談一些物理概念

座標轉換與不定原理

黃偉彥

編者按：本文若干觀念與一般稍有不同，預計刊出後可能會引起一些爭議，但本著「時空」是爲了提供一般同學一個發表和練習的園地，只要言之有理，我們仍決定刊登於下，以供大家批評討論。

前言：本文底稿會引起很多爭論,作者固然加以重行檢驗與修正，也想強調以下事實：(1)我並不致力於提供結果，而祇期盼有些討論的話題；(2)「座標轉換」部分的嚴格性可以更爲強化，我以爲讀者能夠做到；(3)「不定原理」部分一度有意刪除，因爲似乎並不convincing；但爲了全文的相關性，所以修正時把意念表達得更明白些。

我無意寫好這篇文章，尤其在詳細與徹底方面；讀者若遭遇「不清晰」的困難，作者在此深致歉意。

物理的描述固然針對現象本身，但觀察者所處狀態也是不可忽略的事實。歷來物理學家所推演的知識總是獨立於觀察者的狀態，他們對於後者的考慮納入了「座標轉換」的範疇；這種追求眞理的方式如果是正確的，明顯地必須先假定：「現象的描述獨立於觀察者所處狀態－換言之，物理知識獨立於座標轉換。」這便是所謂的「相對性原理」；所謂「座標」可以意會爲「觀察者用以描述某一特定狀態的基本量化名詞」；「座標轉換」便是把這些名詞的量自一狀態觀察所得求出另一相關狀態的結果；這是一種預測的過程，所以必須仰賴一些原則；這些原則一向被認爲是存在於我們的自然中，因爲物理學者總希望這世界是規則的，然後他的努力才有可能獲得結果，他的名聲也才會受到一般人的尊重。

我以爲體認比知識更是實際，但世俗對知識的推崇遠過於她的重要性；物理知識的獲得便透過許多簡化與還原的功夫，於是眞確性更令人懷疑了。我無意寫嚴肅的學術性文章，但我要求「廣泛」與「嚴密」－雖然我祇是站在討論的立場。現在我們已有了「座標轉換」的廣泛意念－雖然探求物理知識的方式，如測量所引起的干擾已被省略－嚴密的處理則由特例所獲得；這特例可由狹意相對論所提供。

爲簡便記，我們的座標是一度空間 x 與時間 t －測量尺度已經校對；觀察者 s' 對 s 作等速運動 v，對一事件的描述 s 爲 (x ， t)，s' 爲 (x' ， t') －我們常用的「座標系 s 」一辭指觀察者 s' 而言，也可說是所有 (x ， t) 所成的集合。

座標轉換便是以在 s 中觀察所得的 (x,t) 預測 s' 中的 (x' , t') 同樣地也可從 s' 預測 s －自然是 1－1 mapping；預測所依據的原則表示轉換函數 φ ， ϕ 之存在，即

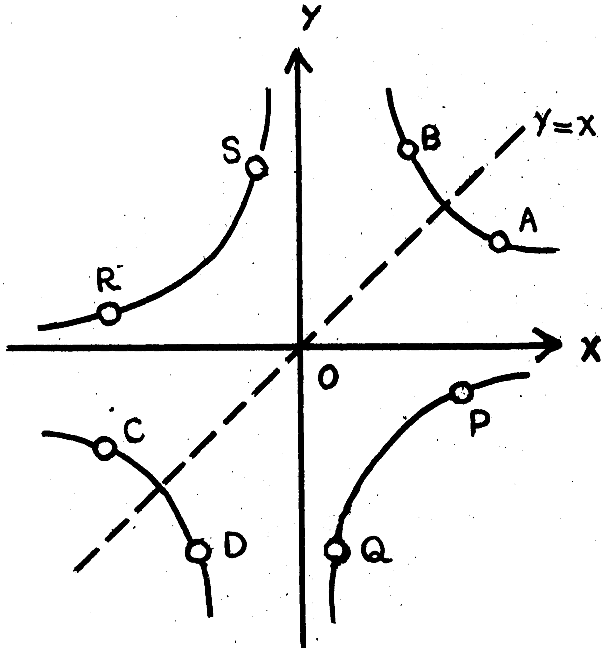
公設 I $\exists$ functions $\varphi, \phi \ni$

$$x'=\varphi(x,t;v) \quad \text{and} \quad x=\varphi(x',t';v')$$
$$t'=\phi(x,t;v) \qquad\qquad t=\phi(x',t';v')$$

因 v = const. 故有

定理 1 $$u'=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}u+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\Big/\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}u+\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

其中 $u'=dx'/dt'$ ， $u=dx/dt$ 分別爲 S'， S 對質點 p 速度的描述。



參考圖一

介入轉換式的因子是相對速度--與二觀察者的相對位置無關；令 s 對 s'的速度 v'爲唯一變數 v 之函數，即 $v'=f(v)$，但座標系的區域性並未介入轉換 f 之中，故 $v=f(v')$，乃知 f 等於其反函數 f^{-1}，意謂 $f(x)$ 對稱於直線 $y=x$；而當初 x, x' 之方向皆予以反轉（Space inversion），f 亦應相同，但 v, v' 變爲 $-v$，$-v'$，即 $-v'=f(-v)$，意謂 $f(x)$ 對稱於原點—也可用Time reversal獲得此結果；加入 f 必須是連續（continuous）而單值（Single-valued）的，由參考圖一可推知 $f(v)=\pm v$；因爲曲線 $f(x)$ 若有一點不在 $y=\pm x$ 上，便決定了AB－CD系或PQ－RS系，但此等曲線並不交於座標軸，所以並不合適。座標方向性的選擇—x, x'方向一致，t, t'永遠向後，即增加方向—排斥了 $f(v)=+v$，即知 $f(v)=-v$ 爲合理之解，s對s' 的位置（x_0', t_0'）也應與 v無關，否則便非均勻了。故得

公設Ⅱ　$u'=0\leftrightarrow u=v$ and $u=0\leftrightarrow u'=-v$，where $v=$const. 代入定理 1，知

定理 2　$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}v+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,\ \text{i.e. } \varphi=\varphi(x-vt)$$

定理 3　$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+v\frac{\partial\phi}{\partial t}=0,\ \text{i.e.}$$
$$\phi=\frac{1}{v}\left(g'(x)-\varphi(x-vt)\right)$$

爲解出 φ，ϕ，我們加入常值速度的假定，亦即「光速公設」：

公設Ⅲ　$u'=c\leftrightarrow u=c$

代入定理 1，得

定理 4　$$c\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}c+\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}c+\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

由定理 2，3，知 $g'(x)=(1-v^2/c^2)\,\varphi'(x-vt)$；但 x，x－vt 在我們的推演中互爲獨立，故 $\varphi'(x-vt)=\Upsilon$(const.)

$$\Rightarrow\varphi=\Upsilon(x-vt)+\varphi_0\Rightarrow g'(x)=(1-v^2/c^2)\Upsilon$$

$$\Rightarrow\phi=\Upsilon\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)+\phi_0$$

公設 I 已隱含起始條件－coincidence：$x=x'=0$ and $t=t'=0$－即 $\varphi_0=0$，$\phi_0=0$；且知 $\Upsilon\Upsilon'=(1-v^2/c^2)^{-1}$，但 $\Upsilon'(v')=\Upsilon(-v)$，即 $\Upsilon(v)\Upsilon(-v)=(1-v^2/c^2)^{-1}$

Space inversion 或 Time reversal皆與我們的轉換無關，故二場合均可提供論證 $\Upsilon(v)=\Upsilon(-v)$；於是（註：即經Space inversion 後 Υ 函數不變）

定理 5　$\Upsilon=(v)=(1-v^2/c^2)^{-1/2}$

令 $p=x$，$q=ct$，$r=v$，知

定理 6　$\varphi(p,q;r)=\Upsilon(p-\beta q)$，$\phi(p,q;r)=\frac{\Upsilon}{c}(q-\beta p)$ and $\varphi(p,q;r)c\phi(q,p;r)$

where $\beta=r/c$，$\Upsilon=(1-r^2/c^2)^{-1/2}$

這表示了 x 與 ct 的對等（equivalence），而可解釋作兩種類似向度（dimensions）—根本於轉換方程的基礎性。

定理1 可重寫爲 $u'=\dfrac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$，故「若 $u\leq c$，$v\leq c$ 則 $u'\leq c$。」即 c 爲可達到之最大速（attainable greatest velocity）。

現在把光速公設換爲

公設Ⅲ'　任何可測速度不得超過可達到之極大速 c（attainable maximum velocity）。

因速度之合成獨立於座標且對稱於 u，－v，即 $\exists u\rightarrow\exists u-v$ or uv in. u'，但由定理 1，知 u'之可能形式是

i. k　ii. $\dfrac{kuv+k'}{u-v}$　iii. $\dfrac{k'uv+k''}{uv+k}$　iv. $\dfrac{u-v}{kuv+k'}$

其中 k，k'，k'' 皆 c 之函數，故爲 consts.

i－form必不可能；ii－form因有Singular points $u=v\leq c$ 也不可取；iii－form即 $k'-\dfrac{kk'-k''}{uv+k}$，於是若 $u=0$，則 $\partial u'/\partial v=0$，此與公設Ⅱ不合；所以祇有 iv－form 適宜，由公設Ⅱ，知 $k'=1$，但極大速 c 爲可達到，即

a. 固定 v，u 可爲 c 即 $u'\leq c$；即 $u'=\dfrac{c-v}{kcv+1}\leq c$，i.e. $v\geq -c^2kv$

b. 固定 v，u'可爲 c 且 $v\leq c$；

即 $u=\dfrac{u'+v}{1-ku'v}=\dfrac{c+v}{1-kcv}\leq c$, i.e. $v\leq -c^2kv$

合 a, b, 知 $v=-c^2kv$, i.e. $k=-\dfrac{1}{c^2}$

$\Rightarrow u'=\dfrac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}}$　所以公設Ⅲ'與Ⅲ可以說是等效的。

現在我們對所提公設系統的嚴密性稍加考核，但不準備詳細論列。下列事實並不違反公設方法：(1)起始條件包含於公設 I 中，而大大簡化了推導的工作；(2)建立公設所採取的論證方式，使系統更 reasonable；(3)定理 1 用了 v = const.，而它却在公設Ⅱ中；然而我們却得考慮：(1) Space inversion 或Time reversal 用以論證 $\Upsilon(v)=\Upsilon(-v)$，而二者並不爲系統所暗示；所以更完整而言，應有以下公設「經由（$x\rightarrow -x$，$x'\rightarrow -x'$）或（$t\rightarrow -t$，$t'\rightarrow -t'$）φ與ϕ 皆不變。」(2)公設Ⅲ'與Ⅲ之等效，本於「速度之合成獨立於座標且對稱於 u，－v。」對公設Ⅲ' 也將引致補充。

從｛一度空間，時間｝推廣至｛三度空間，時間｝並不是困難的事；首先我們引入了獨立於x，t之二參數 y，z，假定 $v=\left(\frac{dx}{dt}\right)$。於是 $y'=y$，$z'=z$；然後旋轉座標，注意所引起的效應。我們不再討論推廣的過程，

但由定理6，知ct與x,y,z 爲對等，於是若∃3－entity，如三度空間向量，則∃4 th－component；並且轉換函數的形式唯一性（form－uniqueness）也已確定；換言之，我們最多容許了如公設Ⅲ或Ⅲ′中的常值速度c，而不能再有類似於極小速（minimum velocity）的常值存在。

*　　*　　*　　*

對不定原理的討論，我們從測量所引致的干擾開始－不管結論如何；測量數值之差度是干擾必然結果－不論成因爲何；按照運作觀點（Operational point of view），任何物理系統必須建基於測量；如果干擾是可以消除或補償的，差度便不必包含在知識系統中，而古典物理之探求方式也是正確的；但是如果干擾是不能消除或無法完全補償的，差度便有了極小值，而物理知識也難以描述了。我們不能由哲學的論證獲悉當前的處境－雖然很多人曾經嘗試過；舉例而言，巨視（macroscopic）現象每以微量（microscopic）性質解釋，於是有人認爲這種「以小（small）解釋大（big）」必須具有一個「極限（limit）」，干擾便永遠不能完全消除了。但是我們也有以下的論證：如果差度是無法補償的，測量工具的尺度（scale）便難以建立；不準的儀器又有不準的測量，物理知識的眞確性太令人懷疑了；況且運作觀點的意義也要略加修正了。

我們無意於這些不嚴格的論證，但也祇探索干擾不能徹底消除的情況－因爲古典物理已經解答了另一場合；我們最迫切的問題是：「如何找出滿足以上要求的知識系統？」正面的答覆應該是很多的，現在我們祇研究量子力學的處理方式。

用座標表示法（coordinate representation），量子力學的公設是

公設A　Given any physical system ∃ state function $\psi(q,s,t)\ni|\psi|^2\geq 0$ is the probability of the system having values (q,s) at time t.（probability interpretation.）

公設B　Every physical observable $w(q,s,t)$ is represented by a linear hermitian operator $\Omega(q,s,t)\ni$ expectation value: $\langle w\rangle=\sum_s\int\psi^*\Omega\psi d^N q$

公設C　$i\hbar\dfrac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi$

公設D　i. The result of a measurement of a physical observable is any one of its eigenvalues.

ii. ∃eigenstate ψ_n corresponding to eigenvalue W_n for operator $\Omega,\ni\Omega\psi_n=W_n\psi_n$.

iii. Any arbitrary ψ can be expanded in a complete orthonormal set of functions ψ_n of a complete set of commuting operators (Ω_n), i.e., $\psi=\Sigma a_n\psi_n$ where $|a_n|^2$ records the probability that the system is in the nth eigenstate.

爲了更明白些，我們把所出現的terms加以註解：q_i 是classical degree of freedom，而S_i爲additional degree of freedom（intrinsically quantum mechanical）；Hamiltonian operator H的形式定義了物理系統所屬的class；$\sum\!\!\!\!\int$是generalized summation因ψ_n之complete set 應包含continuous spectrum；故expectation value也可寫爲 $\langle w\rangle=\sum\!\!\!\!\int_{q,s}\psi^*\Omega\psi$。

我們不考慮以上架構是否符合公設方法，却不能不仔細檢查其中的陳述。假設現在我們測量某一physical system ψ的w值，便要借助公設B，D了：在statistics裡，expectation value $\langle w\rangle$指無數次測量的平均值，我們祇有這樣解釋才能符合公設D（iii），因爲D（ii）表示任意對ψ_n之w值的測量必爲W_n－since $\langle w^m\rangle=w_n^m$－而D(i)又表示對任何ψ之某一測量必得eigenstate的結果，導致了$|a_n|^2$的probability interpretation.

我們立即發現以上架構如果暗示不定原理，那與差度的不可消除將不如想像中的相關了；在沿着以下問題作探討時，我們便很容易明白了，此即

一、怎樣由實驗導出狀態函數ψ？

二、以上所陳示的理論系統如何暗示不定原理？與「差度不可消除」是否一致？

三、公設D與不定原理有甚麼關係？

四、古典公式如何代換至量子理論中？又以上的轉換方程在量子力學中佔怎樣的地位？

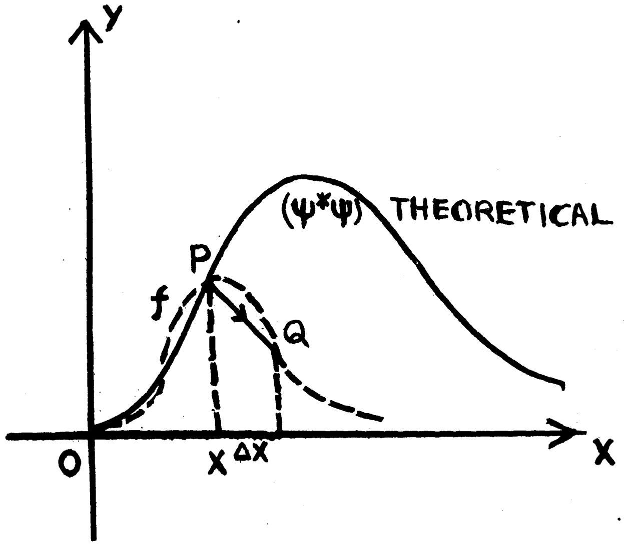
狀態函數ψ顯然可由實驗求得，否則即使許多簡單的predictions也沒有了。有一個前提却必須預先提及，即我們以爲具有相同產生過程的physical systems，如electrons,應有相同之ψ，於是多次實驗便是可能的事了。

由統計上的定理，" Suppose that the moments $m_k=\int x^k F(x)dx\ (K\in N)$ of a random variable x exist and the series $\sum_{k\geq 1}^{\infty}\frac{m_k}{k!}r^k$ is absolutely convergent for some $r>0$. Then the set of moments $\{m_k\}$ uniquely determines the distribution function $F(x)$ of x"於是知$\langle q_i{}^n\rangle$ $\langle S_i{}^n\rangle$加入公設C決定了ψ；其中

$$\langle q_i{}^n\rangle=\sum_s\int\psi^*q_i{}^n\psi d^N q;$$

$$\langle S_i{}^n\rangle=\sum_s\int\psi^*S_i{}^n\psi d^N q$$

我們可以對類似系統作無數實驗而決定所有$<q_i^n>$,$<S_i^n>$；然後按照特定程序，ψ似乎毫無疑問地解出了。但是我們必須認清$<x^n>$的得到，是許多x的實驗值n次方後平均而得，x之分佈狀況是否與公設中的$\psi^*\psi$一致呢？



參考圖二

讓我們由參考圖二比較理論ψ與實驗ψ，這圖祇是幫助思考而設計，所以並未把Ω加入（當然也可認爲Ω＝1），也不求其general；物理狀態以ψ表示，如果測量是精確的，我們得到P；但假定差度爲不可消除，故我們得到Q；Q未必在理論$\psi^*\psi$上，由相同P測得之Q又有了分佈曲綫f；終於引致了新的問題：Q對P的分佈是否對稱？而這些Q的「平均」效果與P又有何關係？這些消除與平均的過程能否保證實驗ψ便是理論ψ呢？顯然我們陷入了複雜的困惑裡邊了。

假定Q可以正確地落入P，也就是說沒有量度上的差度，實驗ψ與理論ψ便一般無二了；問題一是解決了，但果眞如此，又有了新的疑惑：(a)怎樣正確地測量？(b)量子系統中的不定原理顯然與「差度的不可消除」不一致，所謂最迫切的問題－找出滿足差度不可消除的知識系統－沒有了答案，我們討論的過程豈不太迂迴了些？

對於(a)，我們拿標準系統（standard system)與待測系統比較吧，即使標準系統是守恒的（conserved），意即$<x>$與時間無關，我們也要做無數次的測量功夫，因爲確切值$<x>$（exact value）並不是少數實驗的結果哩。

對於(b)，也就是我們不直接揭示量子力學之不定原理的原因，便是有些人把它與「差度的不可消除」搞成同一回事了。從公設推出的不定原理是$(\triangle M)^2(\triangle N)^2 \geq \frac{1}{4}<MN-NM>^2$，其中$(\triangle P)^2=\sum_{q,s}\psi^*(P-<P>)^2\psi$；現在我們必須用很小心的眼光來處理不定原理。當然$\triangle P=\sqrt{(\triangle P)^2}$被定義爲差度；$\triangle m$，$\triangle n$之發生爲不可防止，因它是公設系統直接暗示的；現在拿單一electron 加以說明，於是$\exists\ \psi_e$ for the electron，如果ψ_e對M爲 eigenstate，因之$\triangle m=0$，ψ_e便不能爲N之 eigenstate了，因$\triangle m=0$ excludes $\triangle N=0$；這時候單一實驗便不能測得準確的m，n了。但是如果ψ_e不是M與N之eigenstate，但「同時測量m，n」更有待仔細檢驗了；以最general的眼光看來，即便同時得到m，n－當然$m\neq<m>$，$n\neq<n>$－也可以不違反我們的公設，因爲幷沒有與「同時測量m，n」有關之假定，所以對單一實驗也成立$|\triangle m\triangle n|>\frac{1}{2}\sqrt{<MN-NM>^2}>0$，我們便不能不有新的假定（少數實驗不足以證明，却可以作爲新假定的背景）。因之如把這不定原理認作「差度原理」，便是頗可商榷的一件事，至少我們公設系統而言，它可能是統計上的，還不能保證可以針對某一特定實驗。

不過我們必已明白，量子力學並非單爲不定原理而設；雖然早於量子力學發現的事實未必唯一地指向當前之理論，但同時滿足這些需要的知識要與個別實驗的「差度不可消除」完全一致似乎也不可能了。我們對問題二的解決，目的便在探知不定原理的實質。

了解以上陳述的讀者，對問題三必有相當程度的體認，無疑地，不定原理提供了「同時測量m,n」的「趨勢」，尤其在m,n之Spectra爲連續之際；由於這一原理，要以實驗ψ，便得q，s中任二者皆不可共軛了（M，N共軛表$MN\neq NM$）。量度本是科學哲學裡複雜的問題，我們雖然不再深入討論，却也不可加上直覺的解釋。

現在晉入最後的問題四了。正如衆所週知，從古典到量子的代換可由Ehrenfest relations完成，且有所謂correspondence principle作爲支柱。公設C指的是Schroedinger Equ., Pauli Equ.，但現在不如說是Dirac Equ.了，因此Lorentz covariance是滿足了。終結的是兩道問題，即

(1)如果變元是（$<x>$，$<t>$）與$<v>$，轉換方程該呈何種形式？

(2)（$<x>$，$<t>$），與$<v>$的層次是怎樣關連的？

(1)祇是數學演算；(2)意謂存在的「先後」順序與相互連繫。我們強調的是，座標轉換在不定原理的背景下是怎樣存在着。

Note：本文涉及的是公設方法（Aximatic method)，科學哲學；而物理中所用的書有C.M ϕller：The Theory of Relativity (chapter I, II)；Leighton：Principles of Modern Physics (chapter I, II;) Dirac：The Principles of Quantum Mechanics (chapter I)；Sokolov：Quantum Mechanics；Bjorken and Drell：Relativistic Quantum Mechanics 等。