及 Pauli-Matrices 的交換關係，

$[\sigma_3,\sigma_1]=2i\sigma_2$， $[\sigma_3[\sigma_3\ \sigma_1]]=-(2i)^2\sigma_1$

我們可以得到 $\sigma_1(t)$ 及 $\sigma_2(t)$ 的表示方法：

$$\sigma_1(t)=\sigma_1(o)\cos(2w_Lt)+\sigma_2(o)\sin(2w_Lt)$$

$$\sigma_2(t)=\sigma_2(o)\cos(2w_Lt)-\sigma_1(o)\sin(2w_Lt)$$

其中 $w_L=\dfrac{\gamma B_0}{2}=\dfrac{w_0}{2}$

同時設 $w_1=\gamma B_1$，則因 $i\hbar|\dot{b}>=H_1|b>$

所以 $i\hbar|\dot{b}>=-(\dfrac{w_1}{2})[\sigma_1(t)\cos(wt)-$

$-\sigma_2(t)\sin(wt)]|b>$

$=-(\dfrac{w_1}{2})\{\sigma_1(o)\cos[(w_0-w)t]$

$+\sigma_2(o)\sin[(w_0-w)t]\}|b>$

若 $|b>=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$，則 $\dot{\alpha}=(\dfrac{iw_1}{2})e^{-i(w_0-w)t}\beta$

$\dot{\beta}=(\dfrac{iw_1}{2})e^{i(w_0-w)t}\alpha$

所以 $-\ddot{\alpha}-i(w_0-w)\dot{\alpha}-(\dfrac{w_1}{2})^2\alpha=0$

設 $\alpha(t)=\alpha(o)e^{i(\Omega/2)t}$

則得 $\Omega^2+2(w_0-w)\Omega-w_1^2=0$，二根各爲 Ω_1，Ω_2。

即 $\alpha(t)=\alpha_1(o)e^{i(\Omega_1/2)t}+\alpha_2(o)e^{i(\Omega_2/2)t}$

$$\beta(t)=\alpha_1(o)(\frac{\Omega_1}{w_1})e^{-i(\Omega_2/2)}$$

$$+\alpha_2(o)(\frac{\Omega_2}{w_1})e^{-i(\Omega_1/2)}$$

設在 $t=0$ 時，旋轉在 Z 軸之分量爲 +1，

即 $|b(o)>=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

則 $\alpha(o)=\alpha_1(o)+\alpha_2(o)=1$， $\beta(o)=0$，

故 $\alpha_1(o)=\dfrac{\Omega_2}{\Omega_2-\Omega_1}$ $\alpha_2(o)=\dfrac{\Omega_1}{\Omega_1-\Omega_2}$

現在我們就可以計算在 t 時，出現

$|b\_>=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 的概率有多少，稱爲 "Spin Flip"。

$$P=|<b\_|b(t)>|^2=|(0\ 1)\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}|^2$$

$$=|\beta(t)|^2$$

因 $\Omega_1\Omega_2=-w_1^2$

$\Omega_1-\Omega_2=2\sqrt{(w_0-w)^2+w_1^2}$

$$故P=\frac{2\Omega_1^2\Omega_2^2}{w_1^2(\Omega_1-\Omega_2)^2}[1-\cos(\frac{\Omega_1-\Omega_2}{2}t)]$$

$$=\frac{w_1^2}{w_1^2+(w_0-w)^2}\sin(\frac{\sqrt{(w_0-w)^2+w_1^2}}{2}t)$$

當 $w_0=w$ 時，P 有最大值 1，稱爲"共振"。

多體論中的 Green Function 和 Quasi—Particle—第三次討論會

主講：李 文 忠

時間：六十年五月五日

地點：物理館第四教室

I. 導 言

本文主要的目的在於介紹單質點格林函數（single particle green function）及其在於討論費米粒子系統在極低溫時的一些性質，這些性質可由 quasi-particle 能譜（spectrum）的知識得到，quasi-particle之意義見後述，而單質點格林函數G正是討論 quasi-particale 最有用的數學工具，此外格林函數與量子場論中所用的U矩陣與S矩陣的關係亦將述及。本文主要內容乃是由物三的討論會中第三次討論的講稿加以整理而來。

II. 多體系統的擾動理論（many body perturbation theory

設有一費米粒子（Fermi-Dirac Particle）的系統，其粒子間以一二體的位能（two-body potential）交互作用，且設若質點運動甚慢不必慮及相對論的效應，則此系統之Hamiltonian爲：

$$H=H_0+H'$$

其中 H_0 包含質點之動能及外加位能，H' 是質點間的交互作用位能，我們將 H' 視爲該系統之擾動（perturbation）。

在討論撓動理論時尚有一重要的絕熱近似（Adiabatic approximation）須加以考慮，即假設H'在時間爲$-\infty$與0之間慢慢地開上（switch on），因此在$t=-\infty$時H_0的eigenstate ψ_0會慢慢地在$t=0$時變成H的eigenstate ψ然後在時間爲0與$+\infty$之間慢慢地把H'關掉，使ψ再變成ψ_0。Gellmann與Low 曾證明上述結果，即：

若 $H_0\psi_0=E_0\psi_0$

則 $H\psi=E\psi$

其中 $\psi=\lim\limits_{\alpha\to+0} S_\alpha(0,-\infty)\psi_0 \Big/ <\psi_0|S_\alpha(0,-\infty)|\psi_0>$

$$E=E_0+\Delta E=E_0+\lim_{\alpha\to+0}<\psi_0|H^1S_\alpha(0,-\infty)|\psi_0>\Big/<\psi_0|S_\alpha(0,-\infty)|\psi_0>$$

其中$S_\alpha(t,t')$爲下式方程式之解：

$$i\hbar\frac{d}{dt}S_\alpha(t,t')=H_\alpha(t)S_\alpha(t,t')$$

並滿足邊界條件$S_\alpha(t',t')=1$，而

$$H_\alpha(t)=e^{(i/\hbar)H_0t}H'e^{-(i/\hbar)H_0t}e^{-\alpha|t|}$$

其中α與作用位能的開關速度有關，顯然$\alpha\to+0$在於使絕熱近似變成有效，上式顯然仍是將H'以interaction representation表示並考慮絕熱近似。

解上述$S_\alpha(t,t')$之動力方程式可得：

$$S_\alpha(t)=1+1/i\hbar\int_{-\infty}^{t}H_\alpha(t')S_\alpha(t')\,dt'$$

〔令 $S_\alpha(t,-\infty)=S_\alpha(t)$〕

由iteration可得：

$$S_\alpha(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(1/i\hbar)^n\int_{-\infty}^{t}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{t_{n-1}}dt_nH_\alpha(t_1)H_\alpha(t_2)\cdots H_\alpha(t_n)$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}1/n!(1/ih)^n\int_{-\infty}^{t}dt_1\int_{-\infty}^{t}dt_2\cdots\int_{-\infty}^{t}dt_nP[H_\alpha(t_1)H_\alpha(t_2)\cdots\cdots H_\alpha(t_n)]$$

其中$P[A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)]=\theta(t_1,t_2,\cdots,t_n)A(t_1)A(t_2)\cdots A(t_n)$

其中$\theta(t_1,t_2,\cdots,t_n)=1$ 若$t_1>t_2>\cdots>t_n$

$=0$ 其他

此P叫做chronological ordering operator。欲方便地解上式可將$H_\alpha(t_i)$以二次量子化的產生與消滅運算子（creation and annihilation operator）表之，即：

$$V=H'=\frac{1}{2}\sum_{KLMN}<KL|v|NM>a_K^+a_L^+a_Ma_N$$

$$=\frac{1}{2}\iint d\vec{x}_1d\vec{x}_2\,\psi^+(\vec{x}_1)\psi^+(\vec{x}_2)v(\vec{x}_1,\vec{x}_2)\psi(\vec{x}_2)\psi(\vec{x}_1)$$

其中$a_K^+(a_K)$是狀態ϕ_K的產生（消滅）運算子，而ϕ_K是單質點波函數；$\psi^+(\vec{x}_1)$是在$\vec{x}_1$處的產生運算子。

$$\psi(\vec{x})=\sum_K a_K\phi_K(\vec{x})$$

$$[a_i,a_k]_\pm=[a_i^+,a_k^+]_\pm=0$$

$$[a_i,a_k^+]_\pm=\delta_{ij},\quad \begin{matrix}+\ 爲\\-\ 爲\end{matrix}\begin{pmatrix}費米粒子\\飽斯粒子\end{pmatrix}$$

$$\psi^+(\vec{x})=\sum_K a_K^+\phi_K^*(\vec{x})$$

$$\phi_K(\vec{x})=1/\Omega^{\frac{1}{2}}e^{ikx}$$

即交互作用位能H'（是一Hermitian operator）可寫成：

$$H'=\frac{1}{4}\int\mu(\vec{x}-\vec{x}')[\psi^+(\vec{x}')\psi(\vec{x}')\psi^+(\vec{x})+\psi^+(\vec{x})\psi(\vec{x})\psi^+(\vec{x}')\psi(\vec{x}')]d\vec{x}\,d\vec{x}'$$

故 $$H_\alpha(t)=\frac{1}{4}\int dx\int dx'v_\alpha(x-x')[\psi^+(x')\psi(x')\psi^+(x)\psi(x)+\psi^+(x)\psi(x)\psi^+(x')\psi(x')]$$

其中$x=(\vec{x},t)$，$x'=(\vec{x}',t')$爲時空坐標且

$$v_\alpha(x-x')=v(\vec{x}-\vec{x}')\delta(t-t')e^{-\alpha|t|}$$

$$\psi(x)=\psi(\vec{x},t)=\sum_K\phi_K(x)a_K$$

$$=\sum_K\phi_K(\vec{x})e^{-(i/\hbar)E_k t}a_K$$

將以上各式代入$S_\alpha(t)$可得：

$$S_\alpha(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}(1/4i\hbar)^n\int^t dx_1\int^t dx_2\cdots\int^t dx_n\int^t dx_1'\cdots\int^t dx_n'\,v_\alpha(x_1-x_1')\cdots v_\alpha(x_n-x_n')\cdot P\{[\psi^+(x_1')\psi(x_1')\psi^+(x_1)\psi(x_1)+\psi^+(x_1)\psi(x_1)\psi^+(x_1')\psi(x_1')]+\cdots+[\psi^+(x_n')\psi(x_n')\psi^+(x_n)\psi(x_n)+\psi^+(x_n)\psi(x_n)\psi^+(x_n')\psi(x_n')]\}$$

上式之解可利用Wick theorem來分析chronological product (i.e. p {…}) 並可以Feynman diagram的方法予以分析，有關此方面的細節不再詳述。(註：上述方法顯然是由interaction representation及引入 time development operater $u(t, t')$ 的觀念 來解波動方程式。

Ⅲ. 單質點格林函數：

單質點格林函數G定義如下：(令 $\hbar = 1$)

$$G(\vec{k}, t_2 - t_1) = i < \psi_n(0) | T\{a_{kt_2}, a^+_{kt_{1+1}}\} | \psi_n(0) >$$

其中 $\psi_n(0)$ 是交互作用的 N 質點系統的確實的歸一化基態 (exact normalized ground state) 而 $a_{kt} = a^{iHt} a_k e^{-iHt}$, $a^+_{kt} = (a_{kt})^+$ 是與Schrodinger time independent operater a^+_k 相對應的 Heisenberg time dependent operator

而 $P = \pm T(t_2 \gtrless t_1)$，$T$ 為Dyson chronolgical operator 即：

$$G(\vec{k}, t_2 - t_1) = G^{(r)}(k, t_2 - t_1) + G^{(a)}(\vec{k}, t_2 - t_1)$$

$$G^{(r)}(\vec{k}, t_2 - t_1) = i < \psi_n(0) | a_{\vec{k}t_2} a^+_{\vec{k}t_1} | \psi_n(0) > \qquad if\ (t_2 - t_1) > 0$$

$$= 0 \qquad if\ (t_2 - t_1) < 0$$

$$G^{(r)}(\vec{k}, t_2 - t_1) = 0 \qquad if\ (t_2 - t_1) > 0$$

$$= -i < \psi_n(0) | a^+_{kt_1} a_{kt_2} | \psi_n(0) > \qquad if\ (t_2 - t_1) < 0$$

上式中 $G^{(a)}$ 與 $G^{(r)}$ 分別為advanced與retarded part 。事實上，上式中的 k 應視為動量 k 與自旋 σ 兩部分，不過在一獨立系統中自旋 σ 是一個良好的量子數 (good quantum number) 且若沒有外加磁場存在的話則此系統可視為 isotropic，則格林函數與自旋無關。

格林函數與 $S_\alpha(t)$ 之關係可由下面討論得到：由以上各定義及 $S_\alpha(t)$ 之性質可知

$$|\psi_n(0)> = k^{\frac{1}{2}} |\psi(0)> \quad k \text{ 是歸一化常數}$$

而已知 $< \psi_n(0) | \psi_n(0) > = 1$

$$\therefore \quad k = < \psi(0) | \psi(0) >$$

$$= \psi(\infty) | S_\alpha(\infty, 0) S_\alpha(0, -\infty) | \psi(-\infty) > |_{\alpha \to 0}$$

$$= < g | S(\infty, -\infty) | g >$$

因為 $S(t_1, t_2) S(t_2, t_3) = S(t_1, t_3)$ 且令

$$S(t_1, t_2) = \lim_{\alpha \to 0} S_\alpha(t_1, t_2)$$

因此若 $t_2 > t_1$

$$G(\vec{k}, t_2 - t_1) = (i/k) < g | S(\infty, 0) \{S(0, t_2) a_k(t_2) S(t_2, 0)\} \{S(0, t_1) a^+_k(t_1) S(t_1, 0)\} S(0, -\infty) | g >$$

其中 $a_{\vec{k}t} = e^{iHt} e^{-iH_0 t} a^+_{\vec{k}}(t) e^{iH_0 t} e^{-iHt}$

$$= S(0, t) a^+_{\vec{k}}(t) S(t, 0)$$

將上式利用 S 運算子之性質化簡可得

$$G(k, t_2 - t_1) = i < g | S(\infty, t_2) a^+_{\vec{k}}(t_2) S(t_2, t_1) a^+_k(t_1) S(t_1, -\infty) | g > / < g | S(\infty, -\infty) | g >$$

上式可再利用下式化約，而得到結果如下式

若 $t \geq t_2 > t_1$ 則 $a^+_k(t) S(t_2, t_1)$

$$= S(t_2, t_1) a^+_k(t)$$

$$a_k(t) S(t_2, t_1)$$

$$= S(t_2, t_1) a_k(t)$$

故得 $G(k, t_2 - t_1) = i < g | S(\infty, -\infty) a_k(t_2) a^+_k(t_1) | g > / < g | S(\infty, -\infty) | g >$ $\qquad (t_2 > t_1)$

$$= -i < g | S(\infty, -\infty) a^+_k(t_1) a_k(t_2) | g > / < g | S(\infty, -\infty) | g > \qquad (t_1 > t_2)$$

將上二式寫成一般式：

$G = (k, t_2 - t_1) =$

$$\frac{i \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n / n! \int_{-\infty}^{\infty} dt'_n \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 < g | T\{H(t'_1) \cdots H(t'_n) a_k(t_2) a^+_k(t_1)\} | g >}{\sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n / n! \int_{-\infty}^{\infty} dt'_n \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt'_1 < g | T\{H(t'_1) \cdots H(t'_n)\} | g >}$$

其中 $H(t_i') = \lim_{\alpha \to 0} H_\alpha(t_i')$

由上式可知格林函數亦可以以Feynman diagram的方法予以分析。

格林函數亦可以 (r, t) 來表示，即：

$$G(r, t; r', t') = i < \psi_n(0) | T\{\psi(r, t) \psi^+(r', t')\} | \psi_n(0) >$$

而 $$G(k, t_2 - t_1) = \frac{1}{\Omega} \iint dr\, dr'\, G(r, t; r', t') \exp[-i(kr - kr')]$$

上述所討論的格林函數 $G(r, t; r^1, t^1)$ 意義如下：當一系統的基態 $|\psi_n(0)>$ 在 (r', t') 時加入一質點，且該狀態函數 $|\psi_n(0)>$ 沒有任何改變，則格林函數為發現該質點在 (r, t) 的 probability amplitude ，由此可知 $G(k, t_2 - t_1)$ 描述一質

點在該動量狀態隨著時間的傳移(propagation)因此G又叫做propagator，而且G僅描述該額外質點(在本文內可看成quasi-particle)之各種資料而與其他無用資料如基態毫不相干，因此用來解低溫的費米作用系統極爲有用。

Ⅳ單質點格林函數的Lehmann representation與quasi-particle.

我們前面述及之格林函數$G(k,t_2-t_1)$改寫成下式：

$$G(k,\tau)=-i\langle\psi_0|T\{a_{k\tau}a^+_{k0}\}|\psi_0\rangle$$

其中 $a_{k\tau}=e^{iH\tau}a_k e^{-iH\tau}$

而 $|\psi_0\rangle=|\psi_n(0)\rangle$，故得下式：

$$G(k,\tau)=-i\langle\psi_0|a_k e^{-iH\tau}a_k^+|\psi_0\rangle e^{iE_0\tau}\qquad \tau>0$$

$$G(k,\tau)=\pm i\langle\psi_0|a_k^+e^{iH\tau}a_k|\psi_0\rangle e^{-iE_0\tau}\qquad \tau<0$$

其中(+)號爲費米粒子，(−)號爲鮑斯粒子(請注意比較上式與前述各式(*i.e.* $G^{(a)}$，$G^{(r)}$ 之關係)。

上式可化成下式：

$$G(k,\tau)=-i\sum_n\langle\psi_0|a_k|\psi_n\rangle\langle\psi_n|e^{-iH\tau}a_k^+|\psi_0\rangle e^{iE_0\tau}=-i\sum_n|(a_k^+)_{n0}|^2e^{-i(E_n-E_0)\tau}\qquad \tau>0$$

即將Hamiltonian作用於中間狀態$|\psi_n\rangle$，而對應成能量E_n，動量k的$N+1$個質點系統，同理可得：

$$G(k,\tau)=+i\sum_n|(a_k)_{n0}|^2e^{i(E_n-E_0)\tau}\qquad \tau<0$$

在此中間狀態$|\psi_n\rangle$對應成動量爲$-k$的$N-1$質點系統。

上式中指數部分可化成下式：

$$E_n(N+1)-E_0(N)=E_n(N+1)-E_0(N+1)+E_0(N+1)-E_0(N)$$
$$=w_{n0}+\mu\qquad \mu=E_0(N+1)-E_0(N)$$
$$E_n(N-1)-E_0(N)=w'_{n0}-\mu'$$

其中$w_{n0}(w_{n0}')$爲$N+1$($N-1$)質點系統之激動能(excitation energy)而$\mu(\mu')$爲在基態時從$N\to N+1$($N-1\to N$)之化學勢能(chemical potential)對於一甚大的系統而言可設$w_{n0}=w_{n0}'$及$\mu=\mu'$，故得到下式：

$$G(p,\tau)=-i\sum_n|(a_k^+)_{n0}|^2e^{-i(w_{n0}+\mu)\tau},\qquad \tau>0$$

$$G(p,\tau)=+i\sum_n|(a_k)_{n0}|^2e^{+i(w_{n0}-\mu)\tau}\qquad \tau<0$$

若引入下列能譜函數(spectral function)：

$$A(k,w)=\sum_n|(a_k^+)_{n0}|^2\delta(w-w_{n0})$$

$$B(k,w)=\sum_n|(a_k)_{n0}|^2\delta(w-w_{n0})$$

$$C(k,w)=\int dt\,G(k,t)e^{+iwt}$$

則我們可得到Lehmann representation.

$$G(k,w)=\int_0^\infty dw\left[A(k,w)/\epsilon-(w+\mu)+i\delta+B(k,w)/\epsilon+w-\mu-i\delta\right]$$

在利用Lehmann representation來討論單質點格林函數與quasi-partical 之關係之前應先了解quasi-particle(簡稱Q，P)爲何？述之如下：

Q，P可視爲在極低溫下沒有外加位能場的費米粒子均勻的交互作用系統的基本激動態(elementary excitation)而此"clothed particle"的動量k大於且極接近費米粒子波數(Fermi wave number)k_F，由於系統中粒子間的交互作用此clothed particle 在運動時已不具質點之特點(*i.e.* $\epsilon(P)=P^2/2m$)，故叫Q，P，此種基本激動並非一穩定狀態，而是一團(packet)能量擴展極小的穩定態所組成，由於此種packet 的逐漸消滅造成Q，P的阻尼(Damping)，因此爲了使Q，P能用來描述該系統必須有一條件，即在packet中能量的擴展須小於該Q，P的激動能。此外由於Q，P會把能量傳給另一新的Q，P而使本身能量減小(因而不能正確地描述該系統的激動)，由波里原理與能量不滅定律知道此種過程之或然律與$(k-k_f)^2$成比例，因此爲了使Q，P能正確地描述費米粒子系統的激發態則Q，P的動量k必須非常接近k_f(此點很重要)。因此一個較弱激發的多體交互作用系統可看成由此種相互獨立的Q，P的分佈而組我，而此Q，P之數目甚小於基態裡的Bare particle，由研究此種Q，P的能譜的形式可決定該系統的若干性質(有名的藍道理論

Landau theory），而對於只有Q，P此種激動的系統可以單質點格林函數描述，至於其他激動的系統可以二質點的格林函數描述（二質點格林函數可決定該系統因較弱的外加場的作用所引起之狀態）。二質點的格林函數可定爲

$$k(x_1,x_2,x_3,x_4)=\langle\phi_0|\,T\{\phi_{\sigma 1}(x_1)\,\phi_{\sigma 2}(x_2)\phi^{+}_{\sigma 3}(x_3)\,\phi^{+}_{\sigma 4}(x_4)\}\,|\phi_0\rangle$$

一般來說由討論能譜函數$A(k,w)$與$B(k,w)$即可決定Q，P的能量，動量與生命期（life fime）亦卽阻尼），例如對於沒有交互作用的費米系統而言；格林函數爲

$$G_0(k_1\tau)=in_k e^{-i\epsilon(k)\tau} \qquad \tau<0$$
$$=-i(1-n_k)e^{-i\epsilon(k)\tau} \qquad \tau>0$$

其中　$n_k=1$　　　$k<k_F$
　　　$n_k=0$　　　$k>k_F$

由比較可得：

$$A(k,w)=\delta\{w-[\epsilon(k)-\mu]\}(1-n_p)$$

由此可知"質點"之傳移沒有阻尼存在，而$G(k,\tau)$之振盪頻率卽爲$\epsilon(k)$，若對於有交互作用之系統而言則$A(k,w)$變成甚複雜，因此對於如何求知可描述一Q，P系統的$A(k,w)$而言我們可如此求之：卽若$G(k,\tau)$滿足下式且滿足其他條件（後述及）則可有效地描述Q，P

$$G(k,\tau)=-iZ_k e^{-i\tilde{\epsilon}(k)\tau}\,e^{-\Gamma_k\tau}$$

上述描述能量爲$\tilde{\epsilon}(k)$；强度（strengh）爲Z_k之Q，P，此Q，P存留於時開$\tau\sim 1/\Gamma_k$之內（Γ_k卽爲阻尼）爲得到上式$A(k,w)$須滿足下式：

$$A(k,w)=f(kw)/(w-[\tilde{\epsilon}(P)-\mu])^2+\Gamma_k^2$$
$$=iZ_k/2\pi/w-[\tilde{\epsilon}(P)-\mu]+i\Gamma_k+c.c.$$

將$A(k,w)$對w積分並取適當路徑，並求結果與原假設之$G(k,\tau)$吻合可得下列條件：

$$\tau_c\lesssim\tau\lesssim 1/\Gamma_k,$$

而得　$G(k,w)=Z_k/[\epsilon+\tilde{\epsilon}(k)+i\Gamma_k]$＋修正項

其中τ_c之因次與$[\tilde{\epsilon}(k)-\mu]^{-1}$相當。

V. 結　　論

由以上之討論可知由$G(k,w')$的解析性質可知可由該積分式中的pole（$i.e.\ w=\tilde{\epsilon}(P)-\mu-i\Gamma_k$來決定$Q$，$P$的能量與生命期。上述討論若將$Q$，$P$的條件$k>k_F$改成$k<k_F$卽可得到Quasi-hole之情狀，可同法處理之。上述方法用來計算稀薄的費米氣體與高密度電子氣體結果甚爲良好。

附：

1．在第一部分中，若欲將S表成$H(t_i)$的對稱式，則必須滿足下式

$$[H(t_i),H(t_i)]=0 \qquad (t_i\neq t_j)$$

若上式不能滿足，則可用另一相似的 transformation 而得一相似的結果，參見 Gottified：Q.M. § 54

2．第三部分中有關Quasi-particle 之能量亦可由Bogoliubov 的Canonical transformation 方法而得到，在Davydov：Q.M § 141，143 中有以此種方法討論超流性，超導性的Quasi-partice的能量。

3．第一部分所述之微擾理論亦可用來討論不可逆過程，此種討論可由Liouvilles eq 出發，ρ爲密度函數

$$L\rho_N=i\partial_t\rho_N$$
$$L=i\{H_N,\quad\}=i\left(\frac{\partial H_N}{\partial r}\frac{\partial}{\partial p}-\frac{\partial H_N}{\partial p}\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

設$L=L_0+i\lambda\delta L$
$$=L_0(p)+i\lambda\delta L(r)$$
$$L_0\rho=L_0(p)=-iv\frac{\partial\rho}{\partial r}$$ free particle exact ssluable
$$i\lambda\delta L=i\lambda\delta L(r)\rho=i\lambda\frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial\rho}{\partial v}$$
（iuteractiov）

故設　$\rho_N(t)=e^{iLt}\rho_N(0)$
$$=\frac{-1}{2\pi i}\oint_c\frac{e^{-izt}}{L-z}dz\rho_N(0)$$

而$\dfrac{1}{L-z}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(L_0-z)^{-1}[-\lambda\delta L(L_0-z)^{-1}]^n$

代入，且設$\rho_k(v,t)=\langle k|\rho(v,t)\rangle$

得　$$\rho_k(v,t)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_c dz\,e^{-izt}\sum_{k'}\langle k|(L_0-z)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}[-\lambda\delta L(L_0-z)^{-1}]^n|k'\rangle\rho^t_{k'}(v,0)$$

上式顯然與第一部分之S相似，亦可由diagram nethod來分析$\rho_k(v,t)$的各項，在 Jacovinci：Statistical Mechauics 書中 Resibois 那篇文章中有詳細討論。