PRINCIPLES OF QUANTUM MECHANICS

（13期）

陳丕燊

I 導言

Principle這個字在物理學上的用法是頗含混的。例如在古典力學裡，我們若把Least Action Principle 看做準股（Postulate），則運動方程式可以由此Principle導出。但是像老量子論中的Correspondence Principle 却只是量子力學極自然的結論之一，並不是一個必要的假設。因此我們可以說一個Principle的提出，有時是邏輯結構上的，有時却是一時的權宜之計。不過有一個共同點，就是假定它們是 universal 的。

本文的主要目的，在於由設基化量子力學（Axiomatic Quantum Mechanics），說明量子力學中幾個重要的Principle都是一些可以證明的定理。

II 量子力學的設基化

使一個物理學的理論設基化已經不是一件新鮮的事了，此處不討論它在經驗科學一如物理學中的地位。就邏輯上言，構成一個理論的所有設基（Axiom）必須至少滿足完備性（Completeness）與一致性（Consistency），至於獨立性（Indepndence）若在使理論更易推展的情形下是可以犧牲的。不過這些性質（除獨立性較易辯別外）多需要用窮擧法，而反證却方便得多（如有名的Russell Paradox），因此對以下所提出的設基是否滿足上述三性質，我們不做討論。

一個物理學理論的設基，我認爲至少包括兩組，一組稱爲對應設基，這一組設基把物理理論中的物理量對應到某一數學理論中的數學量，使兩者間有同構（Isomorphism）的關係。但是物理不同於數學之處，在於物理量和實驗或觀測有關，因此需要有另一組設基，稱爲量度設基，來連繫自然界和理論。有了上述的討論做基礎，我們可展開理論了。

討論物理現象，離不開其範圍，因此我們從Physical system的定義開始。

【定義】Physical system ：將包含一切物理現象及性質的集合稱爲〝宇集合〞，以U表示者。若U中有部分集合，A、A′ 滿足$A\cap A'=\phi$，$A\cup A'=U$，則稱A（或A′）孤立（isolated）於A′（或A）。若我們要研究A集合中之現象及互相間的關係，我們稱A爲一 Physical system。

【定義】State：設p,q,r,s……爲物理量，對Physical system A 存在一函數Ψ（p，q，r，s…）>，其在任一時刻t。可以描述A之運動，且包含A中最大可能互相一致的條件，則稱 $|\Psi\, t_o>$爲一 state。

【定義】Operator ：設S爲由相同定義域的函數$|\psi>$ $|\phi>$，……所成之空間（space），p爲一使S中任一函數$|\varphi>$映至S中另一函數$|\phi>$之關係。

$$|\phi=p\,|\psi>,$$

則稱p爲一operator

若定義域不同，則雖有相同的關係，我們視爲不同的operator。

設基I　對應設基a）：每一物理量對應一operator，若q_i之conjugate momentun爲p_i，則$q_i\leftrightarrow q_i$。$p_i\leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_i}$。若$q_i\equiv t$，則$t\leftrightarrow t$，$E\leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$。

【定義】Compete set ：若對於函數Ψ，存在一組 state $|\Psi_1\rangle$，……$|\Psi_n\rangle$，互爲線性獨立，則稱$|\Psi_i\rangle$形成一組 complete set 。記爲{$|\Psi_i\rangle$}。故任一state $|\Psi\rangle$均可表爲
$$|\Psi\rangle = a_1|\Psi_1\rangle + a_2|\Psi_2\rangle + \cdots + a_n|\Psi_n\rangle$$
，a_i爲複數。

【定義】Observable ：對於某一物理量所對應爲operator p ，若$|p_i\rangle = p'|p_i\rangle$（故$p'$爲複數）則稱$|p_i\rangle$爲operater p之一 eigenstate。若所有p之eigenstate $|p_1\rangle|p_2\rangle\cdots|p_n\rangle$形成complete set ，則稱p爲一observable。

【定義】Commute and Commutator：

commutor of u and v
$$\equiv -\frac{1}{i\hbar}(uv - vu) = [u, v]。$$
若$[u, v]|\Psi\rangle 0$，則稱u與v commute。

定理：若u與v commute ，則u與v有一組共同的complete set ，表爲{$|u_i v_i\rangle$}。

設基II 對應設基b)：設q，p，r，s……爲observable，其 eigenstate分別爲$|p_i\rangle$，$|q_j\rangle$，$|r_k\rangle$，$|S_1\rangle$…。對於physical system A，存在一函數$|\Psi(p，q，r，s\cdots)\rangle$，可以描述A之運動，具包含最大可能數量互相一致的條件。對此函數之每一 state $|\Psi(p，q，r，s\cdots)\rangle$，恰有Hilbert space中之一向量$|p，q，r，s\cdots\rangle = |p\rangle|q\rangle|r\rangle|s\rangle\cdots$與之對應，其eigenstate表爲$|p_i q_j r_k s_l\cdots\rangle$，爲$|p_i\rangle$，$|q_j\rangle$，$|r_k\rangle$，$|s_1\rangle$，……的張量積。
$$|p_i q_j r_k s \cdots\rangle = |p_i\rangle|q_j\rangle|r_k\rangle|s_1\rangle\cdots$$

【定義】$\langle u|$爲Hilbert space中$|u\rangle$的對應向量，$\langle u|$與任一$|v\rangle$滿足Hilbert space 中的scalar product。若$|u\rangle = a_1|u_1\rangle + a_2|u_2\rangle + \cdots + a_n|u_n\rangle$

則 $\langle u|u\rangle \equiv \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2$

【定義】operator a 的expectation value 定義如下：$\langle a\rangle \equiv \Sigma\langle u_i|a|u_i\rangle$

【定義】設a爲一operator 。定義其adjoint a^+ 如下：

若 $|a\rangle = a|p，q，r，s\cdots\rangle$

則 $\langle p，q，r，s，\cdots|a^+ = \langle a|$

【定義】若$a = a^+$ ，則稱a爲一Hermitian operator 由設基I及commutator的定義可得下定理：

定理：設$q_1 q_2$ ……爲genelized coordinate，$p_1 p_2 \cdots p_n$……爲其canonical momentun，則

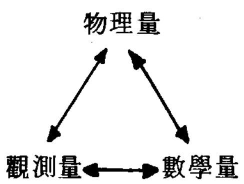
$[p_i, q_j] = 0$，$[p_i, q_j] = 0$，$[q_r, p_n] = \delta_{rn}$

此稱爲〃fundamental quantum condition〃。

定理：若u與v爲Hermitian，則[u，v] = W亦爲Hermitian。

以上的兩個設基，把量子力學變數或函數，與已經設基化了的數學理論Hilbert space做一對應，因此一些Hilbert space中的定理我們可加以引用（如Schwartz inequality 等）。

關係度量與物理及數學變數間的關係，可以用下圖說明：



在相對論裡，關於度量的設基是：在相對運動的兩個慣性系中做相同實驗，所得的物理定律相同。現在讓我們來看量子力學對度量所做的設基。

在進行一個實驗時，我們用尺、天平、鐘錶，計數器等等，來獲得時間、空間、質量等等資料。然而這些測量都可以約化（ reduce ）成一組命題，每一命題有〃眞〃或〃非眞〃二值。例如量長度時，我們可以問：它是不是比五公分

長？是；是不是比六公分長？不是；那麼它在五與六公分之間。整個實驗不過是這些命題的擴大罷了。這些（某一實驗中的）命題，形成一命題系統（Propositional system）。

•

設基III，設物理實驗的命題系統L中之元素爲e_1 e_2 ……則各元素間除分配律外，滿足邏輯中的命題運算。

【定義】$e_1 \subseteq e_2$ 表爲 e_1 導致（imply）e_2；$e_1 \cup e_1$ 表爲e_1或 e_2；$e_1 \cap e_2$ 表爲 e_1 且e_2 故L所不遵守之分配律可表爲：

$$e_1 \cap (e_2 \cup e_3) = (e_1 \cap e_2) \cup (e_1 \cap e_3)$$

$$e_1 \cup (e_2 \cap e_3) = (e_1 \cup e_2) \cap (e_1 \cup e_3)$$

其中 e_1，e_2，$e_3 \neq \phi$

此一設基是有實驗支持的因爲我們發現在原子層次的實驗，前後兩個命題是不能互相獨立的（因此是有序的），所以一般而言，它不合於分配律。

【定義】：設命題e爲眞之值爲1，非眞爲0，且令做n次實驗時有n(e)次爲眞，則一物理系統在此命題之state的或然率爲 $P(e)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(e)}{n}$

除了對應設基與度量設基之外，關於 eq of motion 我們設基如下

設基IV：設H爲Hamiltonian，則eq of motion 爲 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle$。

在一個力學理論中，必須有關於 eq of motion 的設基，例如古典力學中，以F＝ma或Least Action 爲設基均可（二者可互相導出）。

III幾個Principle

1. Supperposition Principle ：關於這個 Principle Feynman 曾經以電子通過雙狹縫

爲例Dirac及 Jauch 也以光子的極化爲例，說明明量子力學的 Supperposition 觀念與古典的不同。若描述一基本粒子運動的函數爲 $|\Psi\rangle$，而我們所觀察的物理量爲一 observable ，則由定義

$$|\Psi\rangle = a_1|\Psi_1\rangle + a_2|\Psi_2\rangle + \cdots + a_n|\Psi_n\rangle$$

於是量子力學的 supperosition principle 敍述如下：state $|\Psi\rangle$在 eigenstate $|\Psi_1\rangle$ 的或然率爲 $|a_1|^2$ 在 $|\Psi_2\rangle$的或然率爲 $|a_2|^2$……，當我們測量 $|\Psi\rangle$時，它有時候在 $|\Psi_1\rangle$，有時候在 $|\Psi_2\rangle$……但決不同時爲所有 eigenstates 的混合。

現在我們可以把前述圖解中觀測量與物理量及數學量之間的關係建立起來。上述的 supperpositon principle中，我們設"$|\Psi\rangle$在 $|\Psi_1\rangle$"的命題爲e_1，在 $|\Psi_2\rangle$的命題爲 e_2 …，則顯然 e_1 e_2 …… e_n 均不可約化（irreducible，i，e，$e \neq \phi$，$x \subset e \to x = \phi$），且 $e_i \cap e_j = \phi$，因爲每一 eigenstate 均互相獨立。故 e_1 爲眞的或然率 $P(e_1) = |a_1|^2$ … $P(e_n) = |a_n|^2$。observable 在 $|\Psi\rangle$的或然率爲 $P = P(e_1 \cup e_2 \cup \cdots \cup e_n)$。

爲了證明這個 principle，我們做一簡化，假設此一 physical system 只有兩個 eigenstate，對應於兩個命題 e_1 與 e_2，則 sup principle的敍述等值如下：對於命題 e_1，e_2 存在另一（或一些）命題 e_3 不同於 e_1 及 e_2，但是 e_3 導致 $e_1 \cup e_2$（即 $|\Psi_3\rangle = a_1|\Psi_1\rangle + a_2|\Psi_2\rangle \to P(e_3) = P(e_1 \cup e_2)$）

爲了證明方便，我們用更嚴格的敍述：

【定義】：設 $e_1 e_2$ 爲二不可約化的命題，$e_1 \neq e_2$，則存在一命題 e_3，$e_3 \neq e_1$ $e_3 \neq e_2$；$e_3 \neq \phi$，使式下成立：

$$e_1 \cup e_2 = e_1 \cup e_3 = e_2 \cup e_3$$

證明　設不存在滿足上式之 e_3 則所有命題系統中之命題 e 均不可導致 $e_1 \cup e_2$ 故 $e \cap (e_1 \cup e_2) = \phi$

由條件知 e_1與 e_2不可約化故 e_1或 e_2與任何命題的交集若非其本身即爲ϕ，因爲 $e \neq e_1$，$e \neq e_2$ 故