向量與張量

王介山

" Symmetry is one idea by which man through the ages has tried to comprenend and create eat order , beauty and perfection " — H. Weyl.

零、前言

這篇文章是在讀過一點群論後產生的。

大家如果對於這些東西有興趣的話，可以在 Reference 裏找一些資料看看。

一、向量空間

線性（ linearity ）是向量空間的一個重要性質，而我們所以利用向量空間來建立物理理論，也是因物理系統的狀態（ State ）具有這種性質：即所謂的 Superposition principle。於是我們可以這樣說：一個物理系統，可以用一個（或多個）向量空間來表現（ represent ），而物理系統的狀態由向量空間的向量代表。當然，這些向量空間還須具有別性質，如內積……等，後面再談；然而 Superposition principle ，卻是一個最重要的關鍵。

在這裏，大家只要知道，一個物理系統可以用一個數學結構來表現；於是物理系統的一些性質，或其 dynamical process ，都可以用數學表示出來。至於如何表現，及表現的性質，我們後面將談到，而這和物理系統的本性，有很大關係。

二、線性轉變

我們先談談"表現"（ representation ）的意思。"表現"也就是對物理系統的描述（ description ）；一個物理系統可以有不同的表現，因爲我們可以從不同的角度去描述它。然而這些不同的表現之間，是互相有牽連的。而這種牽連，就是它們之間的轉變。

而在同一個表現裏，向量之間也有其相互關係，例如一向量可經由轉換而變成另一向量。

前面的兩段話，都牽涉了所謂轉換，而轉換可以有各種形式，我們只考慮線性轉變，乃因我們假設了物理定律的 Simplicity，而線性轉換是最簡單的形式，即所牽涉的量之間的關係，爲簡單的線性一次式。

對這二段話裏轉換具有不同定義，我們必須注意。事實上第一段話裏的轉換，可分爲二種情形，而它們在基本意義上是一樣的，只是對物理系統取不同的描述：(a)我們可以描述不同的東西（這和量子力學裏的 transformation theory ，或是 repersentation theory 有很大關係）；(b)或是對一種東西給以不同角度的描述，關於(b)情形的轉換，我們稱爲靜態的，或消極的（ passive ）。(c)第二段話裏的轉換，則眞正地在同一個描述基準下，代表了物理狀態的改變，我們稱爲動態的，或積極的（ active ）。事實上，(b)和(c)，是一體的二面，看我們取的觀點而定。而(a)，也就沒有消極或積極可言。

至於向量空間裏的線性轉換，我們都是用矩陣來表示。因此當我們知道了上面那些東西，我們就必須對矩陣所代表的東西有所區別。我們必須分別所謂的 numerical equal 和 identical equal：二個數值相同的矩陣（向量），並不一定代表同樣的物理轉換（物理狀態）。相信這點大家都可以明白。

三、向量、張量

在前二節，我們簡單地談了 Superposition principle 和 linear transformation，這些都是基本量子力學裏的觀點。這節裏，我們談談表現（ representation ）的本質，亦即對向量空間的元素，我們必須區別向量、張量等，這可以說是相對論的觀點，而廣義地說起來是純粹代數的（ purely algebraic ）。

我們先看看最簡單的情形，四維時空向量（ 4-vector ），我們寫成 (ct, x, y, z)；這是一個粒子或一物理事件的簡單表現，它的位置和時間。在四維時空上的線性轉換爲羅侖玆轉換（ Lorentz transformation)。現在如果我們也有一個向量空間P，亦有四個分量(P_0, P_1, P_2, P_3)，而這四個分量對(Ct, x, y, z)或許是 functionally dependent ，於是在時空向量空間上的轉換，亦造成P上的轉換。如果在P上的轉換，四個分量間的 functional relation，和時空向量空間上轉換(Ct, x, y, z)間的 functional relation，其形式一樣，那麼我們說P的四個分量構成一向量。例如：對羅侖玆轉換而言，($\frac{E}{C}$, P_x, P_y, P_z)是一個 4-Vector，代表一個粒子的能量和動量。

在這裏我們要注意的是，轉換性質決定了向量(或張量)的性質，而且這裏所說的轉換(可能是非線性)，只是前面第一種情形的(b)，對同一個量取不同的角度的描述，例如羅侖玆轉換，指不同 inertia frame 間的關係。如果被描述的東西是一個向量，那麼在別的角度，它應還是向量(參看第四節)。

代數地說起來，我們有一個向量空間V，其上向量$\vec{X}$，$\vec{X}=(X_1, \cdots, X_\alpha)$。有$\alpha$個分量，線性轉換A改變X的基底，使$\vec{X}$的描述變為$\vec{X}=(X'_1, \cdots, X'_\alpha)_A$，$X_i$和$X'_i$間的關係為

$$X'_i = A^j_i X_j$$

如果亦有一種量P有α個 Component，亦形成一向量空間，而其在A的作用下轉換情形和$\vec{X}$一樣，亦即$P'_i = A^j_i P_j$，則我們可以說P在A的作用下是一個向量。

跟向量一樣，張量亦由轉換性質來定義。代數上，張量是向量的擴張。我們說純量是零階張量，向量一階，然後有二階、三階……等。

純量，亦即經轉換而數值不變的量。例如粒子的靜止質量在羅侖玆轉換下是一純量；純量在物理上有重要地位，因其代表所謂的 invariant 。

我們看看如何由向量建立張量：n維向量$\vec{X}=(X_1 \cdots X_n)$，轉換A使$X'_a = A^b_a X_b$，我們建立二個向量的 billinear forms $X_i Y_j$，則 billinear forms 的轉換性質$(X_i Y_j)' = A^k_i A^l_j X_k Y_l$，這和$\vec{X}$的轉換性質有很大區別。因此，如果有一個量T，具有$n^2$個分量$T_{ij}$，而其在A作用下，和$X_i Y_j$的轉換情形一樣，即$T'_{ij} = A^k_i A^l_j T_{kl}$，則我們稱T為二階張量。同理可以有更高階的張量。

四、Invariants, wvariants 及 wntravariants

Invariants就是不變的量。事實上，在向量由轉換定義時，已暗示了不變量的存在。因此我們說，一個向量，在一族轉換所造成的各種角度下，還是一個向量。於是，($X_1, \cdots, X_\alpha$)這些分量只是一些數值而已，重要的是我們對它們所形成某種函數形式的不變性的要求*，這些不變形式限制了X_i的轉換形式，亦即定義了一族線性轉換，而($X_1, \cdots, X_\alpha$)在這組轉換下形成一個向量。例如我們要求時空裏任何二點的距離，在不同的等速系統測起來，都應一樣，於是導出了羅侖玆轉換。

通常最簡單的不變形式是二次式(quadratic form)，這與向量空間上的內積定義(1)有很大關係。然而在向量空間裏，各個分量可能有不同的量度(metric)，例如各分量的 unit和 dimension ，或分量的方向。於是為了建立內積或長度的定義，使不變形式較簡單，我們必須區別向量的 contravariant 和 covariant 分量。事實上這種作法只是為了使事情變得容易處理。

先談談三維的歐氏空間，向量(x, y, z)，單位向量 i=(1，0，0)，j=(0，1，0)，k=(0，0，1)，純量內積 $xx'+yy'+zz'$，所對應的線性轉換為剛體運動。各分量的 unit和 dimension 都是 equivalent ，且是 orthogonal system ，因此 covariant component 和 contravariant components 是一樣的。如果我們選一個 curvilinear coordinate (ξ_1, ξ_2, ξ_3) ，如(γ，μ，θ)，(γ，θ，Z)。(ξ_1, ξ_2, ξ_3)和(X_1, X_2, X_3)之間可以互相轉換，這種轉換屬於(a)，且通常是非線性的。於是在(ξ_1, ξ_2, ξ_3)上定義的內積再也不是簡單的二次式，而我們可以定義 covariant 和 contravariant components 使內積定義，再變為簡單形式。(ξ_1, ξ_2, ξ_3)的 dimension 並不一定是長度，且ξ_1, ξ_2, ξ_3可以不同的 dimensions，於是這種座標系內的單位向量 $\vec{a_1}$, $\vec{a_2}$, $\vec{a_3}$ 具有長度的 dimension ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ 沒有

dimension ）。爲了便利內積的定義，我們分出二組單位向量：一組爲 $\vec{a_i}=h_i\vec{u_i}$ ，$\vec{u_i}$ 爲 curvilinear unit vector （表示 ξ_i 變化的方向），h_i 則爲 $\vec{a_n}$ 的 dimension 和 unit ，h_i 符合方程式 $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=\sum_{i=1}^{3} h_i{}^2 d\xi_i^2$(2)。於是一個向量可以寫成 $\vec{F}=\sum_i f^i\vec{a_i}$ ，f^i 稱爲 contravariant components 。另一組 $\vec{a}^i=\frac{\vec{u_i}}{h_i}$ ，$\vec{F}=\sum_i f_i\vec{a^i}$ ，f_i 稱爲 covariant component。我們可以看出 $\vec{a}^i\vec{a_j}=\delta^i_j$，因此，內積定義爲 $\sum f_i f^i$ 。

如果我們看 $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=\sum_i h_i^2 d\xi^2$，可以發現 ds^2 的形式，對 x, y, z 的互換是對稱的，而對（ξ_1, ξ_2, ξ_3）卻不。我們可以說，在（x, y, z）系三個分量的度量（metric）是一樣，而（ξ_1, ξ_2, ξ_3）三個分量的度量不一樣，事實上，這些是來自 invariant （內積）的形式。在這個例子裏，我們只牽涉到 orthogonal coordinate，至於不互相垂直的情形，事情會變得更複雜，因我們不只要考慮 dimension 的問題，且要考慮 unit 的問題(3)。

前面所談的是一種比較 physical 的情形，我們根據物理上的需要，要求什麼東西爲 invariant Scalar ，再求向量的 covariant 及 contravariant components 。而 covariant 及 contravariant components 的轉換並不一樣，其實這也是名稱的來源。一個轉換 T 我們把它對向量的作用表爲

$$X^{i\prime}=A^i_j X^j$$
$$X'_i=B^j_i X_j$$

而 $X_c X^c=X'^c X'_c$ ，因此 A、B 互爲反矩陣，即 $A^i_j B^j_k=\delta^i_k$ 。

現在如果討論在某一個轉換下的 invariants，或者在某一轉換下的 covariant 或 contravariant，於是，我們所要的只是純粹的代數關係，不再有方向，dimension 或 unit 。例如所謂的 U(n)(4)（在 n 維複空間上的 Unitary transformation group ），U(n) 的一個元素定義爲 $\xi'_a=U^b_a\xi_b$（就定 ξ_b 爲 covariant ），$U^{+a}_b=U^{-1b}_a$ 取 complex coujugats $\xi'^*_a=\xi^*_b U^+_b$ ，如果我們定 $\xi^a=\xi^*_a$ 爲 contravariant component ，於是 $\xi^a=\xi^b U^+_b$ ，馬上可以看出 $\xi^a\xi_a$ 在 U 下爲 invariant 。

當然在別的情形，亦即別的 transformation group時，可以有不同的定義，我們利用的只是代數關係；但在一個向量空間上的一 transformation group下，似乎只有一種 $\xi^a\xi_a$ invariant，亦即如果我們要 $\xi^a\xi_a$ 這個簡單的二次式爲 invariant 時，ξ^a, ξ_a, 及 $\xi^a\xi_a$ 都被唯一決定；這時，向量空間的本質也就決定了。於是，當我們說到向量空間時，並不只是指符合線性代數裏那種向量空間，而且必須考慮進去某些 transformation ，亦即某種 invariant （內積）。這點在下一節裏將看的更清楚。

五、Symmetry, Symmetry Transformation

"對稱性" 的尋求和應用，是自古已來就有的。不論是在科學、藝術、人類行爲各方面，"對稱性" 使得複雜的東西，變得有秩序，且更簡單。事實上，由於我們相信一些普遍的對稱性，才使得科學得以發展。而我們相信，在自然定律的數學結構裏，我們可以發現 "對稱" 的起源。

對於數學結構表現出 "對稱性" ，我們可以從前面的例子看出：在歐氏空間裏定義的長度，$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ ，這種形式顯然對 x, y, z 的互換是對稱的，這顯示了空間的均向性（isotropy）。

現在我們看看如何由對稱性，一些 invarionț 的要求，來建立一個物理系統的描述，和此系統的 dynamical laws。我們引用 Paul Roman 的 "Advanced Quantum Theory" 裏的一段話：

The very possibility of establishing a law of physics is connected with the circumstance that, for a given physical system, there always exist certain irrelevant conditions and specifications which do not enter explocitly into the dynamical law. Selecting these irrelevant conditions in any possible manner

, we fine that the subsequent behavior of the system can be predicted unambiguously. In other words, if, consistent with the dynamical possibilities of the system, a complete description of its state has been given, there will exist a definite development which leads to another state with one of the other possible complete descriptions. Moreover, if we know the relation between two initial specifications, the resulting dynamical development in the second case can be obtained from that pertaining to the first case by means of a "code of translation,"* which does not depend on the specific nature of the relevant specifications, Finally, the mathematical form of the law that expresses the development cannot depend on the initialspecifications.

The first condition, i.e., the existence of certain irrelevant data, is nothing more than a statement to the effect that there exists a set of symmetries satisfied by the system and that the law itself is invariant with respect to these symmetries. The second condition (that of the possibility possibility of "translation") implies that it must be possible to construct a mathematical law which gives the connection between observables that pertain to different initial specifications, i. e., there exists an explicit transformation law. The third condition is usually paraphrased by saying that the dynamical law is covariant (or form- invariant) under the symmetry transformations.

Paul Roman 在這段話裏，取的是積極的觀點。相信可以別的看法。我們把 Paul Roman 的話解釋一遍：

(一)對所要描述物理量經由適當地選擇不相關的資料後，我們可以在物理系統上建立它的表現，而我們所描述量可能是向量、張量等；在建立過程，已經隱含了不變性的要求，這種要求由物理系統及所選的量決定。於是，我們對線性轉換的形式有了要求，亦即我們要求不同角度間的關係；我們選取起始狀態，這種選擇可以是消極或積極的，由實驗者的觀點決定。

(二)我們要求 dynamical law 和起始狀態的選擇無關的，於是這些選擇被限制了，並不是在向量空間上的線性轉換都有這種性質，也就是說我們分別出來所謂的 Symmetry transformation 。

例如，在量子力學裏，我們描述氫原子系統：在氫原子波函數向量空間（一種希爾伯空間）上，我們如果取 X-representation，由於要求概率的不變，在這個表現裏的線性轉換是 unitary ，然而並不是所有 unitary transformation 都能使 Schrödinger equation 是 covariant 。

(三)如果我假設某些基本對稱的存在，如 homogeneity of space time, isotropy of space-time, space reflection time reversal 等，我們也就限制了物理系的表現，dynamical law的形式等等。這裏我們把前面的情形倒回來了，而這正是群論的工作。我打算在下期時空把群論續完，敬請拭目以待。

〔註〕(1)在 Vector invariant 的理論是， invariant 的形式不只是二次式，請參考 H. Weyl 的 "Classigroup" 。

(2)參考 Morse 的 "Method of theoretical physics" p. 21.

(3)參考 W. Pauli 的 "Relativity." 第二章。

(4)參考 P. Roman, "Elementary particles" 第二章。

References :

1. Hamermash : "Group Theory"
2. H. Weyl : "Theory of Groups and Quantum Mechanics"
3. Wigner : "Group Theory"