等角寫像法的原理

王繼行

在古典物理中最常遇到的偏微分方程莫過於 Poisson Equation。(包括 Laplace Eq.)而解決二度空間的 Poisson Eq. 最有效的方法莫過於等角寫像法(Conformal Mapping Method)。

等角寫像法的基本精神是把我們要解的題目的幾何空間轉變成我們已解出題目的幾何空間再把我們已解出題目的解轉換成我們所要解的問題的解。

本文所要討論的就是這個方法的基本原理,使人覺得奇怪的是這原理在一般應用數學的書上竟不會提起。現在,讓我們看看這個原理:

有一個 Analytic function $W(z)$,把 x-y 平面轉換成 (u-v) 平面,$(x,y)\to[U(x,y),\ V(x,y)]$

$$W=U+iV=W(x+iy)=W(z)$$

$[U,V$是實函數$]$ ①

那麼 $U_x=V_y\quad U_y=-V_x$ ②

$$U_{xx}+U_{yy}=0,\ V_{xx}+V_{yy}=0 \qquad ③$$

$$\frac{dw}{dz}=U_x-iU_y=V_x+iV_y \qquad ④$$

$$U_x^2+U_y^2=V_x^2+V_y^2=\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \qquad ⑤$$

$$U_xV_x+U_yV_y=0 \qquad ⑥$$

假設有任一函數 $\phi(x,y)=\phi[x(u,v),y(u,v)]$,那麼 $\phi_x^2+\phi_y^2=|\nabla\phi|^2=(\phi_uU_x+\phi_vV_x)^2+(\phi_uU_y+\phi_vV_y)^2=\phi_u^2(U_x^2+U_y^2)+\phi_v^2(V_x^2+V_y^2)$

$$+2\phi_u\phi_v(U_xV_x+U_yV_y)=(\phi_u^2+\phi_v^2)\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \qquad ⑦$$

$$\phi_{xx}+\phi_{yy}=\nabla^2\phi$$

$$=\phi_{uu}U_x^2+\phi_uU_{xx}+\phi_{wv}V_x^2+\phi_vV_{xx}$$

$$+\phi_{vv}V_x^2+\phi_vV_{xx}+\phi_{vv}V_y^2+\phi_vV_{yy}$$

$$=(\phi_{uu}+\phi_{vv})\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 \qquad ⑧$$

現在,假如有一個問題

在 x-y 平面上

(a) $\phi_{xx}+\phi_{yy}=-\dfrac{\omega(x,y)}{\varepsilon}$。

邊界條件是,在 $S(x,y)=0$ 的界面上

(b) $\phi=\phi_s(x,y)$ 或 $\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=\nabla_{(x,y)}\phi\cdot\vec{n}$ 求 $\phi(x,y)$

把這問題轉換到 (U-V) 平面上

若 g 是 w 的逆函數,$z=g(w)$。從⑧式我們得

$$\phi_{uu}+\phi_{vv}=-\frac{\omega[x(u,v),y(u,v)]}{\varepsilon}\left|\frac{dg(w)}{dw}\right|^2$$

於是 Source 的轉換是

$$\omega(x,y)\to\omega[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{dg(w)}{dw}\right|^2$$

注意 $\int w(x,y)dxdy=\int w[x(u,v),y(u,v)]\left|\dfrac{dg(w)}{dw}\right|^2 dudv$,因此轉換到 U-V 平面上 Source 的總量不變。一個在(x_0,y_0)的point source相當於在$[U_0(x_0,y_0),v(x_0,y_0)]$ 同樣大小的 point Soure.

邊界條件是在 $S[x(u,v),y(u,v)]=0$ 上

$\phi=\phi[x(u,v),y(u,v)]$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n_{(u,v)}}=\frac{\partial\phi[x(u,v),y(u,v)]}{\partial n_{(x,y)}}\left|\frac{dg(w)}{dw}\right|$$

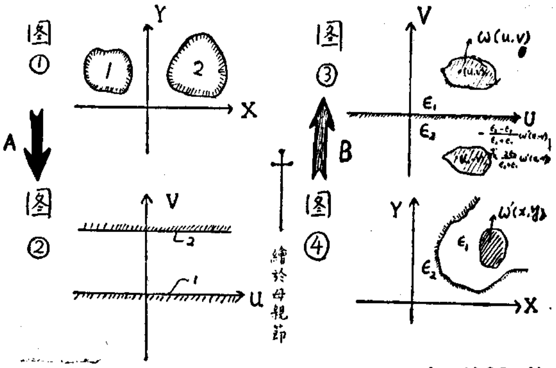
它們的比也就是$\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2}$和$\sqrt{\phi_u^2+\phi_v^2}$的比,利用⑦。因爲這是等角轉換,$\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=\nabla\phi\cdot\vec{n}$,$\nabla\phi$ 和$\vec{n}$的夾角在轉換後不變。

在邊界條件的轉換,我們可以得到兩個特例:

1. 在 (x-y) 上,$S(x,y)=0$ 是導體的界面,於是 $\phi=\phi_0$ (常數) 轉換到 (U-V) 面上,在$S[x(u,v),y(u,v)]=0$ 上,$\phi=\phi_0$ (仍是常數,於是在(x-y)面上的導體轉換到 (u-v) 面上、仍是導體。
2. 若在(x-y)上,$S(x,y)=0$是絕緣體的界面〔凡 $\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=0$ 的面,例如導電物中的一個空洞或是流體中的靜止固體。〕於是轉換到 (u-v) 面上,$\dfrac{\partial\phi}{\partial n_{(u,v)}}=\dfrac{\partial\phi}{\partial n_{(x,y)}}\left|\dfrac{dg(w)}{dw}\right|=0$,因此,在 (x-y) 面上的絕緣體轉換到 (u-v) 面上,仍是絕緣體。

由於以上的討論,我們可以把一個 x-y 平面的題目,轉換到 (u-v) 平面的題目。如果我們求出(u-v)平面上的的解 $\phi=\phi(u,v)$,那麼(x-y),平面上的解就是 $\phi=\phi[u(x,y),V(x,y)]$了。(其他的量很可由ϕ導出),

於是一個題目的解法就相當於去找怎樣的一個轉



(下接38頁)

會出現了。但當一個奇異質點自非奇異物質中產生時，另一個奇異性相反的質點也將起出現。此種可能的過程將產生兩個質點，它們自己只能藉弱作用力——而且是緩慢的——蛻變爲非奇異物質，因爲各蛻變都包含了奇異性的變化，而不會迅速的進行。因此，很顯然，若一負π介子——質子碰撞產生一λ質點——此質點有三分之二的機會再變回一質子及一負介子時，一個奇異性與λ質點相反的奇異介子，應在初次碰撞中出現。

奇異介子的史話本身，實在就是一個故事。它以τ及θ介子爲中心，它們各蛻變爲三個及兩個π介子。我不準備告訴各位，直到這兩種介子被確認爲是同一種，及李、楊所提議的弱作用中宇稱性的不守恒被吳健雄及其同事所證實之前，這是如何的一個纏結及紛擾。進行至此，我們能肯定，這工作還沒完成，一點都沒有。我們不明白，生命很長的k介子成爲兩個π介子這種稀有的蛻變，雖然關於此點有許多理論，其中包括大部由李氏所導出，由於將電荷與重子數共軛作不當的匹配，而將這個神秘變得更大、更深奧的幾個。

尚存的疑惑

加上κ與π我們一共有七種介子，都是由贋純數場所描述的。一個全然不同的知識來源，是對質子與中子電磁形式因子的分析。以擾動理論的術語來說，我們預期質子爲局限的 (localized) 電荷，當它分解爲中子及介子時，就被較廣布的一個所替代。這個構圖並沒有找到任何經驗爲其支持，而且有一段時間我們不清楚何種物理反應決定電荷的其佈。寫出形式因子的漫射積分 (dispersion integral) 後，我們發現，相對論及互補論 (complementarity) 的論點再次的說明了一些事情，佛雷玆 (Frager) 及佛哥 (Fulco) 顯示，爲瞭解這形式因子，一定存在有至少一個π—π複合粒子——一種自轉爲1，同位自轉爲1，束縛在一起但並不穩定的東西——，並估計出它應具的質量及其不穩定的程度。有人尋找這些介子，而且很快地發現了它。我恐怕到現在爲止，沒有任何對它們的性質、質量及幅度(width)所作清楚的計算是可能的，當然也不需要作這種嘗試。顯然，形式因子，尚需要另一種向量介子(vector meson)，這一種是等位純數的 (isoscalar) (事實上很可能是種Ω介子)。不用說，我們還沒完成形式因子這工作，尤其在高動量傳遞時。

由κ共振(k resonance)，四種自轉爲一，同位自轉$\frac{1}{2}$爲的激動態介子，的發現，我們便有了八種向量介子。第八種贋純數介子已被臆測了許久，也在被尋找下在範圍狹小而生命期很長的η介子中發現。但這些，以及第九種同位純數贋純數 (isoscalar pseudoscalar) 及同位純數向量介子，都使吉爾曼(Gell-Mann) 及其同事的信心，爲了一元對稱性及八重方式 (eightfold way) 確有幾分接近事實，而大爲增強。

一元對稱性並非僅有或最先的可嘗試的方法。但它遠較其他數種，例如 O_4 或 G_2，有效得多。在這次會議期間，曾對較大研究集團 (groups) 的情形作詳細的討論。我探詢過關於最近的一些工作及想法的記錄，其中包括，戴生 (Dashen) 與吉爾曼，葛西 (Gürsey) 與雷廸卡蒂 (Radicati)，艾德勒 (Adler)，威斯柏格 (Weissberger)，佛比尼 (Fubini) 與加畢柏 (Gabbibo)。這些，使我預期到更多重子及介子的被發現，在最近的研究中已出現了不少此種跡象。然而我覺得我們應否期待更重得多，也較爲不熟悉的要素，quarks，的存在，則是值得深加懷疑的一件事。

從前，在化學，原子物理，核子物理的發展史中，我們經常可排出大而複雜的一列質點，這是由數目少得多而更基本的質點，以相當單純——或接近於單純——的定律相互作用，而構成的。今日，我們應回想，qnarks，就像重子及介子般，應爲強作用質點，且是其他質點，及其他質點的組合，的組合。因此我以爲，我們即將回到，將基本質點視爲如同氫及重氫原子般，由簡單的成分以簡單的規律所構成，此種簡單想法的時代這事，是十分不可能的。

我覺得我們似乎正遭到遠較「更基本的質點」的發現爲甚的一件奇事。預言，並非高齡老人的特權，或特有的美德。我只作一個。我想我們已不再能活過一個像將π介子錯認爲湯川的質點，此種長達十年的笑話了。我以爲，這是不會發生的，若非爲了二次大戰的緣故。而這點，我也希望，是不會再發生了。

(上接第23頁)

換使在 (u−v) 平面上得到是我們熟悉的題目。當然，這題目是愈簡單愈好。

A. 若 $\varnothing uu+\varnothing vv=0$，在 $V=0$ 上 $\varnothing=\varnothing_1$ 在 $V=h$ 上，$\varnothing=\varnothing_2$ 於是 $\varnothing=\varnothing_1+\frac{V}{h}(\varnothing_2-\varnothing_1)=\varnothing(u,v)$ [$V=$Const 是等位線。]

於是，如果我們碰到一個題目：兩個導體各有一定電位，空間沒有電荷，解法就是「求一種轉換使導體1及導體2在U−V平面上變成了 $V=0, V=h$ 那麼 $\varnothing(x,y)=\varnothing_1+\frac{V(x,y)}{h}(\varnothing_2-\varnothing_1)$ 這種例題一般應用數學課本舉得最多，各位不妨參考 Pipes的書，

它的 Streamline 就是 $U=U(x,y)=$Constant

B. 若 $\begin{cases} V>0 & \varepsilon=\varepsilon_1 \\ V<0 & \varepsilon=\varepsilon_2 \end{cases}$ 在$V>0$處，有Source $\omega(U,V)$

那麼在 $V>0$ 區域的場的大小相當於由

$\omega(U,V)-\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}\omega(U,-V)$在$\varepsilon_1$介質中產生的

在 $V<0$ 區域場的大小相當於由

$\omega(U,V)\times\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_2+\varepsilon_1}$在$\varepsilon_2$介質中產生的。

Jackor : Classical Electroolynamics Page 112. 這包含了兩個物例。