Anyon: A Strange Kind of Particles in 2D Plane

Yu-Ping Lin (林育平)[1]

[1]Department of Physics, National Taiwan University, Taipei 10607, Taiwan

(Dated: April 8, 2016)

自 1900 年普朗克 (Max Planck) 提出黑體輻射的量子論以來，量子物理在這一百多年中已經發展成爲一門頗具規模的學門，並逐漸成爲許多物理領域中不可或缺的要素。不僅高能、凝態方面以量子物理爲根基發展已久，近年來一些比較新的領域，例如生物物理，也出現了一些將量子理論引入的嘗試。本文旨在爲讀者們介紹量子物理中一種因二維平面的結構而產生的奇特粒子—任意子 (anyon)，並簡單說明其在凝態物理中實現的可能。

全同粒子與對換

在古典物理中，所有的物體都是可以被分辨的，就像當 A 和 B 兩個人站在面前時，我們總是可以辨認出誰是 A 誰是 B。但是，在量子物理中，我們引入了「全同粒子」(identical particles) 的概念—所有同一種類的粒子都是一樣而無法被分辨的 (indistinguishable)。舉例來說，假如有兩顆電子分別在空間中的 A 點和 B 點上，我們只能知道有兩顆電子分別在這兩個位置上，但不能用「A 電子」和「B 電子」來區別它們。以量子物理的語言來說，這兩顆電子構成了一個共同的量子態 (quantum state)，而這些由多顆全同粒子構成的量子態產生了量子物理中許多有趣的新奇現象。

由於有這樣不可分辨的特性，全同粒子間位置的交換對整體量子態的影響就成了一個有趣的問題。方便起見，我們在這裡考慮一個只有兩顆粒子的系統。假設這兩顆粒子分別在位置 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 上，並且它們共同組成的量子態波函數 (wave function)是

$$\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \tag{1}$$

當這兩顆粒子交換時，它們的量子態會被一個算子 (operator) P 作用而變成一個新的態

$$\psi(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = P\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \tag{2}$$

我們想要探討的就是這個新的態與原本的態之間的關係。爲了方便接下來的討論，我們首先給予「交換」這個動作一個較爲具體的圖像。從 Fig. 1(a) 可以發現，兩顆粒子之間的交換可以看成是將一個粒子繞行 (wind) 另一個粒子半圈 (這裡的標記 1 跟 2 指的是「位置 1」和「位置 2」)，繞行一圈則是做兩次交換。這樣的描述可以讓我們更容易想像及討論全同粒子交換的特性。

三維空間的全同粒子：玻色子與費米子

有了以繞行來描述交換行爲的概念之後，我們首先看看三維空間裡的情形。從 Fig. 1(b) 可以發現，一個粒子圍繞另一個粒子走一圈的路徑 R_1 可以被連續的變換到一個沒有圍繞的路徑 R_2

$$R_1 \to R' \to R_2 \tag{3}$$

這表示這兩個路徑應該互相等價—粒子走完兩條路徑之後得到的結果是相同的。由於沒有環繞的路徑 R_2 不會對量子態造成影響，我們知道環繞一圈的 R_1 也不會使其改變。由此可知，兩個全同粒子交換兩次後，它們的共同量子態是不變的

$$P^2\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \tag{4}$$

由於這對任意的量子態都成立，我們可以得到

$$P^2 = 1 \tag{5}$$

的推論。因此，交換算子 P 會有兩個本徵量 (eigenvalue) ±1，而它們對應到的本徵態 (eigenstate) 則代表了兩種全同粒子的量子態

$$P\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \pm\psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \tag{6}$$

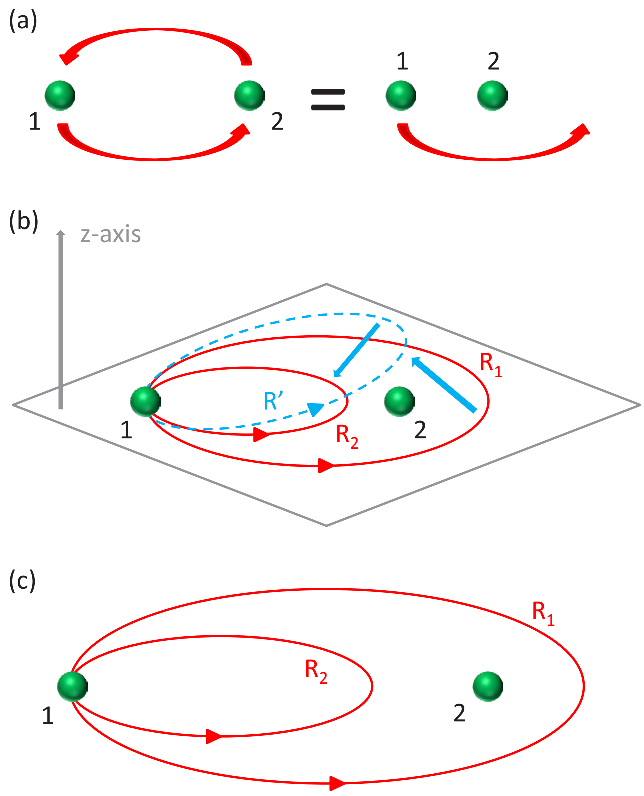

FIG. 1. (a) 粒子間的「交換」可以看做是讓一個粒子繞行另一個粒子半圈。(b) 在三維空間中，一個粒子繞行另一個粒子的路徑 R_1 可以被連續的變換到一個沒有繞行的路徑 R_2，因此它們是等價的。(c) 在二維平面中，一個粒子有繞行另一個粒子的路徑 R_1 和沒繞行的路徑 R_2 是不等價的。

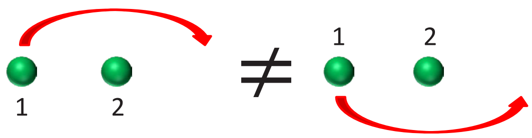

FIG. 2. 任意子以順時針和逆時針方向交換的結果會不一樣。

我們將本徵量是 $+1$ 的量子態稱爲「玻色子」(boson)，而本徵量爲 -1 的則是「費米子」(fermion)。目前標準模型 (standard model) 中的基本粒子都屬於這兩種全同粒子。構成物質的夸克、電子等等屬於費米子，而光子、膠子這類基本作用力的介子則是玻色子。這些不同種類的全同粒子共同組成了我們所居住的宇宙。

由於兩個只相差一係數的量子態表現出的行爲是相同的，我們所看到的現象在同種類的玻色子或費米子交換後並不會改變。然而在費米子系統中，當兩個粒子位於同一點時，由 Eq. (2) 和 Eq. (6) 可知量子態乘一個 -1 是不變的。這表示其量子態爲 0，也就是兩個費米子不能共存於同一個位置，而這個現象就是我們所熟知的包利不相容原理 (Pauli's exclusion principle)。玻色子則不會有這個現象。

二維平面的全同粒子：任意子

雖然我們居住在三維空間的世界中，但還是可以在很多地方看到較低維度的系統。例如在兩個不同種類半導體之間的夾層中，可以實現所謂的二維電子氣 (2D electron gas, 2DEG)；除此之外，我們也可以在一些晶體中看到準一維 (quasi-1D) 的結構。這些系統的低維度空間讓許多在三維空間中無法出現的現象得以實現，而二維平面中全同粒子的奇特行爲也包含在此列。

在二維平面中，全同粒子的交換和三維空間有很大的不同。從 Fig. 1(c) 中可以發現，我們無法將一個粒子環繞另一個粒子一圈的路徑 R_1 連續的變形到沒有圍繞的路徑 R_2，因爲被圍繞的粒子會阻礙我們做這樣的連續變換。這件事說明了這兩條路徑是不等價的，因此三維空間中「交換兩次後量子態不變」的限制在這裡並不適用。由此可知，在二維平面的系統中，交換算子 P 對量子態造成的變化可以是任意的。韋爾切克 (Frank Wilczek) 將這樣的量子態命名爲「任意子」。

我們可以用量子態在交換前後變化的方式來對任意子做分類，一般主要分成阿貝爾任意子 (Abelian anyon) 和非阿貝爾任意子 (non-Abelian anyon) 兩種。在阿貝爾任意子的系統中，當我們將兩粒子交換時，量子態會差一個複數的相位

$$P\psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=e^{\pm i\theta}\psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) \tag{7}$$

其中以順時針和逆時針方向環繞所得到的相位會互相差一個負號 (Fig. 2)。當 $\theta=0$ 時，交換後得到的係數是 1，也就是玻色子；而當 $\theta=\pi$ 時交換會給予量子態一個 -1 的係數，因此是費米子。非阿貝爾任意子的交換則比阿貝爾任意子複雜許多。當我們交換兩個非阿貝爾任意子時，量子態會被一個么正算子 (unitary operator) U 作用

$$P\psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2)=\begin{cases} U\psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2), & \text{逆時針} \\ U^\dagger\psi(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2), & \text{順時針}\end{cases} \tag{8}$$

而變成一個不同的態，其中順時針和逆時針交換會給我們是不一樣的結果 (Fig. 2)。由於任意兩個么正算子 A 和 B 並不對易 (non-commute)

$$AB\neq BA \tag{9}$$

交換粒子的順序會影響其最終的量子態。這也是我們稱它爲非阿貝爾任意子的原因。

任意子的實現

在量子物理中，當一個帶電的粒子 q 圍繞一束無窮長的磁通量 (magnetic flux) Φ 逆時針走一圈時，這個粒子的量子態會得到一個複數的相位 [Fig. 3(a)]

$$\psi\to e^{iq\Phi/\hbar c}\psi \tag{10}$$

其中 $\hbar$ 是普朗克常數，c 是光速。只要這個路徑對於磁通量來說是逆時針環繞一圈，不管帶電粒子怎麼走，量子態得到的相位都會是一樣的。這個現象我們稱之爲阿哈諾夫-波姆效應 [Aharonov-Bohm (AB) effect]。在二維平面中，一束垂直穿透此平面的磁通量等效於一個平面中的向量勢 (vector potential) 渦旋 (vortex)，因此可以當成

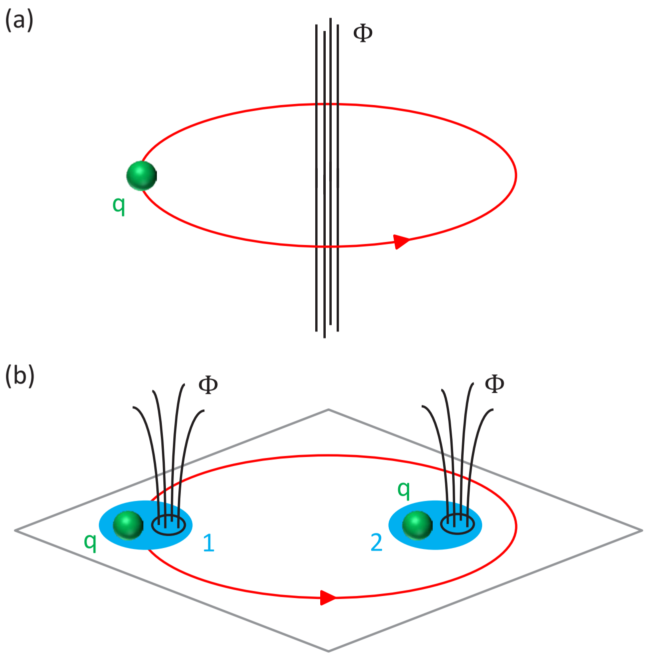

FIG. 3. (a) AB 效應：帶電粒子環繞一束無窮長的磁通量一圈會得到一個複數的相位。(b) 任意子可以由一個帶電粒子跟一個渦旋組成的準粒子實現。

一個二維的準粒子 (quasiparticle) 來看待。假如我們把一個帶電粒子跟一個渦漩綁在一起形成一個新的準粒子，並將它環繞另一個同樣類型的準粒子走一圈 [Fig. 3(b)]，渦漩與帶電粒子之間的 AB 效應會讓這兩個準粒子的共同量子態得到一個複係數的相位。因爲這樣的特性，這種「電荷-磁通量」的配對可以視爲阿貝爾任意子。

我們從場論的角度來看看這種配對的實現。考慮 $2+1$ 維閔考斯基時空間 [$2+1$ Minkowski spacetime, $(+,-,-)$] 中一個包含電磁場 $A(x)$ 和複數純量物質場 (complex scalar matter field) $\phi(x)$ 的系統，其中物質場的質量爲 m、電荷爲 e。由於這個系統的拉格朗日量 (Lagrangian)

$$\begin{gathered}\mathcal{L}=D_\mu\phi^* D^\mu\phi-m^2\phi^*\phi-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\\ D_\mu\phi=(\partial_\mu+ieA_\mu)\,\phi,\quad D_\mu\phi^*=(\partial_\mu-ieA_\mu)\,\phi^*,\\ F_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu,\quad A^\mu=\left(A^0,\mathbf{A}\right)\end{gathered}\tag{11}$$

經過局域 U(1) 群的變換 [local U(1) transformation]

$$\begin{gathered}\phi(x)\to\phi(x)-i\Lambda(x)\phi(x),\\ \phi^*(x)\to\phi^*(x)+i\Lambda(x)\phi^*(x),\\ A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\frac{1}{e}\partial_\mu\Lambda(x)\end{gathered}\tag{12}$$

後不會改變，其作用量 (action)

$$S=\int d^3x\mathcal{L}\tag{13}$$

也不變。這意味著系統有 U(1) 規範對稱 [U(1) gauge symmetry]，也就是不受局域 U(1) 群變換的影響，而這個對稱性對於所有電磁場系統都成立。由於 U(1) 群是一個阿貝爾群

$$AB=BA,\quad\forall A,B\in\mathrm{U}(1)\tag{14}$$

我們將遵守 U(1) 規範對稱的電磁場稱爲一個阿貝爾規範場 (Abelian gauge field)。因此，前一段所介紹的「電荷-磁通量」配對可以看成是一個從阿貝爾規範場中生成阿貝爾任意子的例子。事實上，這樣的配對可以藉由引入阿貝爾的「陳-西蒙斯項」(Abelian Chern-Simons term)

$$\mathcal{L}_{CS}=-\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho\tag{15}$$

來產生，其中 κ 是一個常數，$\epsilon^{\mu\nu\rho}$ 則是列維-奇維塔符號 (Levi-Civita symbol)

$$\begin{gathered}\epsilon^{012}=\epsilon^{120}=\epsilon^{201}=1,\\ \epsilon^{102}=\epsilon^{021}=\epsilon^{210}=-1,\\ \text{Others}=0\end{gathered}\tag{16}$$

這個項會修改原本的高斯定律 (Gauss's law)，使電荷密度 ρ 與磁場有關

$$\rho=\nabla\cdot\mathbf{E}+\kappa B\tag{17}$$

當我們增加平面中任意一點的磁場時，該點的電荷密度會隨之改變，「電荷-磁通量」配對的阿貝爾任意子就這樣產生了。

我們同樣也可以從非阿貝爾規範場 (non-Abelian gauge field) 中生成非阿貝爾任意子。一個經典的非阿貝爾場例子是 SU(2) 的「楊-米爾斯理論」(Yang-Mills theory)。在這個場論中，物質場 $\boldsymbol{\phi}(x)$ 和規範場 $\mathbf{W}(x)$ 都帶有「電荷」g，並且都是存在於一個三維內在空間 (internal space) 裡的向量

$$\boldsymbol{\phi}=(\phi_1,\phi_2,\phi_3),\quad\mathbf{W}^\mu=(W_1^\mu,W_2^\mu,W_3^\mu)\tag{18}$$

它們共同組成的拉格朗日量

$$\begin{gathered}\mathcal{L}=\frac{1}{2}D_\mu\boldsymbol{\phi}\cdot D^\mu\boldsymbol{\phi}-\frac{1}{2}m^2\boldsymbol{\phi}\cdot\boldsymbol{\phi}-\frac{1}{4}\mathbf{W}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{W}^{\mu\nu},\\ D_\mu\boldsymbol{\phi}=\partial_\mu\boldsymbol{\phi}+g\mathbf{W}_\mu\times\boldsymbol{\phi},\\ \mathbf{W}_{\mu\nu}=\partial_\mu\mathbf{W}_\nu-\partial_\nu\mathbf{W}_\mu+g\mathbf{W}_\mu\times\mathbf{W}_\nu\end{gathered}\tag{19}$$

符合非阿貝爾的 SU(2) 規範對稱，也就是在局域 SU(2) [在這裡是 SO(3)，兩者等價] 群變換

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\phi}(x)\to\boldsymbol{\phi}(x)-\boldsymbol{\Lambda}(x)\times\boldsymbol{\phi}(x),\\ \mathbf{W}_\mu(x)\to\mathbf{W}_\mu(x)-\boldsymbol{\Lambda}(x)\times\mathbf{W}_\mu(x)+\frac{1}{g}\partial_\mu\boldsymbol{\Lambda}(x)\end{gathered}\tag{20}$$

下不變。我們可以利用非阿貝爾的陳-西蒙斯項 (non-Abelian Chern-Simons term)

$$\mathcal{L}_{CS}=-\frac{\kappa}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho}\left(A_\mu^a\partial_\nu A_\rho^a-\frac{1}{3}\epsilon_{abc}A_\mu^aA_\nu^bA_\rho^c\right)\tag{21}$$

將這個系統中一個帶有「電荷」的粒子與一個規範場的「渦漩」配對成準粒子。這樣的準粒子滿足非阿貝爾交換規則，因此是非阿貝爾任意子。

量子霍爾效應與任意子

在前一小節中，我們看到了以「電荷-磁通量」的配對來產生任意子的概念，而它最爲人所知的應用是在量子霍爾效應 (quantum Hall effect, QHE) 的理論中。我們在這裡對 QHE 以及其中的任意子做個簡單的介紹。

1879年，當時還在約翰・霍普金斯大學 (John Hopkins University) 讀博班的霍爾 (Edwin Hall) 在實驗中發現，假如對一個放在 x-y 平面上的金屬薄片通以 x 方向的電流 $I_x\hat{x}$ 並加上 z 方向的外加磁場 $B_z\hat{z}$，在 y 方向也會量到電位差 V_H [Fig. 4(a)]。這樣的現象被稱爲霍爾效應。我們可以用勞倫茲力 (Lorentz force)

$$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\tag{22}$$

來説明霍爾效應產生的原因。當加入外加磁場 $B_z\hat{z}$ 時，電子受到勞倫茲力的影響開始繞圈 (cyclotron motion)，並且因此逐漸被分散到金屬薄片的側邊。這些被沖到側邊的電子會產生 y 方向的電場 $E_y\hat{y}$。當系統達到平衡時，電場和磁場造成的勞倫茲力互相抵銷，我們將這時候 y 方向的飽和電位差定義爲 V_H。

在古典霍爾效應中，當磁場變大時，「霍爾電阻」R_H 以及「霍爾導電率」σ_H

$$R_H=\frac{V_H}{I_x},\quad\sigma_H=\frac{1}{R_H}\tag{23}$$

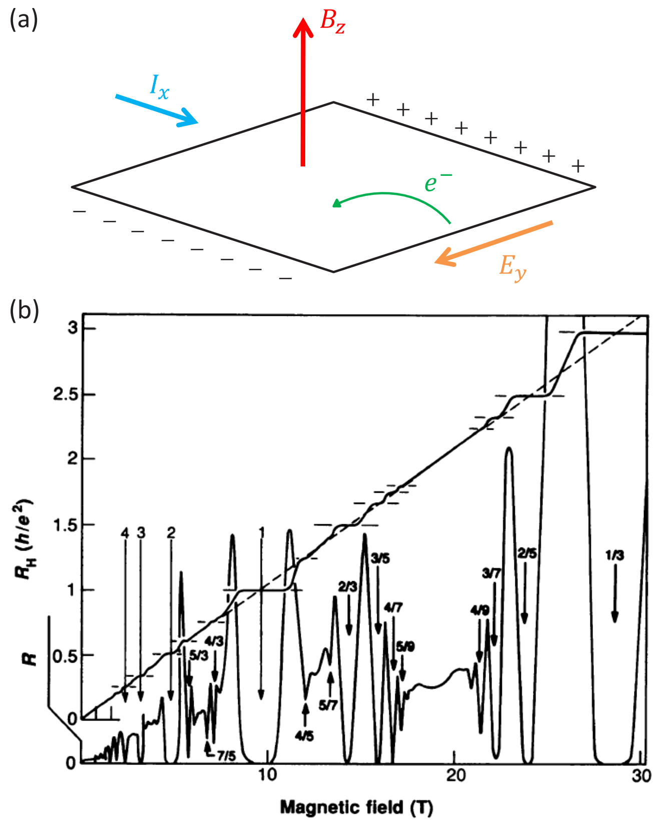

FIG. 4. (a) 霍爾效應示意圖。(b) 量子霍爾效應 [取自 J. P. Eisenstein and H. L. Stormer, Science **248**, 1510 (1990).]：隨著磁場的增加，霍爾電阻 R_H 的變化曲線在某些特定區段會有平台，對應的數字表示在該點的 ν 值。

應該是分別是嚴格遞增及遞減的。然而，馮・克立青 (Klaus von Klitzing) 在 1980 年發現，當兩塊異質半導體之間的 2DEG 處於低溫強磁場的環境下時，霍爾電阻 R_H 和霍爾導電率 σ_H 的變化會在一些特定區段停止 [Fig. 4(b)]

$$\sigma_H = \nu \frac{e^2}{h}, \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots \tag{24}$$

使其變化曲線產生平台。其中 e 是電子的電荷大小，而 $h = 2\pi\hbar$。由於平台出現時的霍爾導電率 σ_H 有整數量子化的特性，人們稱之爲整數量子霍爾效應 (integer quantum Hall effect, IQHE)。在這樣的系統中，電子受到外加磁場作用而進行的回旋運動被量子化，產生「朗道能階」(Landau level)。當電子處於第 n 個朗道能階時，繞行一圈會使其波函數經過 n 個週期 (可以用繩圈上的週期波來想像)，而每個朗道能階的簡併態 (degenerate state，能量相同的態) 數量是相同的

$$n_d = \frac{eB_z}{hc} \tag{25}$$

由於金屬薄片中的電子密度 ρ 不變，隨著磁場增大，每單位面積被填充的朗道能階數量—填充因子 (filling factor)

$$\nu = \frac{\rho}{n_d} \tag{26}$$

會越來越小。事實上，填充因子 ν 就是霍爾導電率 [Eq. (24)] 與 e^2/h 的比值。而在 IQHE 中，霍爾電阻和霍爾導電率變化曲線的平台是在填充因子 ν 爲整數時出現 [Fig. 4(b)]。

1982 年，崔琦、施特默 (Horst L. Stormer) 以及高薩德 (Arthur Gossard) 發現了「分數量子霍爾效應」(fractional quantum Hall effect, FQHE) — R_H 的曲線在一些 ν 是分數的地方也出現了平台。1983 年，勞夫林 (Robert B. Laughlin) 考慮了電子之間的強關聯效應而給出了一個多粒子的基態 (ground state) 波函數—勞夫林態 (Laughlin state) 來描述這樣的現象，文小剛則給出了一個形象化的解釋。在文小剛的描述中，我們可以想像電子們跳著一支大合舞，其中每一個舞步代表一個波函數的週期。這些電子在跳舞的過程中遵守著三個規則：

- 每個電子都各自以整數步走一圈 (也就是在朗道能階上)
- 每個電子都以奇數步環繞其他電子一圈 (因爲電子是費米子)
- 電子之間盡量保持最遠的距離

在這樣的嚴格規定下，電子的集合態 (collective state) 是十分穩定且不可壓縮的 (incompressible)，我們說這種有穩定集體內在模式的態是包含在拓樸相 (topological phase) 的範疇內。此外，由於這些態的表現是由電子們的集體行爲構成的，我們在研究它們的性質時不能單單只看局域的表現，必須同時考慮所有電子的運動。這樣的特性大大增加了理論與實驗上判斷相 (phase) 與相變 (phase transition) 的難度。文小剛在 1990 年前後提出了「拓樸序」(topological order) 的概念嘗試爲這些態的相做分類，這方面的研究在近年來成爲了凝態物理學界最火紅的研究課題之一。

雖然上面三條規定看似大大減少了舞步的種類，電子們仍然能夠跳出許多不同形式的大合舞，而這些不同的大合舞則可以分別對應到不同 ν 的情況。舉例來說，假如每個電子都在第一個朗道能階上，並且分別都以 m 步環繞另一個電子，那麼這個大合舞就是對應到 $\nu = 1/m$ 的勞夫林態。電子互相以不同步數繞行的組合態則可以對應到其他奇數分母的 ν。

勞夫林態的激發態可以藉由微幅改變外加磁場來得到，我們在這裡用一個簡單的例子說明。假如在 $\nu = 1/m$ 的勞夫林態上一個點增加一單位磁通量

$$\Phi_0 = \frac{hc}{e} \tag{27}$$

這個磁通量會在該點開出一個帶有電荷 e/m 的準電洞 (quasihole)。以文小剛的圖像來說，這相當於在電子的大合舞內插入一根非常細的柱子，而這根柱子會將電子們稍稍排開一些，因此形成準電洞。由於準電洞和磁通量是成對出現的，我們可以把這個「電荷-磁通量」的配對當成一個帶有分數電荷 (fractional charge) e/m 的準粒子。這樣的準粒子符合阿貝爾任意子的交換規則—兩個準粒子交換一次會使波函數產生一個複數的相位

$$e^{\pi/m} \tag{28}$$

因此被認爲是一種阿貝爾任意子，而這類 FQH 態則被稱爲阿貝爾 FQH 態 (Abelian FQH state)。此外，物理學家們也從「電荷-磁通量」配對激發態的出現聯想到阿貝爾的陳-西蒙斯理論，進而以之爲阿貝爾 FQH 態的低能量有效場論 (low-energy effective field theory) 做了許多研究，使 FQHE 的理論發展得更加精彩。1997 年，阿貝爾 FQH 態中的分數電荷在實驗中被證實存在。這個發現不但讓勞夫林、崔琦以及施特默獲得了 1998 年的諾貝爾物理學獎，也使阿貝爾任意子在阿貝爾 FQH 態中的存在得到了更有力的支持。值得一提的是，這是第一次發現夸克以外帶有分數電荷的新奇粒子。像這樣以集合態生成新奇粒子的探討也是凝態物理中近年來十分流行的研究方向。

由於電子是費米子，FQHE 中霍爾電阻 R_H 和霍爾導電率 σ_H 變化曲線的平台通常都是在 ν 的分母爲奇數時出現。然而，ν 的分母爲偶數的平台其實也已經在實驗中被發現，例如 $\nu = 5/2$ 的平台。這類 FQH 態的理論同樣也給出了電荷與渦旋配對而成的準粒子，不過這裡的準粒子遵守的是非阿貝爾任意子的交換規則。因此，非阿貝爾任意子在這類非阿貝爾 FQH 態中找到了實現的可能，而非阿貝爾的陳-西蒙斯理論也在這方面的理論研究上受到了重用。近幾年來，實驗學家們透過不同的方法驗證了一些非阿貝爾任意子理論在非阿貝爾 FQH 態上預測的現象，使其可信度得到進一步的提升。

在非阿貝爾 FQH 態中，量子態是十分穩定的集合態，不太會受到局域微小變化的影響。此外，其激發態候選—非阿貝爾任意子的交換有前後順序的差別，可以讓我們藉由操作交換順序來控制得到的結果。由於這些特性，有些物理學家認爲非阿貝爾 FQH 態是很有機會實現拓樸量子計算 (topological quantum computation) 的系統，並對此做了不少研究。目前在這方面比較常受到討論的是 $\nu = 12/5$ 的非阿貝爾 FQH 態—只包含眞空 1 和費波那契任意子 (Fibonacci anyon) σ 兩種粒子的非阿貝爾任意子系統。這樣的系統被認爲有機會實現量子比特 (qubit) 的 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 結構，因此受到了不少人的關注。

結語

自 1980 年前後任意子的概念被提出以來，由於其在 FQHE 理論中的重要地位，人們對它的研究在這三十多年間不曾間斷。除了物理性質方面的探討，部分物理學家也將非阿貝爾任意子視爲實現量子資訊的希望，並在這方面做了許多嘗試。此外，也有研究者將強關聯電子系統 (strongly correlated electronic system) 中電子交互作用的理論推廣到任意子的系統，建立了可以透過共形場論 (conformal field theory, CFT) 與強關聯電子系統模型相互對應的理論，大大擴展了強關聯領域的發展可能。相信未來對於任意子的研究一定能讓我們對大自然的了解有更長足的進步。

[1] F. Wilczek, in *The Spin: Poincaré Seminar 2007*, edited by B. Duplantier, J.-M. Raimond and V. Rivasseau (Birkhäuser Verlag AG, Basel, Switzerland, 2009) Chap. 2, pp. 61-70.

[2] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996).

[3] P. Phillips, *Advanced Solid State Physics*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2012).

[4] J. P. Eisenstein and H. L. Stormer, Science **248**, 1510 (1990).

[5] X.-G. Wen, "An Introduction of Topological Orders", preprint, MIT.

[6] X. Wan, Z.-H. Wang, and K. Yang, Physics, 2013, **42**, 558.

[7] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2013).

[8] 中文標題：〈任意子—二維平面中的奇特粒子〉