

# 物理常數的相對論

文/陳允中

審稿/蔣正偉教授

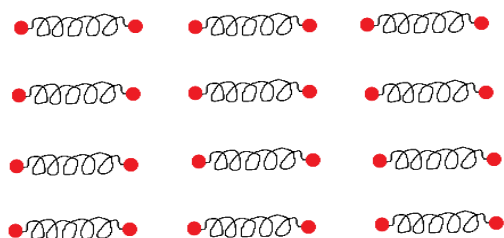
去年的某個禮拜五晚上，我和數學系的朋友坐火車回台中。因為從小喜歡火車，所以我總是選窗邊的位置。當我望著窗外迅速掠過的夜景發呆時，腦中浮現出了以前思考相對論問題時的回憶。我跟旁邊戴著耳機聽音樂的朋友說：「所以你知道相對論在講甚麼嗎？」但他沒回應。廢話。於是我摘下他的耳機，再問他一遍。他是個很好的朋友，沒有生氣，或許是因為早就習慣我這樣了。他說：「知道啊。所有事情都是相對的嘛！」然後戴上耳機，繼續聽他的音樂。我覺得我也應該要是個很好的朋友，所以就只好讓他繼續聽他的音樂。但這個想法卻突然讓我聯想到一件有趣的事情。

「有單位的物理常數都是相對的。」

也就是說，有單位的物理常數並不具「直接」的物理意義，沒有單位的物理常數才具有真正的物理意義。這到底是甚麼意思呢？我們來舉一個例子：

想像你活在一個只有彈簧的世界。而每個彈簧上都連有兩個質量相同的小球。彈簧的彈力常數也都是相同的。彈簧振盪的振幅也都是相同的。這時你可能會問：那沒有人你要怎麼活在那裏？。恩恩同學你這是一個好問題，但我現在不會解釋。這時你測量彈簧的週期和振幅大小（同學又問：怎麼測量

呢？答：當作業）。假設在這個世界中，彈簧依然遵守牛頓定律，所以週期會正比於根號質量除以彈力常數。而彈簧的位置隨時間的關係是一個振幅固定的正弦波。所以很顯然很顯然地，這個世界的物理常數只有小球的質量、彈簧的彈力常數以及小球位置的振幅。而這些都是具有單位的物理常數。當然你可以把這些物理常數亂乘，但你會發現，無論怎麼乘都還是有單位。因此，這些常數都是不具任何物理意義的。



圖一：一個只有彈簧的世界

那甚麼叫做不具有物理意義呢？我的意思是，不論一開始這些物理常數的值是多少（不是零就好），你所處的世界的物理現象是一模一樣的。舉個例，假設現在有另外一個世界，跟原本的世界分隔開，而這兩個世界的物理常數是不一樣的。想像一下這兩個世界的人藉著超長程電話討論物理時：

「你這個世界有甚麼？」

「正弦波。」

「那它的週期呢？」

「嗯嗯嗯，你那邊用甚麼單位？」

「喔我把彈簧上下振盪 10 次叫做 1 ㄅ，所以我的週期是 0.1 ㄅ」

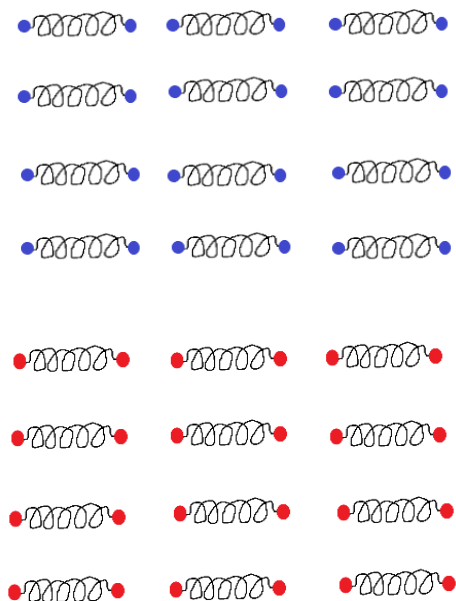
「恩我們這邊把彈簧上下振盪 1 次叫做 1 ㄆ，所以週期就剛好是 1 ㄆ」

「所以 1 ㄅ等於 10 ㄆ啊…單位換算而已嘛」

「等等不對不對，我們該問的問題是，你的彈簧的週期相對於我是多少？」

「恩好問題。等等，這我哪知啊？」

於是，兩位物理學家就開始吵架了。因為他們根本沒有絕對的時間單位來互相比較。為甚麼呢？因為他們的世界中只有彈簧嘛，所以只能用彈簧的週期來當作單位測量時間，還真可憐。你可能會很直覺地認為各自的週期是幾秒就可以比較了，但其實這個幾秒也是相對於銨原子鐘那個震盪的倍數，可是這個世界沒有銨原子這種東西！所以我們當然不能這樣比。不止於此，這兩



圖二：兩個只有彈簧的世界

個世界的物理學家還得到另外一個結論：他們無法比較彼此之間的彈簧彈力常數和小球質量。因為他們無法比較彈簧週期是不是一樣的，而彈簧彈力常數和小球質量又決定於彈簧週期，所以想比較這兩個物理常數是不可能的。同理，彈簧的振幅大小也是無法比較的。這是因為這些物理常數都是「相對的」，如果沒有基準點，就不具任何物理意義。

為了替這些可憐的物理學家們做點事情，避免他們丟掉工作，好心的上帝決定突然改變這兩個世界：將彈簧改成非線性彈簧，除了原本的線性力，再加上一個正比於位置三次方的吸引力，而正比係數我們叫它非線性彈簧常數。發生這個巨變後，物理學家們馬上召開物理大會：

「欸你的世界變成怎樣？」

「不是正弦波了！」

「那是甚麼函數？」

於是他們分別描述彼此的函數，發現並不一樣。終於終於，老天有眼，可以發 paper 了！他們熱烈的討論：

「你的週期是多少？」

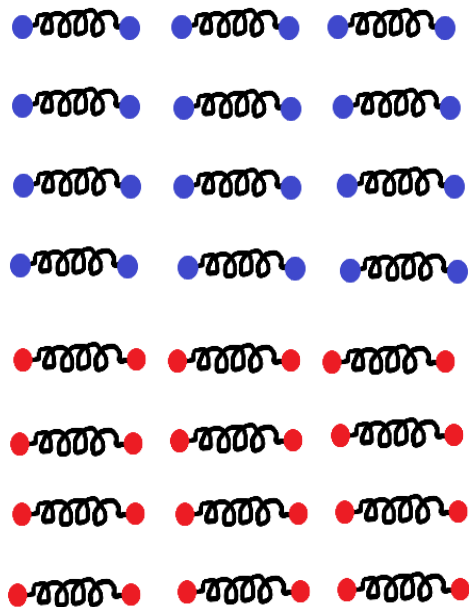
「要怎麼描述啊？」

「對了！你可以跟原來的週期作比較！」

「你愛因斯坦啊！」

這時他們分別算出彼此的週期，有了相同的基準，結果終於可以比較了！物理學家們興高采烈地以為他們可以藉由比較小球的位置函數來計算出有關彈簧的所有物理常數。然而事情沒那麼簡單，例如當他們決定比較週期，小球質量和彈力常數就無法比較，因為那

是他們的基準（原本的週期）。而週期又是初始位置和非線性彈簧常數的函數，所以我們只能得到其中一個常數（很顯然嘛一開始就只有一個參數）。接下來他們想繼續比較，例如，小球過原點時的速度。直覺地想，應該就可以找出另外一個物理常數。但很不幸的是，他們馬上發現找到的就是剛才用週期找出來的那個常數！而其他常數仍然無法比較，也就是說只有一個參數能決定出來。這時你可以想見，這參數必定得是沒有因次的！為甚麼呢？因為他們必須作比較，而有單位的物理常數是無法作比較的！也就是說，無論如何你怎麼測量位置函數，你只會得到一個有用的參數，一旦這個參數量出來後，這個函數就被完全決定了。當然這裡完全決定的意思並不是完全相同，而是指這個函數經過位置和時間的放大和縮小後，可以變得完全相同，換個說法，就是他們基本上長得一樣。



圖三：兩個只有非線性彈簧的世界

當然你可以自由決定你要固定甚麼。假如我們固定小球質量、彈力常數

和初始位置，那我們量到的就是不一樣的非線性彈簧常數。當然你也可以假設非線性彈簧常數是一樣的，而讓初始位置是不一樣的。所以好的方法應該是，如何從這世界中組出一個沒有因次的物理常數呢？這時我們發現到，非線性彈簧常數是個很棒的常數！因為它相對於彈力常數，多除了個距離平方的因次（線性力正比於位置，非線性力正比於位置三次方）。所以我們只要再乘上初始小球位置的平方，再除以彈力常數，就得到一個無因次的物理參數了！而這唯一的參數決定了這兩個世界的小球是如何運動，不再是相同的正弦波，而是複雜的週期函數。這時你可能會注意到，小球質量是一個完全無意義的物理常數，因為你一旦固定其他三個常數，位置函數就被固定下來，跟小球質量一點關係都沒有。邊緣常數。

這時你會發現一些有趣的現象。例如：把初始位置調大兩倍或是讓非線性彈簧常數調大四倍會得到長得一模一樣的函數！同樣的，把初始位置調大兩倍或是讓彈力常數調小四倍、把非線性彈簧常數調大兩倍或是讓彈力常數調小兩倍，也會得到長的一樣的函數。這其實很好想像。當初始位置調大，也就是非線性效應增加，相對的就是線性效應減少。在這個例子中，彼此之間剛好存在著等價關係。

我們來總結一下，當你遇到一個物理模型，別看它裡面出現多少物理常數，裡面多數是假的，唯一真正有用的自由參數是那些可以湊出來沒有因次的物理參數。所以在計算時，調自由參數就好，不用東調西調，搞到最後可能調了半天都是一樣的物理。例如在上面的例子中，如果你只調小球質量，那每張圖畫出來當然都會長得一樣。而在第

一個例子中，自由參數是零，所以怎麼調都還是正弦波。

接下來我們來討論一下我們所處的「正常」世界。描述我們世界的基本物理是甚麼呢？廣義相對論和標準模型，裡面有相當多的物理常數，但現在你已經知道有可能實際上很多都是假的。事實上物理學家很聰明，通通把假的常數設作 1。於是光速和普朗克常數都變成了 1。反正無法比較嘛，用那麼難看的數字算幹嘛呢？通通變成 1，寫在公式裡面就甚麼都沒有了。於是如果你去翻量子場論的課本，裡面既沒有光速，也沒有普朗克常數，一切都很 classical。當然，國際度量衡大會後來也學乖，把單位改成用這些常數來定義。本來就該如此嘛！

所以我需要再次的強調，光速和普朗克常數的大小是沒意義的！這不只是單位轉換的問題，而是本質上它們的大小就沒有意義（事實上也沒有錯。有單位才會有單位轉換）。就如同上面彈簧的例子一樣，一個光速大我們 10 倍的世界跟原有世界的物理是一模一樣的，或者更精確的說，我們根本無從比較。因此將光速趨近於無窮大或是將普朗克常數趨近於無窮小都是很奇怪的事情，因為只要它們不是零，你怎麼趨近物理都是一樣的。應該要說得更精確點：甚麼相對於甚麼趨近於零或無窮大。例如我們可以說相對於棒球的速度，光速趨近於無窮大；或者相對於棒球的大小，它的康普頓波長趨近於無窮小。這時你探討的物理才具有真正的意義，因為這些相對值都是沒有單位，無因次的。

你可能會很好奇：那麼光速的值在 SI 單位中為啥那麼大呢？而普朗克常數的值為啥那麼小呢？

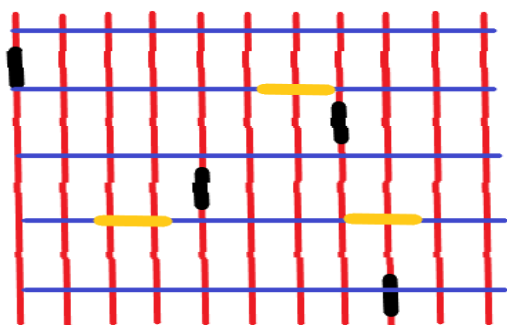
事實上這完全是因為我們日常生活中的物理尺度，跟粒子本身的物理尺度，相差太大的關係。注意我這裡還是在用相對的概念。平常我們根本無法加速到跟光速一樣快，可是電子就相對輕鬆許多。而我們平常物理的尺度也大到量子效應很少出現，所以普朗克常數才會相對那麼地小。假如我們處的世界跟電子一樣，光速跟普朗克常數的數值大概就會被定義的很靠近 1。

另外，還有一點值得一提的是，光速從某方面來說，定義了時間和空間的單位轉換，而普朗克常數則是定義了時間空間和能量動量間的單位轉換（還記得愛因斯坦連結光子能量和頻率的公式吧）。從前面彈簧的角度來說，就像是質量和彈力常數決定了時間，初始位置決定了空間一樣。所以光速可以說是因為時間的存在而存在，普朗克常數也是因為粒子動力的存在而存在，但在古典物理中，因為沒看到，所以誤以為時間、空間和質量是彼此完全無關的。從這個角度來看，相對論和量子力學都必須要存在，因為我們知道有時間和能量這兩種物理量。

這聽起來很抽象，我們再來舉一個例子。想像一個二維的平面外星世界。這世界上的外星人們只能沿著  $x$  方向或  $y$  方向上移動，就跟圍棋的棋盤一樣。這世界的物理多采多姿，在  $x$  方向上，充滿著各種一維的恆星和行星。然而在  $y$  方向上，則都是些黑洞。可惜的是，外星人沒有體積，跟質點一樣，所以腦袋當然不太好。為了要測量  $x$  方向上的物理量，他們以  $x$  方向上的  $X$  恆星大小當作是  $1\text{m}$ 。而為了要測量  $y$  方向上的物理量，他們以  $y$  方向上的  $Y$  黑洞大小當作是  $1\text{m}$ 。當然，外星物理學家們都認為， $1\text{m}$  和  $1\text{m}$  是無法比較的，因為一個



是  $x$  方向上的物理量，一個是  $y$  方向上的物理量；一個充滿恆星和行星，一個則都是黑洞，對他們來講，這可是天差地遠。



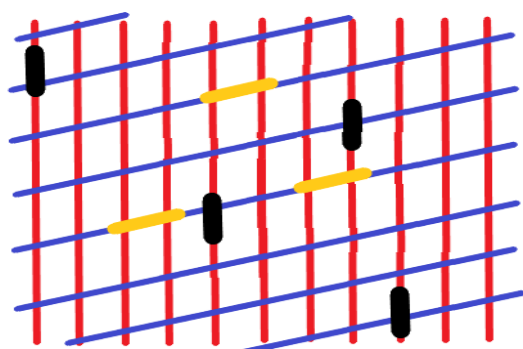
圖四：外星人的二維平面世界。  
裡面有著黑洞和恆星。

有天，上帝又忍不住出手了。外星人突然進化，從質點變成了有體積，而且可以在二維的平面上任意的運動。他們發現， $\square$ 和 $\sqcap$ 其實是可以比較的！

「欸所以 $\square$ 跟 $\sqcap$ 都是在描述同一種物理量嘛！」

「對阿就是在二維平面上的長度，把其中一個軸旋轉一下就可以比較了。」

「那我們來轉轉看。所以…… $1\sqcap$ 會等



圖五：將  $x$  軸轉動後的外星人二維平面世界。  
如此一來，透過計算恆星在黑洞上的投影長度以及夾角，就可以比較恆星和黑洞的長度。  
本圖僅為示意圖，實際上黑洞應該是恆星的  
299792458 倍大。

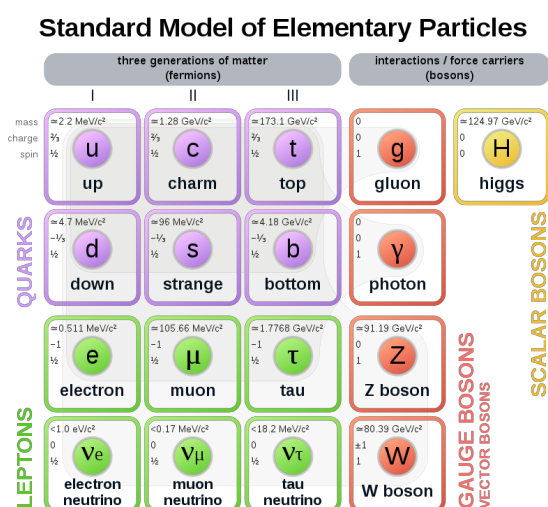
於 299792458 $\square$ 。黑洞還真大！」

事實上這很類似相對論中時空的概念！我們來比對一下： $x$ 方向我們叫它空間，單位是 $\square$ （公尺）， $y$ 方向我們叫它時間，單位是 $\sqcap$ （秒）。在古典物理時，兩者是分得清清楚楚，完全沒有關係，所以單位不能比較。但當相對論成熟後，時空的概念出現了，這時物理學家們意識到時間和空間應該要放在同一個空間下來討論，我們叫作時空。可是時間和空間的單位並不一樣，要怎麼進行單位轉換呢？所以我們得找個比較的基礎。在外星的世界中，他們透過轉動來達成，那在時空中也一樣——我們透過勞倫茲轉換，也就是時空中的轉動，來比較時間和空間的單位。這時，光速就出現了。也就是說，在時空中，一秒的長度和 299792458 公尺的長度是一樣長的。那光速就僅僅只是單位轉換的常數而已。你會說 1 台斤等於 0.6 公斤的「0.6」是個了不起的物理常數嗎？不會嘛！所以光速根本沒有甚麼了不起，完全是定義出來的東西。而你也可以由此發現，光速跟光一點關係都沒有。事實上重力波的速度也是光速。這完全是因為光子和重力子的質量都是零。最後要補充一下，上面的例子其實沒那麼準確，時間和空間還是有點不一樣的，畢竟時間不能倒退，但空間可以，而這在數學上就僅僅只是我們在計算長度時，時間要加個負號，其他都一樣。

講了那麼多，那真正的物理參數有哪些呢？在標準模型裡面，大概有 18 個，其中只有一個很特殊，其他都是耦合常數(coupling constant)。

耦合常數描述了力之間交互作用的大小，它其實就非常像是我們前面所講的非線性彈簧常數，只是在標準模型

中，這些耦合常數剛好都是沒有單位的（這其實也沒那麼剛好，因為如果耦合常數的單位是能量的負整數次方的話，會有不可重整化的問題，所以我們通常會把它剔除掉），像是有名的精細結構常數，就是描述了電磁力的大小。所以事實上電荷應該要是沒有單位的。作用力耦合常數的大小影響我們物理世界很大。像是精細結構常數因為相當地小，所以我們在計算上，可以使用微擾理論，也就是說，古典地描述（馬克斯威方程式）在交互作用很小的情況下是很好地近似。但量子色動力學就完全不是這麼回事！因為在低能量下，它的耦合常數會變得太大，很靠近 1，這時就不能使用微擾理論，於是物理學家就沒輟了（物理學家還真沒用？）。這就是著名的千禧年問題之一。



圖六：標準模型。來源:wiki。

除了我們熟知標準模型三大作用力的耦合常數外，還有著名的湯川耦合 (Yukawa coupling)，決定了所有費米子的質量大小（6 個夸克和 3 個輕子，在標準模型裡微中子是有質量的），以及夸克間不同代 (generation) 之間如何藉由弱作用力交互作用的矩陣，包含了 4 個參數。為甚麼是 4 個呢？事實上這個矩

陣描述了粒子的座標轉換，從交互作用的基底 (basis) 轉到質量的基底，所以它是一個么正矩陣 (unitary matrix)。因為我們有 3 個代的粒子，因此這是一個 3 乘 3 的矩陣，包含 9 個未知參數。但記得我們永遠是在討論相對的常數！在這裡也是一樣，我們可以透過改變總共 6 個夸克場的相位，來吸收掉 5 個參數（必須扣掉一個整體的相位）。由此我們可以得到 4 個自由參數。

最後還有希格斯粒子自己的耦合常數（決定了它的質量）。這些通通都是沒有因次的，所以自然都是有意義的物理參數。這樣總共有 17 個參數，那最後一個，就是我說很特殊的，是希格斯場的真空能量。這是標準模型中唯一有單位的物理常數，而它決定了所有物質的質量（包含它自己），所以可說是非常重要。那為甚麼它算是一個自由參數呢？別忘了，我們還漏掉最重要的交互作用力——重力。重力的耦合常數，也就是萬有引力常數，的因次是能量的負二次方。如果把重力當作基準，我們就可以定義各種普朗克單位（如果定義光速和普朗克常數都是 1 的話，其實只有一種），那其中最重要的就是普朗克能量，它定義了量子重力的尺度，也就是需要認真考慮重力的量子效應時的尺度。所以我們可以把它當作標準，那麼，希格斯場的真空能量相對於它，就有了物理意義。事實上，這個「相對」差了非常多，差了有十的十七次方，也衍生出了著名的級列問題 (hierarchy problem)。

我的思緒轉了一大圈又回到了火車上。台中火車站快到了。我把我的想法記在腦袋中，深不知，竟然還真的有用上的一天。

最後感謝 韋尚甫、劉若愉、謝豐仰、陳昶瀚、許芳慈和廖品瑜提供的改進意見