段，筆者常常想要看個直播卻馬上被家人阻止：

爸爸：「出去吃飯了啦還看！」

OS：是不會在家裡吃喔……

妹妹：「我要看 SBL 啦！」「我要看喬傑立啦！」

OS：拜託妳長大一點好不好都幾歲了還在看人家打假球耍白痴……

媽媽：「都凌晨幾點了還在看，吵得要死！給我關靜音！」

OS：你家車子引擎是沒有聲音的喔……

全家人：「看車子繞圈圈有什麼好看？」

OS：全世界觀眾第二多的運動你們看不懂是你們素養不夠啦！

(P.S.全世界觀眾最多的運動是足球。)

面對這樣沒有運動素養的家人，面對這樣搶不到遙控器主控權的情況，筆者深切覺得不是辦法，於是「感化家人看賽車大作戰」就這樣在筆者家中展開了！如果你也和筆者的家人一樣，正準備一窺賽車比賽的奧妙的話，不妨一起來看看筆者是怎麼跟家人介紹看賽車的樂趣吧！

首先讓我們從排位賽開始看起。排位賽，顧名思義就是排位子的比賽。排什麼位子？排正賽起跑順序的位子！那起跑順序重要嗎？超級重要！有在騎機車的人多多少少都知道，在等紅綠燈的時候要盡量停前面一點，至少不要卡在一堆汽車後面。為什麼？等綠燈亮了你就知道停在別人的車子後面是多麼痛苦的事情：綠燈秒數搞不好都要倒數完了，你可能還被擋在那些龜速車的後面。賽車也是一樣，排在前面一個位子就是少一個人在前面擋路，何況跟平常在路上不一樣的是，前面的賽車會想盡辦法把後車檔在後面啊！所以想當然爾，各個車隊都是想盡了各種辦法要跑出最快的單圈時間囉！

在整套完整的賽事中，從各隊的練習時間、排位賽到正賽，賽車跑最快的時候就是排位賽了。在練習時間，各隊都在想辦法將車子調整到最佳狀態，而且各隊也都會隱藏實力，怎麼可以在還沒開始比賽就讓對方知道自己有多強呢？正賽期間因為要跑很多圈，如果每圈都跑很快的話，油會用得快、輪胎也磨損得快，可能因為這樣要多加一次油、多換一次輪胎，損失的時間可能更多；另外，每圈都全力跑對於車手來說也是非常消耗體力與集中力的事情。排位賽就

不一樣了，一來搶到好的起跑位子太重要了，二來排位賽到最後也只是比最快那圈的時間，所以當然就管他三七二十一，越快越好囉！

在排位賽中，因爲大家都拼了命的想開快，所以就可以看出各個車手是如何「攻略」一條賽道的，誰比較晚踩煞車、誰開得比較靠近跑道邊甚至是護欄、誰走的路線跟大家都不一樣……；或是可以看出各車隊的車子在某條賽道上的競爭力，哪台車在直線特別快、哪台車在低速彎道根本就不行……看得越仔細，就會發現其實每個車手的風格、每台車的特性都是大不相同喔！

現在來看看正賽吧。首先要提醒的就是：千萬記得準時開電視！起跑常常都是整場比賽最精采的時刻！最容易超車的時間地點就是在起跑第一圈的第一個彎道，那時候所有的車都離得很近，技術好的車手一次就可以超掉好幾台車，相反地菜鳥也可能一次掉好幾個位子；也是因爲所有的車都離得很近，最容易發生事故的地方也是在起跑第一圈的第一個彎道。慢慢地，一圈兩圈過去了，快的車就會開始拉開差距，超車和事故的頻率就會慢慢下降了。

(小 column，介紹真空帶)
真空帶是什麼？有什麼用？
真空帶，又稱低壓區，是車輛高速行駛下在車後所產生的一小塊氣壓較低的區域。在直路上利用真空帶來超車是非常重要的一項超車技巧：當後車進入前車的真空帶時，空氣阻力會比較小，於是加速會比較快；而當直線夠長的時候，後車就可以獲得比前車更高的速度，進而超越前車。但真空帶向車後延伸的範圍很小，所以要進入前車的真空帶是很困難的。在實際的賽事中，常常看到後車積極地想要進入前車的真空帶卻一直失敗，此時後車不但沒有辦法有足夠的加速度超越前車，反而還會因爲吸入前車過多的廢氣而導致引擎輸出下降，於是當後車遲遲無法超越前車時，後車常會乾脆與前車保持一段距離或是直接進維修區加油換胎。

當然，在賽事中間也是有很多精采的超越鏡頭的，而且在賽事中間不像起跑的時候那麼混亂，所以超越所需要的技術更是精湛喔！一條賽道容不容易超車，要看賽道的寬度、直線的長度、彎道的設計……等等，而很多賽道容易超車的地點只有一兩個，有些甚至沒有容易超車的地點。當車手要超越前車的時候，必須思考到他要在哪個地點超越，必須思考到在到達那個地點之前要如何維持或追近與前車的距離，必須思考到他要走什麼線路來超越前車，必須思考到他在超越成功之後要如何守住不被反超回來，必須思考到要是超越失敗的話會不會反而被拉開差距甚至被後車超越，必須思考到……相對的，防守的鏡頭也是非常精彩的！前車被追擊的時候，也要猜測後車何時要超車、要思考如何拉開差距、要選擇走哪條線路來阻擋後車……太多太多了！

(小 column，介紹爲何在直線不能擋前車)
爲什麼賽車手在直線的時候都這麼容易被超越？他們不會擋住後面的車嗎？
比賽中，在直線阻擋後車超越是惡意且犯規的行爲；另外，落後一圈的車不論在哪裡都必須讓

領先一圈的車輛通過。

在賽事中也不是只有賽道上的攻防戰好看而已，車隊策略也是觀賽一大重點！可能有些車的速度不怎麼快，是因為車子的油載很重，可以少進去維修區加油換胎；而有些車的速度非常快，是因為車子的油載很輕，但他要多進幾次維修區加油。哪樣好？不一定！也許某條跑道的維修區很長，進去加一次油就要很久(維修區是有速限的)，那重油載的車可能佔點優勢；但搞不好比賽道一半突然下雨，車子非得進維修區換輪胎不可，那重油載的車的優勢就不見了；又搞不好輕油載的車出維修區以後剛好被慢車擋住跑不快，而重油載的車出維修區以後一路都沒有阻礙，那輕油載的車的優勢就又不見了……影響比賽的變數非常多，欣賞車隊如何因應這些變數也是非常有趣的！

(小 column，爾虞我詐的 pit lane)

爾虞我詐的 pit lane—有趣的車隊策略

自古以來，在戰場上有著不變的真理：「兵不厭詐」。在賽事中，各個車隊都會互相猜測對方何時會進維修區、要加多少油、要換哪種胎，並藉此來調整自己的進站策略。F1 車隊之間的互相猜忌更是有趣，當他們知道對方在觀察自己時，他們有時會故意將所有賽車進維修區需要用到的東西通通搬出來，讓對手以為他們的車要進站了，然後過一段時間再通通撤回去，藉此欺騙對手。

如音隨形——中文的美麗世界

中文字可以說是世界上最難、最複雜、構造最美的文字。自傳說中倉頡造字以來，中文字經過三、四千年的發展，自古至今已接近十萬之數。在多如牛毛的漢字中，學問自然是不小的。即使你身爲一個華人，認識的中文字可能也不到五千個。記得前陣子在網路上看到一篇文章：「21 個最難的中文字」，真實性雖然有待確認，但也凸顯出了中文的美感與複雜。

21 個候選「最難漢字」

1	[illegible]	同譸、侜，音周，意指作偽、欺騙
2	[illegible]	「戀」的異體字，《異體字字典》網絡版
3	△	「口」，未能證實
4	[illegible]	同「邦」，古字，《漢語大字典》湖北辭書出版社、四川辭書出版社
5	𰻞	指陝西特色麵食，未能證實
6	[illegible]	「一」的異體字，未能證實
7	[illegible]	解驅魔，未能證實
8	[illegible]	同「鸓」，一種鼠型飛鳥，《漢語大字典》湖北辭書出版社、四川辭書出版社
9	[illegible]	「巨」的異體字，《異體字字典》網絡版
10	[illegible]	解「葵」，未能證實
11	羍	小羊，《漢語大字典》湖北辭書出版社、四川辭書出版社
12	[illegible]	「互」的異體字，《異體字字典》網絡版
13	[illegible]	「衰」的古字，《漢語大字典》湖北辭書出版社、四川辭書出版社
14	仚	解「人在山上」，同「仙」，《漢語大字典》湖北辭書出版社、四川辭書出版社
15	[illegible]	同「褎」，《漢語大字典》湖北辭書出版社、四川辭書出版社
16	[illegible]	音「囿」，解「園」，《漢語大字典》湖北辭書出版社、四川辭書出版社
17	[illegible]	「壹」的古字，《漢語大字典》湖北辭書出版社、四川辭書出版社
18	[illegible]	音「祇」，同「支」，《漢語大字典》湖北辭書出版社、四川辭書出版社
19	[illegible]	音「存」，但網頁所指「河流」的意思，則未能證實，《漢語大字典》湖北辭書出版社、四川辭書出版社
20	[illegible]	解「行雷」，未能證實
21	●	解「一」，未能證實

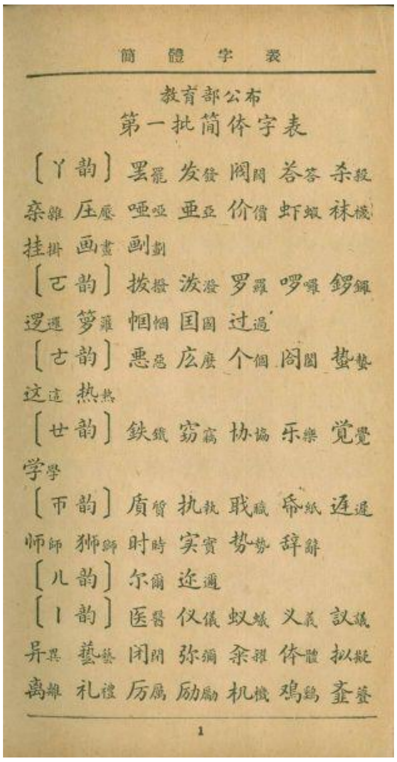
繁體・简体・正統與潮流的鬥爭？

還記得前年曾經有則新聞在網路上流傳：「聯合國文件廢繁體字？2008 改用簡體爲唯一標準」。這篇新聞遭到大量轉寄、轉貼，引起了許多人的恐慌，好像台灣要滅亡了一樣。甚至當時的國民黨主席馬英九也「語氣堅定地表示，近日聽聞聯合國將會廢除中文繁體字，他個人非常反對，屆時一定會想盡辦法來阻止。」過了幾天還有立委在立法院砲轟教育部長杜正勝「沒有積極捍衛正體中文」。整件事的最高潮是有人在網路上發起萬人連署要向聯合國抗議，呼籲

大家不要讓「美麗又具有歷史意義」的繁體字從世界上消失，引起了各方熱烈的討論。雖然後來事實證明這只是中國媒體製作出來的假新聞，被東森新聞盲目抄襲造成的烏龍，但這也使得繁體和簡體之爭也再度浮上臺面，究竟其中有麼特別的原因才導致簡體字的出現，又簡體字是否一點道理都沒有呢？我們又應該用什麼樣的態度看待簡體字？

簡體字的歷史其實是源遠流長，不說別的，其實中國字從甲骨文、金文變爲篆書，而後變爲隸書、楷書，本質上就是一種由繁到簡的嬗變。

自南北朝、隋唐以來，民間便有大量使用俗體字的紀錄，例如「尔、盖、刘、营、寿、尽」等等，中共今天使用的許多簡化字，在這時候就已經開始出現；宋代發明了印刷術，簡體字由碑刻和手寫轉到雕版印刷的書籍上，從而擴大了簡體字的流行範圍，數量大大增多，宋元明清 12 種民間刻本中所用的簡體字多達六千多個。但說到歷史上首次給與簡體字合法地位的，卻是 1851 年至 1864 年的太平天國。爲了提升識字率，在太平天國玉璽及官方文件都有許多簡體字的存在。經非正式統計，太平天國總共使用一百多個簡體字，其中 80%爲後來的中共採用。



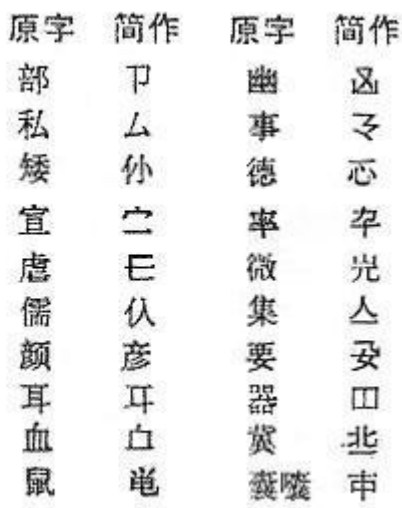
簡體字表

教育部公布
第一批簡体字表

［ㄚ韵］罢罷 发發 阀閥 荅答 杀殺 杂雜 压壓 哑啞 亚亞 价價 虾蝦 袜襪 挂掛 画畫 划劃
［ㄛ韵］拨撥 泼潑 罗羅 啰囉 锣鑼 逻邏 箩籮 帼幗 国國 过過
［ㄜ韵］恶惡 庅麼 个個 阁閣 蛰蟄 这這 热熱
［ㄝ韵］铁鐵 窃竊 协協 乐樂 觉覺 学學
［ㄭ韵］质質 执執 职職 帋紙 迟遲 师師 狮獅 时時 实實 势勢 辞辭
［ㄦ韵］尔爾 迩邇
［ㄧ韵］医醫 仪儀 蚁蟻 义義 议議 异異 艺藝 闭閉 弥彌 籴糴 体體 拟擬 离離 礼禮 厉厲 励勵 机機 鸡雞 虿蠆

1

歷史上第一次公開提倡使用簡體字，是在 1909 年（宣統元年），著名的教育家陸費逵發表了論文《普通教育應當採用俗體字》。1919 年（民國 8 年）五四運動展開，隨著白話文逐漸取代了文言文，許多學者認爲，要提昇國人的知識水準必須先提昇識字率，欲提昇識字率便要將複雜的中國字簡化。五四運動的領導者、前台大校長傅斯年曾經說過：「漢字起源是極野蠻，形狀是極奇異，認識是極不便，應用極不經濟，真是又笨又粗，牛鬼蛇神的文字，真是天下第一不方便的器具。」魯迅也曾經說過：「漢字不滅，中國必亡。」從現代的眼光來看，這些知識份子的說法是誇張了點，但在一定的程度上也反映出當時時代的潮流。錢玄同於民國 9 年發表《減省現行漢字的筆畫案》一文。兩年後，錢玄同等人又提出 8 種漢字簡化策略，這是第一次系統化的提出漢字簡化方法，也是後來當局推行簡體字的重要基礎。



值得一提的是，最早在中國推行簡體字運動的其實是國民政府。民國 21 年，國民政府教育部公佈了《國音常用字彙》，收入不少簡體字，並指出：「現在應該把它（簡體字）推行，使書寫處於約易。」民國 24 年是關鍵的一年，教育部採用錢玄同編成的《簡體字譜》，公佈「第一批簡體字表」，共有 324 個字，雖然在隔年 2 月因爲抗日戰爭及內部戰亂的關係又通令收回，但卻是歷史上第一個由政府公佈的簡體字表（如右圖）。

抗日戰爭結束後共產黨取得政權，便立即著手繼續推行簡化漢字。中共在 40 年代陸續通過了《漢字簡化方案》等方案。民國 41 年當局宣稱使用「述而不作」作爲漢字簡化的原則，即主要是採用通行已久的俗體字或筆畫簡單的異體字，而不另創新字，本意老實說是不錯的。（不過這點其實唬人的成份居多，下面提到的《簡化字總表》裡，有不少壓根不知道從哪來的、沒有在過去任何文獻和資料中出現過的字。到了 66 年的「二簡」更是天馬行空、不知所云）

現用的標準簡體字是在民國 53 年正式定案的，中共發佈了《簡化字總表》共 2236 字，這是現今中國簡體字的基石，據政府的說法是要「更方便快捷地推廣中文，掃除文盲、提高國人識字率」。後來民國 66 年「第二次漢字簡化方案（草案）」（即「二簡字」）公布，這一次實在簡得太過頭了，很多人覺得失去了文字美感，引起國內外相當大的反彈聲浪，這個方案把一些不應該簡化的字簡化了，並且簡化得過於簡單，例如將「展」簡化爲「尸」下加一橫，在當時被形容爲「屍橫遍野」（如右圖）。於是二簡字在民國 75 年遭廢除。

許多人提到簡體字時，往往帶入許多政治的因素，例如有人認爲，當初毛澤東和周恩來在文革時期推行簡體字時，一部分原因也有加強人民的國家認同、操弄集體意識的目的，當然這點已經不可考了。不過毛澤東在 50 年代說過「漢字是一種落後的字體」，所以「必須要改革成像拉丁文那樣」，方便學習及辨識，老毛的本意是要將漢字漸進改革爲羅馬拼音（君不見現在許多網路遊戲還可以看到對岸的網民大量使用拼音聊天，像 ni hao（你好）、gong xi fa cai（恭喜發財）之類），由繁入簡，當然這點到現在仍然沒有實現，可說是中國文化的萬幸。

有人認爲，簡體字破壞了「六書」的造字原則，許多簡體字簡化的原則往往只是將偏旁用同音的字或簡化的筆劃取代，違反了中文的發展原則，網路上也有流傳一段有趣的文字諷刺簡體字：「亲（親的簡字）不見，产（產）不生，厂（廠）空空，爱（愛）無心，乡（鄉）裡無郎，有云（雲）無雨，运（運）無車，导（導）無道，飞（飛）單翼。」然而從客觀的角度來說，當初自五四以來，一開始學界大頭們創造簡體字的原則是好的，例如前面提到的「述而不作」，只採用通行已久的俗體字或筆畫簡單的異體字，而不另創新字（如禮簡爲礼、無簡爲无，這些簡字早已流行於民間），或是按照六書的原則創造新字，例如：形聲字（鄰簡爲邻、護簡爲护）、會意字（體簡爲体、眾簡爲众），或是省去字型的一部分（麗簡爲丽、廣簡爲广），但我們可以看到，後來中共製作簡體字的過程並沒有完全遵照中文發展的原則，例如鳳簡爲风、衛簡爲卫，原字的精神可說是蕩然無存。有些字則是沒有按照系統化的方式縮簡，例如聞簡爲闻、闡簡爲阐，但是開卻簡爲开、關簡爲关，讓人摸不著標準在哪裡。

現代簡體字其中一爲人詬病的地方，便是使用「假借」的原則簡化字，美其名是遵照「六書」的方法，但卻造成不少混亂。例如後簡爲后、麵簡爲面、髮簡爲發、隻簡爲只等等，於是就出現了以下的笑話：「我下面（麵）給你吃吧！」（看不懂的請跳過，本書爲清新、優質的優良刊物），這種簡字的方法在「二簡」中更是發揮到了淋漓盡致，讓人不禁懷疑這些簡字的學者是不是打從火星來的，例如把澳簡爲沃、傅簡爲付、戴簡爲代、蛋簡爲旦，還有把數個不同偏旁的字全部統一的，像糊、蝴、葫、猢全部簡爲「胡」；叮、釘、盯、靪全簡爲「丁」，造成的問題之大簡直無法想像。

有邊讀邊，無邊讀中間，沒有中間自己編？

「石室詩士施氏，嗜獅，誓食十獅。施氏時時適市視獅。十時，適十獅適市。　是時，適施氏適市。氏視是十獅，恃矢勢，使是十獅逝世。氏拾是十獅屍，適石室。石室濕，氏使侍拭石室。石室拭，氏始試食是十獅。食時，始識是十獅，實十石獅屍。試釋是事。」

上面這段文章一定讓許多人摸不著頭腦，但仔細一看這的確是篇有頭有尾的故事。這段《**施氏食獅史**》是一篇由趙元任所寫的設限文章，全文共 91 字，每字的漢語拼音都是 shi，注音符號都是ㄕ。這篇文言作品在書面閱讀時並沒有問題，但當用普通話朗讀或者將作品轉成拼音的時候，問題便出現了，這是近代漢語同音字多的緣故。有興趣的朋友不妨試著翻譯看看趙先生在寫什麼。

「字音」的問題，在中文中可說是相當複雜，因爲小編不是中文系的學生，所以只能單就一些表面上的問題來做定性的、歷史性的探討。總歸而言，爲什麼一個字會有好幾個音，也就是「一字多音」？君不見世界上的國家除了使用中文字的國家外，完全看不到有這種一字多音的情形，拉丁語系中充其量只有重音的不同；連日文的平假名念法基本上來說也只能算是一字多讀而已（例如撮る、取る、採る、盜る、捕る、獲る、執る，上面這些寫成平假名全部都是とる），中文這種情形在世界上可說是絕無僅有的，其中的意義值得我們來多加探討。

對於一個字的音而言，我們最常聽到的說法就是它的「讀音」和「語音」之不同，用最簡單的語言來說，讀書時發的音，謂之「讀音」；說話時發的音，謂之「語音」。「讀音」是用來讀古文詩詞時專用的音，又叫「字音」或「文言音」；語音則適用於說話、口語，由於當前盛行的白話文是根據口語寫成的，字詞都必須按照口語的唸法，所以語音也就是「白話音」。舉一個簡單的例子來說，「公共汽車」時，「車」應唸成ㄔㄜ；遇到「安步當車」，「車」便應唸ㄐㄩ。

那麼語音和讀音的不同究竟是如何產生的呢？如果我們使用科學方法中的奧坎剃刀原則檢視，直觀上來說一個字發許多不同的音，本身就是極其不合理的，尤其是中文字的數量數以萬計，與其一字多音那不如另創新字不是更爲直觀嗎？

齊鐵恨的《破音字講義》中提到：「人類語言進步，文字孳乳漸多，起初簡單的字體，原始的發音，行之日久，自然感到不敷使用。因此需要，乃有『點聲』、『發卷』以及『長言』、『短言』的注解，而破音分用的辦法就發展起來了。」破音字的歷史，最早可以追溯到漢魏時期，在古籍裡便有記載一字多音的現象，並註明使用上的時機。

除了語音讀音外，綜觀之「一字多音」可以分爲下列四類：第一類是沒有字義差別的「正讀、又讀」；第二類也是沒有字義差別的「語音、讀音」；第三類是字義不同的「歧音異義字」；第四類是「變音變調」。

第一類的來源相當簡單：因爲我們的國語是採用北平話作爲標準國語，所以北平讀法就是所謂的正讀，其他地方的讀法就統稱爲「又讀」。例如說「這一夜，誰來說相聲」的相聲橋段裡，就有村長查戶口時要「捅雞你」（統計你）的笑話。

第二類是最重要、也是在我以前參加比賽時也最混淆的便是「語音」和「讀音」，前面已經說過，讀書時發的音，謂之「讀音」；說話時發的音，謂之「語音」。會有讀音、語音之別，主要是語言在流傳過程中產生某些規律的變化所致。以目前大部分國語中分讀音、語音的字，都是由古代收入聲〔－k〕尾的字分化而來。由於國語的入聲韻已消失，因此讀音多讀不出韻尾，反倒是語音保留了一個變化後的韻尾。前面舉的「白」字，古音作〔b‘ak〕，國語就有ㄅㄞˊ和ㄅㄛˊ兩音，語音中保留了〔ㄧ〕的韻尾，讀音則失去韻尾了。其他常見的如黑、肉、熟、北、剝、薄、烙、綠、六、酪、角、嚼、嚇、削、學、摘、芍、賊、塞等字，都可以在讀音、語音中發現同樣的現象。

比較值得一提的是台語中語音跟讀音的差別。台語對於語音跟讀音的念法不同更加地講究，如果念錯了還更可能會惹人笑話。例如說馬英「九」的九念「戈衣物」，但是「九」十的九念「告」；「人」之初的人念「淋」，但是好「人」的人卻念「郎」。有趣的是如果把台語從「一」到「十」全部唸一次看看，其中只有一個字沒有讀音語音之別，您知道是哪個字嗎？答案是七。對台語有興趣的讀者不妨試試。

第三類是我們平常最常見到的破音字，例如「圈」套的圈念「ㄑㄩㄢ」、豬「圈」的圈念「ㄐㄩㄢˋ」，這類破音字往往沒有什麼規則，所以比較容易唸錯，但也容易在課本上看到。

第四類的變音變調我們也極常用到，例如「們」本來念「ㄇㄣˊ」，但放在字尾時我們都會念成「ㄇㄣ˙」；「一」本身念「ㄧ」，但是放在第四音前面時要念「ㄧˊ」、放在第一音前面時要念「ㄧˋ」，像是「一座」、「一株」等等，讀者不妨自己找找看這些生活中常見的變調。

也許你會想：哇！這麼多字、這麼多音，我究竟到底能什麼方式來辨認呢？又語音又讀音的，有時候還有所謂的又讀，是不是我隨便念都會對／錯啊？有鑑於國語發音混亂，教育部在

民國 83 年公佈了「**國語一字多音審訂表**」，將正音、又音、語音、讀音、歧音異義等不必要分讀之多音併爲一音。無法取決要使用哪個音時，則透過問卷決定。至於審訂內容以日常語彙爲主，過於冷僻的字詞、古典詩詞格律、古人名、地名的特殊讀法則暫時不予審訂、亦不收錄。常用的通假音讀，則予以保留，並在表中加以註明。「**國語一字多音審訂表**」在民國 88 年正式頒布使用，各位高中時期使用課本裡的字音，就是審定表簡化過後的產物，否則原來要更加來得複雜。

民國 83 年的國語一字多音審訂表可說是老師和學生的福音也不爲過，許多莫名其妙的字音都被大幅的簡化了，例如「畦」有讀音「ㄒㄧ」和語音「ㄑㄧˊ」，現在都統一成爲「ㄑㄧˊ」;「楔」本來正讀「ㄒㄧㄝ」、又讀「ㄒㄧㄝˋ」，但因爲怕「楔形文字」和「蟹行文字」混淆，所以「楔」的音便統一成「ㄒㄧㄝ」。另外，在「從俗」方面一字多音審訂表也做出了顯著的貢獻，西門「町」的町本來念「ㄊㄧㄥˇ」，現在從俗改成了「ㄉㄧㄥ」(不過「町畽」這個詞還是唸作「ㄊㄧㄥˇ ㄊㄨㄢˇ」),「柄」本來該讀「ㄅㄧㄥˋ」(有人這樣念嗎？)，現在都從俗改成「ㄅㄧㄥˇ」。

有些審定時無法決定該刪哪個音的字則付諸問卷，例如「勁」這個字本來有兩個音「ㄐㄧㄣˋ」和「ㄐㄧㄥˋ」，記得國中時還沒有審定表，那時判斷的原則是「指力量、力氣、精神、興味、情態、氣派時讀ㄐㄧㄣˋ；指堅強有力時讀ㄐㄧㄥˋ」，讀者可以看到這簡直是折磨人，我也從來沒有搞清楚這個「判斷原則」該怎麼用。後來審定表的說法是：因爲「ㄐㄧㄥˋ」的詞彙較多，而且偏旁「巠」音「ㄐㄧㄥ」，所以「勁」的音統一爲「ㄐㄧㄥˋ」(事實上是他們做了問卷來決定要刪哪個音)，一時之間皆大歡喜。其他付諸問卷的字例如「薄」，刪去了「ㄅㄠˊ」這個音，只剩「ㄅㄛˊ」和「ㄅㄛˋ」(薄荷）兩音。

當然一字多音審定表也有不完美之處，「骰子」的骰居然改唸成「ㄊㄡˊ」，令人百思不得其解。其他還有「乙炔」的炔「從俗」改唸成「ㄐㄩㄝˊ」，真不知道是從哪國的俗。其他一字多音審定表的優劣可以參考 wikipedia 的「國語一字多音審定表」條目。

說了這麼多，那到底有沒有比較一般性的法則能夠判斷一個字的發音呢？答案是很難，但是仍然有些字是有跡可循的。例如說有「雍」偏旁的字，除了「擁」要讀「ㄩㄥˇ」外其他全部都讀「ㄩㄥ」。有「孛」偏旁(注意只有偏旁，像「荸」就要念「ㄅㄧˊ」)的字全部都讀「ㄅㄛˊ」，像「勃」、「鵓」、「渤」等等。有「匡」偏旁的字全部都讀「ㄎㄨㄤ」，像「框」、「眶」、「誆」等等。

意義不同的判別法也有一些:「吐」這個字就有有趣的判別法：從口中出來，也就是**自己想讓它出來**時，唸作「ㄊㄨˇ」，例如「吐痰」、「吐露」；從胃中出，也就是**自己不想要它出來**，但它偏偏要出來時，唸作「ㄊㄨˋ」，例如「嘔吐」、「上吐下瀉」。只要有心裡盤算的意思時「度」就唸作「ㄉㄨㄛˋ」；其餘都唸成「ㄉㄨˋ」。跟巷子有關時「弄」讀作「ㄌㄨㄛˋ」，例如「巷弄」、「弄堂」；其餘都讀「ㄋㄨㄛˋ」。「強」這個字有「硬要」的意思時讀「ㄑㄧㄤˇ」，例如

「強制」、「強人所難」；作「健壯、有力」的意思時讀「ㄑㄧㄤˊ」，例如「強弩之末」。「拗」這個字則有些複雜：脾氣很「拗」要讀「ㄋㄧㄡˋ」（限讀）；有「折、彎」的意思時讀「ㄠˇ」，其他統統讀作「ㄠˋ」，像「執拗」、「拗口令」等等。「散」作「內部組織不緊密」時讀「ㄙㄢˇ」，如「散文」、「鬆散」、「丸散膏丹」，其他都念「散」。「暈」只要跟「頭暈」有關時都念「ㄩㄣ」，如「暈眩」、「暈船」；其他都念「ㄩㄣˋ」，像「月暈」、「紅暈」等等。「漲」作「體積膨大、物體湧起」時音「ㄓㄤˋ」，如「熱漲冷縮」、「情緒高漲」；作「標準線增高」音「ㄓㄤˇ」，像「物價暴漲」、「上漲」、「漲潮」等等。其他還有很多不勝枚舉，限於篇幅便不再列出。

另外，如果上教育部的網站搜尋一字多音審定表，會發現所有的網頁都被拿掉了（http://www.edu.tw/MANDR/content.aspx?site_content_sn=12749），上面說「《國語一字多音審訂表》自 88 年公布至今已 8 年餘，接獲各方對該書收錄音讀的意見，本部業彙整各方意見，正進行相關修訂工作中，故暫行關閉網站。」，這似乎表示教育部準備就原有的一字多音審定表爲基礎，根據缺點和不足再修正一次，若是如此真是老師和學生們所樂見的一件事。

最後附上一般人經常唸錯的字音，大家可以試試自己能答對幾個？

「諷」刺	ㄈㄥˋ	牌「坊」	ㄈㄤ	大「圳」	ㄗㄨㄣˋ
「莘莘」	ㄕㄣ	「混」濁	ㄏㄨㄣˋ	不「妨」	ㄈㄤˊ
氣「氛」	ㄈㄣ	殺手「鐧」	ㄐㄧㄢˋ	「尾」巴	ㄨㄟˇ
粗「獷」	ㄍㄨㄤˇ	轉「捩」點	ㄌㄧㄝˋ	「崎」嶇	ㄑㄧˊ
豆「豉」	ㄔˇ	賄「賂」	ㄌㄨˋ	感「慨」	ㄎㄞˇ
味「噌」	ㄘㄥ	「蝙」蝠	ㄅㄧㄢ	「波」浪	ㄅㄛ
「紕」漏	ㄆㄧ	「曙」光	ㄕㄨˋ	「蠕」動	ㄖㄨˊ
肉「燥」	ㄙㄠˋ*	「伐」木	ㄈㄚ	「蜆」精	ㄒㄧㄢˇ

*註：「肉燥」正確的寫法本來應該是「肉臊（ㄙㄠˋ）」，但被民眾誤用許久，一字多音審定表於是從俗改成「肉燥」，但是仍然要念「ㄙㄠˋ」。

無論是字音還是字形，中文字確實是世界上了不起的文字發明之一。然而我們現在在報章雜誌上常常看到學生的中文能力一代不如一代，作文能力更是日益退化。不僅是學生，就連在報章雜誌上錯字錯音也是族繁不及備載，例如說一「攤」水的偏旁是手部，幾乎每個人都會將其寫成一「灘」水，到目前爲止我還沒有看過有寫對的（量詞，液體靜止在一處或濕物凝聚在一堆，稱為一攤，如一攤水、一攤泥）。當然除了我們的基本教育不重視，往往老師也搞不清楚正確的字音字形。此外，還有台灣數理至上的教育所致，所謂的資優生只單指數理資優而言，而具有人文天賦的學生其發展卻往往被硬生生埋沒或抹殺，這點可說是相當可惜。希望各位優秀的物理系學生在賞文之餘，也能多多思考這項問題。

參考資料：

http://tinyurl.com/2us2wj
http://tinyurl.com/3hv6k3
http://my.so-net.net.tw/iwascheap/mw/304.htm
http://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%AE%80%E5%8C%96%E5%AD%97%E5%8E%86%E5%8F%B2
http://tinyurl.com/2p9upw
http://tinyurl.com/2osbbf
http://robbin.cc/archives/2006_04_13/190
http://www.eastcj.com/blog/article.asp?id=419
http://bloguide.ettoday.com/hcflj/textview.php?file=0000017745&num=28
http://tinyurl.com/2ur9pu
http://www.wretch.cc/blog/myth01&article_id=4947270
http://www.wretch.cc/blog/Lisacats&article_id=20336020
《一字多音辨析手冊》蔡有秩著　螢火蟲出版社