量子力學

魏弘毅

古典力學

在古典力學（牛頓力學，Maxwell電磁理論）裏，一個質點的動量和位置，可以很精確地測出來。在古典力學的運動方程式中，質點位置和動量，能量，是時間的函數，我們可由已知的條件，得知一個質點的運動行徑，能量的大小。但在量子力學裏，我們就無法利用任何精確的測量方法，同時精確測知一個質點的位置和動量，也無法在某一時間，準確測知質點所帶能量的大小。依照Heisenberg's 測不準原理（Uncertainty principle），位置（$\triangle x$）與動量（$\triangle p$）互補，能量（$\triangle E$）與時間（$\triangle t$）互補，我們若要同時測定質點的位置和動量，則其精確度有一極限值，即$\triangle x \triangle p$和$\triangle E \triangle t$不能小於$\hbar$（$=\frac{h}{2\pi}$，h爲Planck's constant$=6.6252\times10^{-27}$ erg-sec）。我們所能測出的，僅是統計的數值（Statistical Probability而已。但由 Bohr 之Corespondence Principle我們可知，當所討論的變數遠大於h，或$h\to o$時，量子力學所得的結果，當與古典力學的結果相同，因此我們可認爲古典力學是量子力學的極限〔如相對力學也以古典力學爲極限（$v<<c$）〕，但是仍有些出入。現在讓我們來討論以上所述二者的關係，相似和相異之處。

本世紀初，由於黑體輻射，光電效應，原子光譜分析的實驗結果，注定古典力學在原子範圍的死亡，量子論爲解釋此現象，乃假定能量是以一束一束如砲彈發射出去，而非以波動連續的狀態傳播。其能量的大小，與頻率成正比，$E=h\upsilon$（E, energy, h=Planck's Constant, υ=frequency）

1924 年由於電子幽靈狀的行徑，De Broglie又假定電子帶有波動的性質，而導致二元論和輝煌的量子力學（波動力學Wave Mechanics與矩陣力學Matrix Mechanics）他假定一個動量P的質點帶有λ波長的物質波，其關係爲 $\lambda=\frac{h}{p}$，一羣波長相近的波，互相加強或干涉，構成的波束（Wave Packet），就像質點一樣的運動，其運動的速度是以羣速度（group velocity）$v=\frac{dw}{dk}$表之，（$k=\frac{2\pi}{\lambda}$ wave number, $w=2\pi\upsilon$）

Schrödinger 依照此假定，與波的重疊原理（Superposition Principle)和境界條件(boundary Condition）導出一條能適合測不準原理的運動方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad (1)$$

$\psi=\psi(x,y,z,t)$波函數（wave funtion)

V爲位能

此式與古典的 Maxwell's equation

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \qquad (2)$$

很像，以下，我們由此舉例討論兩者的相似，相異點及其關係。

A. 設V非時間函數，$V=V(\gamma)$

則$\psi(\gamma,t)=u(\gamma)f(t)$ (1)式可化成

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi=E\psi \qquad (3)$$

（E爲適合此式之eigenvalue，在此表示質點所帶的能量）

$$f(t)=\exp\left(-\frac{iE}{\hbar}t\right)$$

(3) 式中E值，是爲不連續的特定值，每個E_n就有一$u_n(\gamma)$（eigenfunction）故全波應爲各波的組合

$$\Psi=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\psi_n(\gamma,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\exp\left(-\frac{iE_nt}{\hbar}\right)u_n(\gamma) \qquad (4)$$

其次再看二式之解

$$\Psi(\gamma,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi V_n t)\, u_n(\gamma) \quad (5)$$

(4) 式中對於特定之V(x)，則其解爲

$$Q:\Psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{iE_n t}{h}\right)$$

$$\exp(-ik_n x)$$

$$a_n=\int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x')\Psi(x',o)dx'$$

$$\therefore\ \Psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x')\,\Psi(x',o)\right.$$

$$\left.dx'\right]e\times p\left(-\frac{iE_n t}{h}\right)\exp(-ik_n x) \quad (6)$$

於古典力學中，若有一條不能伸張的繩兩端固定於$-\frac{a}{2}$，$\frac{a}{2}$，張力爲T，則(5)式之解爲

$$C:\ \psi(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} u_n(x')\Psi(x',o)\,dx'}{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}[u_n(x')]^2\,dx'}$$

$$\cos(2\pi\,\upsilon_n t)\,u_n(x) \quad (7)$$

$$u_n(x)=\begin{cases}\cos\frac{n\pi x}{a} & n=odd.\\ \sin\frac{n\pi x}{a} & n=even.\end{cases}$$

$\upsilon_n=\frac{n}{2a}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$，$\rho$ 爲繩子單位質量

比較(6),(7) 兩式可知兩式很相似但仍有些分別：

1.(6)式中爲複數形式，(7)式爲實值，因此，在量子力學中，必須給波函數$\Psi(x,t)$和，其所量子化的質點一個力學上的定量，即在某時刻t，要測定質點於x，之或然率可以 $\psi^*(x,t)$ $\psi(x,t)$ 表之

$$P(x,t)=\psi^*(x,t)\psi(x,t)=|\psi(x,t)|^2 \quad (8)$$

此值恆爲實值，又由於質點在$-\infty$，與∞之間被測知的或然率應等於1 故

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t)dx=1 \quad (9)$$

此式爲量子力學之主要概念叫 Normalization.

於(7)式中 $$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)\neq 1 \quad (10)$$

2.兩式皆有正交性質（orthogonal property）

$$Q:\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*_n(x)\psi_l(x)=\delta_{nl}$$

$$\delta_{nl}=\begin{cases}1 & n=l\\ 0 & n\neq l\end{cases} \quad (11)$$

$$C:\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\psi^*_n(x)\psi_l(x)=\delta_{nl} \quad (12)$$

即在兩個不同的能位，其所對應的波函數亦不同。

其次，我們再來討論量子力學和古典力學的對應關係，對於許多次的測量，所得的平均値，即或然論中的期望値（expectation value） $\langle Q\rangle$
$=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^* Q\psi d\tau$ Q爲運算子（operator） (13)

如質點在X軸的平均値$\langle X\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^* X\psi d\tau$ (14)

$$\text{平均位能}\langle V\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^* V\psi d\tau \quad (15)$$

若14式對 t 微分 $\frac{d}{dt}\langle x\rangle=\frac{1}{m}\langle P_x\rangle$

$$\langle P_x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi d\tau \quad (16)$$

微分(16)式 $\frac{d}{dt}\langle P_x\rangle=\langle -\frac{\partial v}{\partial x}\rangle$ (17)

由(1)式之運算子對應關係可知。

$$\langle ih\frac{\partial}{\partial t}\rangle=\langle -\frac{h^2}{2m}\nabla^2\rangle+\langle V\rangle$$

即 $\langle E\rangle=\langle\frac{p^2}{2m}\rangle+\langle V\rangle$ (18)

綜觀(16),(17),(18),三式實完全與古典力學相像，更證明兩者不可分離的關係。

更進一步的，我們來討論兩者概念上最主要的區別。量子力學有兩個最主要的特質1.適合重疊原理。2.受到測不準原理的限制，其力學變數以或然率形式表之。然而在古典力學裡，並不受到第二條的限制，我們若要由量子力學變到古典力學，則須令第二條性質，到可忽略的程度，使或然率分佈的曲線，變成非常狹窄。然而，這樣就抵觸了第一條的性質，讓我們從兩者數學的關係討論之。

由(1)式 Schrödinger equation

$$-\frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi+V\psi=ih\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

討論單一質點的運動。令$\psi=R\exp\left(\frac{iS}{h}\right)$

R,S, 爲實函數 (19)

$$\text{則}\quad \frac{\partial R}{\partial t}=-\frac{1}{2m}[R\nabla^2 S+2\nabla R\cdot\nabla S] \quad (20)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}=-\left[\frac{(\nabla S)^2}{2m}+V(x)-\frac{h^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}\right] \quad (21)$$

令 $P=R^2(\gamma)$ P爲或然率密度（probability density）$=|\psi(\gamma,t)|^2$

則(20)式成 $\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{m}\nabla\cdot(P\nabla S)=0$ (22)

此式與流體力學裡的連續方程式(equation of contitunity)相似，$\frac{\nabla S}{m}=V$　$\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot(Vp)=0$, Vp 表示質點的或然通量(probability flux)正如流體力學表示質點不能生滅。

(21)式中，若合 $h\to 0$,，則成

$$-\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{1}{2m}(\nabla S)^2+V \quad (23)$$

此式即古典的 Hamilton-Jacobi 方程式。因此有人假定，一質點除受V外，更受另一種位能 V_Q 的影響，V_Q (Quantum Mechanical potential)

$$V_Q=-\frac{h^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}=-\frac{h}{4m}\left[\frac{\nabla^2 p}{P}-\frac{(\nabla P)^2}{P^2}\right] \quad (24)$$

所以，我們假定於(21)式中令 $V_Q=0$，則量子力學可變成古典力學，然而事實上不可能。爲簡便計，假定質點在一度空間裏運動。則(1)式解　$\psi_1=A\exp[i(kx-\omega t)]=B\exp[i(\frac{p}{h}x-\frac{p^2t}{2mh})]$ (25)

此式顯然適合(1)式及(23)式。同樣　$\psi_2=B\exp[-\frac{i}{h}(px+\frac{p^2t}{2m})]$ (26)

亦適合(1),(23)式　將(25),(26)兩式相加

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1+\psi_2)=\sqrt{2}B\cos\frac{px}{h}\exp\left[-\frac{i}{h}\frac{p^2}{2m}t\right] \quad (27)$$

此式之　$R=\sqrt{2}B\cos(\frac{px}{h})$　$S=-\frac{p^2t}{2m}$

代入(24)式則　$V_Q=\frac{p^2}{2m}\neq 0$

可見 ψ 適合(1)式，而不能適合(23)式，即不合於重疊原理。

因此，我們必須認爲兩者在本上質有很大的差異，不可永遠認爲古典力學，必是量子力學的極限，而給量子力學一個錯誤的估價。至於兩者的分界，並不明顯，我們可以

$$m_0=\left(\frac{hc}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}=2.18\times10^{-5}g$$

(γ爲 Gravitational const. c, 光速)

作標準，小於m_0時可用 Schrödinger方程式，大於則可用(21)式

最後，我們應知道，量子力學應用統計方法，所得的結果，的確能很完美地描述原子的國境，然而在 10^{-13}cm以下，則又無法適合。Einstein, De Broglie諸人，就曾對量子力學感到不滿意，他們認爲，即使在量子的大小，仍應有某些力學變數，能够精確的決定每個質點的行徑，Bohm假定在 10^{-13}cm 以下，有某些隱變數(hidden variable)存在，它能像古典力學(但非全同)的運動方程式一樣，能準確預知質點的行踪，量子力學的統計方法，祗不過是由於實驗上的需要，所做的假定，並非表示沒有精確決定在量子大小內物質性質方法的存在。然而此說，未受大家支持。

參　考　資　料

1. Schiff: Quantum Mechanics 2nd, ed, 1955.
2. Eisberg: Fundamental of Modern Physics. 1961
3. Dicke & Wittke: Introduction to Quantum Mechanics. 1960
4. Nathan Rosen, Am. J. Phys. 32, 597 (1964)
5. David Bohm, Phys. Rev. 85, 166 (1952).
6. Goldstein: Classical Mechanics. Chap. 9,
7. P.A.M. Dirac: Principle of Quantum Mechanics.

狹義相對論淺說

劉源俊

初接受相對論的觀念時，往往僅能够記憶一些數學公式，而不能明瞭式中含有的深義。本文只就最簡單之概念加以分析，一以補一般書籍之不足，二以獻與新朋友們做禮物。

一、基本原理及假設

①慣性系存在。即我們能找到一基準坐標系(通常以三個相垂直的架子表之)，使不受外力作用的物體對於這基架或永遠靜止，或永遠以等速依直線運動。若兩系以一定速度相對運動而其中一系是慣性系，則顯見另一系也必爲慣性系。

註：地球繞日公轉，太陽系又在本銀河系中運動(有移動也有繞本銀河系中心的轉動)，本銀河系又在宇宙中運行。我們無法說地表、太陽、或本銀河中心是在慣性系中。因此慣性系之存在實爲想像中之事。