漫談數學與物理

李世昌

對許多物理系的學生而言，數學似乎祇是一種工具而已；因此，數學不外是解微分方程、複變、以及向量與張量分析。這些東西唸起來沒有多大意思，尤其我們所學的祇是「計算」而已，和實際的理論還有一段距離。因爲祇是「計算」（註一），缺乏完整的結構，所以不會使人有美的感覺。大多數人不在乎討不討厭，或者是覺得討厭也沒有辦法，祇要會算就好了。碰到題目，方程式列出來，然後想盡辦法，拼命去算，算出答案，再加以「物理意義」的解釋，這就是物理。在算的過程中，若用到數學上的結論，則大多假定使此結論成立之條件「必然」滿足。因此數學家常認爲大多數物理學家根本不懂數學；而物理學家也認爲數學家所說的「物理」，根本不是物理，祇是解微分方程而已。

數學不祇是「計算」，數學和物理的關係，似乎也不祇在計算方面。在理論力學及量子力學上都牽涉到數學的理論。數學和物理較有關的是：代數、拓樸、幾何和分析。代數、拓樸是較基本的理論；幾何學用在理論力學、相對論及重力理論；分析的用途很廣，泛函分析爲量子力學的數學基礎。代數學這裏是指線性代數而言。線性代數研究有窮維的向量空間，分析學則研究無窮維的空間，而且主要是不可數的無窮。從有窮維的結論推到「可數的無窮」常用數學歸納法；而從可數的無窮集合要擴充到不可數的無窮，通常是經由完備化的步驟，最簡單的例子就是從有理數擴充到無理數的情形。分析學的基本概念之一是「用線性近似非線性」，是微分的基礎。拓樸學是研究點集合，以及點集合間的關係（即函數），不引進距離的概念，祇用集合的概念，研究「極限」「連續」「緊緻」等觀念（註二）。一個點集合最簡單的構造就是它的拓樸結構：即我們要求此點集合和它的子集滿足某些性質，依我們需要而決定。這些性質也就是此點集合的「結構」，有了拓樸結構，我們就稱之爲拓樸空間。在拓樸空間上，可以引進向量空間的結構（註三）即：在此拓樸空間的每一開子集和 n 維歐氏空間找一個函映，這樣就得到所謂的 n-dimensional manifold 引進向量空間的結構，實際也就是在此拓樸空間上構建一座標系。通常我們無法在整個拓樸空間上使用同一個座標系，亦即沒有一個唯一的「好的」函數存在於此拓樸空間的「每一」子集和 n 維歐氏空間之間（註四）。因此祇好在空間的不同部分，使用不同的座標系，即在拓樸空間不同的開子集上，用不同的函數；若二開子集有交集，即它們的座標系有重疊的地方，我們要求不同的座標系可互相變換（這樣才能將整個空間聯起來），即座標變換的 Jacobian 不爲零；不祇如此，我們常希望座標變換的函數是 k 次連續可微分，即此函數屬於 C^k，有時爲了方便，乾脆要求此函數屬於 C^∞。幾何學就是研究 differentiable manifold 上的線、面以及更高維的「面」。近代分析學也是以differentiable manifold 爲對象，不再限於 n 維空間了。因爲phase space 通常不是歐氏空間，而祇是一個 differentiable manifold，因此近代分析和幾何學在理力、統計、量力中都有應用價值，尤其和理力、量力的理論基礎密切相關。

在代數、拓樸、分析、幾何中，幾何學是比較有趣的。而幾何學的研究除了用到代數、拓撲、分析外，還用到羣論。實際上在早期的幾何學中，「變換羣」扮演很重要的角色。這很害易想像得到。因爲幾何學的研究，是在「可微分流型」（註五）上引進很多互相重疊的座標系，但座標系的引進幾乎是任意的，因此我們希望知道在不同的座標互相變換時，幾何圖形（線、面、超面）的一些「不變」的性質。另外我們還希望知道當我們把一箇可微分流型轉動、扭曲時，幾何圖形會怎樣變動。用較「數學」的話來說，就是當我們把一可微分流型映到自己或映到另一流型

時，一箇幾何圖形和它的像之間的關係，尤其是某些不變的性質。當我們考慮不變量時，常常考慮在一組變換下的不變量，這一組變換成一箇變換羣。現代的羣論與當時已不可同日而語，但羣論在幾何學中的角色並未改變。現代的羣論在羣上引入拓撲結構，微分結構，然後可以作分析，這就是拓撲羣或李氏羣 Lie Gaoup 的內容。理力中的「正則變換」就是相空間上的變換羣要弄清楚理力中的一些概念像正則變換，泊松括弧等，幾乎要對整箇近代數學都有相當的了解。另外可以一提的是泛函分析。泛函分析是研究函數空間的；一箇函數就是一箇具有不可數無窮多箇分量的向量，因此我們說過分析是研究不可數無窮多維的向量空間。在有窮維空間，我們常希望找出一箇算子 operator 的固有值 eigenvalue 和固有向量，因爲找出來之後我們可以將此空間分解成一些固有空間的和，而在每一固有空間上，算子的作用就和恆等函數幾乎一樣！不祇是此算子如此，它的任意次方也如此，即此算子連續作用任意次還是和恆等函數差不多，實際上就是恆等函數的一箇常數倍而已。因此，一算子在它的固有空間上作用就跟乘一箇數一樣！最重要的是若 A 爲一算子，在固有値 a 的固有空間上，$f(A)$ 的作用就和乘 $f(a)$ 一樣！在無窮維的情形，値讓分解的理論比有窮維複雜的多，但也更有用處。（註六）

數學在物理上的應用不祇是計算，也不祇是使物理定律更嚴密而已。數學不是物理的全部，但它至少提供我們另一個角度來看物理定律。

註一：所謂「計算」指解微分方程以及與此有關之一些不太有趣的東西。所謂不太有趣，就是說像看數學家 Watson 所寫的書，或是看一些有關特種函數的書以後的感覺。這完全是主觀，也許有的人認爲很有趣。Simmons 在「拓樸與近代分析」的序中，說此種計算「數學」已經過時；換句話說，解一題微分方程而自認爲很得意的時代已經過去了。至少對一大部分數學家而言是如此。

註二：在拓樸中，也可引進距離的觀念，而討論有距空間（metrical space）。「緊緻」即 Compact

註三：更正式的說法是引進「微分結構」(Differentiable Structure)，這是一種 local 的性質；我們希望拓樸空間的一開子集能和一線性空間的一開子集有某種關係。

註四：例如球面和平間就無這樣一個唯一的函數。

註五：可微分流型即 differentiable manifold。

註六：作者自己也在研究階段，錯誤難免；且由於一些編寫上的不太湊巧，有些觀念就沒有詳細說明，對初學者也許比較難接受。有興趣的人，我很樂意和他討論；或者請自行參考有關書籍，下面是幾箇「例子」：

Halmos: Finite dimensional vector space 這本書是線性代數入門的書，但必須對數學足夠成熟的人看起來才有味道。

Simmons: Topology and modern analysis 拓撲方面我不知道有甚麼好書；因爲拓撲太基本了，以致幾乎大部分幾何、分析的書都有一章以上的介紹。本文所提均爲點集合拓撲。另外還有代數拓撲，與幾何亦有關。

Laugwitz: Differential and Riemanian geometry 微分幾何入門書，不會古典到沒有味道，也不會現代到初學者難以接受的程度。

Loomis: Advanced Calculus 近代分析學基礎。另外還有 Risz 的 functional analysis 也是分析學上有名的好書。

Abraham: Foundations of Mechanics 此書在數學系圖，用近代幾何研究力學，特別是關於系統 stability 的問題。

Pontrygin: Topological group. 他的書是以寫得淸楚著名。本書主要是講拓撲羣，並用以討論李氏羣及李氏代數的理論。