

物質 相態

從 Landau 對稱破壞理論
到拓樸態

文 / 林育平

大自然中有許多不同物質所形成各式各樣的物質相態。除了生活中常見的固態、液態、氣態等基本的相態之外，還有許多奇異新穎的相態，例如超導、超流態等等。本文將為大家簡單介紹物理學家在過去一個世紀中對於物質相態理論研究的成果。

傳統 物質相態 對稱與對稱破壞

人類很早就透過對大自然的觀察了解到物質存在不同相態。常見的例子有水的三相變化，如冰塊受熱融化成液態水及水蒸氣遇冷凝結成液態水。然而，一直到 19 世紀熱力學發展得較為完善之後，人類對物質相態與不同相之間的相變才開始有了較為科學的研究。

在早期的研究中，物理學家對於不同的相態給予了不同的模型來描述，並以此討論相態之間的轉變 [1,2]。例如在—特定物質固態—液態的相變中，物理學家對於固態及液態分別定義一個模型，並透過比較兩模型在某組參數—例如壓力、溫度和體積—之下的自由能 (free energy) 高低來決定此物質在這組條件下的相態。假如在某組參數下固態的自由能較低，則此物質在這組條件下為固態，反之則為液態。

在這個理論基礎上，Paul Ehrenfest 在 1933

年為各式各樣的相變做了分類：假如自由能對參數的 n 階微分在某相變點不連續，且其 k 次微分在所有 $k < n$ 皆連續，則此相變為一個 n 階的相變 (n -th order phase transition)。舉例來說，液態水沸騰成水蒸氣時會經過一個液氣共存的狀態 [Fig. 1]。在這個狀態中，液態水會吸收一定量的潛熱以提升其內能，且此系統的總體積會不斷上升。這兩個現象顯示了液態水和氣態水的內能和體積是不一樣的，而這兩個物理量可以對應到自由能的一階微分。由此可知，水的液態—氣態相變是一階相變 (first order phase transition)。

有趣的事情是，當系統的溫度提升到某個溫度以上時，相變點不再存在，液態水和氣態水可以被視為同樣的流體。在此相變曲線停止點上，水的體積和內能皆為連續，因此這個點是一個高階的相變點。由於高階的相變點不存在一階相變的主要特徵—不同相

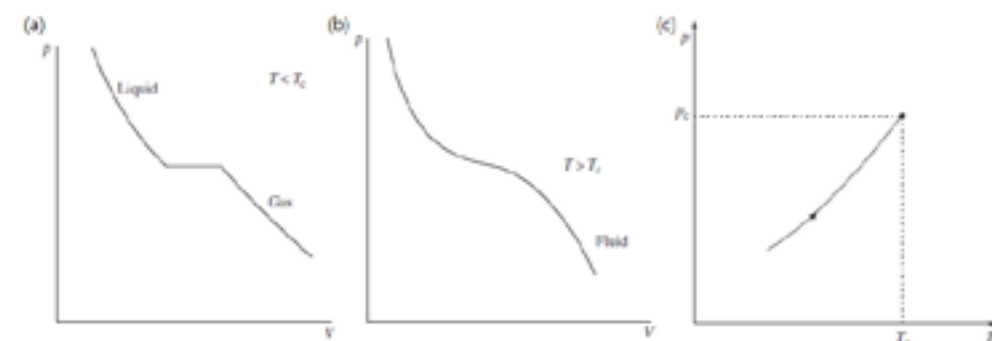


Fig. 1. 水的液氣相變 [2]。 (a) $T < T_c$ 時，從圖中可以清楚看到液態和氣態之間有一條液氣共存的中間態，代表一階相變。 (b) $T > T_c$ 時液氣相變消失，兩者屬於同一種流體。 (c) 液氣之間的一階相變只存在於 $T < T_c$ 。

共存的中間態，在後來的研究中，物理學家時常以這個特性區分相變的種類，將高階相變統稱為二階相變 (second order phase transition) 或連續相變 (continuous phase transition)，並將此類二階相變發生的點稱為臨界點 (critical point)。

在過去一個世紀的物理學研究中，對於臨界點附近行為的探討可說是最重要的研究課題之一。伴隨著統計力學—從微觀角度出發探討系統巨觀熱力學表現—的興起，物理學家們開始嘗試透過探討物質的微觀行為來研究臨界現象。最初被提出的理論是所謂的平均場理論 (mean field theory)—考慮系統中任意一個自由個體所受到環境的平均影響，進而得到系統的整體行為。一個簡單的例子是 Johannes D. van der Waals 在 1901 年提出的氣體運動方程式。他考慮氣體中每個粒子的有效體積和受到的分子間平均作用力，將理想氣體方程式做了一些修正

$$P_{eff} V_{eff} = N k_B T$$

$$P_{eff} = P + a \left(\frac{N}{V} \right)^2, \quad V_{eff} = V - Nb \quad (1)$$

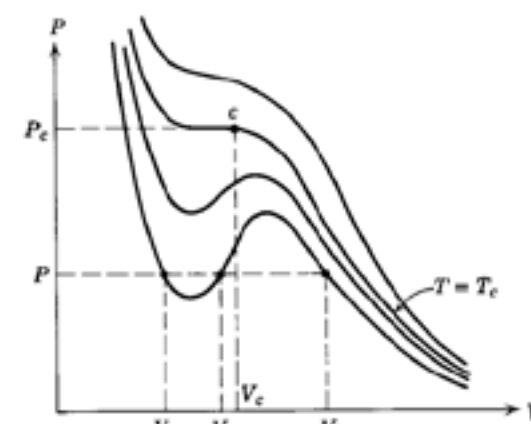


Fig. 2. van der Waals 方程式 [1]。觀察圖中的曲線可以發現它的確可以對應到實際情況下水的液氣相變。在圖中出現一些「物理上不容許」的區段，例如最下面的曲線中 V_1 到 V_3 的區段，可以透過 Maxwell's demons 將之變成水平線。

其中 a 和 b 的項分別代表了粒子受到的平均作用力和其有效體積。實際畫出這個方程式的曲線會發現 [Fig. 2]，它的確很好的描述了相變的發生。由於系統中個體的自由行為在大部分情況下比其實際行為容易得到，而加入有效場對其影響的難度也較低，平均場理論不啻為一種探討物質相態與相變的強力工具。

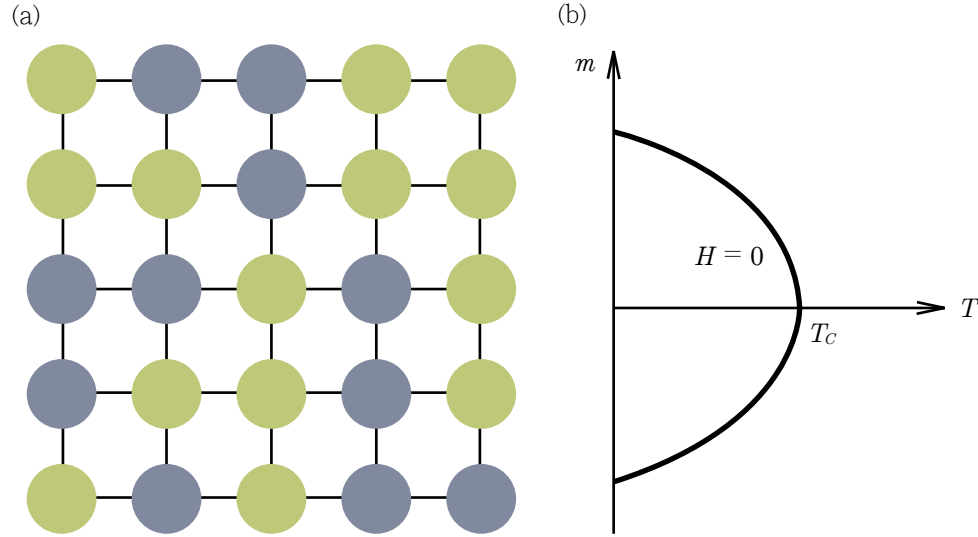


Fig. 3. 易辛模型。(a) 易辛模型示意圖：青綠色表示自旋 $\sigma = +1$ ，藍灰色表示自旋 $\sigma = -1$ 。
(b) 易辛模型 σ 隨溫度變化 [1]。

除了氣體模型之外，在相變理論的研究中還有其他很常被研究的模型。其中最常受到討論的是所謂的易辛模型 (Ising model) [Fig. 3]

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i, \quad \sigma = \pm 1 \quad (2)$$

其中 σ 是每個晶格點上的自旋 (spin)， $\langle ij \rangle$ 表示 i 和 j 為最近鄰 (nearest-neighbor)， J 是鍵結強度而 h 則是磁場。這裡我們考慮一個二維的方陣晶格，並假設自旋數目是無窮大 ($N \rightarrow \infty$)。在易辛模型的平均場理論中，任意一個自旋受到其最近鄰的影響可以被視為一種有效磁場。因此，其平均場理論可以透過修正每個自旋所受到的磁場來得到

$$h \rightarrow h_{\text{eff}} = h + 4J\langle\sigma\rangle \quad (3)$$

其中 $\langle\sigma\rangle$ 則代表自旋的熱力學平均值。這樣的平均場理論展現出了令人訝異的結果。在高溫時，系統的平均自旋 $\langle\sigma\rangle$ 為零。然而當

溫度 T 下降到臨界溫度 T_c 以下， $\langle\sigma\rangle$ 會開始帶有正或負的非零值

$$\langle\sigma\rangle \begin{cases} < 0, & h < 0 \\ > 0, & h > 0 \end{cases} \quad (4)$$

也就是所謂的自發性磁矩 (spontaneous magnetization)。這樣的相態變化可以對應到水的液氣相變 [Fig. 4]。當 $T > T_c$ 時，系統只會有一種相態。當溫度 T 降低到臨界溫度 T_c 時，二階相變發生，系統自由能的二階微分 (例如比熱) 在這個點發散。當 $T < T_c$ 時，則依其他參數不同 (水的相中為 P 而易辛模型則為 h) 分成不同的相態，並在這些相態的交界處有一階相變，存在多種相態共存的中間態。值得注意的是，易辛模型在臨界點的特性，例如比熱隨溫度的指數發散的指數，與水的液氣相變臨界點是相同的。這個有趣的現象促成了相變理論更進一步的發展。

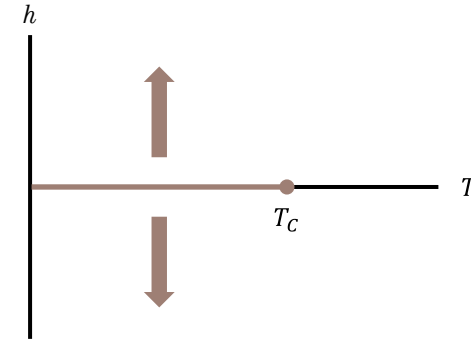


Fig. 4. 易辛模型相圖。

事實上，臨界點的發散或不連續特性並不是一件簡單的事情。在有限大的系統 (例如有限的粒子數量或體積) 中，系統的自由能和配分函數 (partition function) 等物理量是解析 (analytic) 的，不應該出現不連續或發散的微分。從這個角度來看，相變這個包含了許多不連續與發散特性的物理現象是不應該發生的。然而，在易辛模型的討論中，無窮大系統的假設卻顯然能給出有相變的結果，其中包含了比熱等自由能的二階微分在臨界點的發散。由此可見，相變要在所謂的熱力學極限 (thermodynamic limit) —也就是無窮大的系統—的情況下才會發生。直觀來想，一組解析的函數序列 $\{f_n(x)\}$ 在 $n \rightarrow \infty$ 時，它的極限帶有發散的微分的確是可以想像的。

如此各式各樣的平均場理論的確為相變的研究帶來莫大進展。然而在研究不同系統時，研究者必須針對特定系統設計其平均場理論，這樣的情況對理論學家來說是不夠優雅的。此外，物理學家發現有些系統的臨界點特性是相同的，例如水的液氣相變和易辛模型。因此，物理學家開始思考是否能用統一的語言來描述各種系統的相變行為。

1937 年，Lev D. Landau 提出了一個對後世影響深遠的理論—Landau 典範 (Landau paradigm) 作為相變的統一平均場理論。在 Landau 典範中，每一種相變都各自對應到一種系統對稱性的自發性破壞 (spontaneous symmetry breaking)，而這樣的對稱破壞可以由一個特定的序參量 (order parameter) 作為指標來判斷。舉例來說，在易辛模型中，序參量可以定義為

$$m = \langle\sigma\rangle \quad (5)$$

易辛模型中 [式 (2)] 是一個具有上下對稱的系統。這樣的上下對稱可以用一個 Z_2 對稱群來描述

$$Z_2 = \{e, g\} \quad (6)$$

$$e * e = e, \quad e * g = g * e = g, \quad g * g = e$$

當 $T > T_c$ 時，序參量 $m = 0$ ，是一個有 Z_2 對稱的無序相 (disordered phase, $T > T_c$)。當 $T < T_c$ 時， m 則會是正或負的非零值，稱為 Z_2 對稱破壞的有序相 (ordered phase, $T < T_c$)。由此可知，易辛模型隨溫度變化的相變是一個 Z_2 對稱自發性破壞的表現。

有了定性的理論架構後，Landau 進一步提出了定量的理論模型來描述這樣的對稱破壞。由於在 $T = T_c$ 時序參量 $m = 0$ ，他將平均自由能 $f = F/N$ 在 $T = T_c$ 附近對 m 做 Taylor 展開 (Taylor's expansion)

$$f = -hm + rm^2 + vm^3 + um^4 + \dots \quad (7)$$

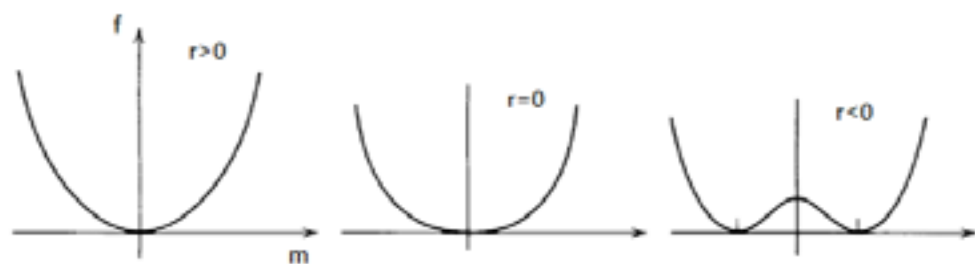


Fig. 5. Landau 自由能 f 隨 r 由正到負的變化 [1]。當 $r > 0$ 時，只有一個 m^* 對應到 f 的極小值； $r < 0$ 時則有兩個。

其中使自由能 f 達到最小值的序參量 m^* 即是系統在該溫度 T 時的平衡態。由於易辛模型具有上下對稱，其自由能也是上下對稱，因此 $v = 0$ 。另外，易辛模型的 $u > 0$ 。當磁場 $h = 0$ 時，由圖可以發現以下的規律 [Fig. 5]

$$m^* = \begin{cases} 0, & r > 0 \\ \pm \sqrt{-\frac{r(T)}{2u(T)}}, & r < 0 \end{cases} \quad (8)$$

從這個結果可以發現， $r(T) > 0$ 可以對應到高溫的無序態， $r(T) < 0$ 則對應到低溫的有序態，而 $r(T_c) = 0$ 。除此之外，序參量 m^* 在 $T \leq T_c$ 時的增長趨勢也與前述平均場理論的結果相吻合。因此，Landau 提出的這個模型的確是可以用以描述對稱破壞的相變行為。

Landau 的對稱破壞理論可說是近代物質相態研究的基石。在這個理論基礎下，物理學家透過研究臨界點附近的系統特性，將相變區分成許多種類的普世性類別 (universality class)。由於物理量在臨界點附近的發散或增長趨勢多以指數函數變化 [Fig. 6]

$$O \sim (T - T_c)^a \quad (9)$$

而擁有相同對稱破壞、空間維度及系統結構等特性的不同系統會有一樣的指數，物理學家便以這些不同的指數來區分普世性類別。有了這些普世性類別，物質的相態也可以因此得到很好的分類。

事實上，平均場理論計算出的指數和解析解及實驗並不相吻合。例如以易辛模型而言，Lars Onsager 在 1944 年計算出其解析解，楊振寧則進一步算出序參量 m 在 $T \leq T_c$ 增長的指數為 $\beta = 1/8$ ，然而平均場理論計算出的指數卻是 $1/2$ 。顯然平均場理論欠缺了一些重要因素。物理學家們隨後發現，這樣的差異肇因於系統內關聯長度 (correlation length, ξ) 在臨界點的發散。一般而言，系統內任兩點的關聯函數 (correlation function) 會隨距離呈指數遞減

$$\langle \Delta m(r) \Delta m(r') \rangle \sim \exp(-|r - r'|/\xi) \\ \Delta m(r) = m(r) - \langle m(r) \rangle \quad (10)$$

換句話說，當一個點產生擾動時，對其他系統中其他點的影響會隨距離呈指數遞減。當系統接近臨界點時，關聯長度發散 $\xi \rightarrow \infty$ 。系統中個體行為呈現很強的整體關聯性與波動 (fluctuation)，使得統計力學局域獨立性的前提遭到破壞，進而造成平均場理論的失敗。為了解決這個問題，Leo P. Kadanoff 和 Kenneth G. Wilson 等人在 1960-70 年代提出了重整化群的理論 [renormalization group (RG) theory]，成功的計算出與解析解吻合的指數。在重整化群的幫助下，物理學家們對普世性類別的研究大有進展，也使物質相分類的研究發展的更加完善。

除了古典模型隨溫度變化產生的相變之外，量子系統中也可以透過調整一些參數來產生相變，並且可以對應到古典溫度相變的普世性。舉例而言，在一維的橫場易辛模型 (transverse field Ising model) 中

$$H = -J \sum_i \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - h \sum_i \sigma_i^x \quad (11)$$

由於 $[\sigma^z, \sigma^x] \neq 0$ ，增加磁場 h 會為這個系統帶來量子的效應，並在 $h = h_c$ 時發生有序相至無序相的相變。有趣的是，這個量子相變可以精確的對應到古典二維易辛模型的溫度相變。透過類似的古典-量子對應，物質的量子相態也可以利用前述的普世性做很好的分類。

Definition	Landau theory	Two-dimensional Ising	$d = 3$ ($n = 1$)
Spontaneous magnetization $m_s \sim (-t)^\beta$	$\beta = 0.5$	$\beta = 1/8$	$\beta \simeq 0.325$
Susceptibility ($h = 0$) $\chi \sim t^{-\gamma}$ for $t > 0$, $\chi \sim (-t)^{-\gamma'}$ for $t < 0$	$\gamma = \gamma' = 1$	$\gamma = \gamma' = 7/4$	$\gamma = \gamma' \simeq 1.240$
Specific heat $C \sim t^{-\alpha}$ for $t > 0$ $C \sim (-t)^{-\alpha'}$ for $t < 0$	$\alpha = \alpha' = 0$ (discontinuity)	$\alpha = \alpha' = 0$ (log-divergence)	$\alpha \simeq \alpha' \simeq 0.11$
Critical isotherm $h(T_c) \sim m^\delta$	$\delta = 3$	$\delta = 15$	$\delta \simeq 5.2$
Correlations ($T \neq T_c$) $\xi \sim t^{-\nu}$ for $t > 0$ $\xi \sim (-t)^{-\nu'}$ for $t < 0$	$\nu = \nu' = 0.5$	$\nu = \nu' = 1$	$\nu \simeq \nu' \simeq 0.63$
Correlations ($T = T_c$) $G(r) \sim 1/r^{d-2+\eta}$	$\eta = 0$	$\eta = 1/4$	$\eta \simeq 0.03$

Fig. 6. 物理量在臨界點的指數型變化 [2]。

拓樸態

長程量子糾纏的表現



Landau 的對稱破壞理論為物質相做了相當程度的分類。然而，自 1980 年以來，物理學家卻逐漸發現許多各式各樣無法以對稱破壞理論解釋的物質相 [3]。最早的例子是 Klaus von Klitzing 在 1980 年發現的整數量子霍爾效應 (integer quantum Hall effect, QHE) 以及崔琦、Horst L. Stormer 和 Arthur Gossard 1983 年發表的分數量子霍爾效應 (fractional quantum Hall effect, FQHE)。他們在實驗中發現，當兩塊異質半導體之間的二維電子氣 (2D electron gas, 2DEG) 處於低溫強磁場的環境下時，古典理論預測中隨磁場增加而呈正比成長的霍爾電阻 (Hall resistance) 曲線

$$R_H = \frac{V_H}{I_x} \quad (12)$$

會在一些特定區段形成平台 [Fig. 7]

$$R_H = \frac{2\pi h}{e^2} \frac{1}{\nu} \quad (13)$$

其中 ν 是整數時稱為整數量子霍爾效應，分數時則為分數量子霍爾效應。對應到不同 ν 的 QH 態顯然是不同的物質相。然而，當系統從一個 QH 態轉變到另一個（例如 $\nu = 1$ 到 $\nu = 2$ ）時，並沒有經過任何對稱破壞。由此可知，Landau 典範並不適用於描述 QH 態。基於這樣的現象，物理學家開始思考是否有更好的新理論能用來做為這些新相態的描述。

1990 年代前後，文小剛在一系列的期刊中提出了「拓樸序」(topological order) 的概念。一個具有拓樸序的物質態大致有以下幾個特性：

有限能隙 (gapped)

拓樸態的基態 (ground state) 和任意激發態 (excited state) 之間能量的差異是有限而非零的。

無法透過局域正則變換 (local unitary transformation, LU) 轉換到沒有拓樸序的態

由於有拓樸序的態無法利用 LU 變換到沒有拓樸序的態，拓樸序可以視為一種長程量子糾纏 (long-range entanglement) 的表現。不同拓樸序的拓樸態無法利用 LU 變換互相轉換。

簡併的基態數量 (ground state degeneracy) —也就是能量相同的基態數量—會因系統空間的拓樸不同而改變

舉例來說， $\nu = 1/3$ FQHE 的基態在二維平面上沒有多重簡併態。然而，當我們將系統放到一個甜甜圈狀的二維曲面上時，其基態簡併態數量會是 3，也就是有 3 個具有相同能量的基態。事實上， $\nu = 1/m$ 的 FQH 態在一個二維面上的基態簡併數量會與該二維面的「虧格」(genus) 有關 [Fig. 8]

$$N_D = m^g \quad (14)$$

具有零能隙 (gapless) 的邊緣態 (edge state)

在有拓樸序的系統中，在系統內部 (bulk) 的拓樸序通常可以表現在其邊緣的特性上。例如在量子霍爾效應中，電子在系統內部量子

化的迴旋運動 (cyclotron motion)

可以在其邊緣產生單向行進的邊緣態 [Fig. 9]。

具有任意子 (anyon) 特性的基本激發態 (elementary excitation)

一般而言，基本粒子可以分為玻色子 (boson) 與費米子 (fermion) 兩大類。兩波色子交換時，其波函數不變，費米子則會差一個負號

$$\psi_{b/f}(x_2, x_1) = \pm \psi_{b/f}(x_1, x_2) \quad (15)$$

然而，FQH 態的基本激發態卻會有任何子的特性，可以分為阿貝爾 (Abelian) 及非阿貝爾 (non-Abelian) 兩種。阿貝爾任意子交換後的波函數會與原本差一個負數相位

$$\psi(x_2, x_1) = e^{i\phi} \psi(x_1, x_2) \quad (16)$$

非阿貝爾任意子則會做一個正則轉換 (unitary transformation)

$$\begin{aligned} \psi(x_2, x_1) &= U\psi(x_1, x_2) \\ U^\dagger U &= UU^\dagger = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

如此任意子的特性可以對應到分數的基本電荷 (fractional charge)，例如 $\nu = 1/m$ 的 FQH 態的基本激發態的電荷為 e/m 。事實上，這是除了夸克之外第一次在大自然中發現帶有分數電荷的粒子。部分物理學家則利用這樣的任意子結構作為拓樸量子計算 (topological quantum computation) 的理論基礎，使得量子計算的研究有了更進一步發展的可能。

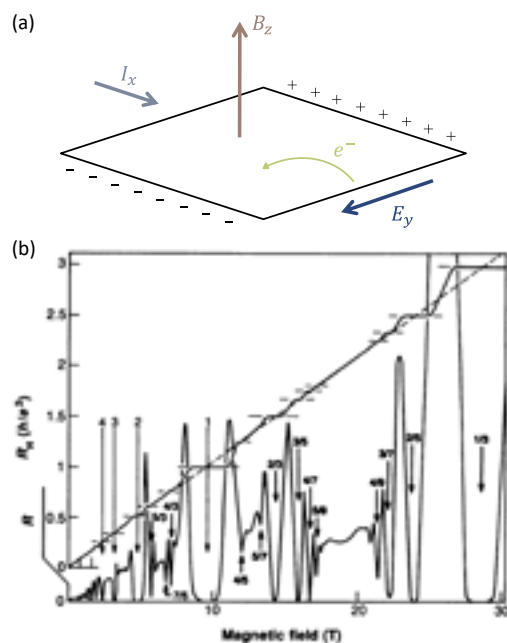


Fig. 7. 量子霍爾效應。(a) 霍爾效應示意圖。(b) 量子霍爾效應實驗結果 [4]：整數標示的霍爾電阻平台對應到整數量子霍爾效應，分數標示者則對應到分數量子霍爾效應。

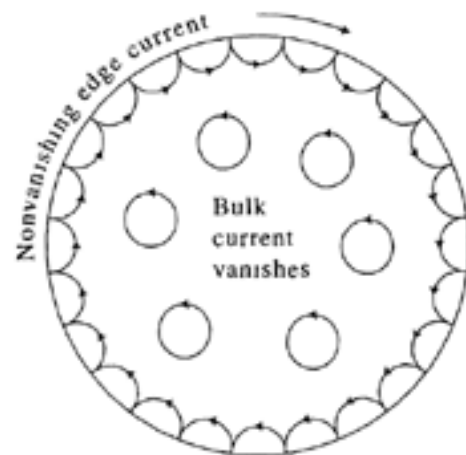


Fig. 9. QHE 中，系統內部電子迴旋運動的結構造成單向行進的邊緣態 [5]。

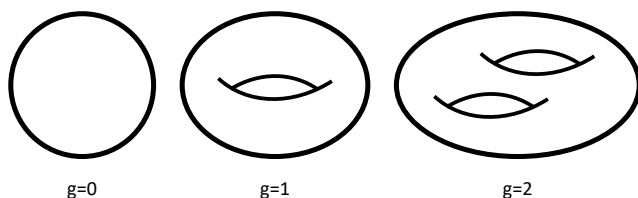


Fig. 8. 不同虧格 g 的曲面示意圖。

了解了拓樸序的特性之後，物理學家也嘗試為這些具有拓樸序的態進行分類。這些分類目前尚未成熟，比較完善的部分是利用不同種類任意子融合 (fusion) 的特性進行「張量類別」(tensor category) 的分類。文末的圖表列出一些較常見的例子 [Fig. 12]。

具有對稱性的拓樸態



在沒有對稱性時，LU 變換可以幫助我們區分帶有不同拓樸序的拓樸態。由此定義可知，具有短程糾纏 (short-range entangled) 的態，也就是可以用 LU 變換轉換到無拓樸序物質相的態，即被視為一個沒有拓樸序的態。然而，當一個系統被限制必須有某種對稱性時，LU 變換也必須遵守這樣的對稱性。在這個情況下，一個短程糾纏態有可能無法透過遵守對稱性的 LU 變換轉換到無拓樸序的物質相。因為無法轉換的特性，這個短程糾纏的態被稱為「受對稱保護的拓樸態」(symmetry-protected topological state, SPT state)。

雖然 SPT 態的概念在 2009 年才開始被討論，其最早的例子在 1981 年就已經由 F. Duncan Haldane 提出，也就是所謂的 Haldane 鏈—整數自旋 Heisenberg 鏈

$$H = \sum_i S_i \cdot S_{i+1} \quad (18)$$

的基態 [Fig. 10]。這裡我們假設 $S = 1$ 。Haldane 提出了這個基態與其最低激發態的能隙是有限的非零值 (gapped)。物理學家們則在往後二十年中發現，Haldane 鏈的確具有一些拓樸序的特性，例如無能隙的邊緣態。而且當

空間反演 (inversion) : $x \rightarrow -x$

時間反演 (time-reversal) : $t \rightarrow -t$

$Z_2 \times Z_2$: 自旋對 x 、 y 、 z 三個軸做 180 度的旋轉群

三種對稱性中的其中一種存在時，這些拓樸的特性不會消失。由此可知，Haldane 鏈的確是一種 SPT 態。



Fig. 10. Haldane 鏈 [3]。每個晶格點上 $S = 1$ 的自旋可以拆開成兩個 $S = 1/2$ 的自旋。相鄰兩個晶格點的 $S = 1/2$ 互相形成鍵結，整條鏈兩端的自由 $S = 1/2$ 自旋即成為 Haldane 鏈的邊緣態。

另一種 SPT 態是在 2006 年由 B. Andrei Bernevig、Taylor L. Hughes 以及張首晟所提出的拓模絕緣體 (topological insulator) 模型 [6]，其對稱保護的特性可以從其邊緣態理解。在這個模型的基態中，邊緣態是由帶有相反自旋且反向行進的兩個邊緣態組成 [Fig. 11]。在時間反演變換下，自旋和行進方向都會變相反，因此變換後的邊緣態組成一行進方向與自旋的對應—會不變。邊緣態的不變性反映了這個態的拓模特性受到時間反演對稱的保護，因此可知這個拓模絕緣態是一個受時間反演保護的 SPT 態。

SPT 態可以分成許多不同的類別。目前主要的分類方法是利用對稱群在不同空間維度的上同調理論 (group cohomology) 來做分類，一個上同調理論中不同的類別可以分別對應到一種對稱性的限制下不同種類的 SPT 態。大致的分類情形可以參考文末圖表 [Fig. 13]。

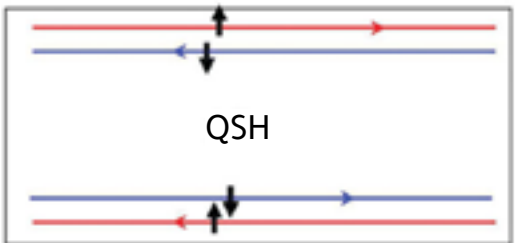


Fig. 11. 拓模絕緣體模型中的邊緣態 [6]。

除了短程糾纏的 SPT 態之外，長程糾纏的拓模態在對稱性的限制下也發展出許多不同的相態，並被稱為「受對稱性加強的拓模態」(symmetry-enriched topological state, SET state)。SET 態可以藉由結合 SPT 態的對稱群上同調理論與長程糾纏拓模態的張量類別分類法進行不同拓模態的分配，比起 SPT 態複雜了許多。

結語



在過去一個多世紀中，物理學家對於物質各種相態的研究有了十分長足的進展。除了以發展超過半世紀的 Landau 對稱破缺理論描述的傳統相態之外，近四十年來，許多超越這個理論的新穎拓模相態也逐漸被發現及討論，並逐漸成為近年凝態理論最重要的課題之一。相信在物理學家們的努力之下，未來人類對物質相態的了解能夠發展的更加完善。

Topological order	Frac. exc.	Non-ab. sta.	Boundary	Classification/comment
1F Majorana chain ¹⁶	Not any	Not any	Maj. zero mode	\mathbb{Z}_2 (Z_2^f symm. breaking)
2B bosonic E_8 state	No	No	Gapless	Invertible topological order
2B chiral spin liquid ^{17,18}	Semion	No	Gapless	Spin quantum Hall state
2B \mathbb{Z}_2 spin liquid ^{19,20}	Fermion	No	Gapped	\mathbb{Z}_2 -gauge/toric-code
2B double-semion state ^{21,22}	Fermion	No	Gapped	\mathbb{Z}_2 -gauge/toric-code
2B string-net liquids ²²	Yes	Yes	Gapped	Unitary fusion category
2F $p + ip$ superconductor ^{23,24}	No	No	Gapless	No dynamical $U(1)$ gauge field
2F integer quantum Hall states ²⁵	No	No	Gapless	\mathbb{Z} (invertible topological order)
2F Laughlin states ²⁶ 2F Halperin states ²⁷	Yes	No	Gapped/gapless	K -matrix (symmetric, integral)
2F $\chi_1\chi_2^2$ state ²⁸	Yes	$SU(2)_2$	Gapless	Cannot do universal TQC
2F $\chi_1\chi_3^2$ state ²⁸	Yes	$SU(2)_3$	Gapless	Can do universal TQC
2F Pfaffian state ²⁹	Yes	$SU(2)_2$	Gapless	Cannot do universal TQC
2F \mathbb{Z}_3 parafermion state ³⁰	Yes	$SU(2)_3$	Gapless	Can do universal TQC
2F string-net liquids ^{31,32}	Yes	Yes	Gapped	Unitary super fusion category
3+1D superconductor ^{33,34}	Fermion	Not any	Gapped	With dynamical $U(1)$ gauge field
3B string-net liquids ²²	Fermion	Not any	Gapped	Symmetric fusion category
3B Walker-Wang model ³⁵	Fermion	Not any	Gapped	Pre-modular tensor category

Fig. 12. 具有拓模序的拓模態之分類 [3]。

- [1] K. Huang, *Statistical Mechanics*, 2nd ed. (Wiley, 1987).
[2] E. Brézin, *Introduction to Statistical Field Theory*, (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2010).
[3] X.-G. Wen, arXiv:1610.03911.

- [4] J. P. Eisenstein and H. L. Stormer, *Science* **248**, 1510 (1990).
[5] P. Phillips, *Advanced Solid State Physics*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2012).
[6] X.-L. Qi and S.-C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011).

SPT order	Symm.	Boundary	Classification
1B Haldane phase ⁹²	$SO(3)$	Spin-1/2	$\mathcal{H}^2(SO(3), \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$
1B Haldane phase ⁹²	\mathbb{Z}_2^T	Kramer doublet	$\mathcal{H}^2(\mathbb{Z}_2^T, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$
1B symm. gapped phases ⁹³	G	Proj. rep. of G	$\mathcal{H}^2(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$
1F topo. superconductor ⁹⁴⁻⁹⁶	\mathbb{Z}_4^T	Gapped	\mathbb{Z}_2
1F G^f -SPT phases ⁹⁷	G^f	Proj. rep. of G^f	$\mathcal{H}^2(G^f, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$
2B \mathbb{Z}_n -SPT states ⁹⁸	\mathbb{Z}_n	Gapped	$\mathcal{H}^3(\mathbb{Z}_n, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_n$
2B T -asymm. SPT insulator ^{99,100}	$U(1)$	Gapless	$\mathcal{H}^3(U(1), \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$
2B T -symm. SPT insulator ^{99,100}	$\mathbb{Z}_2^T \rtimes U(1)$	Gapped	$\mathcal{H}^3(\mathbb{Z}_2^T \rtimes U(1), \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$
2B spin quantum Hall states ^{99,101}	$SO(3)$	Gapless	$\mathcal{H}^3(SO(3), \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$
2B T -symm. SPT spin liquid ⁹⁹	$\mathbb{Z}_2^T \rtimes SO(3)$	Gapped	$\mathcal{H}^3(\mathbb{Z}_2^T \rtimes SO(3), \mathbb{R}/\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$
2B G -SPT states ⁹⁹	G	Gapped/gapless	$\mathcal{H}^3(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$
2F quantum spin Hall states ^{102,103}	$U^f(1) \times U^f(1)$	Gapless	\mathbb{Z}
2F topological insulator ¹⁰⁴	$\mathbb{Z}_4^T \rtimes U^f(1)/\mathbb{Z}_2$	Gapped	\mathbb{Z}_2
2F topo. superconductor ¹⁰⁵⁻¹⁰⁷	\mathbb{Z}_4^T	Gapped	\mathbb{Z}_2
2F G^f -SPT states ^{90,108}	G^f without T	Gapped/gapless	Chiral central charge $c = 0$ modular extensions of $\text{sRep}(G^f)$
3B T -symm. SPT states ^{65,99,109}	\mathbb{Z}_2^T	Gapped	$\mathcal{H}^4(\mathbb{Z}_2^T, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2^2$
3B T -symm. SPT insulator ^{65,99,109}	$\mathbb{Z}_2^T \rtimes U(1)$	Gapped	$\mathcal{H}^4(\mathbb{Z}_2^T \rtimes U(1), \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2^2$
3B T -symm. SPT spin liquid ⁹⁹	$\mathbb{Z}_2^T \rtimes SO(3)$	Gapped	$\mathcal{H}^4(\mathbb{Z}_2^T \rtimes SO(3), \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2^4$
3B G -SPT states ⁹⁹	G without T	Gapped	$\mathcal{H}^4(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$
3B G -SPT states ^{99,110}	G with T	Gapped	$\mathcal{H}^4(G, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}_2$
3F topological insulator ¹¹¹⁻¹¹⁴	$\mathbb{Z}_4^T \rtimes U^f(1)/\mathbb{Z}_2$	Gapped	\mathbb{Z}_2
3F topo. superconductor ¹⁰⁵⁻¹⁰⁷	\mathbb{Z}_4^T	Gapped	\mathbb{Z}

Fig. 13. SPT 態的分類 [3]。