

怎樣解題

● 秋心

從前有一位神仙，能點石成金。他遇見了一位年輕人，就對他說，你要多少金子，我都可以給你，年青人說，最好是給我那點金的手指吧。

同樣的故事也發生在知識的世界，你忙碌於學習各種知識，倒不如去學習建造這些知識的方法。

「怎樣解題」就是這樣的一本書，它宣示了解決問題的一般方法，指出那些特殊的解題技術的前因（沒有錯，這方法可解出這問題，但這方法是怎麼想到的呢？）。

所以其價值遠在高微、理力、電磁之上，不僅是一本數學著作、教育著作，更是一本真正的哲學著作。

作者是數學家 G. Polya，物理系裏應該沒有人認識他，也因此錯過了它。這書內容非常淺，顯然是為高中生而寫的，我國三時就仔細看過一遍，那時還是中華書局譯的舊本，從此它就一直影響我到現在。如果你的志向是探索未知的世界，則他所建議的想法，是值得你一再回味的。

在一本真正偉大的作品前，我是說不出什麼話的，張憶壽在為它寫一個短短的書評時，也說「本書作者的原序乃是最為得體的文字，相形之下，筆者的任何推介都將多餘」。我謹摘錄其自序 1、2、4 段，看看他想告訴我們什麼。

大的發現解決大的問題，但在任何問題的解決中，多少都會有一點發現。問題也許是平凡的；但若它能引起你的好奇心，發揮你的發明精神，而你又用你自己的方法解決了，那麼你就會經驗到興奮，享受到發現的喜悅。對於年輕人，這種經驗可能會引起他對心智工作的興趣，而在心情上和性格上留下終身的印象。

因此，數學教師有一個好機會。假使他把份內的時間完全用於使學生熟練常規工作，那他就扼殺了他們的興趣，阻礙了他們的知識發展，而誤用了他的機會。可是他若給學生們一些和他們的知識相稱的問題，藉以引起好奇心，同時用些鼓勵的問句去幫助他們解決問題，那他也許就教給了他們獨立思想的興趣和方法。

我記得我自己在學生時代是一個有些志向的學生，熱望著懂得一些數學和物理。我聽課、讀書、試解問題，可是有一個問題一再困擾著我：「不錯，這解法看來可用，得到的解答也是正確的；但是，要怎樣才能夠想出這樣的解法呢？不錯，這實驗好像行得通，顯示了一個事實；但是，人們是怎樣發現這個事實的呢？而我自己又該怎樣才能發明或發現這些呢？」我現在在大學裏教數學，我希望我的一些比較奮發的學生也能問出同樣的問題，而我則將試著去滿足他們的好奇心。不但要設法了解個別問題的解答，而且還要了解獲得解答的啓示和步驟，並且企圖對別人說明這些啓示和步驟，於是我就寫了這本書。我希望這本書對那些想發展學生解題能力的教師以及對熱望發展自己能力的學生都有用處。

由這樣的序言，可略知他精神之所在。

他對於整個解題的方法，有一個提示表，全書皆在闡述這提示表，基本上，只要常看提示表，就會有很大的幫助，所以把提示表抄錄如下，若欲知詳情，就請看本書內容囉。



（怎樣解題 坡里雅著 張憶壽譯 衆文圖書公司印行）

瞭解問題

- 第一步
必須瞭解問題
- 未知數是什麼？已知數是什麼？條件是什麼？
可能滿足條件的各個部分嗎？條件足夠決定未知數嗎？不夠嗎？
過多嗎？矛盾嗎？
作一個圖，導入適當的計劃。
分開條件的各部分。你能把它們分別寫下來嗎？

擬定計畫

- 第二步
找出未知數
和已知數之間的關係
如果找不到
就只得
考慮一些輔助問題
想辦法擬定一個
解題的計劃
- 你以前見過它麼？或者見過形式稍微不同的同樣問題麼？
你知道什麼相關的問題麼？你知道有什麼可能有用的定理麼？
注視未知數！試想出一個有相同或相似的未知數的熟問題。
這裏有一個相關的，以前你解過的問題，你能應用它麼？你能應用它的結果麼？你能應用它的方法麼？你是否該導入些輔助原素，以便應用！
你能改述這問題嗎？你能將它改述得更不同些麼？回到定義！
你若解不出這問題，就試先解個相關的問題。你能想出一個更相關的問題麼？一個更一般的問題麼？一個更特殊的問題麼？一個類似的問題麼？你能解決問題的一部分麼？保留一部分條件，丟開其餘部分；這樣決定的未知數會如何？你能從已知數得出什麼有用的東西來麼？有沒有其他已知的東西可以用來決定未知數？
你能改變未知數、或已知數，必要時兩者同時改變，使新未知數和新已知數能夠更加互相接近麼？
你用了所有的已知數麼？你用了全部條件麼？問題中所包含的重要觀念都已考慮到了麼？

實行計畫

- 第三步
實行你的計劃
- 實行你所擬定的計劃，校核每一步驟。你能清楚的看出那步驟是正確的嗎？你能證明它是正確的嗎？

回顧解答

- 第四步
校核所得的解答
- 你能校核結果嗎？你能校核論證麼？你能用不同的方法得出結果麼？你能一眼看出來嗎？
你能把這結果或方法應用到別的問題上去麼？