遐思集

·海波·

物質結構的更深一層

這又是一篇「胡思亂想集」，乃是將課餘的一些靈感稍加整理而成，因爲對於 elementary particle physics 我仍是個門外漢，故若有什麼地方蓋錯了，盼同學們多多包涵。

當我們第一次獲知在原子核的電場中一個高能量的 γ-ray 可以變成一對正負電子＊，以及一對正負電子可以互相消滅成兩個 γ-ray 時，我們多少感到驚奇，覺得電子與光子雖像是極不相同的東西，但某些「本質」却是相同的，也許是同一種「東西」的兩種不同的 state。

並且，再看看基本粒子的世界裏，已知的基本粒子已有上百種，但幾乎所有的 elementary particle 都是不穩定的，很快就會 decay 成爲其它粒子（壽命有 10^{-23} 秒、10^{-16} 秒、10^{-10} 秒、10^{-8} 秒等等。）最終穩定的只有質子，電子，微中子與光子。但也不能說它們就是最 “fundamental” 的，在基本粒子的世界裏，好像誰也不比誰更 “fundamental”。看到這些現象，又令人覺得，也許 elementary particles，誰也不是 “fundamental”，而最 “fundamental” 的是某種 “field”，以及這 “field” 的一些基本性質，而 particles 是此 “field” 中的 “disturbances”。或曰這 “field” 中之 “Wave”，而這些 disturbances 須滿足某些 Quantization rules，因此就形成各種不同的 particles（即各種不同的 Quantum states），但只有幾種 disturbance states 是很好的 “standing wave” 或 “ground state” 是極穩定的狀態，其它的 states 則因不滿足某些條件，因此很快就會崩潰，而衰變成其它穩定的狀態。

以下胡亂地做了一番猜測，試圖將上述的假想再向前推進幾步。

先猜度這 “field” 可能具有的一些基本性質：首先，由於光速 c 是世界上的一個基本常數，因此假定在此種假想的 “field” 中的 disturbance，恒以此速率傳播，此即我們所熟知的光子、微中子等的速度，它們是此 “field” 中之 travelling waves，但我們如何解說一般具有 rest mass 的 elementary particle 呢？（它們並不以光速傳播），我們假設它們是此 “field” 中之 “standing waves” 雖然它靜止不動，但其實，也許它們的內部還是有以光速作 oscillation 而形成的 standing wave，也許是因爲這 “field” 的 disturbance 不止一種，而某兩種 disturbances 會互相 couple 起來（譬如一個爲左旋態一個是右旋態……）使得原來會以光速傳播到遠處的 disturbance，只能在某一個微小區域內以光速做 oscillation，被限制在該小範圍形成 “standing wave” 這就是平常的一個靜止的 elementary particle。其次，對 mass 做一個粗略的討論：在這 “field” 中，一旦有 disturbance 發生則由於 “field” 的某些性質，該 disturbance 卽具有 effective mass $m=\frac{E}{c^2}=\frac{h\nu}{c^2}$，對於一個像光子的 travelling wave 而言，這當然不是 rest mass，但對於一個靜止的 elementary particle 而言，因爲它是一個被 confine 在一小區域中做 internal motion 的 disturbance ，此 disturbance 的 energy E 卽成爲此 pavticle 的 internal energy。而該 disturbance 之effective mass $m=\frac{E}{c^2}$卽成爲該 particle 的 rest mass.。

這 "field" 應該還有其它的種種基本性質如 space homogeneous，space isotropic, time homogenous,……等等，如果我們能將 "field" 的某些未知的基本原理找出來，或許就可解決 particle physics 中的許多問題諸如 particle 之質譜，特性， interaction 及 decay 等等，這些未知的基本原理可能就是某種 "field" equation，等等。

利用以上的粗略之想法，設法對 elementary particle 的一些 intrinsic properties 做一些推測：首先，試想一個直覺的觀念： elementary particle 究竟有多少大小，關於這方面我們較熟悉的是：原子核以及核中的質子，似乎都有其大小約爲 10^{-13}cm，但我們就很多聽說過「一個電子有多"大"」等問題。根據前面的想法，一個具有 rest mass 的靜止的 elementary particle 乃是兩個被 confine 在一個微小區域中做 oscillation 的 disturbances 所形成的，因此這個"區域"似乎與該 particle 之"大小"有關，現在嘗試估計這個"大小"應該有多大，照理說，我們得先知道那兩個 disturbance 互相的 "coupling" 是如何形成的， oscillation 的情況又如何……等等，才能計算這個"大小"，而我們却毫無所知，只得猜一個初步的 Approximation：假設這 Coupling 的結果，對於其中的任一個 disturbance 而言， effectively，就好像形成一個 potential well 一般，並假設此 well 爲 infinite square well 質量爲 m 的 elementary particle，爲在此 infinite square well 中以光速作 oscillation 之 "field disturbance"，其 $E=h\nu=mc^2$

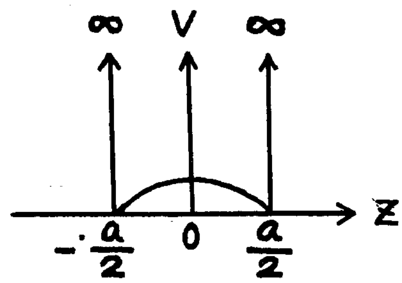
$$P=\frac{E}{c}=\frac{h\nu}{c}=mc$$

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{c}{\frac{mc^2}{h}}=\frac{h}{mc}$$

而在 infinite square well 中，此 state 須滿足

$$a=\frac{\lambda}{2}$$

卽 $$a=\frac{h}{2mc}$$



$$\psi(z)=C\cos\left(\frac{\pi}{a}z\right)$$

圖 一

此結果顯示，一個 elementary particle 之大小與它的質量成反比，而正是該 particle 之 Compton wavelength，導到這個結果，意外地發現似乎有以下的幾個「證據」：

1. 質子在原子核中所顯示的大小爲 $\simeq1.2\times10^{-13}$cm，它的 repulsive core 半徑$\simeq0.5\times10^{-13}$cm，而 $\frac{h}{m_pc}=1.32\times10^{-13}$cm。
2. 據說許多 elementary particles 的 scattering 實驗顯示，其有效大小約爲$\frac{\hbar}{mc}$。
3. 電子的$\frac{h}{m_ec}=2.43\times10^{-10}$cm，$\frac{\hbar}{m_ec}$爲氫原子 Bohr radius 的 $\frac{1}{137}$（$\frac{1}{137}$ 爲原子能階之 fine structure constant)，氫原子能階有一修正項 (Darwin term)$\sim\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\nabla^2V$。
4. Dirac Equation 解一個 free electron 的運動，得到一個不受任何外來作用的電子會有 "Zitterbewegung" 卽是它會在$\frac{\hbar}{m_ec}$大小的範圍內以光速作 oscillation。

其次，試圖對 elementary particle 之 spin 做進一步的探討，先看一個光子，光子具有 spin 1，當它在空間中運動時，它是螺旋推進的(Spin angular momentum 與運動方向平行)，若我們面對着它的運

動方向 (z) 觀察，將發現它的電磁場在旋轉，如圖 2 是一個右旋光，而旋轉的 angular frequency

$$\omega=\frac{E}{\hbar} \quad (E=h\nu \text{ 為 photon 之 Energy})$$

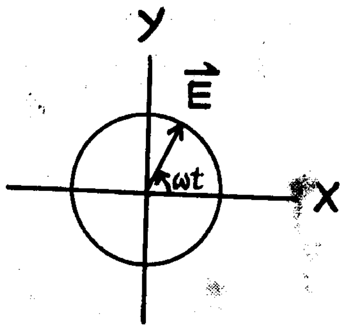


圖　二

照前面的說法，一個具有 rest mass 的 elementary particle，乃是兩個像這光子的 "field" 的 "disturbance" 被 confine 起來而成的，故當我們觀察此 particle 之內部時將可看見類似圖 2 之旋轉轉速為

$$\omega=\frac{E}{\hbar}=\frac{mc^2}{\hbar}$$

並且或許這兩個互相 couple 起來的東西，一個是右旋，一個是左旋，而運動方向相反，故其 spin angular momentum 為同向，即表現為該 elementary particle 之 Spin angular momentum，但依此想法 particle 的 spin angular momentum 會有多大呢？我們再來做個估計：前面導出在 z 方向 particle 的大小是 $\frac{h}{2mc}$ 今再假設 particle 為 spherical symmetric 其半徑為 $\frac{h}{4mc}$。

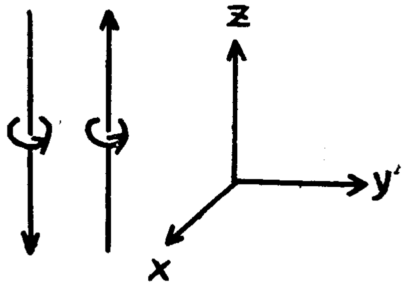


圖　三

但小到一個 elementary particle，我們不知如何說它的 "mass distribution" 但姑且做些假設：若設 mass 為 uniformly distributed 在以半徑為 $R=\frac{\hbar}{mc}$ 之球體內部，則依 classical 觀念（可能很不保險）。

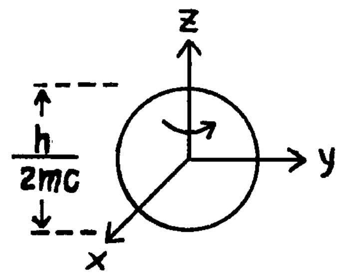


圖　四

$$I=\frac{2}{5}mR^2=\frac{2}{5}m\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2$$

$$L=I\omega=\frac{2}{5}m\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2\frac{mc^2}{\hbar}$$

$$=\frac{2}{5}\hbar$$

若設圖 1 之 wave function $\psi(z)=c\cos\left(\frac{mc}{\hbar}z\right)$

且假定 spherically symmetric $\psi(r)=c\cos\left(\frac{mc}{\hbar}r\right)$。

$$\rho(r)\propto|\psi(r)|^2=|c|^2\cos^2\left(\frac{mc}{\hbar}r\right)$$

$$I=\int_0^{\frac{h}{4mc}}\int_0^{\pi}\rho(r)(r\sin\theta)^2(2\pi r\sin\theta\, r d\theta\, dr)$$

似可得 $I=0.53m\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2$

而 $L=I\omega=0.53\hbar$

做了那麼多不保險的假設，所得之結果大概不可能會有太多的意義，不過，以 $R=\frac{\hbar}{mc}$ 為 elementary particle 之半徑，以 $\omega=\frac{mc^2}{\hbar}$ 所得之 spin angular momentum L，至少 order 大概都會對，都是 $\hbar$ 的大小。並且此結果指出 elementary particles 之 spin angular momentum 之大小是 independent of particle 的大小與 mass 等等，上至 proton 下至 electron，雖然質量懸殊甚大，但其 spin 都是 $\frac{1}{2}\hbar$ 或

0 或 $\hbar$。

與 spin 相類似的是 magnetic moment, classically，我們知道，一個帶電球體，一點旋轉就會有 magnetic moment，若給了我們轉速與 charge distribution 即可計算其 magnetic moment，但小至一個 elementary penticle，只具有一自然單位之電荷，我們不知如何說它的 "charge distribution"，但姑且猜度一下，假定 "charge distribution" 之有效半徑爲 $\frac{\hbar}{mc}$ 如圖 5 有 charge e 在半徑 $\frac{\hbar}{mc}$ 之環上轉動 $\omega=\frac{mc^2}{\hbar}$

此環形成一 current loop 電流大小爲

$$i=e\nu=e\cdot\left(\frac{mc^2}{h}\right) \qquad \left(\nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{mc^2}{h}\right)$$

而 loop 所圈之面積

$$A=\pi\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2$$

故其 magnetic moment

$$\mu=\frac{1}{c}IA$$

$$=\frac{e\hbar}{2mc}$$

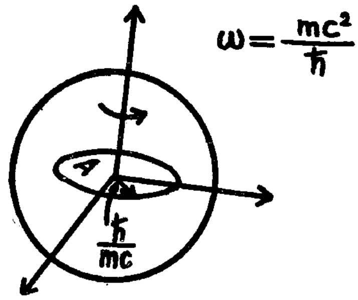


圖　五

對電子而言 $\frac{e\hbar}{2m_ec}$ 正是其 magnetic moment（湊得正確答案）對質子而言 $\frac{\hbar}{2m_pc}$ 只對了 order。

附帶有一結果即：若是一個 electron 之半徑爲 $\frac{\hbar}{m_ec}$，其電荷分佈在這樣大小的區域內，若會產生 self-energy，則此 energy 之大小爲：

$$\delta E\approx\frac{e^2}{R_e}=\frac{e^2}{\left(\frac{\hbar}{m_ec}\right)}=\frac{e^2}{\hbar c}(m_ec^2)=\frac{1}{137}(m_ec^2)\text{。}$$

（上接70頁）

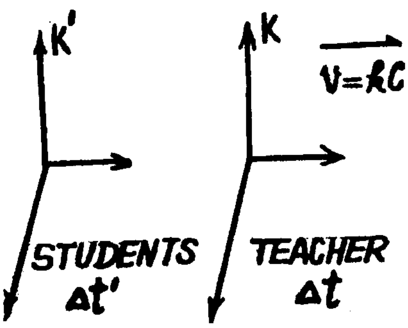


圖　　三

且 $\Delta t'=\frac{\Delta t}{\sqrt{1-k^2}}$　　(9)

當教授覺得過一小時，要送回信號時，此時學生的錶依式 (9) 已經過了$1/\sqrt{1-k^2}$小時。故此時學生距教授的距離爲 $kc/\sqrt{1-k^2}$。或讀者可想爲就教授言此距離爲kc，則由 Lorentz contraction 知此段距離由學生度量時爲 $kc/\sqrt{1-k^2}$。

當光信號由教授至學生時，其費時爲

$$\frac{\frac{kc}{\sqrt{1-k^2}}}{c}=\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$$

而光速 c 無論就 K'或K系統看來其值均相同。由 Lorentz velocity transformation

$$v_x=\frac{v_x'+kc}{1+v_x'\frac{v}{c^2}}=\frac{c+v}{1+c\frac{kc}{c^2}}=\frac{c(1+k)}{1+k}=c$$

所以由學者所度量知的全段時間爲

$$\Delta t'=\frac{1}{\sqrt{1-k^2}}+\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$$

$$=\frac{1+k}{\sqrt{1-k^2}}=\sqrt{\frac{1+k}{1-k}} \qquad (11)$$

讀者可見(10)和(11)的結果完全相同

註①：見 Landau: The Classical Theory of Field