都卜勒效應

■王 繼 行■

當波源和觀察者對介質作相對運動時，觀察者所測得的頻率和波源所發出的不同，這個現象，稱爲都卜勒效應（Doppler effect）。

以下乃是我把都卜勒效應在一般狀況下公式的推證，錯誤之處，懇請各位師長和同學們指正。

假設O爲對介質靜止的參考點；在任一時刻 t，波源對 o 的位置及速度分別爲 $\vec{S}(t)$ 及 $\dot{\vec{S}}(t)$，觀察者對O之位置及速度分別爲 $\vec{R}(t)$ 及 $\dot{\vec{R}}(t)$，波源所發出的頻率爲 $f_S(t)$，觀測者所測得的頻率爲 $f_R(t)$。波面在介質中以一定速率成球面向各方傳播。以下把①波源靜止而觀測者動②波源運動而觀測者靜止③波源及觀測者皆運動④介質、波源及觀測者皆運動四種情形分別討論。

(A)波源對O靜止而接收者以 $\dot{\vec{R}}$ 的速度運動，O對介質而言爲靜止。

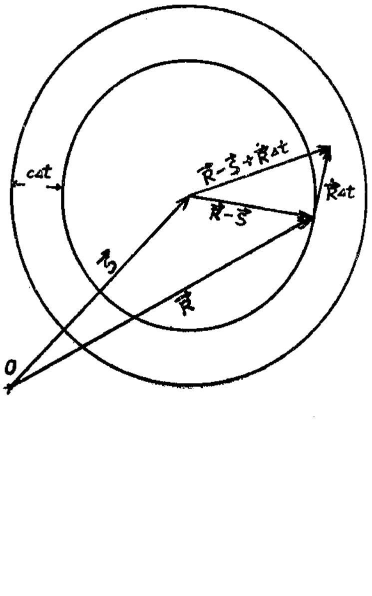
在時間 t，觀察者所收到的波是波源在 $t-\dfrac{\left|\vec{R}(t)-\vec{S}\right|}{C}$ 時所發出。在很短時間 $\triangle t$ 內，波源發出的波在二球殼間均勻分布（見圖一），所發出的波的總數爲 $f_S\left(t-\dfrac{\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}{C}\right)\triangle t$，其中經過觀測者爲總數的 $\dfrac{C\triangle t-\left|\vec{R}-\vec{S}+\dot{\vec{R}}\triangle t\right|+\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}{C\triangle t}$，因此在那一瞬間觀測者所測得頻率爲

$$f_R(t)=\lim_{\triangle t\to o} f_S\left(t-\frac{\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}{C}\right)\left[1-\frac{\left|\vec{R}-\vec{S}+\dot{\vec{R}}\triangle t\right|-\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}{C\triangle t}\right]$$

$$=f_S\left(t-\frac{\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}{C}\right)\lim_{\triangle t\to o}\left[1-\frac{\sqrt{(\vec{R}-\vec{S}+\dot{\vec{R}}\triangle t)\cdot(\vec{R}-\vec{S}+\dot{\vec{R}}\triangle t)}-\sqrt{(\vec{R}-\vec{S})\cdot(\vec{R}-\vec{S})}}{C\triangle t}\right]$$

$$=f_S\left(t-\frac{\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}{C}\right)\lim_{\triangle t\to o}\left[1-\frac{2(\vec{R}-\vec{S})\cdot\dot{\vec{R}}\triangle t+\left|\dot{\vec{R}}\triangle t\right|^2}{C\triangle t\left(\left|\vec{R}-\vec{S}+\dot{\vec{R}}\triangle t\right|+\left|\vec{R}-\vec{S}\right|\right)}\right]$$

圖 (1)



$$=f_S\left(t-\frac{\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}{C}\right)\frac{C-\dfrac{\dot{\vec{R}}\cdot(\vec{R}-\vec{S})}{\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}}{C}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

註：所謂 $\triangle t\to O$，純係數學意義，因爲在極短的時間內，根本沒有波發出。

(B)觀測者靜止，波源 $\dot{\vec{S}}(t)$ 速度運動。（O對介質而言爲靜止）。

在這種情況下，觀測者在 t 時所收到的波是波源在 $t-t_i$ 時所發出的，其中 t_i 是下列方程式的所有正根。

$$Cu=\left|\vec{S}(t-u)-\vec{R}(t)\right|$$

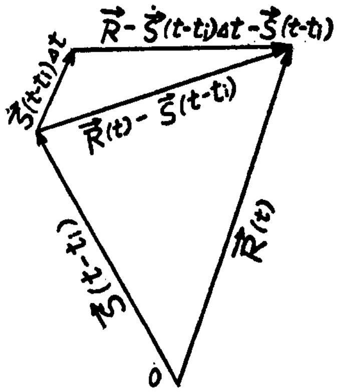


圖 (2)

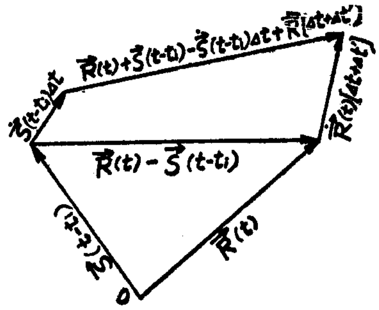


圖 (3)

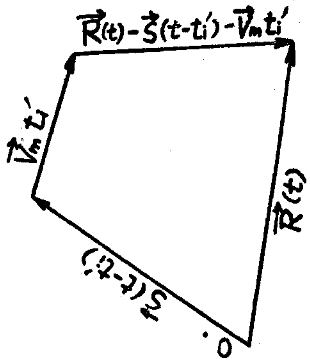


圖 (4)

假設△t爲一極短時間，波源在 $t-t_i$ 至 $t-t_i+\triangle t$ 的時間所發出的波經過觀測者所須的時間爲（見圖二）

$$\triangle t+\frac{\left|\vec{R}-\vec{S}-\dot{\vec{S}}\triangle t\right|-\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}{C}$$

上式 $\vec{S}$ 表 $\vec{S}(t-t_i)$，$\dot{\vec{S}}$ 表 $\dot{\vec{S}}(t-t_i)$，$\vec{R}$ 表 $\vec{R}(t)$

於是觀測者所測得頻率爲

$$f_R(t)=\lim_{\triangle t\to 0} f_S(t-t_i)\frac{\triangle t}{\triangle t+\dfrac{\left|\vec{R}-\vec{S}-\dot{\vec{S}}\triangle t\right|-\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}{C}}$$

$$=\lim_{\triangle t\to 0} f_S(t-t_i)\frac{C}{C+\sqrt{(\vec{R}-\vec{S}-\dot{\vec{S}}\triangle t)\cdot(\vec{R}-\vec{S}-\dot{\vec{S}}\triangle t)}-\sqrt{(\vec{R}-\vec{S})\cdot(\vec{R}-\vec{S})}}$$

$$=f_S(t-t_i)\frac{C}{C-\dfrac{\dot{\vec{S}}(t-t_i)\cdot[\vec{R}(t)-\vec{S}(t-t_i)]}{\left|\vec{R}(t)-\vec{S}(t-t_i)\right|}}\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

(C)觀測者和波源分別以 $\vec{R}(t)$ 和 $\vec{S}(t)$ 速度運動（O對介質而言爲靜止）

見圖三，t_i 和(B)所述者意義相同。在一很短的時間 $t-t_i$ 至 $t-t_i+\triangle t$ 內，波源的位移爲 $\dot{\vec{S}}(t-t_i)\triangle t$，並設在此時間內波源發出的波全部經過觀測者所須的時間爲 $\triangle t+\triangle t'$）可能是負值）。在一般狀況下當 $\triangle t\to 0$ 時 $\triangle t'\to 0$，因此接收者在 t 至 $t+\triangle t+\triangle t'$ 時間內的位移可視爲 $\dot{\vec{R}}[\triangle t+\triangle t']$，所以

$$\triangle t'=\frac{\left|\vec{R}-\vec{S}+\dot{\vec{R}}[\triangle t+\triangle t']-\dot{\vec{S}}\triangle t\right|-\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}{C}$$

$$=\frac{\sqrt{(\vec{R}-\vec{S}+\dot{\vec{R}}\triangle t+\dot{\vec{R}}\triangle t'-\dot{\vec{S}}\triangle t)\cdot(\vec{R}-\vec{S}+\dot{\vec{R}}\triangle t+\dot{\vec{R}}\triangle t'-\dot{\vec{S}}\triangle t)}-\sqrt{(\vec{R}-\vec{S})\cdot(\vec{R}-\vec{S})}}{C}$$

$$\simeq\frac{(\vec{R}-\vec{S})\cdot(\dot{\vec{R}}\triangle t+\dot{\vec{R}}\triangle t'-\dot{\vec{S}}\triangle t)}{C\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}$$

$$\therefore\frac{\triangle t'}{\triangle t}\simeq\frac{(\vec{R}-\vec{S})\cdot(\dot{\vec{R}}-\dot{\vec{S}}+\dot{\vec{R}}\dfrac{\triangle t'}{\triangle t})}{C\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}$$

$$\therefore \frac{\triangle t'}{\triangle t}\left[1-\frac{(\vec{R}-\vec{S})\cdot\dot{\vec{R}}}{C\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}\right] \sim \frac{(\vec{R}-\vec{S})\cdot(\dot{\vec{R}}-\dot{\vec{S}})}{C\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}$$

$$\therefore \frac{\triangle t'+\triangle t}{\triangle t} \qquad \frac{C-\dfrac{\dot{\vec{S}}\cdot(\vec{R}-\vec{S})}{\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}}{C-\dfrac{\dot{\vec{R}}\cdot(\vec{R}-\vec{S})}{\left|\vec{R}-\vec{S}\right|}}$$

所以觀察者所測得的頻率爲

$$f_R(t)=f_S(t-t_i)\ \lim_{\triangle t\to o}\frac{\triangle}{\triangle t'+\triangle t}$$

$$=f_S(t-t'_i)\frac{C-\dfrac{\dot{\vec{R}}(t)\cdot[\vec{R}(t)-\vec{S}(t-t_i)]}{\left|\vec{R}(t)-\vec{S}(t-t_i)\right|}}{C-\dfrac{\dot{\vec{S}}(t-t_i)\cdot[\vec{R}(t)-\vec{S}(t-t_i)]}{\left|\vec{R}(t)-\vec{S}(t-t'_i)\right|}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

以上各式的推導，皆假設在$C-\dfrac{\dot{\vec{R}}(t)\cdot[\vec{R}(t)-\vec{S}(t-t_i)]}{\left|\vec{R}(t)-\vec{S}(t-t_i)\right|}$及$C-\dfrac{\dot{\vec{S}}(t-t_i)\cdot]\vec{S}(t-t_i)]}{\left|\vec{R}(t)-\vec{S}(t-t_i)\right|}$爲正的情況下，當它們是負的時候，只要把以△t視爲負值，仍可照樣註出以上各式。

式(3)即爲所欲求的一般式，在此式中，$f_R(t)$可能是負值，或是零。當$f_R(t)=0$時，表示在t那一瞬間，波面和接收者沒有接近或遠離的趨勢。當$f_R(t)$是負的時候，觀測者所得的實際頻率爲$|f_R(t)|$，負值的意義乃是表示波源較早發出的波而觀測者較晚收到罷了。

(D)當介質（Medium）全部以$\vec{V_m}$速度對我們所取的參考點運動。

在這種情況下，在△t時間內，波面仍爲球形，而其中心對參考點作$\vec{V_m}\triangle t$的位移，因此觀測者在t時收到的波乃波源在$t-t'_i$時所放出者，此處t'_i乃方程式

$Cu=\left|\vec{S}(t-u)+\vec{V_m}u-\vec{R}(t)\right|$ 的正根〔見圖四〕

因介質對原點之速度爲$\vec{V_m}$，因此波源和觀測者對介質的相對速度爲$\dot{\vec{S}}-\vec{V_m}$，$\dot{\vec{R}}-\vec{V_m}$，故式(3)應改寫爲

$$f_R(t)=f_S(t-t'_i)\frac{C-\dfrac{(\dot{\vec{R}}(t)-\vec{V_m})\cdot[\vec{R}(t)-\vec{S}(t-t'_i)]}{\left|\vec{R}(t)-\vec{S}(t-t'_i)\right|}}{C-\dfrac{[\dot{\vec{S}}(t-t'_i)-\vec{V_m}]\cdot[\vec{R}(t)-\vec{S}(t-t_i')]}{\left|\vec{R}(t)-\vec{S}(t-t'_i)\right|}}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$