力學中之相似性質

汪元康 胡承渝 譯自 Landau 之 Mechanics

將Lagrangian乘以任一常數，再代入Lagrange 氏方程式，當不會影響最後所得的運動方程式。由於此一性質，我們常常不必解出煩瑣的運動方程式，就可得到許多有用的結論。

舉例言之，假設位能U是坐標的齊次函數，具有下列性質：

$$U(\alpha\vec{r}_1,\alpha\vec{r}_2,\cdots\alpha\vec{r}_n)=\alpha^k U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n) \quad (1)$$

式中 α 是任取的常數，k是此齊次函數之次數。

我們可作一變換（transformation）如下：將每個坐標乘一常數α，時間乘一常數β，即 $\vec{r}_a\longrightarrow\alpha\vec{r}_a$，$t\longrightarrow\beta t$。則速度 $\dot{\vec{r}}_a=\frac{d\vec{r}_a}{dt}$ 改變成 $\frac{\alpha}{\beta}$倍，動能變爲$\frac{\alpha^2}{\beta^2}$倍，而位能就變爲 α^k 倍了。若我們取β適合$\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\alpha^k$，即$\beta=\alpha^{1-\frac{1}{2}k}$，則變換的結果，僅是把Lagrangian乘上一常數 α^k，因而一些也沒有改變運動的方程式。

將質點坐落的坐標乘一倍數，相當於把另一新路徑來代替其原有路徑；從幾何上說來，此二路徑是相似的，只是大小不同而已，是故我們可作如下的結論：若一System 的位能是坐標（直角）的k次齊次函數，則運動方程式可適合許多的幾何相似路徑，而在二路徑的對應點上，運動時間是成這樣的比例：

$$\frac{t'}{t}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{1-\frac{1}{2}k} \quad (2)$$

$\frac{l'}{l}$是路徑長度之比。其實除時間外，對應點上其他的力學量，在對應的時間上，也成著有趣的比例。如速度，能量，角動量是這樣的：

$$\frac{v'}{v}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{1}{2}k},\quad \frac{E'}{E}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{k},$$

$$\frac{M'}{M}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{1+\frac{1}{2}k} \quad (3)$$

下面是上述理論的許多實例，他們都是很有趣的。

微小振動（Small oscillation）的位能是坐標的二次齊次式，由（2）式，我們知道振動週期，與其振幅是無關的。

在一均勻力場上，位能是坐標的一次線性函數，即k＝1，由（2）知$\frac{t'}{t}=\sqrt{\frac{l'}{l}}$。舉例言之，落體的時間是與其原有高度的平方根成正比的。

在牛頓的力場，或庫倫的力場中，位能是與距離成反比的，即k＝－1，故$\frac{t'}{t}=\left(\frac{l'}{l}\right)^{\frac{3}{2}}$。此即有名的 Kepler 第三定律：在此運動的軌道上，運動時間的平方與軌道大小的立方成正比！

若位能是坐標的齊次函數，且運動的限制在一有限空間內，則於動能及位能間，有一甚簡單的關係存在。那就是有名的「Virial定理」。

因爲動能T是速度的二次函數，由Euler 氏定理：

$$\sum_a \vec{V}_a\cdot\frac{\partial T}{\partial\vec{V}_a}=2T \qquad \text{(註)}$$

以$\frac{\partial T}{\partial\vec{V}_a}=\vec{P}_a$（動量）代入，則得

$$2T=\sum_a\vec{P}_a\cdot\vec{V}_a=\frac{d}{dt}\left(\sum_a\vec{P}_a\cdot\vec{r}_a\right)-\sum_a\vec{r}_a\cdot\dot{\vec{P}}_a$$

我們將此方程式對時間求平均值。所謂對時間的平均，即是：

$$\overline{f}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

稍有常識的人就會知道，若f(t)是某有界函數（bounded function）F(t)的時間導數$\frac{dF(t)}{dt}$，則其平均值爲零。因爲

$$\overline{f}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\frac{dF}{dt}dt=\lim_{T\to\infty}\frac{F(T)-F(o)}{T}=o$$

假設此System 的運動是限於一有限空間內，且僅具有限速度，則$\sum_a\vec{P}_a\cdot\vec{r}_a$是有界的，是以（4）式右邊的第一項平均值爲零。在第二項中，我們以$\frac{-\partial U}{\partial\vec{r}_a}$代替$\dot{\vec{P}}_a$（牛頓第二定律），則得

$$2\overline{T}=\overline{\sum_a\vec{r}_a\cdot\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_a}} \quad (5)$$

若位能是徑向量$\vec{r}_a$的k次齊次函數，則由Euler 氏定理，第（5）式變爲：

$$2\overline{T}=k\overline{U} \quad (6)$$

因爲$\overline{T}+\overline{U}=\overline{E}=E$，（6）式可寫成

$$\overline{U}=\frac{2E}{k+2},\quad \overline{T}=\frac{kE}{k+2} \quad (7)$$

我們已將$\overline{U}$及$\overline{T}$以E表出。

在微小振動中，k＝2，我們可得$\overline{T}=\overline{U}$，動能與位能之平均值相等。在牛頓重力場中，k＝－1，$2\overline{T}=-\overline{U}$，$E=-\overline{T}$，故若要運動僅限於有限空間內，其全部能量要爲負值。

（註）$\frac{\partial T}{\partial\vec{V}}=\vec{i}\frac{\partial T}{\partial V_x}+\vec{j}\frac{\partial T}{\partial V_y}+\vec{k}\frac{\partial T}{\partial V_z}$