

孿生子年齡的詭說

朱耀煌

近代物理的兩大柱石就是相對論和量子論。這兩種理論分別為了解釋 Maxwell 方程式的不能適合伽利略轉換的不變性，以及黑體輻射的實驗結果和理論推測不合。但是這兩種理論都建基在同一個點上，就是「運作觀點」(Operational point of view)。也就是說我們所能了解的物理學只限於我們能够以一個可行的實驗去度量的範圍以內，否則任何物理觀念都將變得沒有意義。雖然特殊相對論在1963年由 D.Saden 所發表的一篇實驗的結果中 ($e^+ + e^- \rightarrow \gamma_1 + \gamma_2$) 得到了很確實的證明，畢竟能產生「相對效果」的現象在我們實際生活所能接觸的範圍內，並不容易見到，因此使其在一般人眼中多少具有一抹神秘的色彩，就是物理學者，也對其非常感興趣，在時空 1-6期中，共有六篇文章討論到這方面的問題。這篇短文，主要是討論與相對論有關的一個很有趣味的問題——孿生子年齡的詭說(The "Twin Paradox")。

大家都知道特殊相對論是基於光速在慣性系統中不變的假設，(1887年Michelson and Morley實驗得知)，然後就可以得出兩個對「時空」觀念產生根本上改變的結果：一是時距延緩(Time dilation)，一是勞倫茲收縮(Lorentz contraction)。而孿生子年齡的詭說，就是由此而生。根據時距延緩，我們知道在靜止座標A上的量度者將會發現等速運動的慣性座標A'上的時鐘以R倍的速率運轉 ($R = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ，同時反過來看A'上的量度者，將會發現A座標上的時鐘以R倍的速率運轉。這些效果，並不是因為鐘一動起來，它裡面的機器就運轉得慢起來，只是因為用以校準(Synchronization)時鐘的光在任何慣性系統內，其速度皆為常數C。

現在討論到正題上來，如果有一對孿生子，無論各方面都非常相像，使得任何人都無法分別得出誰是誰。而使其中一人坐上太空船到太空去，再回到地面上來，這兩人就會發生爭執了。以留在地球上的人的眼光來看，另一人在作運動，而我則在靜止，因此在太空船中的人的時間過得比較慢，當他回來時，一定會比較年青。反過來看，對在太空船中的人來說，他是在靜止，而地球上的人則是在作運動，所以當他回到地球上的時候，地球上的另一孿生子應該比較年青。於是兩個人都爭著作哥哥，這在別的不是雙胞胎的兩個人間，如果發生這個問題就難解決了，因為他們本來並不相像，但是如今他

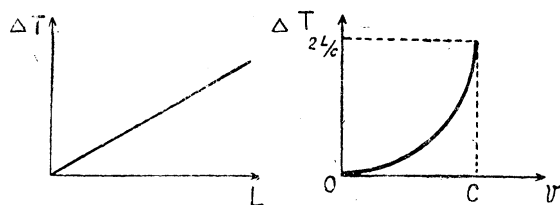
們二人只需到一面鏡子前面，誰年青誰老一看便知。奇怪的是居然留在地球上的一個人顯得比較老，而入太空的那一個人顯得比較年青。也就是說事實上這種詭說並不存在，只是上面那一段的推理有問題。如果太空船一去不回，問題也不會發生，因為二人無法並立相比較，毛病就出在當太空船回航那一個迴轉點。詳細的情形只要看下面的計算就可以知道，這個計算非常簡單，但是曾在十二年前的 Australian Journal of Physics 上由 Geoffrey Builder 發表過，我們把其摘要的記在下面，以利於以後的說明，不過要聲明一點，就是在開始，迴轉和停止這三點速度改變所經歷的時間是極短的 ($\Delta t \rightarrow 0$)，也就是說只考慮這三點有瞬時加速度 (instantaneous acceleration)，而其他各點的速度都保持不變，其實即使不是瞬時加速，對於結果的形式也沒有大的影響，只是徒增運算上的不便而已。

	地球系統 (E)	太空船系統 (A)
出發	$t_{0E} = t_{0S} = 0$ $t_{0A} = 0$	$t'_{0E} = 0, t'_{0S} = Lv/c^2$ $t'_{0A} = 0$
到達	$t_{1E} = t_{1S} = L/v$ $t_{1A} = RL/v$	$t'_{1E} = Rt_{1A} = R^2L/v$ $t'_{1S} = t'_{0S} + t'_{1E} = \frac{Lv}{c^2} + \frac{R^2L}{v} = t'_{1S}$ $t'_{1A} = L'/v = RL/v = t''_{1A}$
瞬時迴轉		$t''_{1E} = t'_{1S} + Lv/c^2 = 2Lv/c^2 + R^2L/v$
達地球	$t_{2E} = t_{2S} = 2L/v$ $t_{2A} = 2RL/v$	$t''_{2E} = t''_{1E} + t'_{1E} = 2(Lv/c^2 + R^2L/v) = 2L/v$ $t''_{2A} = 2t'_{1A} = 2RL/v$

上表的計算，主要是我們先把一個和地球上具有相同讀數的另一個時鐘，放在迴轉點處，由於這兩個時鐘同時對地球而言都是靜止，因此這兩處對時間的讀數有一致的看法和相同的讀數（有一致的看法是因在整個過程中，E.S 的時鐘運轉速率不變，

而且 E.S 的時鐘在開始時有相同的讀數，所以以後讀數也相同。)

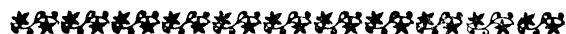
當太空人出發時，此二學生兄弟的錶讀數相同，但唯一不同的就是地球上的時鐘與 S 的時鐘完全一致，而太空人的時鐘和 S 的時鐘已相差 Lv/C^2 。在去程雖然太空人認為 E.S 的時鐘都走得較慢，但當他到達 S 時，畢竟 S 的鐘的指數還是比他多。可是一旦他改用反速回去時，S 的鐘的指數沒有變，而見到 E 比 S 又超前了 Lv/C^2 ，此時地球上的時鐘仍和 S 的時鐘同步，所以當太空人回到地球以後，他比另一人年輕的時間： $T=2L(1-R)/v$ ，同時兩人的觀點完全相同。聰明的讀者可能會想到如果太空船也有一時鐘放在與太空船同一個座標系上，位於距地球 L 但與 S 剛好相反的地方，是否可以導出相反的結果呢？答案是否定的，因為雖然他們本來是同步的時鐘，經過變速度以後無法知道他們是否仍同步，以上的計算就無法應用。下面二圖分別說明 $\Delta T \propto L$, $\Delta T = f(v)$



所以諸位如果想比太空人更年輕，可以乘坐更高速的太空船（這就是為什麼開車愈快愈好的原因，開快車的人長命。），或者是速度雖然不太大，但距離愈遠愈好，同樣可以長命（所以走路或坐公共汽車的人不妨繞遠路走，或是多換幾趟車。），這些道理都是秉承愛因斯坦的教訓演繹而得，切不可等閒視之。

言歸正傳，我還希望說明如果其中一人停留在地上，另一人繞地球作等速圓周運動，最後是否還是地上的人老呢？答案是肯定的，這裡雖然不列舉什麼式子證明，却可以用一個實驗的例子來證明，就是當 μ^- 介子蛻化 $\mu^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$ 時，其以某一直線速度運動之均生命期和當其以相同之速率作等速率圓周運動之均生命期同為 $2.2 \times 10^{-6} \text{sec}$ ，所以作等速率圓周運動也會有類似的情況發生。

學生子年齡的詭說曾經一度是很熱門的問題，據我在 American Journal of Physics 上翻到的就有五篇之多，此外在 Proc. Phys. Soc. (London) 和 Science 等雜誌上少說也不下十篇左右，不過此問題雖然很熱門，很有趣，卻並不是十分重要的，因此這篇文章多少是給同學們（尤其是低年級）一點消遣和增加興趣而已。



憶 舊 遊

長 風



聯考過後，幾個高中時代的老朋友碰在一起，決定去烏來上游露一次營。

到烏來後，繼續乘臺車向山中進發，一路上人跡漸少，我們再度的投入了大自然的懷抱，到了營地後，天色已晚。好不容易才搭好了營帳，却發現在裏面可以看到不少星星，幸好旁邊有一間沒人住的空屋子，於是我們就順理成章的搬了進去，先有了一個安頓的地方再說。晚上隨便吃了些東西，就開始架起營火烤著薯，大家圍坐一圈低聲的哼唱，四周的大自然顯的分外的沉靜，此時友情的溫暖充滿了我們每一人個的心頭。不曉得誰先開始講了一個古老的鬼故事，伴著斷續的竹子燒裂的聲音，使黑夜更增添了幾許神秘，時間緩緩的從火光中流逝，營火也逐漸的微弱了。鬼故事講完了，歌也唱的差不多了。這時大家都無言的平躺在草地上，數著天上的星星，許下心中的願望。可愛的泥土味使我強烈的認知我原是大地的一部分，在寧靜中，我遺忘了

一切，恍惚中好像是如夢如幻的山霧瀰漫了天空。

× × × × × × ×

在小鳥殷勤的催促下，我們一個一個的睜開了眼，在晨曦中儘情的深呼吸，愉快的享受著美好的早晨。早上幾人帶了汽槍和魚竿出去溜溜，回來什麼也沒帶，只好打幾個罐頭當午餐，下午全體出動去游泳。溫暖的陽光普照水面，我們戴著斗笠，全身浸在淺淺的清溪中，不時的被什麼東西咬了一口，一看原來是一羣小魚徜徉在五顏六色的石頭間。當微風輕起時，風聲水聲，流成一片。偶而一兩隻小小的水鳥划過水面，一閃而過。間或也有一隻水蜻蜓停在帽沿，久久不去。我深深的沉入了這美好寧靜的時光，直到有人挑起了水中的世界大戰。

這次的露營使我知道大自然所能給我的遠超過我所想像的。同學們，在節慶假日的時候，何不約上三數好友到近郊一遊，在綠草如茵的大地上，在小溪旁，在陽光中，蓋上一番。