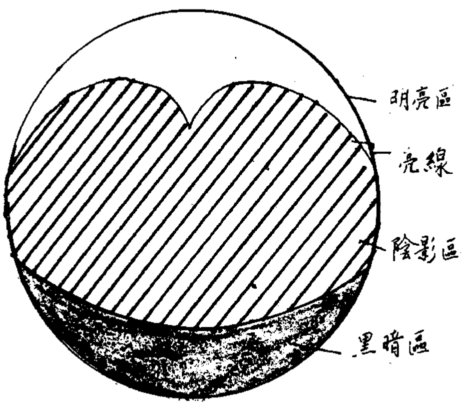
一個現象的解釋

李中一

一、介紹

拿一個圓柱形的容器（譬如塑膠水桶），放在電燈泡下，光線經過容器內壁的反射，個會在容器底部形成一種圖案。這個圖案會隨著光源的位置而改變，而其形狀，大致上是一個亮環，環的一側是明亮區域，另一側是陰暗區域（如圖一）。雖然我們知道這不過是一個單純的反射現象，可是要精確地解釋亮環與光源位置的關係卻並不太容易，原因是亮環所在只是反射光比較聚集的地方，並不是所有的反射光都射在上面。而且同一個部位可以有數條反射光線射在上面（也就是底部和壁面的映射不是一對一），這些特徵使得我們不容易找到一個合適的數學工具去處理這個問題。但是，在面對困難的時候，一個信念始終引導著我們，那就是：「所有的物理現象一定可以經由仔細的實驗觀察，而看出其脈絡，進而求得有效的數學方法來加以分析並徹底解決。」

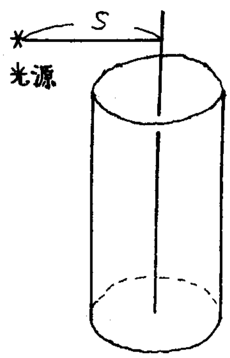


圖一

二、初步分析

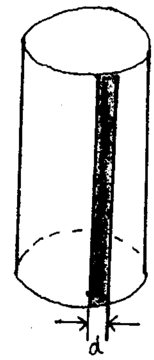
①黑暗區是器壁的陰影，與反射光無關，只要光源擡得夠高，黑暗區便可以縮到邊緣線上。

②亮線位置與光源的高度無關，只和光源與圓柱中心線的距離 S（如圖二）有關。



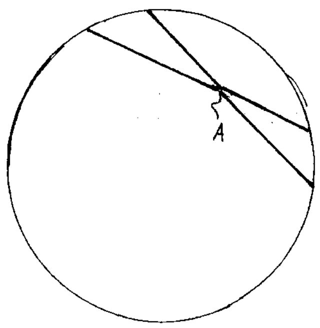
圖二

③遮住器壁內面一個條形區域（如圖三），則容器底部會出現如圖四的陰影，這顯示反射光在A點附近比較聚集。



圖三

④條形區域如果很窄則其對應在底部的陰影之A點幾乎就位在亮線上。



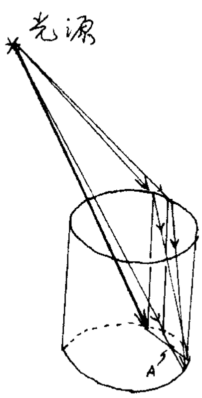
圖四

由於①和②，我們可以視整個圖案爲S的函數（圓柱半徑固定時）。由於③和④，我們就可以做如下的假設：

「當條形區域寬度d→0時，它所對應底部的陰影之A點就在亮線上。」

也就是只要算出A點的軌跡（當d→0時），使得到亮線的形狀，而亮線的形狀便決定了整個圖案。

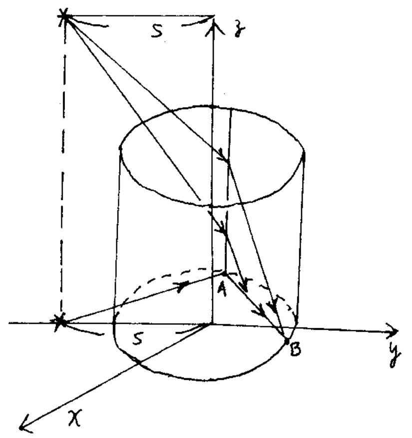
至於當d→0時，A點到底在哪裏？我們可以再假設它就是條形區域兩個邊反射光的交點（見圖五），如何求這個交點，便只是解析幾何的問題了。表面上看，這是三維解析問題，但是經過一番分析，我們還可以把它簡化成平面解析來做，分析的步驟如下：



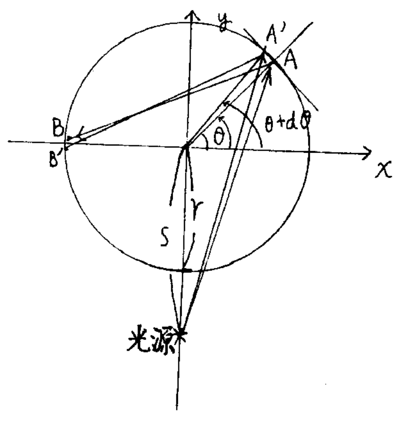
圖五

①如圖六顯示：光源經過圓柱內壁的一條直線反射後也在圓柱底部形成一條直線AB。

②由於是正圓柱，所以AB位置與光源高度無關，只和S有關，也就等於光源和圓柱底部在同一平面上所反射的方向（見圖六）。



圖六



圖七

三、計算

參考圖七，經由初步分析的結果，整個問題可以簡化成這種情形。AB的直線方程式爲：

$$y = \frac{r\ \sin\theta - s\ \cos 2\theta}{r\ \cos\theta + s\ \sin 2\theta}x + \frac{r\ s}{r + 2s\ \sin\theta}$$

所以AB與A'B'的交點，當$d\theta \to 0$時為：

$$x = -\left(\frac{r\ s}{r + 2s\ \sin\theta}\right)' \Big/ \left(\frac{r\ \sin\theta - s\ \mathrm{con}\ 2\theta}{r\ \cos\theta + s\ \sin 2\theta}\right)'$$

（′表示對θ導微）

$$y = \frac{r\ \sin\theta - s\ \mathrm{con}\ 2\theta}{r\ \cos\theta + s\ \sin 2\theta}x + \frac{r\ s}{r + 2s\ \sin\theta}$$

令$r = 1$，並化簡之後得：

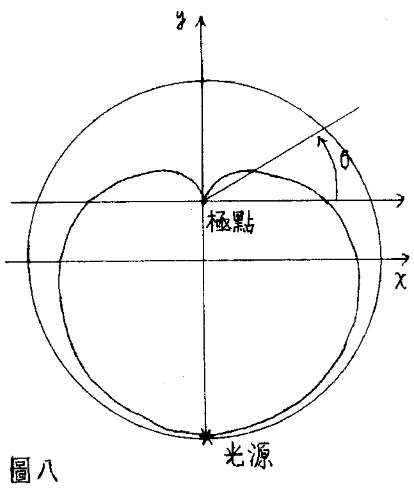
$$x = 2s^2\cos^3\theta / (1 + 2s^2 + 3s\ \sin\theta)$$

$$y = (-2s^2\sin^3\theta + 3s^3\sin\theta + s) / (1 + 2s^2 + 3s\ \sin\theta)$$

由初步分析的結果，我們知道這就是亮線的參數方程式。當$s = 1$時，這個方程式又可以化為蚶線方程式：

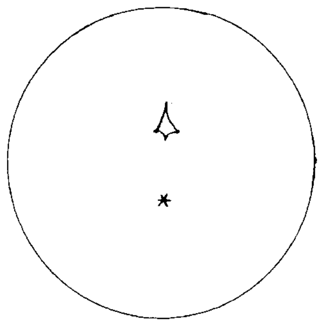
$$r = \frac{2}{3}(1 - \sin\theta)$$

極點在 $y = \frac{1}{3}$，$x = 0$ θ不變，見圖八

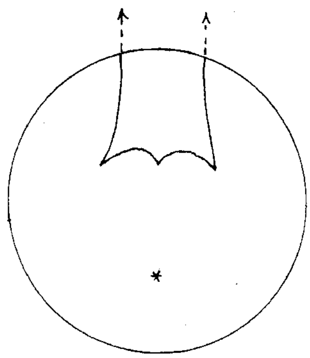


圖八

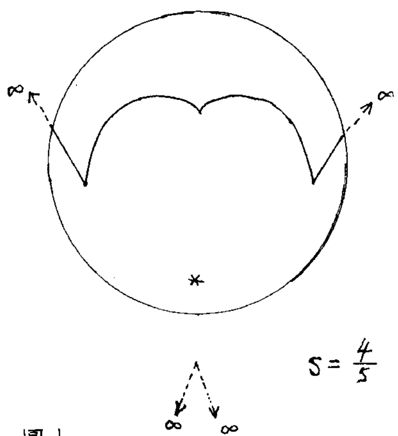
對於其他的s值，我們代表性地畫了六個不同的值，藉以看出反射圖案如何隨s而變（圖九至十四）。（虛線代表虛交點，不會實際呈像）



圖九　$S = \frac{1}{4}$

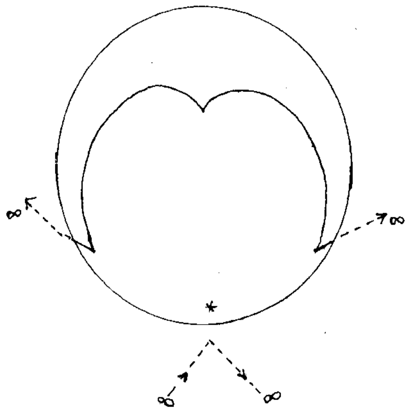


圖十　$S = \frac{1}{2}$

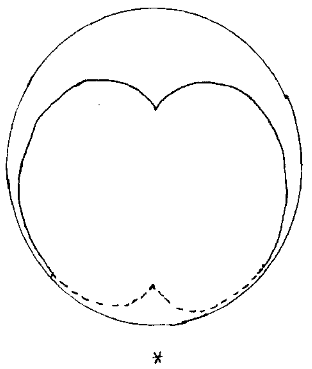


$S = \frac{4}{5}$

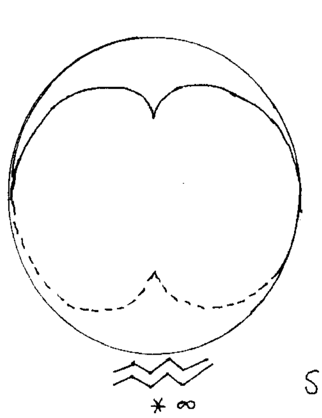
圖十一



S = 0.9 圖十二



圖十三 S = 1.2



圖十四 S = ∞

結語

：這個問題我從今年暑假便開始做，一直到前些日子當兵休假回來碰到蘇思源兄，聽說時空要出刊了，才想到把它寫出來發表，但是身在軍營，身不由己，許多細節及闡釋都來不及做了，只希望能激起大家觀察小事物的興趣，如果要重複這個現象的實驗最好用小燈泡（但光度要夠），大圓筒，並在暗室中做，並且很歡迎對小問題有興趣的同學和我通訊討論，有一本書，有許多這類趣味物理問題的資料：

The flying circus of Pbysris with Enswers by Tearl Walker

科學的美國人上業餘科學家專欄也很值得參考。

給在海外的學長和學姊：

別忘了，時空不僅屬於我們，它也屬於你；我們都是時空這個大家庭的一份子。

非常希望你能投稿，也盼望你能為學弟學妹們介紹海外的訊息。