

# 解析力學思想史

這篇文章的目的是對解析力學的重要思想的發展過程作一個簡單的介紹。爲了方便計，我們以人物和年代的先後作標準依次敘述。

1 亞里斯多德 (384–322BC)：虛功原理(The principle of virtual work) 的觀念最早出現在亞里斯多德物理學中。他從「假如力和速度成反比例則力彼此保持平衡」導出槓桿原理。因爲亞里斯多德的研究對象是槓桿的平衡，並且以虛速度 (virtual velocity) 的觀念來討論它，因此很明顯地虛位移 (virtual displacement) 的觀念在這時就已經存在了。Sterius (1598–1620) 則以另一種方式敘述這個原理來研究滑輪的平衡。

即能量守恒原理：「What is gained in force is lost in velocity」

2 伽利略 (1564–1642)：伽利略對力學的貢獻是衆所周知的。但是，我們通常只知道他對實驗方法的建立有很大的貢獻，對他在理論物理方面的成就則鮮有所聞。他對理論力學的主要貢獻是將亞里斯多德原理作適當的修改。他清楚地知道一件重要的事實，即在敘述亞里斯多德的虛速度原理時，重點不在於速度，而是在於和力同方向的速度分量。他的方法等於在說「功」是「力和受力方向位移」的乘積。他應用這經過改良後的虛功原理去研究在「斜面上物體的平衡」，並且證明他的原理所得結論和stevinus 應用能量守恒原理所得到的結論相同。同時，他又證明他的原理也適用於流體靜力學，他導出亞里斯多德用質量中心的觀念所導出的「靜止流體的壓力定律」。

John Bernoulli (1667–1748)：在他以前，前兩節所談到的原理是以比例的方式表出的。John Bernoulli 則第一個想到虛功原理是所有平衡問題都適用的一個普遍的靜力學基本原理。他取消比例式的表示方法，而引進了「力和受力方向的虛速度的乘積」這個觀念，並且根據速度方向和作用力方向的夾角決定正負。

Bernoulli 在一封寫給朋友的信中，談到這個原理，他說：「假如所有的作用力之間彼此保持平衡，則對所有極小且可能的位移，所有的乘積和必須等於零。

除此以外，他還有一項重要的發現。他比較粒子在力場中的運動和光在不均勻介質中的傳播現象，企圖建立光的折射現象的力學理論。因此，他是偉大的漢彌爾頓原理的先驅，這個原理證明在力學中的最小作用原理 (the principle of least action) 和 Fermat's principle of shortest time 在結果上的相似，因而允許我們用力學的概念來解釋光的現象。

4 牛頓 (1642–1727)：基本的運動方程式則是牛頓以伽利略和 Leonardo 的研究爲基礎所提出的。

在牛頓力學裏，描述運動的基本量是動量和作用力。他的第一和第二運動定律解釋了單粒子的運動問題。如果我們要運用這兩個定律去說明較複雜的力學系統的運動現象，則我們必須視該系統爲互相獨立的粒子所組成，而每個構成粒子都遵守著牛頓運動定律。但是，即使如此，仍有困難存在；因爲，每個構成粒子都遵守著牛頓運動定律。但是，即使如此，仍有困難存在；因爲，每個構成粒子所受的作用力通常極爲複雜，難以分析。這個困難在牛頓力學中被牛頓所提出的第三定律「作用力和反作用力原理」部分地克服了。但它並不是一個普遍成立的定律。

牛頓以後的人將牛頓定律視爲絕對和普遍的自然律，並且以一種它的發現者所從未有的獨斷態度去解釋它們。這種對牛頓力學盲目崇拜的態度，使得當時的物理學家們無法以不偏頗的態度去認識在18世紀由法國數學家們所發展的解析原理的價值。甚至漢彌爾頓 (Hamilton) 對力學的偉大貢獻都因此得不到當時人們應有的重視。

5 萊布尼茲 (1646–1716)：當牛頓建議用動量對時間的變化率來度量運動時，萊布尼茲則建議採用另一個量 (vis viva) 來度量運動，這個量除少了一個係數  $\frac{1}{2}$  外，和我們今天稱爲動能的量相同。並且，萊布尼茲用「動能的變化量等於力所作的功」這個原理來取代牛頓的運動方程式。在此萊布尼茲對力學所持的觀點和後來解析力學的觀點是一致的。

使用「動能」和「作用力所作的功」這兩個觀念有許多優點。第一個優點是，我們無須將整個力學系統分割成許多互相獨立的粒子，就可以很容易地將這兩個觀念從單個粒子推廣到任意地力學系統。換言之，動

能和兩者所描述的是整個系統的狀態。第二個優點是，在某些情況，功可以用19世紀時 J-Rankine 所介紹的觀念～位能～來取代。位能本身只是一個純量函數，這意謂著我們只要使用一個純量函數，就可以說明了作用於一個力學系統衆多和複雜的力。這使得我們將整個力學問題以 variational problem 的形式為陳述成為一件可能的事。

因此，牛頓和萊布尼茲之間關於力的爭論主要是一個方法上的問題。牛頓所採用的定義較適用於向量力學（牛頓力學）的觀點，萊布尼茲的觀點則是解析力學的基石。

6. D'Alembert (1717–1785)：他所作的研究工作使解析力學的發展向前邁進了一大步。他使用「慣性力」的觀念，將動力學問題轉換成靜力學問題，使原先只使用於平衡問題的虛功原理同樣地適用於動力問題。他認為當作用於一個力學系統的力不能使該系統保持平衡時，則該系統將運動以產生一新力，此力即稱為慣性力，使該系統保持平衡，亦即慣性力和原有的作用力聯合起來，將滿足虛功原理。於是 D'Alembert's principle 使所有的力學系統的運動方程式都可以一個 variational principle 表示出來。

7. Maupertuis (1698–1759)：Maupertuis 想到可能存在著一個稱為 action 的量，而自然所選擇的事件，都須使這個量為一最小值。這個大膽的假設非常吸引人，也合乎18世紀的宇宙觀。但是他的數學能力和當時的水準比較起來相去甚遠，以致他一直未能令人滿意地找到那必須是極小值的量。他利用這個原理去導彈性碰撞定律。碰巧，這個現象如果當作一個極小值的問題去處理，非常困難並且要十分地有技巧。以完全不正確的方法得到了正確的結果。較令人滿意的是，他利用這個觀點證明 the principle of least action 如何才能取代 Fermat's principle of least time。這個結果是 John Bernoulli 較早就知道的。

最令人感到有趣的是是 Maupertuis 和尤拉 (Euler) 之間的一段小插曲。Koenig 認為萊布尼茲早就在一對私人信件中表示過和 Maupertuis 相同的意見，企圖奪回 Maupertuis 發現的優先權。但是這封信一直沒有被找到。在緊接著的辯論中，尤拉傾全力支持 Maupertuis。在這場保衛戰中最令人覺得莫名其妙的是，尤拉自己至少在 Maupertuis 一年以前就已經發現了這個原理的正確形式。尤拉知道不論是實際上發生的運動 (actual motion) 還是虛擬的運動 (virtual motion) 都必須滿足能量守恒原理。沒有這個條件，Maupertuis 的 action quantity 就根本沒有意義。雖然，尤拉當時一定已經知道 Maupertuis 理論的弱點，但是他仍然避免作任何的批評或發表他自己在這方面的成就，而傾全力支持 Maupertuis 為最小作用原理的發明者。尤拉這種寬宏的度量 and 謙遜的態度在科學史上是無人可與其匹敵的。

8. 尤拉 (1707–1783)：尤拉對理論力學的發展有很重要的貢獻。他是使用「運動變數」(Kinematical variable) 的第一人。他使用角速度的三個分量作為運動變數來解析旋轉剛體 (rotating rigid body)。除此之外，他首先對 variational problems 或 isoperimetric problems 作有系統的研究。並且從微分學的基本觀點，他導出了一個微分方程式，將這些問題部分地解決了。

9. Lagrange (1736–1813)：Lagrange 這個18世紀最偉大的數學家，他的研究工作和尤拉的研究在許多方面十分相似。他單獨地以一種完全新的方法導出了 variational problems 的解。他所發明的新方法就是我們現在稱為 Calculus of variations 的數學。他也首先知道解析力學的另一項優點，就是我們可以使用任何一組參數 (parameters) 來說明一個力學系統的位置，這種參數就是我們現在所謂的廣義座標 (generalized coordinates)。因此，如果虛功原理和 d'Alembert's princ 的主要優點是我們可以將一個力學系統當作一個整體來處理，而無須分割成互相獨立的粒子，那麼 Lagrangian 方程式增加了另一項重要的優點，對座標轉換的不變性 (The invariance with respect to arbitrary coordinate transformation) 這意謂我們可以根據問題的性質選擇適當的坐標。

在他所著的「解析力學」這本書中，他創造了一種新且有力的武器；利用它，只要我們知道了一個力學系統的動能和位能的抽象形式，可以無須物理或幾何上的考慮，將整個力學問題的解析建立在純粹的計算上。Lagrange 因此奠定了解析力學的基礎和指明了進一步研究的方向。

Lagrange 的另一項不朽的成就是利用「未定乘子」(undetermined multiplier) 來處理「補助條件」(auxiliary conditions) 的方法，這個方法在理論力學裏占有十分重要的地位。漢彌爾頓，這位在解析力學的研究史上最傑出的人物之一，因為 Lagrange 的這項發明，稱譽他為「數學界的莎士比亞」。

10. Hamilton (1805–1865)：漢彌爾頓在 Lagrange 的發明之外，開啓了另一片嶄新的領域。我們知道 Lagrange

的方程式是十分複雜的二階微分方程式組。漢彌爾頓將位置座標和動量座標二者視為獨立的變數，成功地將 Lagrangian 方程式轉換成含有兩倍多變數的一階綫性微分方程式組。它們是 variational problems 的微分方程式組所能轉換成的最簡單和最理想的形式。因此我們現在都稱它們為 Canonical equations

漢彌爾頓也同樣地利用數學方法將 d'Alembert's principle 轉換成最小作用的原理，我們現在通常都稱它為漢彌爾頓原理。至於尤拉和 Lagrang 所導出的最小作用原理則僅適用於「守恒系統」( conservative system )。

漢彌爾頓另一項重要的發明是以一個統一的觀點來處理幾何光學和力學的問題。他在光學和力學裏都使用著一個稱為 principal 或 characteristic function 的函數。這個函數有壹個性質，即只須經過微分的程序，就可決定一個移動質點的路徑和一束光綫的路徑。並且無論在光學或力學裏，這個函數滿足同一個偏微分方程式。而這個偏微分方程式的解在適當的條件下和運動方程式的解相同。

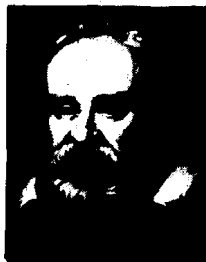
11. Jacobi ( 1804—1851 )：他是少數幾個能了解漢彌爾頓的方法的重要性的數學家之一。他發展了一套有關 Canonical transformation 的理論。他根據這套理論解釋漢彌爾頓的 principal function，並且證明漢彌爾頓的函數只是產生一個適當的 Canonical transformation 的一個特例。Jacobi 因此使得漢彌爾頓的方法更為有用。他證明了，若我們除去漢彌爾頓在研究光學和力學的相似性時所使用的條件，則漢彌爾頓偏微分方程式的解可以充分地告訴我們這個運動問題的解。

Jacobi 也將尤拉和 Lagrange 所導出的，在 time-independent 的情況下的最小作用原理給予重新的敘述。他批評尤拉和 Lagrange 的敘述，認為他們的積分式的積分範圍沒有滿足在兩個固定的界限 (limit) 之間變化的條件。雖然尤拉和 Lagrange 所導出的原理沒有錯誤，但是 Jacobi 將時間從積分式中消去得到一個新的原理，這個原理，使我們可以直接決定移動質點的路徑，而無須知道運動和時間的關係。並且這個原理和 Fermat's principle of least time 的相似性直接地說明了光學現象和力學現象之間的相似性。

12. Gauss ( 1777—1855 )：這位著名的數學家高斯所導出的原理，"the principle of least constraint" 則和前面所提到的解析原理稍有不同。這個原理不是以一個對時間的積分式作為要決定極小值條件的函數，而是在一個任意的瞬間，定義一個稱為 constraint 的大於零的量，並假定在那瞬間的位置和速度為已知，然後使這個值為極小的條件，決定在那瞬間的加速度。高斯原理因此是一個貨真價實的極小值原理，而不僅是一個穩定值 (Stationary value) 原理。但是由於他所使用的 constraint 包含有加速度，以致他沒有其它的解析原理所具有的優點，例如使用廣義坐標。

Hertz 將高斯原理中的 constraint 給予一個幾何上的解釋，認為它是在  $3N$  dimensional configuration space 中的「短程綫的曲率」( geodesic curvature )。在這樣的空間中，高斯原理可以被解釋成最直路徑原理 (The principle of the straightest path)。這個解釋使高斯原理和 Jacobi 原理有密切的關係。

這篇文章就介紹到這裏，其它有關近代的科學家對解析原理的貢獻和解析原理與近代物理的關係這兩部份，不屬於這篇文章的討論範圍。



Galileo



Newton



Leibniz



Euler



Lagrange



Hamilton



Gauss