詹 裕 農

簡介 Feynman's Theory of Positron

唸過了Feynman's Lecture on physics你會發現物理學是門很美的學問。Hermann Weyl 曾形容數學之美：「星華燦爛，目迷五色。」物理又何嘗不如此呢？你也許會仰慕這位指引你進入這片園地的人，可是你也許更願意知道他在這片園地中增添了幾許神來之筆。本文中，我想介絡 Feynman's Theory of Positron 一些最能代表 Feynman 風格的想法。

§0 由 Dirac 到 Feynman

當初 Schrödinger 研究波動力學，他最先得到的一個方程式就是 $\Box^2\psi=m^2\psi$。也就是現在通稱的 Klein-Golden eq.（事實上這是 Schrödinger 首先發現的。）由這方程式導至正負兩組能量的解。由以往的經驗，無法了解負能量這一組解。Schrödinger 以為他失敗了，於是放棄了這個方程式。之後，他把這個方程式簡化成 Non-rel 型式，成功的解決了不少問題，這就是現在通稱的 Schrödinger eq。

1928年，Dirac 注意到這個問題，他希望建立一種 Rel electron Theory。他想避免負能量，做了一個很奇妙的假設，猜出一個方程式。這方程式各方面看來都不錯，可是在求解的時候，負能量又跑出來了！山窮水盡，Dirac 想何不乾脆同時接受這兩種能量的解。他提出了 "Electron Sea" 的說法，來解釋負能量，認為負能量階層平時由電子佔滿了，因此也觀察不到，唯有外來的能量（比方一個高能 photon）把一個電子由負能階打到正能階時，我們才能觀察到一個電子及一個留在 Electron Sea 中的 Hole。這個Hole 具有正的電荷，稱之正子（Positron）。不久以後 Anderson由實驗中發現了正子，這是理論物理一次輝煌的成功。Dirac 的理論不但能預測正子，而且對電子的Spin, Magnetic moment 以及Vacuum Polarization 的現象都有相當好的解釋。這個理論固然很成功，可是在哲學意味上，並不能令人很滿意。十年後，一個 M.I.T 的年青學生注意了這個問題。光陰荏苒，又是一個十年，當年的學生思想逐漸成熟。1948-1949 Phys. Rev. 上連續出現了他的幾篇討論這一方面問題的論文，其中之一就是 "Theory of Positron" 對 Dirac 的說法做了相當大的改進，這也許是他一生中創造力最旺盛的時期，他以後的工作，不過是這段時期的延伸罷了。

§1 Klein-Golden, Pauli, and Dirac equation

在這一節中，我們把這幾個 eqs 複習一下，而且我們將討論 Pauli eq 和 Dirac eq 之間的關係。

一個 free padicle 的 klein-Golden eq 就是

$$\Box^2\psi=m^2\psi \qquad (1)$$

（本文中，採用Natural units 令 h=c=1）
這個粒子如果在電磁場中：

$$[(H-e\phi)^2-(i\nabla-e\vec{A})^2]\psi=m^2\psi \qquad (2)$$

可是這方程式中，根本沒有 Spin 的觀念，而電子是有 Spin 的，因此(2)式用於電子，質子等不能得到精確的結果。由Stern-Gerlach實驗，Pauli 知道電子有 Spin, 於是他把 Schrödinger eq 略加修正，把 $(-i\nabla-e\vec{A})^2$易以$[\hat{\sigma}\cdot(-i\nabla-e\vec{A})]^2$（$\hat{\sigma}$是Pauli matrices）這是一個 Non-rel eq

$$H=1/2m[\hat{\sigma}\cdot(-i\nabla-e\vec{A})]^2+e\phi$$

我們把這個 eq 變成 Rel. eq.

$$\{(H-e\phi)^2-(\hat{\sigma}\cdot[i\nabla-e\vec{A}])^2\}\psi=m^2\psi \qquad (3)$$

因式分解，使它成為 4-vectors 的型式

$$[i(\frac{\partial}{\partial t})-e\phi-\hat{\sigma}\cdot(-i\nabla-e\vec{A})]\times[i(\frac{\partial}{\partial t})-e\phi+\sigma\cdot(-i\nabla-e\vec{A})]\psi=m^2\psi \qquad (4)$$

此時，Wave fn ψ是一個2×1的Matrix $\psi=\binom{\psi_+}{\psi_-}$
(4)式看來很煩，可是我們略加變形，可以發現它相等於 Dirac eq 定義 $\begin{cases} i(\frac{\partial}{\partial t})-e\phi=\pi_4 \\ -i\nabla-(\frac{e}{c})\vec{A}=\hat{\pi} \end{cases}$

於是，$(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)$構成一個4-vector

定義 χ $\qquad (\pi_4+\hat{\sigma}\cdot\hat{\pi})\psi=m\chi \qquad (5)$

於是(4)式成了 $\qquad (\pi_4-\hat{\sigma}\cdot\hat{\pi})\chi=m\psi \qquad (6)$

令 $\qquad \chi+\psi=\psi_a \qquad \chi-\psi=\psi_b$

(5)，(6)成了 $\qquad \pi_4\psi_a-\hat{\sigma}\cdot\hat{\pi}\psi_b=m\psi_a \qquad (7)$

$$-\pi_4\psi_b+\hat{\sigma}\cdot\hat{\pi}\psi_a=m\psi_b \qquad (8)$$

ψ_a, ψ_b 都是2×1的矩陣。我們想法把(7)，(8)合為一個關於4×1矩陣的方程式

$$定義\psi=\begin{pmatrix}\psi_{a1}\\ \psi_{a2}\\ \psi_{b1}\\ \psi_{b2}\end{pmatrix} 及 \gamma_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}, \hat{\gamma}=\begin{pmatrix}0\ 0 & \hat{\sigma}\\ 0\ 0 & \\ \hat{\sigma} & 0\ 0\\ & 0\ 0\end{pmatrix}$$

(7)，(8)兩式合為 $\quad \gamma_4\pi_4\psi-\hat{\gamma}\cdot\hat{\pi}\psi=m\psi$

這就是 Dirac eq! 它只不過是Rel Pauli eq! 以前，我們一直奇怪，Dirac eq為什麼能預測 electron 有 Spin，由上面一段我們就知道了，Pauli eq 利用實驗結果：electron 有 Spin。而 Dirac eq 不

過是 Rel. Pauli eq，當然它一定會顯示 electron 有 Spin。可是我們不能不佩服 Dirac 的想像力，他根本不是由 Pauli eq 著手，他只是「猜」出了一個方程式！一個正確的方程式！另外要強調一點，Klein-Golden eq 並不是一個不對的方程式，它是適用於 Spin 0 的粒子。因此 Feynman 認為 Spin 並不是 Rel. effect.

§2 負能量的解釋

方才我們提過 Rel Quantum Mechanics 最初的困難就是負能量。Schrödinger 曾主張不理它（假裝看不見。）可是這行不通。因為

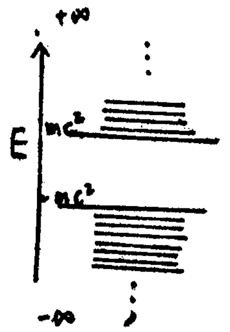
①由正能量到負能量的 "Transition Probability" 不等於 0

②由數學上，拋棄負能量的解，導致一個 "incompletc Set of wave ft"這也不是我們能接受的。

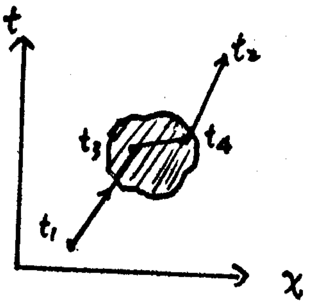
Dirac 假設：負能量（由 $-mc^2 \to -\infty$）為電子佔滿（稱之 election Sea）。〔註：能量的範圍可由下式看出，由相對論 $E^2=c^2p^2+m^2c^4$

$E=\pm\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}$ ∴ $E\leq -mc^2$ or $E\geq mc^2$

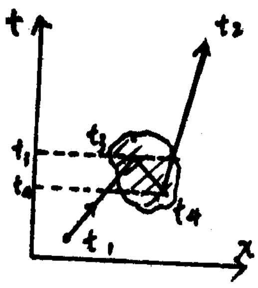
上式換成 Natmal units 令 $c=1$ 就行了〕



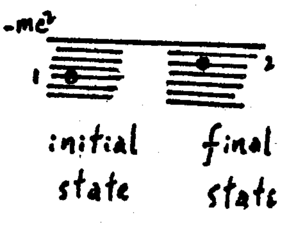
圖一



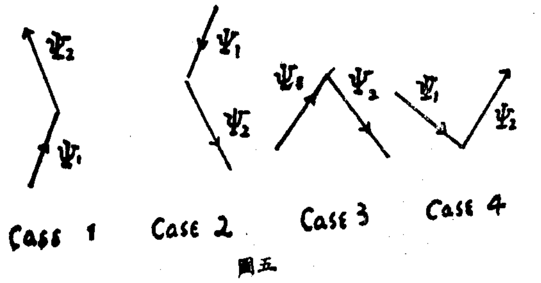
圖二



圖三



圖四



圖五

①通常看到的電子在〔mc^2, ∞〕中它不會跳到（$-\infty$，$-mc^2$〕因為 electron Sea 是被佔滿的。

②外來的能量可以由 electron Sea 打出一個電子到（mc^2, ∞）留下的 hole 就是 positron，這就是 pair production

③Pauli exclusion principlc用以保證electron sea 可被佔滿，而且有了這個原理，才能有 hole 的觀念。

以上所說的，是 Dirac's Positron theory 的大概。Feynman 對 Dirac Theory 之修正，基本精神是基於一句話，一句「簡單」的話！

The fundamental idea is that the "negative evergy states" represent the state of electrons moving backward in time!

我們在下節中解釋這句話。

§3 Relativty

相對論中，一個粒子在 Minkowski space 中是沿一根"world line"運動。量子力學的說法，這根線易以一個 wave 一個 electron 經過一個 potential（Fig 2 斜線部分。）產生 Scattering（t_3, t_4 處）在這條路線上 electron 是由過去走向未來。

可是相對論並沒有禁止一個粒子由未來走向過去，因此 Fig 3 所示的這種 Scattering 並不是不可能的，我們如何解釋這個圖？（$t_4<t_3$）沒有負能量，time reversal 很難想像，可是若有負能量，就不難解釋了。Feyuman把time reversal對應於Negatrve evegy state 。一個 electron 我們說它由 initial state（past）↗↘final state（future）Matrix element$\int\psi^*$final M ψ intial dv (A)

在 electron sea 中一個 position 由 initial state ↗↘final state Matrix element.

$\int\varphi^*$fiual Mφintial dv (B)

φ 是 positron 的 wave fn 這 positron 仍由過去→未來。

可是我們希望完全以電子的觀點來看這整個事情，看圖四一個正子在 1，這是正子的 initial state。一個電子原先在 2（這是正子的 final state，可是電子的 initial stale）現在正子由 1→2，由initial state 到 final state，也就相當于一個電子的 final state 到 initial state，因此(B)式成了

$\int\psi^*$initial M ψfinal dv.（ψ是電子之 wave fn）

整個事情就是這麼簡單，我們以後可以把 electron sea 及正子的觀念拋開，所有的事只須看電子的運動，如果電子在負能量階層內運動，這個 electron move toward past 也就是等于一個正子 move toward future。

我們舉些例子試試我們的新觀念。首先看圖三一個電子在 Minkowski space 由 t_1 走向 t_2，在各段時間內運動情形如下：

$t_1 \to t_4$ 只有最初的電子在運動。

t_4 最初的電子仍然在運動，不過這時空間某處產生了一對電子—正子。

$t_4 \to t_3$ 現在最初的電子及 t_4 產生的一對粒子都運動

t_3 最初的電子和 t_4 時產生的正子相遇，變成能量消失。

t_3-t_2 現在只剩一個電子（t_4時產生的）繼續運動。

另外一個例子是

情形 1：ψ_1 和 ψ_2 都在正能量狀況，因此這圖表示 electron 和 scattering

情形 2：ψ_1 和 ψ_2 是負能量狀態，這表示 positron scattering

情形 3：ψ_1 在正能量狀態，ψ_2 在負能量狀態，這圖表示 pair annihilation

情形 4 ψ_1 在負能量狀態，ψ_2 在正能量狀態。這圖表示 pair production

由幾這個圖，我們已經看到Feynman Diagram 的雛形了。

§4 積分方程式

下一節中我們將繼續看這理論的發展，我們將把 Schrödimger eq 寫成積分方程式的型式。因此這一節中，我們簡單的談一談積分方程，我們不談它的解法，我們只談：它的結構，這可以幫助我們了解後面那些式子的物理意義。一個積分方程的典型問題是有了 $k(x,t)$, $f(x)$

求 $u(x)=\lambda\int_a^b k(x,t)u(x)dt+f(x)$ (1)之解

把積分式子看成個 operator (1)式成了 $u=\lambda\hat{k}u+f$

若 $f=0$ 這個 Integral eq 稱之 homogeneous integral eq

$f\neq0$ 這 Integral eq 稱之 non-homogeneous integral eq

我們討論前者。這式子怎辦，只有利用最基本的數學分析，一步步從頭開始。考慮一個partition ($t_0=a$, $t_1,\cdots,t_n=b$)

把 $\int_a^b k(x,t)u(t)dt$ 寫成一個 approximating sum

$$\Sigma=\lambda k(\substack{x\\t_1})u(t_1)\triangle_1 t+\cdots+\lambda k(\substack{x\\t_n})u(t_n)\triangle_n t$$

$$\triangle_p(t)=t_p-t_{p-1}\quad\therefore\quad u(t_j)\text{可以寫成}$$

$$u(t_j)=k(\substack{t_j\\t_1})u(t_1)\triangle_1 t+\cdots+k(\substack{t_j\\t_n})u(t_n)\triangle_n t$$

這式子很面熟，不就是linear Transformation 的式子？

寫成 Matrix 之型式

$$\begin{pmatrix}u(t_1)\\u(t_2)\\\vdots\\u(t_n)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}k(\substack{t_1\\t_1})\triangle_1(t)\cdots k(\substack{t_1\\t_n})\triangle_n t\\ \ddots\\ k(\substack{t_n\\t_1})\triangle_1(t)\cdots k(\substack{t_n\\t_n})\triangle n t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(t_1)\\\vdots\\u(t_n)\end{pmatrix}$$

令 $u^p=u(t_p)$ $k(\substack{t_p\\t_q})\triangle_q t=k_q^p$

上式成了 $u_p=\lambda k_q^p u^q$

$$(E_n-\lambda k)u=0$$

這就是求 eigen vector 的式子！我們把積分方程求解的問題，變成了 Linear vector space 中求 eigenvector 的問題，當然我們這是一個 approximation, 可是n愈大，愈接近我們的積分方程式，事實上我們要處理 $n\to\infty$, i.e ∞-dimensional vector space 一這個你就可以了解到爲什麼積分方程會引起 Hilbert space 的觀念。另外一方面你也可以感覺到積分方程的結構和 Heisenberg formalism 有相當密切的關係。關於積分方程我們就談到這裏。

§5 Green's ft Treatment of Sehröedinger eq.

在 §5 及 §6 中，我們將討論電子及正子在 Potential 中之運動。Dirac 的理論不但有它哲學上的缺陷，在使用時，由於一個不易處理的 "electron sea"。用起來也不方便，由 Joran及Wigner 發展的 Second Quantization 的方法，可以避免 electron sea 的麻煩，不過仍然有兩種粒子：即電子及正子。Feyuman 的方法則簡化到僅須討論 electron 在 Minkonski space中的行爲，我們先由Schrödinger eq 開始：

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}=H\psi \qquad (1)$$

由(1)式，我們知道，經過一段很小的時間 $\triangle t$，那麼 H 對這粒子的 wave fn 的影響就相當於一個 operator $\exp(-iH\triangle t)$ 的作用。我們由另一個角度看這個問題。(1)式變形之後可以寫成

$$\psi(\vec{x}_2,t_2)=\int k(\vec{x}_2,t_2,\ \vec{x}_1,t_1)\psi(\vec{x}_1,t)d^3\vec{x}_1 \quad (2)$$

k 是 eq(1) 的 green ft。所有外界的影響，比方 potential 等均包含在 k 中 $k(\vec{x}_2,t_2,\vec{x}_1,t_1)$（簡寫成k(2,1) 的物理意義就是"The total amplitude for arrival at $(\vec{x}_2,t_2)$starting from$(\vec{x}_1,t_1)$"。

(2)式也可以看成k(2,1)之定義，由(1)，(2)我們可以找出K與H之關係。寫成 (2) 的好處是 K 有明顯的物理意義，這一點在討論 "Scattering" 的問題時將會清楚的顯示出來。現在，我們不想去討論(2)式的解，我們利用(1)式的結果(i,e Schrödinger eq 的解）放到(2)式中，我們主要的目的是看：k 的物理意義。

利用(1)的解，可得$(i\ \partial/\partial t_2-H_2)k(2,1)=i\delta(2,1)$ (3)

〔演算的細節請看 Bethe & Hoffman Cha 8〕

由(2)→(3)我們利用了一個重要的假設（這是物理上的假設）

$x=0$ for $t_2<t_1$。這假設的意思就是說我們現在討論的問題中沒有 Negative energy state。因此我們不允許有 time reversal 的現象。由(2)，(3)可以建立起一套相等於 Schrödinger 的量子力學。不過我們已經說過了，我們的重點是k的意義。現在用

個 Perturbation 的例子，可以對k有更深入的了解

$u(\vec{x},t)$ 是個 potential 它存在於 $t_1<t<t_2$

$k(2,1)=k_0(2,1)+k^{(1)}(2,1)+k^{(2)}(2,1)+\cdots$

這是以u的 increasing power 展開的。

第一項表示 $u=0$ 的情形。

見圖六：U exists for $t_3 \to t_3+\triangle t_3$

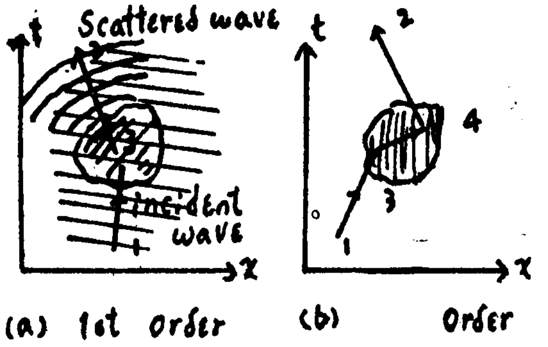


圖 六

$$\psi(3)=\int k_0(3.1)\psi(1)d^3x \qquad (4)$$

∵ 由 1-3 是 free particle

$$\psi(\vec{x}_3,t_3+\triangle t_3)=\exp(-iH\triangle t_3)\psi(\vec{x}_3,t_3)$$

$$=(1-iH_0\triangle t_3-iu\triangle t_3)\psi(\vec{x}_3,t_3) \quad (5)$$

沒有u的話，$\psi(\vec{x}_3,t_3+\triangle t_3)=(1-iH_0\triangle t_3)\psi(3)$ (6)

∴ 由於 Potential 的影響，ψ的改變量爲

$$\triangle\psi=-iu(\vec{x}_3,t_3)\psi(\vec{x}_3,t_3)\triangle t_3$$

另一方面，由 potential 到第二點的wave ft是

$$\psi(\vec{x}_2,t_2)=\int k_0(\vec{x}_2,t_2;\ \vec{x}_3,t_3+\triangle t_3)$$

$$\psi(\vec{x}_3,t_3+\triangle t_3)d_3\vec{x}_3 \qquad (7)$$

$$\therefore\ \triangle\psi(2)=-i\int k_0(2,3)u(3)k_0(3,1)$$

$$\psi(1)d^3\vec{x}_1d^3\vec{x}_3\triangle t_3 \qquad (8)$$

對 $\triangle t_3$ 積分再與(2)式比較

$$k^{(1)}(2,1)=-i\int k_0(2,3)u(3)k_0(3,1)d\tau_3 \quad (9)$$

$$d\tau_3=d_3\vec{x}_3dt_3$$

第(9)式的物理意義可以看出來了：它就表示"Amplitude for arrival at$(\vec{x}_2,t_2)$, starting from$(\vec{x}_1,t_1)$ through a scattering in the region with the potential U 同理，可知

$$k^{(2)}(2,1)=(-i)^2\iint k_0(2.4)U(4)k_0(4,3)U(3)$$

$$k_0(3,1)d\tau_3d\tau_4$$

表示在 potential區域內有兩次碰撞的結果（如圖六(b)所示。）同理 $k^{(3)}(2,1)$, $k^{(4)}(2,1)\cdots$ 表示碰三次，四次…。這是由物理思考得到的結果。由數學上

$$k(2,1)=k_0(2,1)-i\int_{-\infty}^{\infty}k_0(2,3)U(3)k_0(3,1)$$

$$d\tau_3$$

利用積分方程的 Neumann-Liouville series

$$k(2,1)=k_0(2,1)+(-i)\int k_0(2,3)U(3)k_0(3,1)d\tau_3$$

$$+(-i)^2\int k_0(2,4)U(4)k_0(4,3)U(3)$$

$$k_0(3,1)d\tau_3d\tau_4+\cdots\cdots$$

這級數的每一項都對應於方才由物理思考得到的結果。

§6 Treatment of Dirac eq.

我們再推廣到Rel case。所用的方法和 §(5)中，大略相同，因此我們也不再重複，只有一點是很重要的。這此我們處理的有負能量。因此$k=0$ for $t_2<t_1$ 的限制必須取消。

$$k(2,1)=\sum_{pos}E_n\phi_n(2)\bar{\phi}_n(1)\exp[-iE_n(t_2-t_1)]$$

$$+\sum_{neg}E_n\phi_n(2)\bar{\phi}_n(1)\exp[-iE_n(t_2-t_1)]$$

這是通解，對 $t_2\leq t_1$及$t_2>t_1$ 都適用。

這是數學的結果，不能就這樣用到物理上。若 $t_2>t_1$ 我們考慮的是正能量，我們的解中不能有負能量，(否則由正能量到負能量transition probabdrty >0)

$$\therefore\ k+(2,1)=\sum_{pos}E_n\phi_n(2)\bar{\phi}_n(1)\exp(iE_n(t_2-t_1))\text{for } t_2>t_2$$

當 $t_2<t_1$ 我們考慮負能量

$$k+(2,1)=C\sum_{neg}E_n\phi_n(2)\bar{\phi}_n(1)\exp(iE_n(t_2-t_1))$$

C是一個待定的常數

可是當 $t_2=t_1$ $k=0$ (∵ $t_2=t_1\vec{x}_2\neq\vec{x}_1$ 由 1到2的"Amplitude for arrival" 等於0)

C 只有等於 -1 這個條件才被滿足。

$$\therefore\ k+(2,1)+\sum_{pos}E_n\phi_n(2)\bar{\phi}_n(1)\exp(-iE_n(t_2-t_1))\text{for } t_2>t_1$$

$$=\sum_{neg}E_n\phi_n(2)\bar{\phi}_n(1)\exp(-iE_n(t_2-t_1))\text{ for } t_2<t_1$$

$k+(2,1)$ 就是 Dirac eq 所須的 kernel。

其他可以仿照 §(5) 去做。

參考書目

對於 Dirac theory 不熟悉的同學可以參看

(1) Leighton: Principle of morden physics 或

(2) Schiff Quautun Mechanics chapter 12

本文取材主要是由(3)，(4)，(5)

(3) Feynman: Quantum Electrodynamics (1962)

(4) Feynman: Theory of Fundamental processes (1962)

(5) Feynman: Phys Rev. 76 749 (1949)

關於積分方程可以參看

(6) Courant: & Hilbert Methods of Mathematical physics vol 1 Chapter 3 或

(7) Morse: & Feshbach Methods of Theoretical physics vol 1 chapter 8