

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

# PARADOX!?

## 齊 正 中

每當人類思想方法或科學觀念發生根本的變化時，  
" Paradox 必然是其中的主角。你若是不信，請看下面  
所舉的幾個例子。

例 1. Zeno's Paradox (西元前五世紀)：賽跑選手  
無法在有限時間內跑畢全程，因為他必須要花一  
段時間才能跑完全程的一半；當他到達全程的中  
央位置時，必須還要花一段時間才能到達尚未跑  
畢路程的中央位置；當他到達這個位置時，又還  
要花一段時間才能跑完剩下路程的一半，……如  
此繼續下去，所以他不可能在有限時間內跑到終  
點。

例 2 進退維谷的鱷魚：一條鱷魚偷走了一個小孩，它  
捉弄似地對小孩的父親說：「如果你能猜到我是  
否會把孩子還給你，那麼我就把他還給你。」小孩  
父親回答道：「你不會把孩子還給我的。」於是  
這條鱷魚該怎麼辦？

例 3. Russell's Paradox: 影響廿世紀的數學至深且  
廣要算十九世紀末Cantor (1845—1918) 創始  
的集合論 (1874—1895)，集合論的誕生震驚  
了當時的數學界，他否定了從遠古流傳下來的全  
體大於部分的模糊觀念，1638 年伽利略發現正  
整數的平方與正整數可以 1-1 對應起來： $1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$   
 $1, 2, 3, \dots, n, \dots$  而首先以 1-1 對應的關係來比  
較集合內元素的多寡。他當時對集合所下的定義  
大致如下：集合乃是一群被限定了的東西，這些  
東西稱為集中的元素，不同的元素是可區分的  
，而且對任何一件東西我們可很明顯地得知它是  
否是這集合裏的元素。由於這是個十分含糊的定  
義，於是發現了許多矛盾，最有名的如 Burali-  
Forti paradox. Cantor Paradox. 以及 Russel  
Paradox. Russel Paradox 是說：如果 A 為一  
集合之集合，而具有下列之性質：凡一集合不是它

自己的元素即屬於 A，若是它自己的元素則不屬  
於 A。那麼 A 是不是它自己的元素呢！若不是，  
根據 A 之定義則 A 屬於 A；若是，根據定義則 A  
不屬於 A。

例 4 有一個小村鎮裏理髮師，他專為那些不自己刮鬍  
子的人刮鬍子，那麼他為他自己刮鬍子嗎？

例 5 若有一些砂子聚在一起，但不能被稱為是砂堆的  
話，那麼再多加一顆砂子上去，也不能稱為是砂  
堆。於是我們應用數學歸納法證明世界上沒有砂  
堆存在：

(i) 一顆砂子不能稱作砂堆。

(ii) 若有 n 顆砂子不能稱作砂堆，則 n + 1 顆砂子  
亦不能稱作砂堆。

由 (i) (ii) 兩命題為真，則任何有限顆砂子皆不能  
稱作砂堆，而我們的世界是有限的，所以世界上  
無砂堆。但是在我們的觀念裡砂堆是存在的，到  
底是怎麼一回事呢？

例 6 在二十世紀以前，物理學家都相信一切物理定律  
經 Galilian Transformation 都應該是不變的，  
例如牛頓運動定律  $F=ma$  就是。但是電磁學中著  
名的四個 Maxwell Equations 經過 Galilian  
Transformation 却不能保守 Michelson 測地球  
在乙太中的速度，顯示乙太的存在不能獲得實驗  
的支持；而 Lorentz 發現 Maxwell Eqs 對於 Lo-  
rentz Transformation 能夠保守，但  $F=ma$   
則否。 $F=ma$  與 Maxwell eqs. 在當時經驗範圍  
內都是百試不爽的，於是物理學家到了進退維谷  
的境地了。解決這個 Paradox 的人是誰？不用說  
你也知道，就是愛因斯坦。

例 7 廿世紀初，許許多多的實驗（如黑體輻射、光電  
效應、原子光譜、等等）結果與古典公式導出的  
結果不合，這許許多多的 Paradoxes 加上許多天

才們的血汗，成為今日的量子力學。但是現在量子力學仍然有許多不能令所有人滿意的 Paradox 存在。其中有一些是對傳統的哥本哈根派的解釋不滿意。例如著名的「Schrödinger's Cat」：把一隻貓放在一封閉的鐵盒子內，設計一裝置使得當放射源放出一射線時，則盒內會放出氰化氫將貓毒死。現在若放射源在一個小時內有一原子蛻變的概率與沒有任何原子蛻變的概率各為  $\frac{1}{2}$ ，那麼一小時以後，描述整個系統的  $\phi$ -Function 必須包含等量的活貓和死貓狀態，但是貓是 Macroscopic 的東西，不是死就是活，怎麼會有「半死半活」的狀態 (State) 呢？

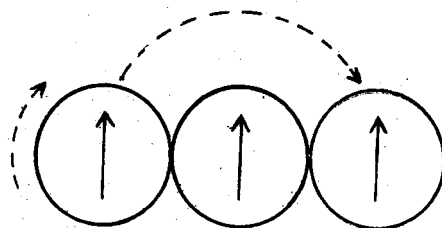
看完這七個例子以後，你大概已經看出這裡所謂的 Paradox 並不是矛盾 (Contradiction) 的同義字，事實上，有人把 Paradox 分為三類：第一類是由於錯誤的命題或推論而得到的矛盾結果，這也就是一般所謂的矛盾。第二類是其結論與我們的直覺觀念不合，而其命題和推論却是非常嚴謹且無懈可擊的，這一類 Paradox 並無矛盾，我們必須放棄直覺觀念。第三類是最重要的一種，主要是由於驗證一門學問的基礎所產生的 Paradox，例如集合論裏的 Russell Paradox，和引導出相對論的 Paradox 等等，研究這一類的 Paradox 常會引起基礎的根本改革，擴大我們知識的領域。另一種分類法是把 Paradox 分為甲、乙兩類，甲類是數理邏輯上的矛盾，也就是說這類矛盾是用數學和邏輯語言來描述的。從我們用來討論數學和邏輯的語言 (即所謂後設語言 Metalanguage) 直接得到的 Paradox，則劃歸乙類。「 $A \subset B \& B \subset A \Rightarrow A = B$ 」是集合論第一條公理。」這句話本身是 Metalanguage，而「 $A \subset B \& B \subset A \Rightarrow A = B$ 」則為數學語言或邏輯語言。

現在讓我們來看看這七個 Paradox 各屬於那一類。

例 1. 應屬於第二類，因為它導源於我們錯誤的直覺觀念，認為不斷地加上一正量總會加到無限大，這個 Paradox 可說是引起後世對無窮級數研究之濫觴。例 1 雖然用的是 Metalanguage，但是其矛盾是誤認  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$  會得到無窮大，而「 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2$ 」是數學語言，所以還將它歸在甲類較妥。

與例 1 性質類似的 Paradox 尚有許多，譬如：

這裏有兩個一元硬幣緊靠在一起，右邊硬幣不動，而使左邊硬幣沿着右邊硬幣的上半邊緣滾到另一邊，在我們直覺裏，左邊硬幣只滾了半個圓周長，圖示的箭頭應該顛倒過來才對，事實上剛好相反，你若是不信，可以自己做一個實驗。



例 2. 此例應屬於第一類和乙類。因為不論鱷魚怎麼做都不對，但其推論無誤，所以結論是鱷魚的話與孩子父親的話這兩個「命題」不能並存。讓我們舉一個較簡單的數學例子：命題 1 若  $X = 5$  或  $X = 3$ ，則  $x = 2 + 3$  或  $x = 1 + 1$

命題 2： $x = 3$

很明顯地此二命題不能並存，若把此二命題用「和」字連在一起，在邏輯就稱為「矛盾」(Contradiction)

例 3. 當然是屬於第三類及甲類，由於 Russell Paradox 以及前面所提的一些其他集合論的 Paradox 之影響，而產生今日之公理化集合論 (Axiomatic Set Theory)。

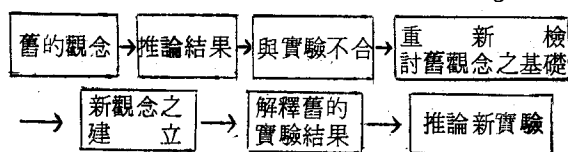
例 4. 與例 3 產生 Paradox 的情況幾乎是完全相似的，所不同的只是比例所用的語言是日常生活中的語言。

例 5. 本例可說是屬於第一類亦屬於第二類。矛盾的主要來源不是數學歸納法不對，而是我們對砂堆的直覺觀念本身就有矛盾：在直覺裡認為取走或放入一顆砂子不影響其是否為砂堆，而又肯定砂堆裏的砂是有限多個，前者是由於一般砂堆裏的砂數目遠較我們日常生活中所碰到的為大，在我們渺小的眼光看來就是無限多；而另一方面理智的思考告訴我們，它的個數不可能無限多，於是乎矛盾產生了。另一種觀點是「砂堆」的概念本身就模糊不清，同樣一小撮砂子，一定有些人稱其為砂堆，有些人認為不是砂堆，甚至同一個人在不同的時間和背景去指認，也會有不同的答案。如果我們明定義「砂堆」為十萬顆砂子堆在一起，此矛盾就不會發生了。

在自然科學裏，我們常會用到類似「砂堆」的模糊概念，此時多半是用作一種估計以簡化計算，例如我們射出一人造衛星，計算其軌道時，認為地球質量不改變，這種「不改變」是計算上或有效數字上的不改變，而不是觀念上的不改變，否則就要有矛盾產生了。

例 6. 是大家所熟悉的，不必贅述，但是要注意自然科學上的矛盾常與邏輯上或數學上的矛盾不同，後

者多半指前提命詞本身不諧調，而前面多半是取決於實驗。此例可畫成下列之Block Diagram:



有人可能會反對說特殊相對論可由於檢討牛頓絕對時的錯誤觀念而推得，不需借助實驗，但若不借助實驗，如何可知光速是有限值，如果光速是無限的話，絕對時的觀念就可成立。

在討論例7以前，讓我先扯一些其他有關量子力學的問題。學過量子力學同學都知道，在量子力學裏我們稱 $\psi$ 函數為所描述系統的狀態 (State)；但是這裏所謂「狀態」與我們一般習慣裏所謂的「狀態」不同；同時在量子力學裏我們把一切測量均看成 $\psi$ 函數的運算子 (Operator)，而測得之值則為此運算子之Eigen-Value，並謂 $x$ 函數可以該運算子之Eigenfunction的線性組合 (Linear Combination) 來表示，測量某一特殊Eigen-Value的概率可由 $\psi$ 函數在該Eigenfunction以上之分量來決定。由於同一「狀態」經過同樣的測量可能會得到不同的值，這就是所謂的Non-Causality，這與古典的理論不同，古典的理論裏只有在我們對該系統描述不全時，才會測得概率性的值，也就是這個道理使人覺得 $\psi$ 函數可能不是對該系統的完全描述 (Complete Description)，而希望尋得能保持Casuality的隱變數 (Hidden Variable)，愛因斯坦就是抱着這種看法的人之一。關於隱變數的討論，許多量子力學的書中都有，也就不必在此佔篇幅了。哥本哈根派另一個常受攻擊的解釋是說，若某一物體，經實驗測得其具有某一特定的性質，這並不表示它在未受實驗探測時也具有此性質，譬如說，我們在任何時候測量電子的形狀，它必然是像粒子一樣據有很小的體積，而不會像水波一樣成為連續狀態，但是我們並不能因此而說電子在不受探測時也是據有很小體積的粒子，否則電子束經過雙狹縫就不會有干涉現象發生見 Feynman's Lectures on Physics Vol. I Chap. 37 或 Vol III Chap. I。愛因斯坦認為這不合「物理真實性」 (Physical Reality) 的要求，他選舉了一個 "Paradox" (見 A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. 47, 777 (1935))，哥本哈根派領袖 N. Bohr 答辯稱愛因斯坦所舉的矛盾是用了愛氏自己所謂 "Physical Reality" 的看法，這種看法在哥本哈根的觀點裏並不能成立，所以不能構成對量子原理的駁斥 (見 N. Bohr, Phys. Rev. 48, 606 (1935) 及 J. M. Jauch

Foundations of Quantum Mechanics Chap. 11 Sec. 10)。

現在讓我們回頭來看例7，要判斷貓的生死，必須加以探測，前面說過這種探測可看成對 $\psi$ 函數的運算子，很明顯地此運算子有兩個代表「生」和「死」的Eigenfunctions  $\psi_e$  及  $\psi_d$ 。一小時後貓的生死狀態可表為：

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_e + \psi_d)$$

雖然你可能覺得半死半活的貓是不可思議的，但是你不能證明它是錯誤的，因為只要你打開盒子或用任何其他的方法探測出貓的生死，就等於在 $\psi$ 函數上加了一Eigenvalue 為「生」和「死」的運算子，根據量子力學貓的狀態 $\psi$ 立即就變成 $\psi_e$ 或 $\psi_d$ ，所以決不會有矛盾產生。你可能不喜歡量子力學，但它是目前唯一可行的辦法。

"I have not been able to discover the cause of these properties of the distribution; it is enough that a particle will more probably strike in one place rather than in another, and that I have a formula for describing this Probability." (摘自 N. R. Hanson, Am. J. phys. 27 1 (1959) 這句話完全是仿牛頓Mathematica Principia 結論裏的語氣："I have not been able to discover the cause of gravity; it is enough that gravity does really exist, and act according to the laws we have explained"也許可以藉此消除一點你對量子力學的疑慮

由以上的討論可知，依哥本哈根的看法，例7應屬於第二類的paradox；而照愛因斯坦的看法，則應屬於第三類。

但是即使在哥本哈根派學者的眼光裏，目前的量子力學仍然不能完全避開paradox, Dirac在他那本著名的 "Principle of Quantum Mechanics" (4th ed.) 的結尾中說：目前量子力學所遭遇到的困難是非常基礎性的，非經類似二十年代由 "Old Quantum Mechanics" 進步到現在的Quantum Mechanics 這種觀念上的巨變，是不足以解決的。

廿世紀是一個充滿Paradox的時代，有許多Paradox 被解決了，因而開創了知識的新紀元；但仍然還有許多Paradox 等著你來解決，時代的巨輪也等著你來推動。

(註) 一般所謂哥本哈根學派，是指 N. Bohr, M. Born, W. Heisenberg, P. A. M. Dirac, A. Bohr 等人對量子力學的看法，因為以 N. Bohr 為首，而 N. Bohr 生前以主持哥本哈根大學物理系而聞名於世，故被人稱為哥本哈根學派。此外，不屬哥本哈根學派的著名學者有 A. Einstein, L. de Broglie, E. Schrodinger, A. Landé 等。