

基本粒子的Quark Model

黃耀樞

前言

原子光譜可以說得是很老的一門科學。基本粒子大概是物理方面比較新的學問，這兩門學問基本上有很大的不同。但他們的發展也有共同之點。光譜發展得早的原因有很多，其中一點是因為原子裏邊的力場主要的是電磁反應，這種現象在我們日常生活中是體驗得到的。關於原子裏面的原理我們已經知道了不少，只須加上量子的觀念理論方面就解決了。基本粒子因為體積太小。他們裏面邊的力場大概是我們日常生活中體驗不到的，我們因為身體大所能體驗到的力場是長距離的，短距離的力場一定要很小的東西才能身歷其境。我們對這些短距離的力場只好根據一點實驗來猜一猜，這就是基本粒子理論方面的困難。

我們要問基本粒子有那一方面和我們日常的生活有關聯，想來想去大概只有對稱 (Symmetry) 或由對稱演算出來的群論，對稱是無分大小的。在原子光譜裏力學方面走先了一步群論的應用是後來補的。基本粒子因為力場的認識有了困難，對稱的應用就走先了一步，近十年來 SU-3 群對基本粒子有相當成功的應用 Quark model 可以說是 SU-3 的代表在這篇文章裏我們要看看 Quark model 和原子光譜相同之處，這相同之處是指對稱而言。

Bohr 對氫的原理發表已後原子光譜的發展可以說是一日千里。這個時期比較有興趣的是 1925 年 Goudsmit 提出電子有自轉 Spin。有了自轉的觀念原子光譜就和化學方面的周期表連上了關係，Spin 的應用很廣，我們要着重一點的是 1927 年提出的 Hund's 理論，Hund's 理論說：“在原子袒低能量的 State 是屬於極大 Spin angular 和 orbital angular momentum 的。這個理論的基礎是在電子與電子間的相距力所產生的 exchange interaction Exchange interaction 是量子力學的新觀念，這個觀念在日常生活中不易體驗得到，但是可以通過群論來表示，極大 Spin 只不過是 Spin

Wave function 完全對稱或 orbital Wave function 完全反對稱而已。

談起群論和原子光譜關係使我們想起 1928 年 Dirac 和 Weyl 的論戰。Dirac 說他可以不用群論來討論 exchange interaction 但 Weyl 指出 Dirac 實際用上了群論只不過是沒有用群論這個名詞。Dirac 指出他的本意是我們可以在沒有學過群論而了解 exchange interaction Dirac 當然是對的，在這篇文章裏我們也試試在沒有群論基礎下去了解 Quark's model。

基本粒子

我們第一個問題就是什麼叫基本粒子，原子可以說是化學上的基本粒子，但他並不定完完全全的基本，因為我們現在知道原子是電子和核子做成的，在我們不知道電子是什麼物質做成的之前我們就叫電子為基本粒子，核子是由介子，中子和質子構成，所以不算基本。凡是一種粒子，假如我們不知道他是什麼東西構成我們就叫他做基本粒子，近日科學發展得很快，基本粒子越來越多，大概可分為四大類。Photons, Leptons, Mesons 和 Baryons。在這篇文章裏我們只要談談 Baryon。現在已知的 Baryon 的一部份如下：

電荷	能	量	自轉
+2 +1 0 -1	Mev		Spin
P ⁺ N ⁰	939		1/2
Λ ⁰	1115		1/2
Σ ⁺ Σ ⁰ Σ ⁻	1193		1/2
Ξ ⁰ Ξ ⁻	1318		1/2
Δ ⁺ Δ ⁰ Δ ⁻	1238		3/2
Σ ⁺ Σ ⁰ Σ ⁻	1385		3/2
Ξ ⁰ Ξ ⁻	1530		3/2
Ω ⁻	1676		3/2

除了上表所列的 Baryons 還有一些未曾列入。另外有一種 Baryon 叫 resonance 其實 resonance 和粒子並沒有什麼基本的分別，只不過是 resonance 的生命很短很短而已。我們還有很多很多高能量的 Baryons 未經發現原因是我們的機器能量不大的關係，我們可以說上面表列的 Baryon 是低能量的 Baryon。

Quark Model

Quark model 是用來代表 SU-3 群的，他的起源是 Sakata model Sakata 提出中子，質子和幾粒子為基本粒子，這三個基本質子隱含 SU-3 中的三 degree of freedom。後來 Gell-mann 將之改良為三種基本粒子叫 Quark，這就是 Quark model 的來源 Gell-mann 假設宇宙中有三種 Quark 叫中子 Quark，質子 Quark 和 Ω Quark 這三種 Quark 都有自轉，其 spin 假定為 1/2。我們要注意有了 spin 1/2 的假定我們就要接受 Pauli exclusion principle 和有反基本粒子的存在。另外一個假設為三種 Quark 的能量或質量都是差不多。Quark 與 Quark 的力場是大致和那一種 Quark 無關的這個假設注入了 SU-3 群的觀念，若果 Quark 之間的力場絕對與那一種 Quark 無關則一個基本質子由三個中子 Quark 組成就會和三個質子 Quark 組成的基本粒一樣，換句話說我們在三個中子 Quark 組成的基本粒子裡將其中的一或多粒的中子改為 Ω Quark 或質子 Quark 時這個基本質子將會不變。這個可以在三種不同的 Quark 中自由轉換的自由就是 SU-3 群，若有四種不同的 Quark 我們就會有 SU-4 群 SU-3 群只不過是將其中一個 operator 除去以達到 semi-simple group 而已。這個代數方面的問題我們現在不討論。

除了上述的假定 Gell-mann 還有其他的假定，我們把他寫在下面的圖表裡。

Quark	I	I ₃	S	B	Y	Q	J
a = N	1/2	-1/2	0	1/3	1/3	-1/3	1/2
b = P	1/2	1/2	0	1/3	1/3	2/3	1/2
c = Λ	0	0	1	1/3	-2/3	-1/3	1/2

I 和 I₃ 是 isotope spin 和他在 - 軸上的投影 Y 為 hyper charge hyper charge 即是同質量之基本粒子的平均電荷的二倍，例如中子和質子有同等質量他們的平均電荷為 $(0+1)/2 = 1/2$ ，二倍此值即為一。我們可以說中子和質子的 hypercharge 是一。B 為 Baryon number 這觀念和我們在化學中的原子數 A 完全相同， $S = B - Y$ 。Q 為 Quark 的電荷，J 為自轉或 spin。

Quark model 中介子是由一種 Quark 和一粒反 Quark 所組成，Baryon 是由三粒 Quark 組成。這個假設加上了 SU-3 群的應用外新基本粒子的測定和質量方程式有重大的成功。

Coupling of Quark

原子光譜原理中重要的一部分是 angular momentum 的 Coupling 這 Coupling 可以用群論來推算，也可以根據 Dirac 的方法不須要光學群論，我們現在根據 Condon and Shartley 的不光學群論的方法。Condon and Shartley 的方法很簡單，他先將 wave function 根據 M_L 和 M_S 來分類分好以後利用 L 為 M_L 的極大值。我們現在要利用這個方法來推算 Quark 的 Coupling。

基本粒子的實驗知識知道的並不多，這是因為我們現在還沒有大能量的機器，在沒有大能量機器之前我們所知道的只不過是低能量的粒子已矣，在原子光譜裡 Hunds rule 指出了低能量的原子 state。在低能量的科學中如低溫磁性，化學作用有了很大的應用，如果 Hund's rule 也在基本粒子中充上的場我們就有對低能基本粒子的基本認識，換句話說我們要的為什麼低能量的粒子是上表中的那幾個？我們是否能在 Hunds rule 中找到答案？

Hund's rule 說 spin 極大為最低能量，spin 極大只不過是 spin 的 wave function 完全對稱而已。在基本粒子裡我們有兩種 spin，一是自轉另一是 isotope spin。我們如要應用 Hund's rule 我們就應當說低能量的基本粒子的 spin 和 isospin 的 wave function 是對稱的。spin 和 iso spin 加起來有些時候叫 super-spin 所有對稱的 super spin wave-functions 可以分類地列入下表。

$\begin{smallmatrix} S_0 \\ I_0 \end{smallmatrix}$	3/2	1/2	-1/2	-3/2
3/2	$(b^+ b^+ b^+)$	$(b^+ b^+ b^-)$	$(b^+ b^- b^-)$	$(b^- b^- b^-)$
1	$(b^+ b^+ c^+)$	$(b^+ b^+ c^-)(b^+ b^- c^+)$	$(b^- b^- c^+)(b^- b^+ c^-)$	$(b^- b^- c^-)$
1/2	$(b^+ c^+ c^+)(b^+ b^+ a^+)$	$(b^+ c^+ c^-)(b^- c^+ c^-)$ $(b^+ b^+ a^-)(b^+ b^- a^+)$	$(b^- c^- c^+)(b^+ c^- c^+)$ $(b^- b^- a^+)(b^- b^+ a^-)$	$(b^- c^- c^-)(b^- b^- a^-)$
0	$(b^+ a^+ c^+)(c^+ c^+ c^+)$	$(b^+ a^+ c^-)(b^+ a^- c^+)$ $(c^+ c^+ c^-)(b^- a^+ c^+)$	$(b^- a^- c^+)(b^- a^+ c^-)$ $(c^- c^- c^+)(b^+ a^- c^-)$	$(b^- a^- c^-)$ $(c^- c^- c^-)$
-1/2	$(a^+ c^+ c^+)(b^+ a^+ a^+)$	$(a^+ c^+ c^-)(a^- c^+ c^+)$ $(b^+ a^+ a^-)(b^- a^+ a^+)$	$(a^- c^- c^+)(a^+ c^- c^-)$ $(b^- a^- a^+)(b^+ a^- a^-)$	$(a^- c^- c^-)(b^- a^- a^-)$
-1	$(a^+ a^+ c^+)$	$(a^+ a^- c^+)(a^+ a^+ c^-)$	$(a^- a^+ c^-)(a^- a^- c^+)$	$(a^- a^- c^-)$
-3/2	$(a^+ a^+ a^+)$	$(a^+ a^+ a^-)$	$(a^- a^- a^+)$	$(a^- a^- a^-)$

在這表裡 b^+ 代表質子 Quark 有 $+1/2 S_0$ spin，括號代表完全對稱的 wave function $(a^+ b^+ c^+)$ 代表有一個中子 Quark，一個質子 Quark 和一個 Ω Quark 三個 Quark 都是 $+1/2$ spin，因此全部 S_0 是 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 。中子 Quark I_0 為 $-1/2$ ，質子 Quark 為 $+1/2$ Ω Quark 為 0 ，全部 $I_0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 0$ ，所以 $(a^+ b^+ c^+)$ 就放在 $I_0 = 0$ 和 $S_0 = 3/2$ 白方格裡，上表裡一共有 56 wave functions 假如 Hund's rule 在基本粒子中也是有效用，我就有 56 種不同的低能量 Baryons，實驗的結果是 spin = 3/2 有十種，spin = 1/2 有八種

，共為：

$$(2 \frac{3}{2} + 1) \times 10 + (2 \frac{1}{2} + 1) 8 = 56$$

這個數字剛好相符。

上表有了 wave functions，我們要對 wave function 有進一步的認識， $(b^+ b^+ b^+)$ wave function I_0 為 3/2， S_0 亦為 3/2，兩個數值都可以算是極大。 I 和 S 一定是 3/2。 $(b^+ b^+ b^+)$ 是相當於 spin 3/2 的基本粒子，質子 Quark 的電荷為 2/3，三種質子 Quark 的電荷就是正二，我們可以說這是 $S=3/2$ Δ^{++} 基本粒子的 wave function，根據 Condon and Shartley 的方法，所有的基本質子的 wave function 表列如下：

Baryon	wave function	Baryon	wave function
$\Delta^{++} S=3/2 S_0=3/2$	$(b^+ b^+ b^+)$	$\Delta^- S=3/2 S_0=3/2$	$(a^+ a^+ a^+)$
$\Sigma^+ 3/2 3/2$	$(b^+ b^+ c^+)$	$\Sigma^+ 1/2 1/2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}(b^+ b^+ c^-) - \sqrt{\frac{2}{3}}(b^+ b^- c^+)$
$\Delta^+ 3/2 3/2$	$(b^+ b^+ a^+)$	$\Xi^0 1/2 1/2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}(b^- b^+ c^+) - \sqrt{\frac{2}{3}}(b^+ c^+ c^-)$
$\Xi^0 3/2 3/2$	$(b^+ c^+ c^+)$	$P^+ 1/2 1/2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}(b^+ b^+ a^-) - \sqrt{\frac{2}{3}}(b^+ b^- a^+)$
$\Sigma^0 3/2 3/2$	$(b^+ a^+ c^+)$	$\Omega^0 1/2 1/2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}(b^- a^+ c^+) - \sqrt{\frac{2}{3}}(b^+ a^- c^+)$
$\Omega 3/2 3/2$	$(c^+ c^+ c^+)$	$\Sigma^0 1/2 1/2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}(b^+ a^+ c^-) - \sqrt{\frac{1}{6}}(b^- a^+ c^+)$ $-\sqrt{\frac{1}{6}}(b^+ a^- c^+)$
$\Delta^0 3/2 3/2$	$(a^+ a^+ a^+)$	$N^0 1/2 1/2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}(b^- a^+ a^+) - \sqrt{\frac{1}{3}}(b^+ a^+ a^-)$
$\Xi^- 3/2 3/2$	$(a^+ c^+ c^+)$	$\Xi^- 1/2 1/2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}(a^- c^+ c^+) - \sqrt{\frac{1}{3}}(a^+ c^+ c^-)$
$\Sigma^- 3/2 3/2$	$(a^+ a^+ c^+)$	$\Sigma^- 1/2 1/2$	$\sqrt{\frac{2}{3}}(a^+ a^+ c^-) - \sqrt{\frac{1}{3}}(a^+ a^- c^+)$

有了基本粒子的 wavefunction 我們就想進一步看看有什麼實驗上的證明或支持。最好的實驗莫如 Zeeman effect。要在磁方面進行計算我們必須有 Quark 的質量。

Quark 的質量

我們要進行基本粒子的質量的推算而又不明白其中的物理時我們只能做到 Parametrized Hamiltonia。第一步要寫下基本粒子的量子，我們知道 isospin I 和 I_3 , hyper charge Q 都是很精確的量子。 I_3 是不可以單獨在 Hamiltonia 中出現的因為他是向量的 Component，而能量是 scalar，Parametrized Hamiltonia 一定是

$$H = a + M_0 G + M_1 Y + M_2 Y^2 + M_3 \Pi^2 + \dots$$

因為 Quark 的 isospin 是 $1/2$ 和 0 我們的 Hamiltonia 不可能有 Π^2 , $n > 2$ 出現的。沒有什麼理由 Y 不可能高於二次方我們只是一個假設 Y 不可有高於二次方而已矣。 G 為 SU-3 的 Casimirs operator 設和 Π^2 是 SU-2 的 Casimirs operator 一樣， G 的定義為 $G = g^{ij} X_i X_j$

X_i, X_j 是 SU-3 的 generators 而 $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$ ， g_{ij} 是 SU-3 的 metric tensor。 a 只是一個常數。

上面的 Operator 都是和 H Commute 的，但他們不全是 SU-3 的 Tensor operator (Tensor operator 是和 irreducible representation 有同樣的 transformation properties) 如我們將第三、四 term 改寫為：

$$H = a + M_0 G + M_1 Y + M_2 \left(\Pi^2 - \frac{1}{4} Y^2 \right) + M_3 \left(\frac{1}{3} \Pi^2 + \frac{3}{4} Y^2 \right)$$

則所有的 term 為 tensor operator。我們用上式和實驗比較可得到下列的數字。

$$a = 1098 \text{ MeV}, M_0 = 74.8 \text{ MeV}, M_1 = -189.4 \text{ MeV}, M_2 = 41.4 \text{ MeV}, M_3 = 0$$

這裡有二點我們應注意， $\Pi^2 - 1/4 Y^2$ 是 Gell-man-Okubo mass equation, $M_3 = 0$ 一定有些物理上的意義。Gell-man Okubo mass equation 有些時候寫成。

$$M_n + M_p = \frac{3}{2} M_\Omega + \frac{1}{2} M_\Sigma$$

我們上列的 Parameter 有一個很奇怪的 equation

$$8M_0 + 6M_1 + 13M_2 = 0$$

在我們沒有計算 magnetic moment 以前我們應對這二點有解釋之必要。

如果我們用 Quark model Hamiltonia 可以寫成。

$$H = \frac{a}{3} (a_s^+ a_s + a_b^+ a_b + a_c^+ a_c) + M^1 a_s^+ a_s + A (a_s^+ a_s^+ a_s a_s + a_b^+ a_b^+ a_b a_b + 2a_s^+ a_s^+ a_s a_b) + 2B (a_s^+ a_s^+ a_s a_c + a_b^+ a_b^+ a_b a_c) + C (a_s^+ a_s^+ a_s a_c)$$

算一 term 表出 a Quark 和 b Quark 的重量， $M^1 a_s^+ a_s$ 表出 C Quark 是比較重一點的。算三四五 term 是 two body interaction, a Quark 和 b Quark 的 interaction 是一樣的因為高能量的 interaction 與 Charge 無關。

這兩 Hamiltonia 是不一定相同的，如果要他們相同我們一定要 $8M_0 + 6M_1 + 13M_2 = 0$

換句話說，上列方程式是兩 Hamiltonia 相等的必要條件。我們現在只是 Parametrized Quark 的 interaction，如果我們相信 a Quark 和 C quark 的 interaction 是兩個 a Quark 和兩個 C quark 的 interaction 的平均值。

$$a \leftrightarrow c = \frac{1}{2} [a \leftrightarrow a + c \leftrightarrow c] \text{ 或 } B = \frac{A+C}{2}$$

則算一個 Hamiltonia 的 M_3 是零。

Magnetic Moment

我們有了 mass (Hamiltonia 的前二項) 就可計算 magnetic moment，因為 Baraon 的能量是 Classical mode (質子量用 $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ 的) 我們可以用。Bohr's model 推算的結果是

實驗數據只有四個基本粒子的 magnetic moment 是知道的，他們都和理論的計算相近。

討論

這個 Quark model 是用上了 Hund's rule 和 two body interaction 不但解決了 $M_3 = 0$ 還找出了一個新的 mass equation，他的弱點有很多，最重要的是直至現在還找不到 Quark，可能根本沒有 Quark 這東西 Hund's rule 只指出低能量的 term, excited Quark 和 Resonance 是 Hund's rule 所得不到的。

	μ_{cal_0}		μ_{cal_1}	μ_{exp}
a	$-\frac{1}{2}\mu_b = -.86$	$\Sigma^- 3/2$	$-\mu_b + \mu_s = 2.31$	
b	$\mu_b = 1.71$	$\Delta^- 3/2$	$-\frac{3}{2}\mu_b = 2.51$	2.5
c	$\mu_s = .60$	$\Sigma^+ 1/2$	$\frac{4}{3}\mu_b - \frac{1}{3}\mu_s = 2.48$	
$\Delta^+ 3/2$	$3\mu_b = 5.13$	$\Xi^- 1/2$	$-\frac{1}{3}\mu_b + \frac{4}{3}\mu_s = 1.37$	2.79
$\Sigma^+ 3/2$	$2\mu_b + \mu_s = 2.84$	$P^+ 1/2$	$\frac{3}{2}\mu_b = 2.57$	-7
$\Lambda^+ 3/2$	$\frac{3}{2}\mu_b = 2.57$	$\Omega^0 1/2$	$\mu_s = .60$	
$\Xi^0 3/2$	$\mu_b + 2\mu_s = 0.51$	$\Sigma^0 1/2$	$\frac{1}{3}\mu_b - \frac{1}{3}\mu_s = .77$	-1.91
$\Sigma^0 3/2$	$\frac{1}{2}\mu_b + \mu_s = .26$	$N^0 1/2$	$-\mu_b = 1.71$	
$\Omega^- 3/2$	$3\mu_s = 1.80$	$\Xi^- 1/2$	$\frac{1}{6}\mu_b + \frac{4}{3}\mu_s = .51$	
$\Delta^0 3/2$	0	$\Sigma^- 1/2$	$-\frac{2}{3}\mu_s - \frac{1}{3}\mu_s = .94$	
$\Xi^- 3/2$	$-\frac{1}{2}\mu_b + 2\mu_s = 2.60$			