磁單極與物理的幾何化

●趙敦華●

近代物理的規範場論，與微分幾何的 fibre bundle，有著完全相同的研究對像，物理學家叫他規範場，數學家叫他 principal bundle。在這篇文章裡，我們探討一些磁單極的理論，並介紹一些幾何與物理間之關係。

一、Dirac的理論

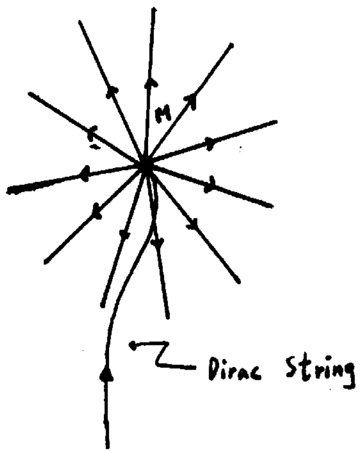

圖1　Dirac的磁單極

磁單極的觀念是Dirac在一九三四年提出來的，〔1〕我不詳細介紹他的理論，有興趣的可以看張國龍老師的講義。〔2〕Dirac理論最奇特的一點是：他的磁單極長了一個通到無窮遠處的尾巴。（如圖1）這是因爲Maxwell Eq。不

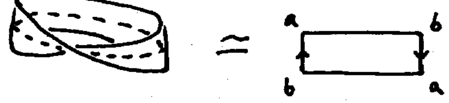

圖 2　一個Mobius band，他只有一個面及一個邊，不可定向，我們常把它記成右邊的符號。

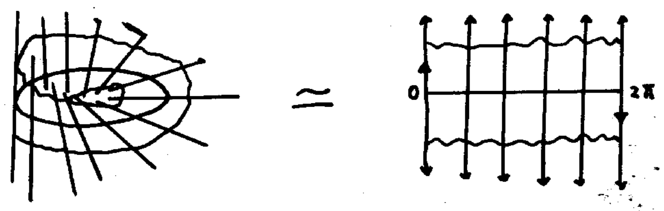

圖 3　一個Mobius band所形成的Vector bundle，記成 r_1^1。

允許磁力線中斷，所以由磁單極發出去的磁力線，必須有地方進來，這進來的磁力線就形成了那條尾巴，稱為Dirac's String。在 String 上所有的 potential A_μ，都是無限大。為了消除這個 String。楊振寧在幾何上給了一個非常漂亮的解釋，這就是所謂的 fiber bundle。

二、楊的理論：〔3〕

(1) Fiber bundle 及規範場：

所謂的一個 fiber bundle，local就是一個"水平空間"（稱為base space）和"垂直空間"（稱為fiber space）的乘積。一個很有名的例子就是所謂的Mobius band，圖2是一個Mobius band，如果我們把他的邊伸向無窮遠處，如圖3，就成了一個 fiber bundle 因為他的 fiber（這裡是 R^1）是 Vector space，故我們也稱他是一個Vector bundle。在數學上他常被記成 r_1^1，上面的1代表 fiber 的dim為1，下面的1代表base space RP(1)～S^1。注意local上 r_1^1 都長的如圖4。但global上 r_1^1 被扭了一整圈，這可由其與圖5比較而知，圖5的Vector bundle，local上也與圖4一模一樣，但他沒有被扭轉，這種global上的差異，就形成了Characteristic Classes的研究〔4〕，事實上這根本就是Char. Classes的起始定義，r_1^1 定為Stiefel—Whitney Classes 為 $W_1(r_1)=1\cdot a$ 而圖5之Vector bundle.定為Stiefel—Whitney Classes 為 $W_1(S^1\times R^1)=0\cdot a$. 由此我們可得到所有bundle的Stiefel—Whitney Classes〔4〕

向量空間基底間的轉換形成一個Lie group. Vector bundle的base space上每一點的fiber都是向量空間，則每一個fiber都可得到一個Lie group。如果我們不用原來的Vector space作fiber，而用他得到的Lie group作fiber，則我們得到一個新的fiber bundle，(不是Vector bundle)稱為此Vector bundle之associated principal bundle。

我們現在來看gauge theory。對時空中每一點，我們都有一個波函數，我們可把他看成Hilbert space中的一個向量，這向量有一個自由的位相轉換

$$|\ \rangle \to |\ \rangle^1 = e^{i\theta}|\ \rangle$$

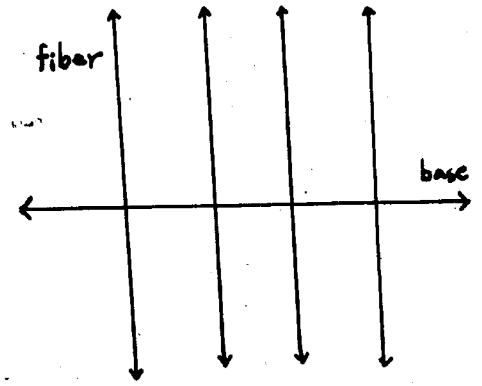

圖 4.　r_1^1 local 是一個乘積空間，圖 5. 的 Vector bundle local 也是這樣。

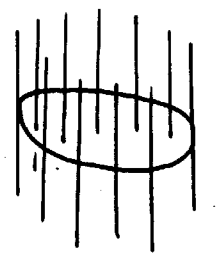

圖 5.　一個 trivial bundle. global 是乘積空間 $S^1 \times R^1$ 。

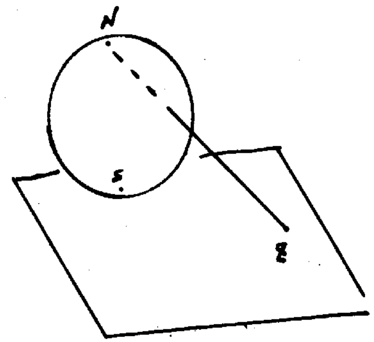

圖 8.　所謂的曲曼球面。

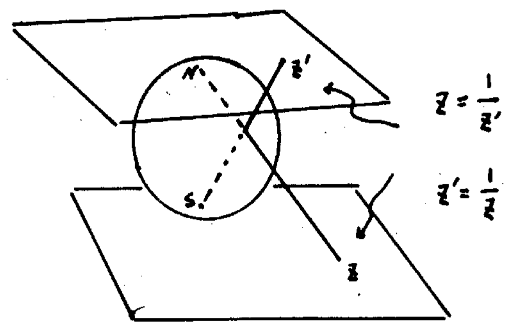

圖 9.　球面上的二個 covering 及其間之變換。

這個轉換形成一個群，稱爲U（1）群，因$e^{i\theta}$可對到單位圓上的一點，故U（1）與S^1同構。如果我們把時一空當成 base space 。把每一點的U（1）群當成 fiber，則我們得到一個 principal bundle 。圖6我們畫了一個 space－time 是1維的case 。

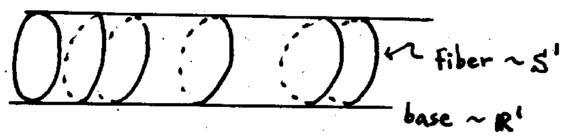

圖6. space-time是 -dim的E.M. principal bundle. 根本就是 $R^1 \times S^1$，是一個 trivial bundle。

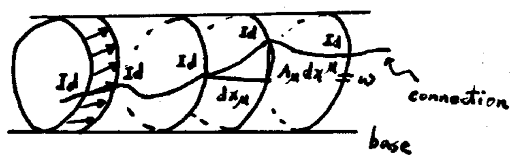

圖7. 所謂的一個 connection. 當 Id 的映射決定後，其他元素的映射自然被決定。

我們在下表中把 gauge field 翻成 principal bundle 的語言

gauge field theory	principal bundle
時空中每一點波函數的相位可任意取 由於逐點間相位不同，故微分要加上 minimal coupling. 因此有了 gauge field A_μ.	buse space 上每一點 fiber 上群的 Identity element（$e \in G$，s.t $ea = ae = a$）可任意指定。 如圖7選定一組 Id. 的逐點變換，則群間其他元素的變換自然被完全決定，這選定一組 Id 的步驟，稱爲選一個（Connection $W = A_\mu dx_\mu$（因爲他連接逐點之相位） 則 covariant differential $D \to \partial + W$ 圖7所謂的一個 connection
規範場的强度 $F_\mu = \partial A_\nu - \partial A_\mu + [A_\mu, A]$ $L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ 的 minimal	Principal bundle 的曲率 $F_{\mu\nu}$ （所以物理上會用 $F_{\mu\nu}$ 來作場强，是因爲 fiber bundle 上 connection 自然產生的二階張量只有 $F_{\mu\nu}$） Seal－dual $F_{\mu\nu} = * F_{\mu\nu}$ $* F_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{4} \sum \varepsilon_{\nu\lambda\varepsilon} F^{\lambda\varepsilon}$

上面雖說是翻譯，事實上物理的 gauge field 與數學的 principal bundle 完全就是同一個東西，這種幾何與物理的結合，是完全與愛因斯坦精神相符的。

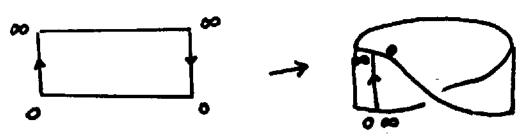

圖10. 一個Mobius band. local上的 0和∞，經過扭曲後，就互相貼和。

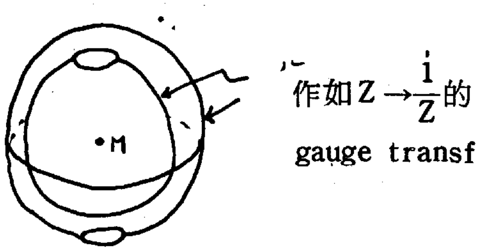

圖11. 具有磁單極的時空，其Au之定義。

(2)磁單極和Char. Classes.

現在我們來看磁單極在fiber bundle 上所扮演的角色，我們記得：Dirac的磁單極，是帶有一條無限長的尾巴的，i.e在一條線上A_μ 一直是無窮大。我們的問題是如何把這個無限大去掉，這在複變中有一個相似的例子：如圖8。我們可把球面上的點對到平面上，南極對到原點，北極對到無限大。但我們也可如圖9把北極對到原點，南極對到無限大。球面上這二種映射間的關係爲

$$Z=\frac{1}{Z'}\ ,\quad Z'=\frac{1}{Z}\quad 則\ 0\to\infty,\ \infty\to 0$$

這種圖係，就好像一個gauge transf 一樣。而我們的fiber bundle 所以有這種gauge transf ，是因爲我們的fiber bundle 是被扭曲的，如圖10。一個扭曲，就可以把∞變成0。

我們可以把具有磁單極的時空分成二個互相有重疊的部份，且使二個區域上之A_μ 都是有限，但他們重疊部份有如同$Z\to\frac{1}{Z}$的gauge transf 。如11所示。A_μ 之無限大自可消失。

所以磁單極的存在，就表示bundle 上有扭曲的現像，在U(1) principal bundle 上之扭曲，正好可用Chern Classes 表示，由於Chern Classes 是整數，所以楊振寧也可得到Dirac's monopoe quantization rale $eg=\frac{n}{2}$。

三G.'tHooft 的理論〔5〕

Dirac的monopole 無法避免尾巴的出現，在一九七四年G.'tHooft 提出一篇論文，證明如果電磁場的U(1) group。是某一個大的compact covering group經過symmetry breaking 所得到的，則尾巴可消除，論證很簡單：

如圖12設有一股flux 從一條string 進入monopole 則有A_μ，使

$$\oint A\cdot dx=\Phi$$

where積分是在圖12中的C_0 上所作，我們可選一多值函數Λ，使$A=\nabla\Lambda$ ，但

，使 $\Psi \to \Psi\ e^{in}$ 之值仍爲單值。故 Ψ 沿著 C_0 上必是轉了整數倍。若是 Abelian L gauge 的 case 則當 $C_0 \to C_1 \to C_2 \cdots\cdots$ 縮成一點時，Ψ（因爲有轉圈）不能縮成定值，故磁通量必須再流出去，i.e 磁力線不能打斷。

但如在Non－abelian gauge case。某些 gauge group之元素在轉一些圈後又可變回 Id 則 Ψ 可定義，磁力線就不必再流出去，i.e 磁力線可中斷，故磁荷存在。

所以在G.'tHooft 的理論中，磁單極的存在是 covering group sym. breaking 的結果，G.'tHooft 計算這種磁單極的質量，發現他與 covering group 的 gauge particle 相當，而這種particle（例如，W，X粒子）非常的重，甚至可用好的天平把他量出來！

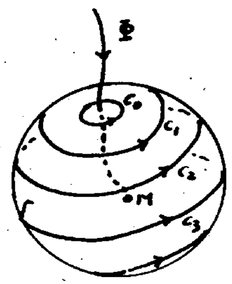

圖12. G't.Hooft 的Monopole 。

G.'tHooft 的monopole 可看成Yang－Mills Eq. 在 3－dim 、 space 中 finife energy static solution. 由於Boundary condition 的限制，他本身具有所謂的 topological charge ，其來由如下：

設 covering group 爲G. 而H爲unbroken group. i.e. H使 vacumn不變。則所有的 vacumn state 所形成的流形 M_0 （由某一特定 vacumn ϕ_0，及 $\phi = g\phi_0$，$g \in G$ 所組成）與 G/H同構，而在無窮遠處，包含monopole 的圓 S^2，其中之每一點必須是 vacumn state（因爲要 finite energy）故我們有 $S^2 \to G/H$，我們常把這種映射之分類寫成 $\pi_2(G/H)$ 稱爲 2nd homotopy group of G/H . 數學家有一套計算 $\pi_2(G/H)$ 的方法叫 exact sequence .

$$\cdots\cdots \to \pi_2(H) \to \pi_2(G) \to \pi_2(G/H) \to \pi_1(H) \to \pi_1(G) \to \cdots\cdots$$

這裡每一個箭都是一個映射，二個箭頭相鄰的要求是前一個映射之 image . 是後一個映射之 kernel（映到 Id 去的元素）數學家已證得：$\forall$ semi simple Lie group G. $\pi_2(G) = 0$ 故 $\pi_2(G/H) \sim \pi_1(H)/\pi_1(G)$

G 是corvring group 的意思，就等於 $\pi_1(G) = 0$，故 $M_0 \sim \pi_2(G/H) \sim \pi_1(H)$ 在我們的 case $H = U(1) \sim S^1$，而 $\pi_1(S^1) = Z$

故 $M_0 \sim \pi_2(G/H) \sim \pi_1(H) = Z$ 爲整數，此亦可導至Dirac's quantization condition.

四結尾：

我們把楊和G.'tHooft 的理論作一比較

	楊	G.'tHooft
質量	沒有限制	很重
bundle	nontrivial	trivial
gauge group	不要 Sym. broken（有也沒關係）	一定要 Sym. broken 且 gauge group 要是 covering group
大小	沒有限制	有大小
守恒量	1st Chern Classes	2nd homotopy group
量子化	Dirac 的條件	Dirac 的條件

我們可知楊和G.'tHooft 的monopole 是完全不同的二回事，唯一很奇怪的相同是他們有同樣量子化條件，這是因爲他們的分類都 reduce 到 π_1（H），而 π_1（H）的 generator 唯一，故他們有同樣的磁荷量子化條件。

最近大一統理論（Grand Unified Theory）可允許G.'tHooft Monopole 的存在，但實驗上仍無法證實。

Reference

〔1〕 P.A.M.Dirac， Proc. Roy. Soc. A133（1934）60

〔2〕 張老師在電力課上發的講義，名叫：電與磁。或看吳大猷第四册第四章附錄。

〔3〕 Wu & Yang. Rhy. Rev. D12. 12（1975）3845。

〔4〕 Milnor 有一本好書，名字就叫 Char. Classes.凡異出的。

〔5〕 G.'tHooft Nuclear Phy. B79（1974）276－284。