參考：(1) P.A.M. Dirac, Proc Cambirdge phil. Soc. 26 361 (1930)

(2) Ore and Powell Phys. Rev. 75 192 (1954)

(3) G. Lang and S. DeBenedetti, Phys. Rev. 108 914 (1957)

(4) Berko Phys. Rev. 112 1877 (1958)

(5) Stewart. Phys. Rev. 108 713 (1957)

(6) S. S. Hanna and R.S. Preston Phys. Rev. 109 716 (1958)

(7) V. L. Sedov Soviet. physics Uspekhi 11 163 (1968)

附　　錄

在實驗室中，測量正負電子相消所產生的加馬射線的角相依含有很大的意義；由它可窺視物體中電子動量分佈的狀態。例如，如果我們測得一個角相依爲

$$N_z(P_z)=\text{const.}(P_f{}^2-P_z{}^2)$$

$$P_z{}^2<P_f{}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

則可知道其中電子甚爲自由。

現在讓我們來用氫原子的波動函數來做一試驗性的計算：

用 $\phi_{100}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{zr}{a_0}\right)$

我們可得 $F_{k^+k^-}(p^+p^-)=\int e^{-ik\cdot r}\varphi_+(r')$

$\varphi(r)d^3r[\phi_+=1] \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$

$$=\int e^{-iK\cdot r}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2}\exp\left(\frac{-zr}{a_0}\right)d^3r$$

積分之後，可得

$$F_{k+k-}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{a_0}\right)^{3/2}X'$$

$$X'=4\pi\left[\frac{1}{\left(\frac{z}{a}\right)^2+(k)^2}\right]^2$$

而 $Nz(\theta)=\int\int|F_{k+k-}(P_xP_hmc\theta)|^2$

$dp_xdp_y \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{a_0}\right)^3 16\pi^3\left[\frac{1}{\frac{2\pi mc\theta}{h}^2+\left(\frac{z}{a}\right)^2}-\frac{1}{\left(\frac{hpc}{2\pi}\right)^2+\left(\frac{z}{a}\right)^2}\right]$$

以 $m=9.1\times10^{-31}$kg.　$\vartheta=$(rad).

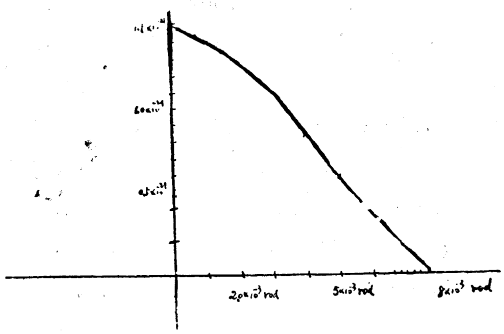
$c=3\times10^8$m/see　　$z=1.$　　$a=0.53\text{Å}$

$P_c=\frac{2\pi me^2}{h}$　　　$e=1.6\times10^{-19}$coul

代入該式，　此處　z: atomic number,

a: Bohr radius. 可得一曲線如圖 (A.1)

本計算純爲試驗性質，而且氫原子的角相依也沒有人測量出來，但讀者如果自己把上述計算重覆一遍，恐怕就能了解這類計算工作的複雜性。



關於非歐派幾何學的一個問題

・浸　　寂・

今夏作者於研討張量之基本性質及其應用時，獨對於 Riemann Christoffel曲率張量頗感興趣，蓋由斯引發出夫空間曲度之概念，而爲相對論所重視，舊昔嘗叱吒疇壇一時之非歐派幾何學實乃其一特殊情形也，撫今追昔，似尙有重彈舊調之興，因爰引一例與讀者諸君共享之。

坊間所出之非歐派幾何學書籍，多只限於2維空間之討論，即論列波里愛 (Janos Bolyai) 和羅巴切夫斯基之雙曲式平面幾何及平面解析幾何，以及黎曼 (Benhard George Friedrih Riemann) 之橢圓式平面幾何及平面解析幾何。然依義大利幾何大師 Beltrami 氏之闡述：前述二種幾何只不過是 Gauss 曲率各爲負常數及正常數之2維解析流形 (analytical manifolds) 上之幾何，而將其測地線 (Geodesics) 看成直線而已，試見其名著："Saggio Di Interpret azione Della Geometria Non Euclidea" Giorn. Mat. 6 (1868年) 284頁—312頁

又依德國大數學家希爾伯特（David Hilbert）之發現：謂波羅二氏之2維處處正則之流形不可能存在於歐氏3度空間內，故稱之爲虛幾何學；然黎曼氏之2維處處正則之流形却可以存在於歐氏3度空間內，即球面是也，故其內容與球面幾何完全一致，委細參見：

Blaschke: Vorlesungen uber Differentialgeometrie I, Willmore Differential Geometry. 1959

今本文所作，將推出非歐氏立體幾何之空間結構，即有所謂之Riemann公式，此坊間出版之書雖有提及然均未加以導出之。

座標曲線構成三重直交之三維可微分流形（Differentiable Manifolds）其線素必可書成下列形式：

$$ds^2=G_{11}(du^1)^2+G_{22}(du^2)^2+G_{33}(du^3)^2$$

注意：在下文中u^i之右上角i並非表冪，只是一種標數（index）而已，其冪如u^3之平方寫成 $(u^3)^2$

欲此空間爲定常數曲率之空間，則其由Riemann Christoffel曲率張量所導來之純量曲率（Scalar Curvature）必爲常數K，且有：

當$K>0$ 則爲B.G.F. Riemann氏之空間

當$K=0$ 則爲Euclid氏之平直空間

當$K<0$ 則爲Balyai-Lobachevsky氏之空間然關於3維流形時，純量曲率S定義爲：

$$S=-{}^1/_6\sum_{i,j,k,l=1}^{3}R_{ij,kl}G^{il}G^{jk}$$

其中諸$R_{ij,kl}$,乃Riemann-Christeffol曲率張量之子量，此流形上之度量（metric）爲

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{3}G_{ij}\,du^i\,du^j$$

以 $$G^{ij}=\frac{G_{ij}\text{ 之餘因式 (cofactor)}}{|G_{ij}|}$$

且有：

$$R_{ij,kl}=\frac{\partial\Upsilon_{ik,j}}{\partial u_l}-\frac{\partial\Upsilon_{il,j}}{\partial u^k}+\sum_{s=1}^{3}\Upsilon_{il,s}\Upsilon_{jk}{}^{s}-\sum_{s=1}^{3}\Upsilon_{ik,s}\Upsilon_{jl}{}^{s}$$

諸Υ爲Christoffel符號，意義如下：

$$\Upsilon_{ij,k}={}^1/_2\left(\frac{\partial G_{jk}}{\partial u^i}+\frac{\partial G_{ik}}{\partial u^j}-\frac{\partial G_{ij}}{\partial u^k}\right)$$

$$\Upsilon_{ij}{}^{s}=\sum_{l=1}^{3}G^{sl}\Upsilon_{ij,l}$$

採用上線素 $ds^2=G_{11}(du^1)^2+G_{22}(du^2)^2+G_{33}(du^3)^2$後

$$|G_{ij}|=\begin{vmatrix}G_{11}&0&0\\0&G_{22}&0\\0&0&G_{33}\end{vmatrix}=G_{11}G_{22}G_{33}$$

故 $$G^{11}=\frac{1}{G_{11}},\quad G^{22}=\frac{1}{G_{22}},\quad G^{33}=\frac{1}{G_{33}}$$

而S則書成

$$S=-{}^1/_6\sum_{i,j=1}^{3}R_{ij,ij}G^{ii}G^{jj}$$

即$S=-{}^1/_6\{R_{12,12}G^{11}G^{22}+R_{13,13}G^{11}G^{33}+R_{21,12}G^{22}G^{11}+R_{23,23}G^{22}G^{33}+R_{31,13}G^{33}G^{11}+R_{32,23}G^{33}G^{22}\}$上述（$R_{ij,ij}$）實爲一個Einstein型之張量！

再依上述$R_{ij,kl}$之定義逐一計算，可得一大串之式子，今不擬一一列舉，今吾人希望此空間能與三度歐氏空間成保角對應（Conformal）則必$G_{11}=G_{22}=G_{33}=P^{-2}$，茲更假定$P=p(\gamma^2)$ $\gamma^2=(u^1)^2+(u^2)^2+(u^3)^2$則$G^{11}=G^{22}=G^{33}=p^2$，現需求者乃純量曲率$S=K=$常數。依上$\rho=p(\gamma^2)$之假定可得一偏微分方程：

$$K=-p^4/6\left[2\left(\frac{\partial^2}{(\partial u^1)^2}+\frac{\partial^2}{(\partial u^2)^2}+\frac{\partial^2}{(\partial u^3)^2}\right)\left(\frac{1}{p^2}\right)-\frac{6p^2}{4}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial u^3}\left(\frac{1}{p^2}\right)\right)^2\right\}\right]$$

解之得：$\rho=1+\frac{K}{4}[(u^1)^2+(u^2)^2+(u^3)^2]$ 今以 $x=u^1, y=u^2, z=u^3$,得非歐氏三維空間之度量(metric)爲$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{\{1+\frac{K}{4}(x^2+y^2+z^2)\}^2}$$

注意此爲局部者，此公式爲 Riemann 精心研究出者。

由是觀之，欲探究彎曲之空間歐氏幾何時有所窮，故需替以此張量爲工具之黎曼流形之幾何學也，Einstein氏謂絕對微分學眞正勝利，實有其源由哉！