光與量子力學的關聯

作者：王奕誠
審稿：高涌泉教授

初學量子物理的學生或多或少都會對於各種新奇的定義感到困惑，好比說期望值的形式、動量與能量算符為何與對空間與時間微分有關，而在這當中最令人感到困惑的便是不具有古典對應的自旋角動量。事實上，這些概念都可以透過我們熟悉的電磁學來得到一個還不錯的解釋，雖然以下過程看上去只不過是在做些數學操作。

首先考慮真空中的 Maxwell 方程組，它是涉及電場與磁場兩個實數場的偏微分方程組，為了將之與涉及複數波函數的 Schrödinger 方程連結，Ludwik Silberstein 在 1907 年給出了一個現在被稱作 RS 向量(Riemann-Silberstein vector)的複數向量，定義為

$$\mathbf{F} \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}(\mathbf{E} + ic\mathbf{B})$$

將真空中的 Maxwell 方程組帶入可得

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}(\nabla \cdot \mathbf{E} + ic\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &\equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}(\nabla \times \mathbf{E} + ic\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_0}{2}}\left(\frac{-\partial \mathbf{B}}{\partial t} + ic\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \\ &= \frac{i}{c}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\end{aligned}$$

$$i\hbar\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} = c\hbar\nabla \times \mathbf{F}\ , \quad \nabla \cdot \mathbf{F} = 0$$

上式的第一條其實與 Schrödinger 方程具有相同型式，也就是說我們可以將光子的 Hamiltonian 看成 $\hat{H} = c\hbar\nabla \times$，可以自行驗證這是一個 Hermitian 算符。至此我們可見，Schrödinger 方程並不是那麼稀奇的東西，因為透過 RS 向量我們就可將古典理論寫成 Schrödinger 方程的形式，只不過是我們沒有注意到而已。但這不免令我們好奇如果這種類比成立，是否 RS 向量也可類比成光子的波函數呢？為此我們可以嘗試將電磁場能量、動量與角動量密度重新用 RS 向量改寫為

$$u_{EM} = \frac{\epsilon_0}{2}(E^2 + c^2B^2) = \mathbf{F}^* \cdot \mathbf{F}$$

$$\mathbf{p}_{EM} = \epsilon_0\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{1}{ic}\mathbf{F}^* \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{l}_{EM} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}_{EM} = \frac{1}{ic}\mathbf{x} \times (\mathbf{F}^* \times \mathbf{F})$$

可見若將 RS 向量想成未歸一化的波函數，他們都跟量子理論中的期望值一樣，具有波函數與其複共軛之雙線性形式，因此若要將之歸一化便可透過 RS 向量長度平方 $|\mathbf{F}|^2$ 為電磁場能量密度的性質，將 $|\mathbf{F}|^2/H$ 對比為波函數長度

平方的機率密度，如此電磁場能量的形式便將具有熟悉的形式

$$
\begin{aligned}
U_{EM} &= \int u_{EM} d^3x \\
&= \int d^3x \langle \mathbf{x}|\mathbf{F}\rangle^\dagger \langle \mathbf{x}|\mathbf{F}\rangle \\
&= \int d^3x \langle \mathbf{F}|\mathbf{x}\rangle \frac{1}{H} (c\hbar \nabla \times) \langle \mathbf{x}|\mathbf{F}\rangle
\end{aligned}
$$

在此引入 Dirac 符號來取代向量內積，一方面是為了給出與量子力學更接近的形式，另一方面則是為了方便將光子的 Hamiltonian 與動量算符直接連結，畢竟基於相對論中光子無質量的性質令其能量必當與動量正比，然而我們熟悉的動量算符並非為旋度而是梯度，假若仍以 RS 向量以一般三維表示便難以得到此連結，為此可改用矩陣表示將光子的 Schrödinger 方程改寫為

$$
i\hbar \begin{pmatrix} \partial_t F_x \\ \partial_t F_y \\ \partial_t F_z \end{pmatrix} = c\hbar \begin{pmatrix} (\nabla \times \mathbf{F})_x \\ (\nabla \times \mathbf{F})_y \\ (\nabla \times \mathbf{F})_z \end{pmatrix}
$$

$$
= c\hbar \begin{pmatrix} \partial_y F_z - \partial_z F_y \\ \partial_z F_x - \partial_x F_z \\ \partial_x F_y - \partial_y F_x \end{pmatrix}
$$

$$
= c\hbar \left[\partial_x \begin{pmatrix} 0 \\ -F_z \\ F_y \end{pmatrix} + \partial_y \begin{pmatrix} F_z \\ 0 \\ -F_x \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \\ 0 \end{pmatrix} \right]
$$

$$
= c \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} + \\ \hat{\mathbf{y}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ \hat{\mathbf{z}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}
$$

$$
= c(\hat{\mathbf{x}}\mathbf{s}_x + \hat{\mathbf{y}}\mathbf{s}_y + \hat{\mathbf{z}}\mathbf{s}_z) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}
$$

$$
= c\vec{\mathbf{s}} \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}
$$

可見的確原本 Hamiltonian 中的旋度在改用矩陣改寫 RS 向量後便成為梯度，而為了檢驗 $-i\hbar\nabla$ 確為動量算符，可嘗試仿造電磁場能量的期望值形式將原本用 RS 向量表示的動量體密度改為（其中需用到 $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ 以及 $\vec{\mathrm{s}}$ 本身的性質給出的 $(\vec{\mathbf{s}} \cdot \nabla)\mathbf{s}_i (F_x\ F_y\ F_z)^T = \partial_i (F_x\ F_y\ F_z)^T$）

$$
\vec{p}_{EM} = \frac{1}{ic} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(F_y^* F_z - F_z^* F_y) + \\ \hat{\mathbf{y}}(F_z^* F_x - F_x^* F_z) + \\ \hat{\mathbf{z}}(F_x^* F_y - F_y^* F_x) \end{bmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{c} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} + \\ \hat{\mathbf{y}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ \hat{\mathbf{z}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{c} \langle \mathbf{F}|\mathbf{x}\rangle \vec{\mathbf{s}} \langle \mathbf{x}|\mathbf{F}\rangle
$$

$$
= \frac{1}{c} \langle \mathbf{F}|\mathbf{x}\rangle \frac{1}{H} \left(c\vec{\boldsymbol{s}} \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \right) \vec{\mathbf{S}} \langle \mathbf{x}|\mathbf{F}\rangle
$$

$$
= \langle \mathbf{F}|\mathbf{x}\rangle \frac{1}{H} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \langle \mathbf{x}|\mathbf{F}\rangle
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}_{EM} &= \int \mathbf{p}_{EM} d^3x \\
&= \int d^3x \langle \mathbf{F}|\mathbf{x}\rangle \frac{1}{H} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \right) \langle \mathbf{x}|\mathbf{F}\rangle = \langle \mathbf{p}\rangle
\end{aligned}
$$

顯然在電磁學當中 $-i\hbar\nabla$ 仍是動量算符，亦即量子理論中期望值的形式、動量與能量算符都可在電磁學中找到些蛛絲馬跡，更重要的是，如果繼續對電磁場角動量密度仿造上述改寫，透過 $\vec{s} \times \vec{s} = i\vec{s}$ 可以見到

$$
\begin{aligned}
\mathbf{l}_{EM} &= \frac{1}{c}\langle \mathbf{F}|\mathbf{x}\rangle \mathbf{x}\times \vec{s}\langle \mathbf{x}|\mathbf{F}\rangle \\
&= \frac{1}{c}\langle \mathbf{F}|\mathbf{x}\rangle \frac{1}{H}\left(c\vec{\mathbf{s}}\cdot\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)\right)\vec{\mathbf{x}}\times\vec{\mathbf{s}}\langle \mathbf{x}|\mathbf{F}\rangle \\
&= \langle \mathbf{F}|\mathbf{x}\rangle \frac{1}{H}\frac{\hbar}{i}[\vec{\mathbf{x}}\times(\vec{\mathbf{s}}\cdot\nabla)\vec{\mathbf{s}}+\vec{\mathbf{s}}\times\vec{\mathbf{s}}]\langle \mathbf{x}|\mathbf{F}\rangle \\
&= \langle \mathbf{F}|\mathbf{x}\rangle \frac{1}{H}\left[\vec{\mathbf{x}}\times\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)+\hbar\vec{\mathbf{s}}\right]\langle \mathbf{x}|\mathbf{F}\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}_{EM} &= \int \mathbf{l}_{EM} d^3x \\
&= \int d^3x \langle \mathbf{F}|\mathbf{x}\rangle \frac{1}{H}\left[\mathbf{x}\times\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)+\hbar\vec{\mathbf{s}}\right]\langle \mathbf{x}|\mathbf{F}\rangle \\
&= \langle \vec{\mathbf{x}}\times\vec{\mathbf{p}}+\hbar\vec{\mathbf{s}}\rangle
\end{aligned}
$$

也就是說，電磁場總角動量除了包含空間旋轉伴隨的軌道角動量的期望值外，還多了一個就算光子直線前進不具有軌道角動量時也有的角動量 $\langle \hbar\vec{\mathbf{s}}\rangle$，這種不與粒子在空間移動有關的角動量便是內稟角動量，或是自旋角動量。可以驗證這個角動量滿足所有角動量都滿足的對易關係

$$
[\hbar\mathbf{s}_i, \hbar\mathbf{s}_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}\mathbf{s}_k
$$

代表在某方向上的角動量量子化應為整數或半整數，其值可透過求解特徵值問題決定，但更直接的看法為計算 $\hbar^2\vec{\mathbf{s}}^2$ 值

$$
\begin{aligned}
&\vec{\mathbf{s}}^2 \\
&= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \\
&= 2\hat{\mathrm{I}} = 1(1+1)\hat{\mathrm{I}}
\end{aligned}
$$

可見此一角動量為自旋 1。有興趣的讀者應該會發現此一角動量與常見的自旋一角動量不同，這是因為光子為無質量粒子而不存在其 rest frame 導致沒有 longitudinal mode，具體來說可以驗證 $\mathbf{s}_z$ 的三個特徵態當中特徵值為零的狀態對應到的 RS 向量對應到常數的電磁場。

總的來說，透過在古典的 Maxwell 方程中引入 RS 向量，可以將之與量子理論中各種基本的概念相互連結，有助於學生理解那些看上去突兀的定義。

本文參考資料，提供給想深入理解的讀者：

Foundations of quantum mechanics : an exploration of the physical meaning of quantum theory. Author: Norsen, Travis (2017)