漫談

狹義相對論中之時距延緩問題

張 懋 中

一、前　言

筆者本學年度忝爲大一「普通物理」課程助教。因從本年度起所有甲種普通物理教本均改用 Alonso-Finn 所寫 Physics 一書，內容完全以微積分講授普物教材，程度顯然較舊教材高出許多。其中第六章爲 Relative Motion，全章中對相對論中許多問題，諸如羅倫玆轉換 (Lorentz transformation) 羅倫玆收縮 (Lorentz contraction) 和時距延緩問題 (Time Dilation) 等均有論及。但對初習者此章之教材混淆不清，極易產生誤會，故筆者想以一簡單之方法先導出羅倫玆轉換式，再由之對不同慣性座標之時距舉一實例討論之，期能有助於初習者，使獲得具體的相對時間觀念。

二、羅倫玆轉換式（註①）

由狹義相對論之假設，我們知道：「在所有的以等速作相對運動的慣性系統中，任何物理定律皆有相同的形式。」所以在四度的時空(Four-dimensional $x, y, z, \tau=ict$, space)，我們必須要求一種轉換關係，它能够使任何四度空間中兩事件的間距 (The interval between events)，不論在轉換前的某一座標或是經轉換後的另一新座標系均有相同的距離。爲了滿足上面的要求，通常我們知道有兩種方式可以保持事件間距不變的座標轉換法，其一爲座標系的平移 (Parallel displacement)，其二就是座標系的旋轉 (Rotation)。但座標系的平移，在物理上僅代表觀察者之位置和參考時間之改變，沒有其他的作用，所以我們無需去討論它。現在我們只就座標系的旋轉來討論：爲求問題的簡化，並不損失其廣泛性，可先就 τ, x 兩軸所在的平面來旋轉，如果旋轉的角度爲 ψ 時，則新 (K) 舊 (K') 座標間的關係爲（見圖 1）

$$x=-\tau'\sin\psi+x'\cos\psi \qquad (1)$$

$$\tau=x'\sin\psi+\tau'\cos\psi \qquad (2)$$

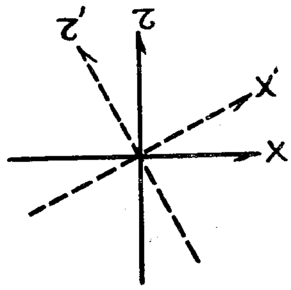

圖 一

讓我們考慮 K' 的原點 $x'=0$ 在 K 座標系中的運動，(1),(2) 兩式變爲：

$$x=-\tau'\sin\psi \tag{3}$$

$$\tau=\tau'\cos\psi \tag{4}$$

(3),(4) 相除

$$\frac{x}{\tau}=-\tan\psi \tag{5}$$

因 $\tau=ict$, 故 ψ 可表爲 $\tan\psi=i\frac{V}{c}$

換言之，可視爲 $\tau-x$ 平面上新舊二座標系，已作了一轉角爲 $\psi=\tan^{-1}\left(i\frac{V}{c}\right)$ 的旋轉。

由此可得

$$\sin\psi=\frac{i\frac{V}{c}}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{6}$$

$$\cos\psi=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{7}$$

將 (6),(7) 兩式代入 (1),(2) 結果得到

$$x=\frac{x'+Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\qquad y=y',\qquad z=z',$$

$$t=\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

此即 Lorentz 轉換式。

現在假設有一個鐘隨着 K' system 走， 即對 K' system 中的觀察者言，它是靜止的。 我們取發生在 K' system 中同一地點的兩事件 (Events)，則就 K' system 中的觀察者言，時間間隔爲

$$\Delta t'=t_2'-t_1'$$

可是就 K system 說，因轉換式爲

$$t_1=\frac{t_1'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\qquad t_2=\frac{t_2'+\frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

所以 $$\Delta t=t_2-t_1=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{8}$$

換言之，當 system K' 相對 system K 以等速 V 作運動時它們之間時距應有式 (8)的轉換關係。得到這一個關係，我們便可討論一個很有趣的「時距延緩」實例。

三、一個「時距延緩」的有趣實例

我們先假設有如下的一個問題：有一位教授先生在課堂上舉行測驗，規定學生必須以他老先生的錶爲準，過了一小時就得繳卷。他老先生監考無聊，就相對學生以 $0.96c$ (c表光速3×10^8m/sec) 的速度踱方步。一小時旣滿教授先生以「光」爲信號，送回學生處，令之繳卷。而學生見此信號光後卽停筆不寫，問學生覺得他考試時間有多長？

此一問題我們可由兩個不同的觀點來看，再行比較其結果：

(1) 令 K 代表教授先生所在的慣性系 (Inertia frame)且令 K' 表學生所靜止的另一慣性系，則就教授而言，他見學生以一等速 kc (光速之 k 倍，如此可得更 general 之結果) 離他而去時，如：

Δt 表教授所見的時間間距

$\Delta t'$ 表學生所見的時間間距，則由式 (8)

$\Delta t, \Delta t'$ 有如下關係 (見圖 2)

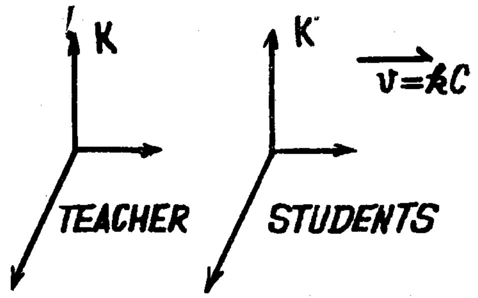

圖 二

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-k^2}} \tag{8}$$

因由教授思之，他以光爲信號，其單位時間速度爲 c，學生以 kc 離他而去。每單位時間，信號較學生多行 $(1-k)c$，則經 $kc/(1-k)c$ 之時間，學生可見信號。故教授覺得時間間隔

$$\Delta t=\left(1+\frac{kc}{(1-k)c}\right)=1+\frac{k}{1-k}=\frac{1}{1-k}$$

教授先生飽學之士，淸楚相對論自不在話下，故他屈指一算

$$\Delta t'=\Delta t\sqrt{1-k^2}=\frac{1}{1-k}\sqrt{1-k^2}$$

$$=\frac{\sqrt{1+k}\sqrt{1-k}}{1-k}=\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \tag{10}$$

得知學生考試時間爲 $\Delta t'=\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}$

今令 $k=0.96$

則 $\Delta t'=\sqrt{\frac{1.96}{0.04}}=\sqrt{49}=7$ (hours)

(2) 可是就學生之觀點，是否亦承認他這場考試已經歷 7 小時呢？

就學生想，教授以 kc 的速度離他而去 (見圖 3) (下接72頁)

0 或 $\hbar$。

與 spin 相類似的是 magnetic moment, classically，我們知道，一個帶電球體，一點旋轉就會有 magnetic moment，若給了我們轉速與 charge distribution 即可計算其 magnetic moment，但小至一個 elementary penticle，只具有一自然單位之電荷，我們不知如何說它的 "charge distribution"，但姑且猜度一下，假定 "charge distribution" 之有效半徑爲 $\frac{\hbar}{mc}$ 如圖 5 有 charge e 在半徑 $\frac{\hbar}{mc}$ 之環上轉動 $\omega=\frac{mc^2}{\hbar}$

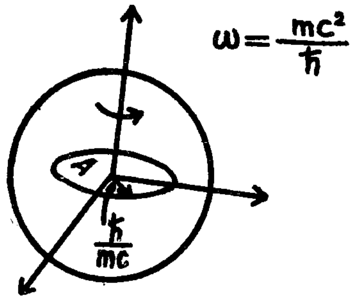

圖　五

此環形成一 current loop 電流大小爲

$$i=e\nu=e\cdot\left(\frac{mc^2}{h}\right)\qquad\left(\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{mc^2}{h}\right)$$

而 loop 所圈之面積

$$A=\pi\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2$$

故其 magnetic moment

$$\mu=\frac{1}{c}IA$$

$$=\frac{e\hbar}{2mc}$$

對電子而言 $\frac{e\hbar}{2m_ec}$ 正是其 magnetic moment（湊得正確答案）對質子而言 $\frac{\hbar}{2m_pc}$ 只對了 order。

附帶有一結果即：若是一個 electron 之半徑爲 $\frac{\hbar}{m_ec}$，其電荷分佈在這樣大小的區域內，若會產生 self-energy，則此 energy 之大小爲：

$$\delta E\approx\frac{e^2}{R_e}=\frac{e^2}{\left(\frac{\hbar}{m_ec}\right)}=\frac{e^2}{\hbar c}(m_ec^2)=\frac{1}{137}(m_ec^2)\text{。}$$

（上接70頁）

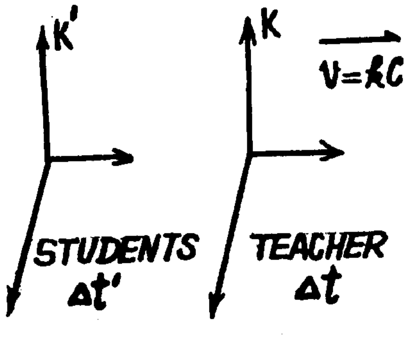

圖　三

且 $\Delta t'=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-k^2}}$　(9)

當教授覺得過一小時，要送回信號時，此時學生的錶依式 (9) 已經過了 $1/\sqrt{1-k^2}$ 小時。故此時學生距教授的距離爲 $kc/\sqrt{1-k^2}$。或讀者可想爲就教授言此距離爲 kc，則由 Lorentz contraction 知此段距離由學生度量時爲 $kc/\sqrt{1-k^2}$。

當光信號由教授至學生時，其費時爲

$$\frac{\frac{kc}{\sqrt{1-k^2}}}{c}=\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$$

而光速 c 無論就 K' 或 K 系統看來其值均相同。由 Lorentz velocity transformation

$$v_x=\frac{v_x'+kc}{1+v_x'\frac{v}{c^2}}=\frac{c+v}{1+c\frac{kc}{c^2}}=\frac{c(1+k)}{1+k}=c$$

所以由學者所度量知的全段時間爲

$$\Delta t'=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}+\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$$

$$=\frac{1+k}{\sqrt{1-k^2}}=\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\qquad(11)$$

讀者可見(10)和(11)的結果完全相同

註①：見 Landau: The Classical Theory of Field