自旋統計與特殊相對論

——兼談其他

·李仁吉·

大學求學時期，即對「時空」懷有相當的好感。這不僅是因它卷內文章所蘊育的智慧，就連扉頁的命名「時空」二字，亦是那麼地貼切、引人。我想這是引發我寫這篇讀書心得報告最初的動機。在這篇文字裏，當然不會有什麼新的物理創見，但是「時空」畢竟非純學術性刊物，秉承述而不作的精神，如能因此而激起同學們的討論，引發大家對物理的關心，也就算是達到筆者撰寫此稿的目的了。至於爲何選這個題目，則是因筆者認爲它是個相當能作深入淺出探討的問題，且牽涉到相當多的基本重要物理概念，從大一二乃至研究所的同學，均會對它有相當的興趣。在撰寫過程中，作者不擬「抄」太多的數學式（欲作深入了解者，不難在書籍文獻內找到相關資料），只能就自身有限的了解，明白地用文字表達出來，若對文中所述有修正意見者，請隨時逕向筆者提示，則不勝感激。

科學的進展本須有心人只問耕耘，不求收穫不斷努力，至於其成果，乃至「有用，無用？」則殊難定論。愛因斯坦的科學哲學理念，雖深受十九世紀馬赫實證主義思潮的影響①，而有特殊相對論中所謂的運作觀點（operational point of view），但從晚年他極力反對由此套物理哲學所衍生出來的量子力學看來（此點時爲吳大猷先生所津津樂道），愛氏仍是極力主張物理定律除須接受經驗的（實驗的）考證外，而其本源則應歸於人類心靈的主觀發明天賦。也就是說，物理定律並非呆滯地等我們去追求，人類應可主動發明許多法則去解釋自然現象，如此說來，同一自然現象，不同的科學家或可能循不同之途徑、方法而達相同之結果，此亦科學史上常有之現象。因此筆者以爲作物理學研究之初，當充分發揮自身活潑的想像力，但求內在邏輯推理的吻合，不必太執著於應用性之有無。科學史告訴我們，一個最初只是因好奇心趨使所引發的理論，事後往往演變成極有應用價值的結果。

另外，個人常覺得，我們應當多學習的是物理大師作學問的方法、精神，而非徒然迷信他們的形象。據說愛氏早年研究重力理論時，遇到非線性方程即徒呼奈何。而事實上後人在解一些非線性方程上亦能有相當的成果②，而大一統理論近年來亦有局部的成就③。筆者一直深信：人類追求眞理的序列當是個無窮序列，但它一定是收斂的。

※　　※　　※　　※

從古典力學中的哈密頓方程式（寫成普松弧號 Poisson bracket 型式），由對應原理（correspondence principle），我們即可得到量子力學中的海森堡方程式，狄拉克早期即已知它與薛丁格方程式是等價的，二者只是表象(Representation)④不同而已。在非相對性量子力學裏薛丁格方程式仍有其不足待補充之處，一是自旋的假定，另一是描述全同粒子（identical particle）系統之對稱性假定。

我們先談談自旋，從基本的對易關係〔x，p〕$= i\hbar$，吾人不難定出角動量算符的對易關係〔J_x，J_y〕$= i\hbar J_z$ 等，以此

爲角動量⑤的廣義定義，經過一番純代數運算，將發現角動量子數 j 可爲整數或半整數（相應於 j，有 2 j + 1 個獨立態），這似已隱含自旋爲½是被允許的。1925年Uhlenbeck，Goudsmit 提出電子自旋的假定，他們由實驗說明了假定這個電子新的「內在座標」的必要性，並由實驗定出底下：$j \equiv S = \frac{1}{2}$（有二獨立態，$m_s = \pm\frac{1}{2}$），gyromagnetic ratio 値 $g_s \cong 2$⑥。接著即有描述自旋½粒子的非相對性Pauli理論，而粒子之態空間變成 $H^{(0)}$，$H^{(s)}$ 之張量積 $H = H^{(0)} \otimes H^{(s)}$，其中 $H^{(0)}$ 爲薛丁格理論所原有是一無限維向量空間，$H^{(s)}$ 則爲二維的自旋空間。至此，我們知道自旋即如同質量、荷電量一般爲粒子的特性之一。1932 年海森堡提出同位旋（isospin）的觀念，其中部分理念即源自此。一個很重要的影響是 1954 年Yang-Mills 提出不可交換群之規範理論，同位旋觀念亦是一大基石。

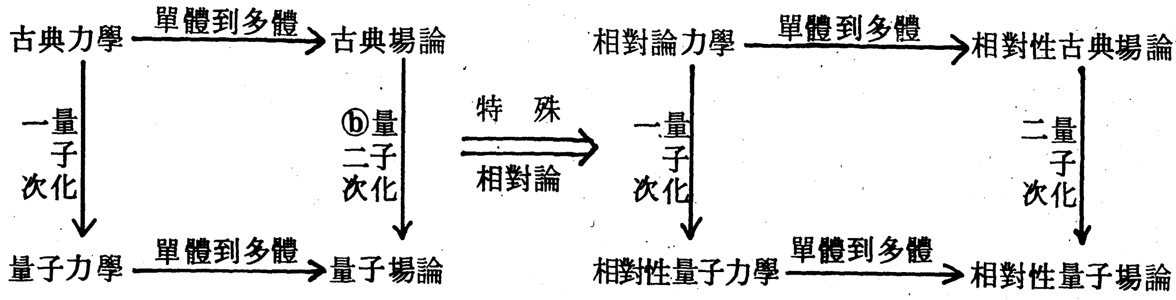
接著談全同粒子系統對稱性之假定。當我們企圖將薛丁格理論推廣至N個全同粒子系統時，如同前述，我們預期系統之態空間會是 $H = H^{(1)} \otimes H^{(2)} \otimes H^{(3)} \cdots\cdots \otimes H^{(N)}$，但此將面臨 exchange degeneracy 之困難。簡言之，以 $N = 2$ 爲例，一般言 $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$ 與 $|\beta\rangle \otimes |\alpha\rangle$（$\alpha$，$\beta$ 表一組對易全集之量子數）乃爲H空間之二獨立向量，但它們卻對應於同一物理態（因二粒子爲不可分辨的⑧全同粒子），此明顯之矛盾即可由對稱性之假定，縮小態空間H而克服。假定之要點即是在衆多的「數學態」（如前例 $|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle$，$|\beta\rangle \otimes |\alpha\rangle$ 然）中定出一合理的「物理態」以描述物理世界。兩種選擇法如下：選出之物理態 Ψ（$r_1 \cdots\cdots r_N$）若對 $r_1\, r_2 \cdots\cdots r_N$ 作輪換（permutation）爲全對稱者（completely symmetric），稱此種粒子爲玻色子，若選爲全反對稱者（completely antisymmetric），則稱粒子爲費米子，假定後之態空間將比H小很多，事實上描述玻色子（或費米子）之態空間 H^B（H^F）爲H之子空間。一個重要的結果即是因可允許之態空間的不同，計算系統可能存在之狀態分佈的物理——統計力學亦將修正。若態空間爲H（視粒子爲可分辨）則我們有馬克士威爾—波茲曼統計，若態空間爲 H^B（H^F）（視粒子爲不可分辨，即有對稱性之假定）則有波色—愛因斯坦統計（費米 — 狄拉克統計）。另外，因 H^F 中不含有二粒子同佔一態（如前例中之 $\alpha = \beta$）之態向量，故對費米子言，我們有包立不相容原理，此對週期表理論的建立有決定性的影響（以後將述及電子爲費米子）。緊接著一個問題即是：到底那些粒子是玻色子呢？（即態空間應選爲全對稱者），而那些粒子是費米子呢？到此已觸及本篇文字的核心問題。

要了解這個問題，我們須先對相對性量子力學及量子場論有些基本的認識，因爲吾人所知的「自旋—統計定理」在相對性量子場論裏，不過是一必然的結果（定理）而已，然而在非相對性量子力學裏，我們必須視它爲一假定。衆人熟悉的包立不相容原理亦然，這是相對性量子場論發展過程中之一大勝利與成功。

我們知道，所有物理理論均須符合特殊相對論的要求，即須具有羅倫茲不變性。自從薛丁格理論對原子物理解釋相當成功後，科學家們即企圖將它推廣至符合相對論的情形，克蘭—高登（Klein-Gorden）方程式及狄拉克方程式相繼被提出，但它們均有其困難處，前者有負能量問題，且找不到一正定的機率（機率之定出，尙須符合機率守恆之要求），後者雖克服了正定機率問題，卻仍有負能量的困難。事實上這些內在的矛盾，乃爲單一粒子理論（one-particle theory）的通性⑨。1949 年費因曼將負能態電子在數學計算上視成反時間矢向運動之電子，使整個狄拉克方程式仍維持爲單一粒子方程式，而物理上則將其詮釋爲正時間矢向運動

的正能量正子，如此成功地計算出許多量子電動力學中的實驗結果⑩（如偶對產生之反應截面積等），這是相對性量子力學最大成功處。然而物理上，眞正處理多體系統的成熟理論乃爲相對性量子場論，因此底下我們簡單的解釋場的概念，且說明物理上如何從力學（Mechanics）過渡到場（Field），並直覺地解釋場量子化的意義。

首先，我們列一分類表，並澄清一下有關的重要物理理論它們各應有之地位、特性、困難等。先有一些梗概的輪廓，再細談它們的內含。



相對性	理論	例子	困難（例子）
非相對性（伽利略不變性）	古典力學	牛頓、哈密頓、拉格蘭日力學。	對微觀尺度及高速系統不符
	量子力學	薛丁格、海森堡、狄拉克理論。	不符相對論要求
	古典場論	古典繩波理論、薛丁格場論ⓐ。	未量子化
	量子場論	非相對性薛丁格場論ⓑ	不符相對論
相對性（羅倫茲不變性）	相對論力學	愛氏相對論力學	未量子化
	相對論量子力學	狄拉克相對性電子方程式	機率，負能量問題ⓒ
	相對性古典場論	自旋＝0　克蘭－高登場 自旋＝½　狄拉克場ⓐ 自旋＝1　馬克士威場（m＝0，有規範對稱性）	未二次量子化
	相對性量子場論	同上，但經二次量化之理論	

說明：ⓐ在量子力學中我們視薛丁格方程式爲單一粒子方程式，而在古典場論中，我們視薛丁格場爲一多粒子場方程式，但未作量子化。相對性量子力學與相對性古典場論中之狄拉克方程式亦然。

ⓑ「二次量子化」一詞是對應於一次量子化而言。事實上它並無新的物理內含，其所秉承的仍是原先量子力學的原理。我們或可概略地說：量子場論實際上即是無限多個粒子系統的量子力學。底下我們將更進一步說明，當我們將非相對性的薛丁格場作二次量子化後所得理論與N個粒子系統之量子力學薛丁格方程式（經全同粒子對稱性假定之理論）完全等價。這或可提供對「二次量子化」一詞之部分詮釋。另外爲了強調「二次量子化」只是一種達到量子化的方法，筆者在此提示，當我們欲將規範場（交互作用場）量子化使之符合量子力學原理時，物理學

家們發現用費因曼的路徑積分法以達量子化之目的，將使過程變得更簡易可行。這也就是路徑積分觀念早期（1948）即已爲費氏提出，但直到晚近才又受到重視的原因。

ⓒ有趣的是，狄拉克方程式較克蘭一高登方程式成功處，即在它克服了正定機率問題，然而在相對性量子場論裏，我們已不再作 $|\Psi|^2$ 爲機率的物理詮釋（當初欲達之正定機率目的，後來反而捨棄，但狄拉克方程式卻仍被保留），而將二方程式均視爲合格的相對性古典場方程式，分別描述自旋爲0，½之粒子，以作爲進一步作二次量子化過渡到相對性量子場論時之須。

欲了解「場」的意思，我們先從古典繩波理論著手。從古典力學我們很容易將單一粒子系統推廣到N粒子系統，然後再令 $N\to\infty$，粒子間距 $a\to 0$，於是得到描述無限多個粒子系統之古典波動方程式，此即是一古典「場」方程式，它是描述某一介質之力學方程式。實際上「場」仍有它更廣泛的意義，例如電磁場，我們並不想像它是描述任何介質系統的，而事實上在眞空中它亦能傳遞。

當我們欲過渡到量子場時，將發現古典力學中之正則座標（normal coordinate）是個很重要的概念。通常描述N粒子系統（令 $N\to\infty$，$a\to 0$ 即得場之描述），我們可用一般之 q_i（$i=1\cdots\cdots N$）座標，但如此每一座標之解，將會是N個固有頻率項之混合（在此假定相鄰粒子間之作用位勢，可由簡諧振盪位勢逼近）。若我們將 q_i 座標作一線性變換，轉化到另一組座標 Q_i（正則座標），則每一 Q_i 解將只是一單頻的簡諧振盪子，二種描述法完全等價，但 Q_i 卻是過渡到量子場論之利器。在古典場中，我們將 Q_i 處理成一古典簡諧振盪子，其能譜是連續的，若欲將場量子化，則我們用量子力學的方法將 Q_i 量子化，視其爲量子力學中之簡諧振盪子，其能譜爲熟知的 $E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ ⑪，如此吾人即得到量子場論‼準此觀點，如前述「二次量子化」之內容亦只是量子力學的原理而已，相對性量子場（無限多個自由度）論，不過是描述無限多個粒子之量子力學而已，唯有一個較新的詮釋是：量子化後的場量子 $\hbar\omega$ 將被視爲對應於該場之粒子（原有之波一粒子二象性，如電磁場一光子，晶格場一phonon），在相對性理論裏，它可自生或消滅（相對性總能守恆，粒子數不必守恆），此與相對性量子力學之單一粒子理論（機率詮釋，粒子數守恆，故不完整）截然不同。

有了相對性量子場論的概念，底下回到本篇的主題，即那些粒子是玻色子？那些粒子是費米子呢？答案是：與自旋有關‼自旋爲半整數的是費米子（用 H^F 空間描述者）⑫。它的原因與特殊相對論有密切的關係，理由是（以自旋爲0，½者爲例）：

當我們對非相對性薛丁格場作二次量子化時，發現無論使用原有之對易關係式（簡言之即 $[x, p]=i\hbar$）或反對易關係式（anticommutation relation 大意即 $\{x, p\}=i\hbar$，其中 $\{A, B\}\equiv AB+BA$）去進行量子化工作，均可得到合理之結果，且易證明它們分別與描述N個波色子，N個費米子之薛丁格理論等價，而前者之表象形式（occupation number representation）更有它許多方便明朗之處。大家不難發現，反對易關係式之使用與費米子態向量空間 H^F 所收集之態向量（全反對稱者）有著密切的關係。

但是當我們對相對性之場方程式作二次量子化時，卻發現須對自旋爲0及½者加以分別（在此注意到前述之薛丁格方程式是不帶有自旋的）！爲了得到正定的系統能量密度及不定的（indefinite）總電荷，對克蘭一高登場（描述自旋爲0之粒子的場）作量子化時，我們須用對易關係而別無選擇，因此其態空間當選爲 H^B，克蘭一高登粒子服從波色一愛因斯坦統計爲一玻色子。另一方面同樣之理由，對狄拉克場（描述自旋爲½之

電子場）作量子化時，須用反對易關係式去進行（Jordan，Wigner），故其態空間爲 H^F，狄拉克粒子服從費米一狄拉克統計，且有包立不相容原理，爲一費米子。

若我們企圖用相反之量化規則去進行量子化工作時，均將得到矛盾之結果，即不定的能量及正定的電荷。以上結果通稱爲「自旋一統計定理」爲1940年包立所提出（他只考慮noninteraction field 情況），我們注意到它是特殊相對論之一應用結果，在非相對性理論裏並無此重要結論。關於此點，我們亦可由微因果律（Microcausility Requirement）得出，略述如下：當我們要求相隔爲一空性向量（Space-like Vector）之二時空點間無交互影響時（例如對波色場言 $[\phi(x), \phi(x')] = 0$，當 $x - x'$ 爲一空性向量。此爲一合乎相對論及量子力學之合理要求），我們亦可得到與前述結果相符之結論。

※ ※ ※ ※

後記：作者預期本篇文字將有許多疏忽不妥之處，期盼大家若有意見，隨時與我討論、指正，此乃筆者辛苦撰寫本文最大之目的。

註：①參見Frank 著「愛因斯坦傳」。

②例如SU(2) Yang-Mills 方程式，已爲Atiyah 等人找出「相當多」之解。

③雖然當年愛氏面臨的是較困難的重力場。

④嚴格言，應該用「picture」一詞，在此它與一般之「representation」涵意不盡相同，可惜已久被混用。見Messiah 著Q.M. P.314註。

⑤在此角動量一詞，涵蓋較廣，它將包括無古典對應的自旋角動量。

⑥相對性狄拉克電子方程式由理論上預測 $g_s = 2$，但在此 g_s 是個自由參數，由實驗定出，自旋所產生之磁矩 $\vec{M} = g_s \frac{e\hbar}{2mc} \vec{S}$，$\vec{S}$ 爲自旋角動量算符。另外，經過輻射修正（Radiative Correction）後的 g_s 值略大於2。

⑦一般量子力學教科書均談及。

⑧量子系統中，全同粒子的不可分辨性與量子力學的機率詮釋，測不準原理有關。例如當二粒子的機率振幅重疊時，吾人不能再如古典力學般確實分別二粒子之路徑。定量之分析詳見Messiah 著Q.M. Vol Ⅱ或Claude等著Q.M. Vol Ⅱ。

⑨狄拉克嘗企圖解釋狄拉克方程式中之負能量困難並成功地預測正子的存在，但他假定了負能態電子已被塡滿，使系統成爲多粒子系統，比起費因曼之詮釋或正規的量子場論觀點，自有其不妥處。

⑩這些結果亦可由正規的相對性量子場論計算出。

⑪筆者竊以爲，早期普朗克的黑體輻射理論，或可視爲一種不成熟的量子場論（將電磁場量子化）$E_n = n\hbar w$。而Rayleigh-Jeans 理論即是一種古典場論之分析

⑫夸克（Quark）的自旋爲½，當爲費米子，然由於重子（Baryon）違反自旋一統計定理，爲彌補此一缺陷，Greenberg（1964）曾提議夸克服從另外一種新的統計規則，即所謂「三階仲費米統計」（para-Fermi statistics of order 3），此與後來Han 及Nambu（1965），建議之色彩（Color）量子數有關，且色彩假說並提供了夸克局束問題的部份詮釋。在此暫不考慮此問題。