

與新鮮人討論「非線性引力」

Nonlinear Gravity: a Discussion for Freshman

D. E. Groom 著

取材自 American Journals of Physics 7,36, (1968)

官德樣 譯

一、引言

以新鮮人的程度，來討論廣義相對論的許許多多性質，並非不可能。一定有很多同學看過關於似星體源與引力崩潰 (gravitational collapse) 的通俗報導，同時對這些發現發生了興趣，在以後的簡化討論裏，我提供了三個問題：

- (1) 為什麼這理論 (廣義相對論中的重力理論) 具有天生的非線性性質？
- (2) 這種非線性的性質，如何使系統中的全部質量可以轉換成不同形式的能量。
- (3) 為何在這理論中，長度 GM/c^2 佔有傑出的地位。

這種似古典 (quasiclassical) 的探討，並非全是我個人獨創的，它的新奇而又引人的地方，全在極基本的部分。若將物理王國中，內容最豐富，最迷人的一段，保存在困難的項目和生硬的書本中，這顯然是非常不幸而且沒有必要的。不過，我們也不敢妄想對困難的題目提出簡單的答案，而只想討論為什麼引力與電磁不同，為什麼它會這樣複雜。當然我們不能扯得太遠，但我深深覺得它已包含了物理上所探討的大部分。

我們可由平常的方法，來了解引力的非線性性質。首先我們將觀察一系統中對靜態質量有貢獻的束縛能 (Binding energy)；然後，我們再分析依引力原理所設計的簡單機械。

二、討論

考慮一個平常的氦原子核，它是由兩個質子與兩個中子構成的束縛狀態下存在。如果我們將組成質點的質量相加，來計算它的總質量，所得的結果總是大大於所測的質量 (約在 0.8% 左右)，這是大家所熟悉的結果，而且我們都知道，這現象產生的原因，乃是當我們將許多質點聚在一起時，這系統會放出能量，這放出的能量剛好等於質量差 (Mass discrepancy) 乘以 c^2 ，換言之，氦原子核的質量為：

$$M = \sum m_i - E_b/c^2$$

式中的右邊第一項是組成份子的質量和， E_b 為束縛能。

現在假設相互的作用，是屬於引力的範圍，很明顯地，同樣的事情也會發生。總質量等於組成份子的質量和，減去束縛能除以 c^2 這一項，假使有兩質量 m_1, m_2 相距 r ，則我們有這樣的關係式：

$$M = m_1 + m_2 - \frac{Gm_1m_2}{rc^2}$$

若第三個質量 m_3 ，與 m_1, m_2 均相距很遠，譬如

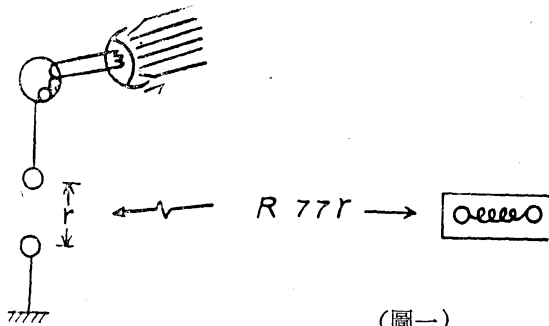
說是 R 吧。則它會受到一力：

$$F = G \frac{m_3 M}{R^2}$$

m_3 與 $m_1 + m_2$ 系統中間的引力已被存在於 m_1 與 m_2 之間的引力所修正，這就是：「引力中有引力」 (gravity has gravity) 的現象。由於這個奇特的效應，每一個人一定會想到，如果要對引力作個適當的數學敘述，那一定是很複雜的。

引力與其他力在這基本的差別上，不能不加以強調。在其他的領域裏像這類的事情，是不會發生的。譬如說在電的作用情形裏，氦原子核的電荷，就等於其組成份子的電荷總和，就是即使質子間有那樣大的電力存在，也無法改變或修正這項事實。

現在，讓我們利用引力的這種獨一無二的性質，建造一個機械。(如圖一所示) 兩個相同質量的質點，由於引力的作用，互相吸引，我們用兩條線將他們分開定位，其中一條線固定，另一條接到以引力推動的裝置上，譬如說，可以將線繞在發電機的滑輪上，然後發電機和燈泡連在一起，當兩質量移得較近時，發電機轉動，而使燈泡亮了，觀察時，可以由放出的光測得引力系統中轉變為輻射能量



(圖一)
轉檢機：將功轉換為光，(第一個觀察者) 探測引力場的儀器 (第二個觀察者)

的總能量。事實上，如果兩個質量由相距很遠的位置，靠近到 r 時，他們之間的位能已改變了 E_b ：

$$E_b = \frac{Gm^2}{r}$$

觀察者可以說， E_b 已經輻射出來，亦即 E_b 的功已藉引力的方式作用於它的機械了。

我們再想像第二個觀察者，在很遠的地方測量這兩質量系統所產生的引力場，依照我們前面所討論的結果，他會認為這引力場是由質量

$$M = 2m - \frac{E_b}{c^2} = 2m - \frac{Gm^2}{rc^2}$$

所造成。

現在，讓第一個觀察者慢慢降低其中一質量，向另一個靠近，同時很小心地量度儀器中所放出來的能量。第二個觀察者仍然在量他的引力場，在某一個時候，第二個觀察者突然抗議說，這系統已經消失了，也就是說他測得 $M=0$ ，這時第一個觀察者馬上檢查，發現他的裝置裏已的確地輻射出 $2mc^2$ 的能量。亦即當兩質量相距

$$r_0 = \frac{Gm}{2c^2}$$

時，這轉換已經完成了。

因此，由於這理論的非線性（也就是說由引力的存在本身來修正引力效果），使得我們可以將靜態質量完全轉換成能量的另外一種形式。從上面對 M 與 r_0 的表示中，我們可以很明顯地看出，當這系統的大小趨近於 Gm/c^2 時，這引力中的引力（gravity-of-the-gravity）效應就變成非常重要。我們可以希望這兩種特性都是這正確理論的表徵。

但是在 M 的式子中，它說當我們取走 $2mc^2$ 的能量後，還可以繼續這過程，而且每次都可以獲得能量，以至於 M 成為負值，對嗎？當然不對，我們想得太天真了，當減去 E_b/c^2 時我們忽略了一項事實：在引力作用下，這量與兩質量中間，還有引力存在；當這些複雜的事情都算進去的話，我們的結果是當 r 到達於零時，取出的能量恰恰好是 $2mc^2$ 不會變為負值的。

當我們將數目字代進去時，建造這種機械的實際困難就很明顯地表示出來。對 1 克的質量，在引力效應需要考慮之前，系統的大小指數（order

）必須為 10^{-28} 厘米，因此，如果我們將 1cc 的水，壓縮到質子半徑（ $\sim 10^{-13}$ cm）的 10^{15} 分之一那樣大時，機械就可以操作了。假使把我們的機械視成一種能源，雖然它的效率將近為原子反應器的一千倍，但是因為這種困難，在最近的將來，也不可能取代原子反應器，然而，如果我們想像建造一個任意大的物質聚合體，使得壓縮中央部分的力量合乎我們所要求的那樣大，則當有足夠高的密度時，我們就可以期望引力崩潰發生在中央部分。物

質被自己的引力所推動，一直到它的原有質量全部輻射完畢為止，最後，它「消失」了，這數目也並不很嚇人，如果一個物體具有太陽那麼大的質量，則 $2GM/c^2 = 2.94$ 公里，一個太陽質量，壓縮到這麼大的半徑時，它的平均密度為 2×10^{16} 克/（厘米）³，大約為原子核密度的 50 倍。

這崩潰是大星球的最後命運嗎？這問題是目前時髦的興趣之一。如果將原子核能源用來維持溫度，則氣體壓力能夠和引力平衡，但是當大星球（例如具有三倍或四倍太陽質量的星球）的原子核燃料消耗完畢時，應該變成什麼呢？依照現在的計算顯示，崩潰即將進行，更要注意的，在高密度狀態下的排斥力（例如兩個中子間的作用力）只有促成崩潰現象的加速進行，因為它們放出負的束縛能，而增加引力作用。這個迷人的引力崩潰問題，已經在各地展開廣泛的討論，在天空中我們看到的某些物體，例如似星體無線電波源，新星，以及一些奇特的銀河，都很可能是這一過程的好例子，如果能指出這一點，則已足夠達到我們的目的了。

三、附 錄

較複雜但更令人滿意例子，是將同樣的考慮應用到質量球殼上。假設殼上的有效質量為 M ，半徑為 r ，那麼當質量增量 dm 從無窮遠的地方送來，加在球殼上時，有效質量改變了。

$$dM = dm - \frac{GMdm}{rc^2}$$

【對於 dm 本身在已聚積的球殼場中的質量修正，它的指數為 (dm) ，因此可以忽略不計】解這方程式，可求得將總質量 m ，從無窮遠處帶到殼上後，殼的有效質量為：

$$GM/c^2 = r(1 - \exp(-\frac{Gm}{c^2 r}))$$

同樣地，我們也可想像具有質量 M 的泡沫從很大的半徑慢慢收縮到半徑 r 時， M 為其有效質量。從這式中，可以看出，當 r 趨近於零時， M 也趨近於零，由於這崩潰現象所放出來的能量剛好是 mc^2 。

稿 約

第九期時空預定民國五十七年六月上旬出版，自三月一日至四月十五日為徵稿時期，稿件內容不拘，舉凡論文著述、科學報導譯述、讀書心得、散文、詩詞、漫畫均在歡迎之列。來稿以二千字為度，最多請勿超過八千字，並請用有格稿紙繕寫清楚。歡迎各年級同學踴躍賜稿，我們尤其希望畢業的學長們，能撥冗為在校的學弟們多寫些介紹性的文章，或者是一些研究上的心得。

來稿請交物理學會陳順強同學。