則(20)式成 $\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{1}{m}\nabla\cdot(P\nabla S)=0$ (22)

此式與流體力學裡的連續方程式（equation of contitunity）相似，$\frac{\nabla S}{m}=V$ $\frac{\partial p}{\partial t}+\nabla\cdot(Vp)=0$, Vp 表示質點的或然通量(probability flux) 正如流體力學表示質點不能生滅。

(21)式中，若合 $h\to 0$,，則成

$$-\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{1}{2m}(\nabla S)^2+V \qquad (23)$$

此式即古典的 Hamilton-Jacobi 方程式。因此有人假定，一質點除受V外，更受另一種位能V_Q的影響，V_Q (Quantum Mechanical potential)

$$V_Q=-\frac{h^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}=-\frac{h}{4m}\left[\frac{\nabla^2 p}{P}-\frac{(\nabla P)^2}{P^2}\right] \qquad (24)$$

所以，我們假定於(21)式中令 $V_Q=0$, 則量子力學可變成古典力學，然而事實上不可能。爲簡便計，假定質點在一度空間裏運動。則(1)式解 $\psi_1=A\exp[i(kx-\omega t)]=B\exp[i(\frac{p}{h}\times-\frac{p^2t}{2mh})]$ (25)

此式顯然適合(1)式及(23)式。同樣 $\psi_2=B\exp[-\frac{i}{h}(px+\frac{p^2t}{2m})]$ (26)

亦適合 (1),(23) 式 將 (25),(26) 兩式相加

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1+\psi_2)=\sqrt{2}B\cos\frac{px}{h}\exp\left[-\frac{i}{h}\frac{p^2}{2m}t\right] \qquad (27)$$

此式之 $R=\sqrt{2}B\cos(\frac{px}{h})$ $S=-\frac{p^2t}{2m}$

代入(24)式則 $V_Q=\frac{p^2}{2m}\neq 0$

可見ψ適合(1)式，而不能適合(23)式，即不合於重疊原理。

因此，我們必須認爲兩者在本上質有很大的差異，不可永遠認爲古典力學，必是量子力學的極限，而給量子力學一個錯誤的估價。至於兩者的分界，並不明顯，我們可以

$$m_0=\left(\frac{hc}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}=2.18\times10^{-5}g$$

(γ爲 Gravitational const. c, 光速)

作標準，小於m_0時可用 Schrödinger方程式，大於則可用(21)式

最後，我們應知道，量子力學應用統計方法，所得的結果，的確能很完美地描述原子的國境，然而在10^{-13}cm以下，則又無法適合。Einstein, De Broglie諸人，就曾對量子力學感到不滿意，他們認爲，即使在量子的大小，仍應有某些力學變數，能够精確的決定每個質點的行徑，Bohm假定在10^{-13}cm以下，有某些隱變數（hidden variable）存在，它能像古典力學（但非全同）的運動方程式一樣，能準確預知質點的行踪，量子力學的統計方法，祇不過是由於實驗上的需要，所做的假定，並非表示沒有精確決定在量子大小內物質性質方法的存在。然而此說，未受大家支持。

參考資料

1. Schiff: Quantum Mechanics 2nd, ed, 1955.
2. Eisberg: Fundamental of Modern Physics. 1961
3. Dicke & Wittke: Introduction to Quantum Mechanics. 1960
4. Nathan Rosen, Am. J. Phys. 32, 597 (1964)
5. David Bohm, Phys. Rev. 85, 166 (1952).
6. Goldstein: Classical Mechanics. Chap. 9,
7. P.A.M. Dirac: Principle of Quantum Mechanics.

狹義相對論淺說

劉源俊

初接受相對論的觀念時，往往僅能够記憶一些數學公式，而不能明瞭式中含有的深義。本文只就最簡單之概念加以分析，一以補一般書籍之不足，二以獻與新朋友們做禮物。

一、基本原理及假設

①慣性系存在。即我們能找到一基準坐標系（通常以三個相垂直的架子表之），使不受外力作用的物體對於這基架或永遠靜止，或永遠以等速依直線運動。若兩系以一定速度相對運動而其中一系是慣性系，則顯見另一系也必爲慣性系。

註：地球繞日公轉，太陽系又在本銀河系中運動（有移動也有繞本銀河系中心的轉動），本銀河系又在宇宙中運行。我們無法說地表、太陽、或本銀河中心是在慣性系中。因此慣性系之存在實爲想像中之事。

②在一慣性系中，地點及時間與物理定律無關。即空間是Homogeneous與Isotropic 的，時間是homogeneous 的。例如：一個人在A點所作實驗之結果與在B點所作者相同。

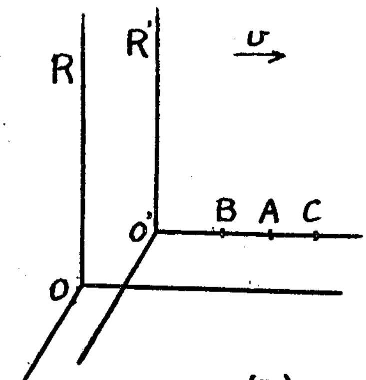
③在任何慣性系中，物理定律的數學公式沒有兩樣。這就是說若地表可視爲是慣性系時，我們在等速度進行中的火車上所得實驗的結果（如落體、碰撞等）與在地表所得者相同。

④在任何慣性系，測得的眞空光速均同。即眞空光速$=C=3\times10^{10}cm/_{sec}$是一物理定律。

註：照以前的時空觀念，二速度相加是用向量加法，現在光速不依此律，顯然我們必須改變時空觀念。因此，向量加法對速度已不適用，只是在運動速小時，我們不覺其誤而已。

⑤時鐘的對準。在一慣性系中取兩完全相同的鐘，在某一時間對準之後，分置於兩不同地點，則這兩鐘一定隨時都相吻合。這意思是說如果在t′時自A發光波作信號，則B收到信號時，鐘上所指必爲$t_2=t_1+\frac{d}{c}$（d時AB之距離）。

⑤的方法自然是我們平日所能領會的，但加上④的實驗結果，「同時」的觀念就必須加以修正了。試看圖(一)，R′基架對R基架以v之速向 ox 方向前進。A



(一)

BC爲在R′中靜止之點，且AB=AC。現自A發信號，則R′中的觀測者將測知信號同時到達B及C，但不管A之速度如何，R系中的觀測號測得的光速都是C，而他們測知B向光源移動，C離光源移動，所以認爲信號先到達B後到達C。因此，「同時」一語只有在一定的慣性系中才有意義。

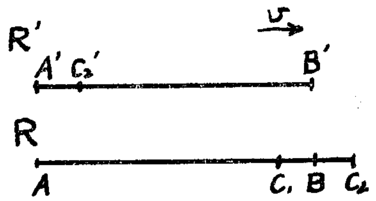
二、對基本量觀念之修正

（一）長度(僅就與相對速度平行方向的長度討論之)

①靜止物之度量法：以一剛體尺作單位長，將之分度後用法與普通用法同。

②運動物之度量法：仔細論之，這種度量非常困難，例如要測開動中車子的長度，我們也許會想到帶尺上車去量。但如何上車？從車頭上與從車尾上會有不同嗎？爬上去與跳上去會有不同嗎？在日常生活中，我們覺不出有不同來，所以並不加注意。但當車行極快時，我們也許跟本上不去，因此這種量法有其限制。我們不得不採其他的度量方法，較簡單的是相對論中的度量方法：讓觀測人們對準他們的鐘，排列在車行軌道旁，然後在特定時間時，使恰位於車兩端的兩觀測員各記下符號。再用尺依量靜止物之法量二人間距離，我們稱之爲以v速度進行的車的「長度」。

依相對論之推理，如此測得的長度必較靜止時之長度爲小。討論於下（見圖二）：

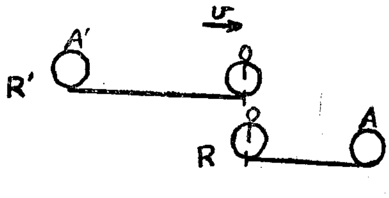


(二)

AB與A′B′在靜止時同長l，現A′B′以v速向右運動，設R系測得A′B′之長爲l_1。若$l_1\geq l$，則依R之觀點，A′相當於A時B′相當於C_2。但R′中之觀者見位於C_2之人先做記號，位於A之人後做記號，所以認爲A應早些做記號。即依R′之觀點，A應相當於C'_2。如此說來，R測R′之l較大（或等），而R′測R之l較l小，與一、②相違。所以$l_1<l$。這就是長度縮短論。

（二）時間

設R′以v之相對速度對R運動，我們可假想R及R′中各有無數時鐘置於與v同向的直線上。設R′之原點O′經R之原點O時，二鐘恰對準，則以後O點之鐘與R′其他鐘相比時（它永遠不能再跟O′鐘相比了），會發現它們都比自已快。同樣，O′鐘與R中其他鐘比時也一樣。這就是時間膨脹論。以下說明理由：（見圖三）



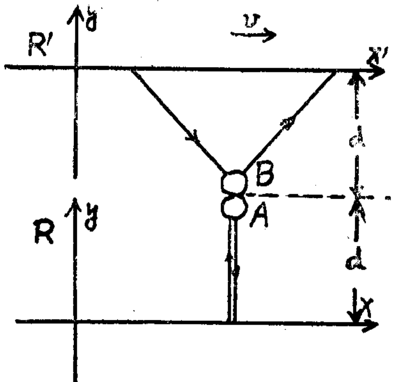
(三)

R之觀測者認爲A′與O相比時，O′正與A相比。㊀A′鐘與O′鐘不會都比O與A的鐘快，也不會都比O與A的鐘慢，因爲R與R′的情形是對稱的。㊁R′的觀測者認爲O′與A的比較先於A′與O的比較。所以A′的示數必大於O′之示數。㊂A′的示數不會與O的示數同，因爲若如此則O′與A

比較時，O′ 必然顯得慢了，破壞了對稱關係 。唯一的可能是O比A′慢，O′與A慢。

（三）質量

我們假定牛頓第二定律$F=\frac{d}{dt}(mv)$ 正確，又假定兩物碰撞時第三定律成立，則我們可得動量不滅定律。取一球作爲標準質量，則其他物之質量可由動量不滅定律，及此物體與標準質量碰



(四)

撞的速度關係而測定。爲方便起見，做設完全彈性碰撞。

見圖四，設AB在靜時有同樣質量，分置R系及 R′ 系 ，各以直方向對各系同速拋出，在中途碰撞又各折回。圖示爲R中測者所見情形 。 設R測得 A 回到原處需時 To，則R′測得B回到原處亦需時To。但由(一)所述，R所測得B回到原處所需時應比To大（T），所以R所知 B之y向分速（S_B）必小於v（因 $\frac{d}{T}<\frac{d}{To}$）。由動量不滅定律（R系中），$m_A v=m_B v_B$，∴m_B應比m_A 大。同理，R′中測者認爲m_A應比m_B大。

由此獲致結論，質量是速度之函數。

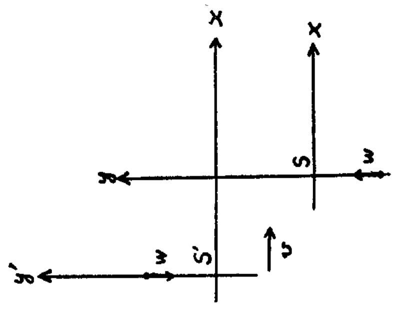
三、結　　論

物理量的意義與測量法有密切關係。例如R系測得R′系中一根棒的長度爲 l_1，但R′系所測的長度比l_1爲大，這裏並無矛盾，只是因爲兩個「長度」概念及測法不同罷了。嚴格說來，我們不應統稱之爲長度。時間與質量亦然。

上接16頁

但是此書中，却又利用由此導出之質量公式，來說明質能互換公式，$E=mc^2$。我們知道，質能不滅定律，既根據互換公式而將古典物理中的質量與能量不滅二定律，合而爲一，自不可倒果爲因，以之來推質量公式。因之，我在下面，將根據動量不滅定律及質量爲速度之函數，不利用質量不滅定律，來推出質量變化公式。

假設有兩個完全相同之小球a及b，一球a在s座標系中，沿y軸之正式向做等速運動。另一球b，以同樣大小之速度，在s′系中，沿y′ 軸之負向運動，設速度大小爲w，x，s′系對於s系，以v速度，沿x軸方向運動。如圖：



此二球在y′ 軸與y軸重合時，恰相碰撞，則若二球均爲光滑之球時，作用力將在連心線上，即y軸上，故在x軸方向上，二者之速度，並不發生改變。而根據 Galilean Relativity Principle. 碰撞後，二器在自系中之速度，應該大小相等，而方向相反，設其值爲 w′。則在s中之觀察者，將見碰撞前，二球之速度爲：$V_{ax}=o$, $V_{ay}=w$； $V_{bx}=v$, $b_{by}=-\frac{w}{k}$.

$k=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$　而碰撞後之速度將爲：

$$V'_{ax}=o,\ V'_{ay}=-w'\ ;\ V'_{bx}=v,$$

$$V'_{by}=+\frac{w'}{k}$$

於是，設 m(v) 表速度爲 v時質量之大小，根據動量不滅原理，在x方向上：

$$m(w')\times o+m\left(\sqrt{v^2+\frac{w'^2}{k^2}}\right)\times v=m(w)\times o$$

$$+m\left(\sqrt{v^2+\frac{w^2}{k^2}}\right)\times v\cdots\cdots(1)$$

∴　w′=−w（w′=+w 與事實不合）

在y方向上：

$$m(w')\times w'-m\left(\sqrt{v^2+\frac{w'^2}{k^2}}\right)\times\frac{w'}{k'}$$

$$=m(w)\times w-m\left(\sqrt{v^2+\frac{w^2}{k^2}}\right)\times\frac{w}{k}\cdots\cdots(2)$$

∵　m(v)=m(−v)　（m爲無向量）

∴　(2)　becomes

$$m(+w)\times(-w)-m\left(\sqrt{v^2+\frac{w^2}{k^2}}\right)\times\frac{(-w)}{k}$$

$$=m(w)\times w-m\left(\sqrt{v^2+\frac{w^2}{k^2}}\right)\times\frac{w}{k}$$

$$\therefore\ Km(w)=m\left(\sqrt{v^2+\frac{w^2}{k^2}}\right)。$$

Let　w=o,　　km(o)=m(v)

That is,　　$m=\frac{mo}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$