核分裂的液體滴模式(Liquid drop model)淺談

李文忠

本文主要涉及有關位能圖樣(potential energy mapping)的一些問題。

此種模式主要由 Bohr 與 Wheeler 等人發展用以說明核分裂過程,它本身所須要用的數學不太簡單,並且尚不能說明核分裂時質量分離的不對稱性,但它可圓滿地解釋反應的一些性質,目前有關核分裂的正確理論尚未發展(至1969年)。

L. D. 模式主要以液體滴的運動來描述原子核,故有一些基本的假設,⑴假設對於某原子核的核子數目够大而不必考慮個別的核子(此點已表示此模式對於輕原子核不適用)。⑵核子類似硬球以最密堆積排列而其間由短距的核子力(與電荷無關)相結合,此點假設電荷均勻分佈,事實上電子散射實驗的結果與原子核四極子(quadrupole)的存在顯示此假設不盡正確。⑶原子核不可壓縮 $R=bA^{1/3}$,A 卽是質量數,此假設已有實驗上的證明。⑷ Shell 效應可不考慮,但是目前的研究顯示不可壓縮性與電荷之不均勻分佈與 Shell 效應有關。基於上述一些假設可以古典力學的方法分析與原子核運動有關的三項能量卽內部結合能 E_v,表面能量 E_s 與庫倫能量 E_c,另外尚有二項與對稱有關的能量 E_{sy} 和偶合能量(pairing energy)$\delta(A, Z)$,而其總能量依次如下:

$$E=-6UA+4\pi b^2OA^{2/3}+3Z^2e^2/5bA^{1/3}+6UK(D^2/A)+\delta(A, Z)$$

其中 O 是表面張力,U 是核子結合能與氘之結合能「類似」,而 K 是常數與交換力(exchange force)有關,D=N−Z,N 是中子數,而 $\delta(A, Z)$ 之值爲負,若 A, Z 均偶數,爲正若 A 偶 Z 奇,爲 0 若 A 奇數。上述式子主要在於討論E與 A, Z 與D的關係,故可改寫成所謂「半實驗性的公式」(semi-empirical formula)。

$$E^w=-a_1A+a_2A^{2/3}+a_3(Z^2/A^{1/3})+(a_4/4)(D^2/A)+\delta(A, Z)$$

本式主要由 Weiszäcker 發展而由 Fermi 所提出。Eisberg 的書有較詳細的公式。因此公式與本文關係不太大故到此打住不再討論。

以下討論 LDM 的動力問題,由於以短距力相結合的核子有加大核子鍵數目的趨勢以達到穩定狀態,因此原子核的穩定形狀如球體與水滴相似,當此球體發生微小的變形時(若原子核得到激動能),則其發生振動,若激動能够大(卽大於核子反應的活化能)則核子卽「振」成若干「碎片」,若激動能不大則原子核以類似中子放射的方式放出部分激動能,當激動不大則該變形體的半徑 R 可表成:

$$R(\theta)=R_0/\lambda[1+\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_n(t)P_n(\cos\theta)]$$

(對橢圓球展開,n 偶數)

R_0 是原來球體半徑,λ 是常數與不可壓縮性有關,P_n 是 Leqende 多項式。則其總能量(Hamiltonian)可寫成:

$$H=\sum_2^{\infty}\frac{1}{2}C_n\alpha_n^2+\sum_2^{\infty}\frac{1}{2}B_n(\dot{\alpha}_n)^2$$

其中 $B_n=\left[\frac{4\pi}{5}\rho R_0^5\cdot\frac{1}{n}\right]5/2n+1$

$$C_n=[4\pi R_0^2S\cdot\frac{1}{5}(n-1)(n+2)-\frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{R_0}\cdot 2\cdot(n-1/2n+1)]5/2n+1$$

ρ 是質量密度

欲完全地解決 L. D. 的運動的一些動力學上的計算須先了解下列四方面的正確資料:⑴位能圖樣,卽視位能爲變位坐標 α_n 的函數,且位能亦是分裂性

參數 x 的函數，而 x 定義為：

$$x=E_C^0/2E_S^0=Z^2A/50.13$$

事實上原子核的變形振動導至 E_C 的減小與 E_S 的加大，例如對於微小的對稱性變形而言：

$$R(\theta)=R_0[1+\alpha_2P_2(\cos\theta)]$$

而其庫倫能與表面能如下：

$$E_C=E_C^0(1-\frac{1}{5}\alpha_2^2+\text{高次項})$$

$$E_S=E_S^0(1+\frac{2}{5}\alpha_2^2+\text{高次項})$$

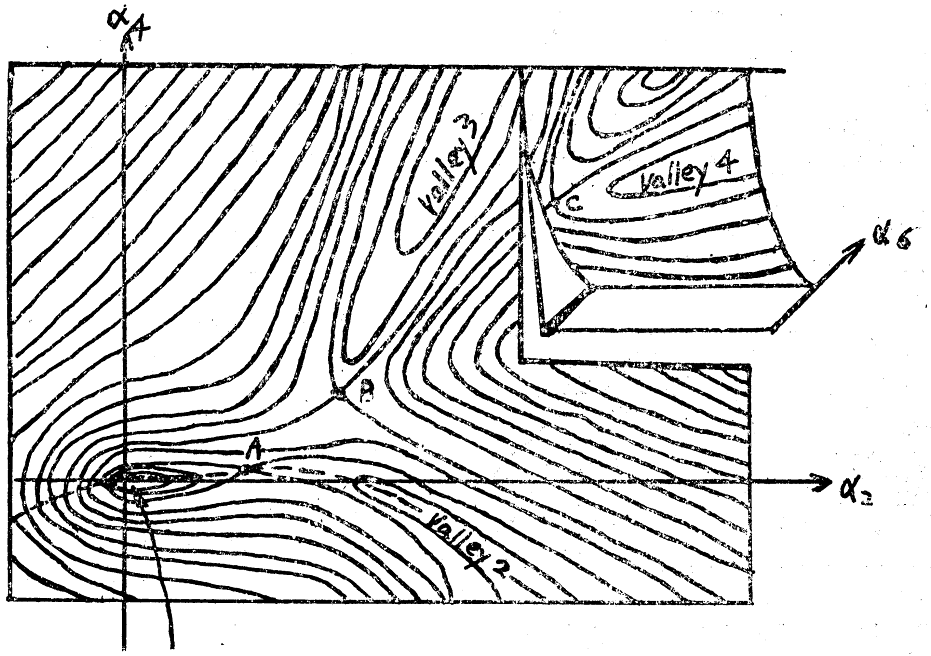
故變形引起的能量改變 $\Delta V=V-V$（球體）為

$$\Delta V=(E_S-E_S^0)+(E_C-E_C^0)$$

$$=\frac{1}{5}\alpha_2^2(2E_S^0-E_C)+\text{高次項}$$

顯然此 L. D. 對於 $2E_S^0>E_S$ 而言穩定，對 $2E_S^0\approx E_C^0$ 而言不穩定，事實上 x 正可定性地描述原子核的穩定性，例如 U^{238} 的 x 值是 0.7099，而 Bi^{209} 是 0.6575 顯然鈾較易發生分裂。(2)動能圖樣，視動能為 α_n 的函數。(3)運動方程式的解，理論上可由給予一組初步條件解之，再適當地加以量子化。(4)分裂反應之統計力學，即有關分裂速率，動能與激動能在碎片上的分佈等問題（採用 statistical model 時）。上述四個基本必知資料中我們討論第一項位能圖樣。

對於微小變形的 L. D. 而言，其位能圖樣大致如下：（圖一）



形球　　　　圖　一

圖中之坐標 α 係變位坐標即

$$R=R_0[1+\sum_{n=2}\alpha_nP_n(\cos\theta)]$$

中的 α_n，而其原點顯為球形（不變形）。

而位能的公式是：

$$V(\alpha)=\frac{1}{2}\sum_{n=2}C_n\alpha_n^2,\qquad n\ (\text{even})$$

$$C_n=\left[4\pi R_0^2S\cdot\frac{1}{5}(n-1)(n+2)-\frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{R_0}\cdot\frac{2(n-1)}{2n+1}\right]\frac{5}{2n+1}$$

圖形中之線可視為 V或 ΔV 之等位線，其中有三處谷與 A, B, C 三個鞍點 (saddle point)，其中谷 4, 2, 3 分別表示核分裂成 4, 2, 3「塊」碎片，由圖中顯然對位能大小而言 C>B>A，分裂成二片顯比分裂成三片或四片容易，（但不一定如此，見後）。

Swiatecki 曾提出一項有關分裂成 n 片的 ΔV 公式：

$$\Delta V_n=E_S^0[(n^{1/3}-1)+2x(1/n^{2/3}-1)]$$

ΔV_n 是放出來的總能量，x 是分裂性參數。若干計算顯示當 x 值 0.65 在 0.80 之間時（包括所有重原子核從 Bi^{209} 至 Fm^{254}），並無理由限制核分裂成兩片，因為 3, 4, 5 或 6 片碎片的形成可放出更多的能量。因此以 x→1 的理論計算的結果來解釋 x=0.7～0.8 的現象是不正確的，由此正確的位能圖樣與動能圖樣才可能得到充分的資料以預測分裂

的可能方法。

一般來說定量地計算位能（α_n 的函數）所用的數學方法有下列幾種：(1)對球形展開以 Legendre 多項式對變形體予以描述即

$$R=R_0[1+\sum_{n=1}\alpha_n P_n(\cos\theta)],\quad n \text{ 自然數}$$

求知各 α_n 之值。(2)以高速計算機計算，理論上以計算機的方法而言可不必限制在 Legendre 展開式，任何適當的坐標皆可。(3)對楕球體展開，即以

$$R(\theta)=R_0/\lambda\cdot[1+\sum_{2}^{\infty}\alpha_n P_n]$$

其中 n 是偶數，$R(\theta)$ 是半徑向量自原點至面上任何點，上述中的 α_n 係數與離心率有關，當離心率為 0 時，上述變成對球形展開。(4)其他非楕球形的計算，事實上對於一些軸對稱的形狀而言，Leqendre 多項式展開不盡適用，因此其他形狀或可能較適用。由上述各方法對於 x 值在 0.8～1.0 而以 α_2, α_4 為坐標之位能的值可理想地得到，而其鞍點之能量可表成下式：

$$(\Delta V/E_s^0)_{s.p}=0.7259(1-x)^3-0.3302(1-x)^4+1.9208(1-x)^5-0.2125(1-x)^6+\cdots$$

一般來說鞍點之位能可視為該反應之活化能，當代入各原子核之 x 值及 E_s^0 值時與實驗值比較則可得下表：

原子核	Z^2/A	x	E 活化 (Mev)	Eobs (Mev)
Th^{232}	34.914	0.6969	15.08	5.95
Th^{233}	34.764	0.6939	15.58	6.44
Pa^{232}	35.694	0.7125	12.68	6.18
U^{233}	36.326	0.7251	10.96	5.49
U^{235}	36.017	0.7189	11.79	5.75
U^{237}	35.713	0.7129	12.63	6.40
U^{238}	35.563	0.7099	13.06	5.80
U^{239}	35.414	0.7069	13.51	6.15
Np^{237}	36.494	0.7285	10.53	5.49
Np^{238}	36.340	0.7254	10.92	6.04
Pu^{239}	36.971	0.7380	9.39	5.48

明顯地，理論值與實驗值相差甚大，且實驗值皆較理論值為小，且對值的變化而言實驗值變化不大，事實上，上述所得的活化能是古典的方法而來的，須要加上量子力學的修（如 barrier penetration），但此修正正對結果影響不大。

前面已討論了鞍點位能與 α_n 及 x 的關係及在上一段所述及的不理想結果，但是近年來以計算機經過更詳細的計算發現一件新的結論，此結論可由下列圖中更清楚的表現出來：（圖二）

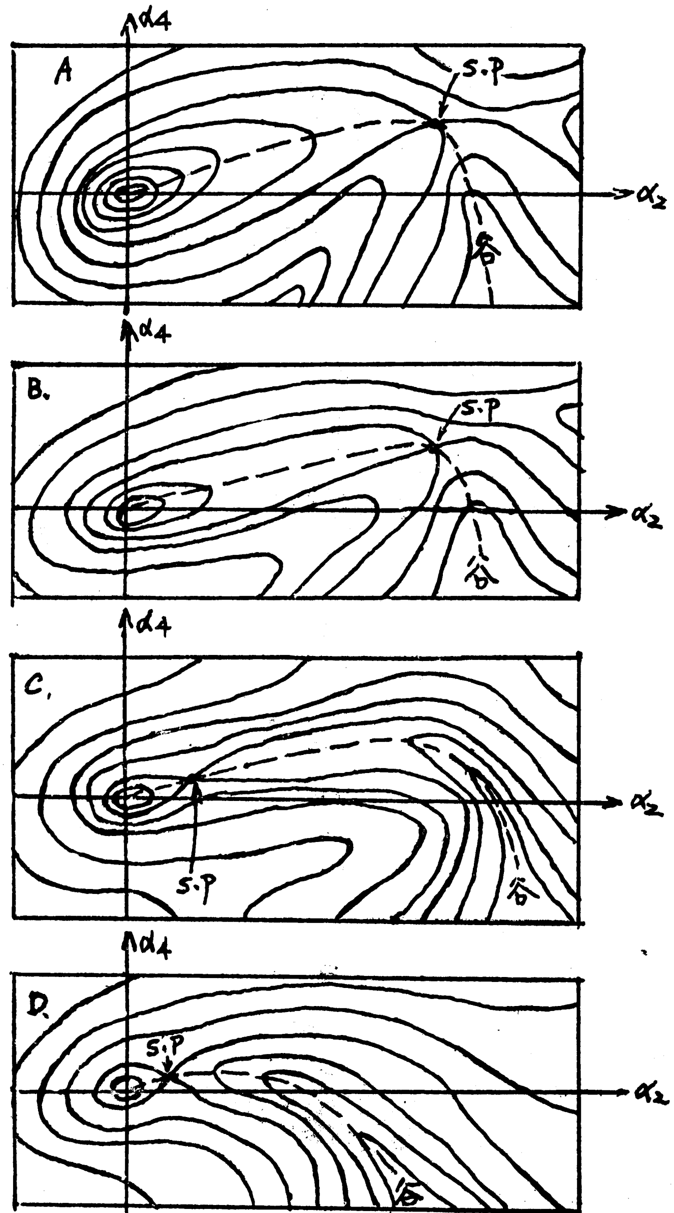
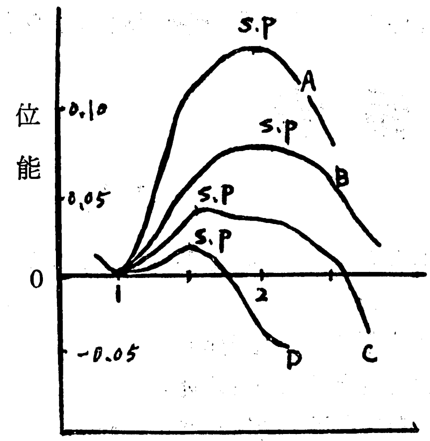


圖 二

圖二中 A, B, C, D 依次的 x 值約為 0.5, 0.69, 0.8，而谷表示分裂成二塊碎片，顯然地，當 x 值加大則鞍點逐漸靠近原點，而 L.D. 沿着圖中虛線路徑（即逐漸變形至分裂）的位能可表如下圖(3)，本圖可以當做如在高中化學中的化學反應位能圖，其中對位能障礙 (energy barrier) 而言，A, B,



變 形 R_{max}/R_0

圖 三

C, D 依次減小如圖二所示。即當 x 值愈大則不須太大的能量即可使原子核變形成相對於鞍點的凹頸形狀 (neck-in shape)，當變形通過鞍點則迅即放出位能而分成兩塊。

本文中並未談及非對稱的變形（即 α_n 的 n 爲奇數），事實上目前對於 x 值小於 0.8 的原子核其在鞍點時對於非對稱變形是否穩定的問題尚未解決。且無法從鞍點的形狀與位能或位能圖樣來說明核分裂時分離質量的不對稱。至於有關核分裂的處理方法如動能圖樣及統計力學方法不在本文之內。

明顯地 L.D.M.，本身是一種集體性 (collective)的模式，其忽略了Shell 效應而與 Nuclear Shell Model 的出發點不同，但此已由 A. Bohr（此 Bohr 乃前面所提的 N. Bohr 的兒子）與 Mottelson 等人綜合 L.D.M. 與 N.S.M. 而發展成所謂的 Unified Nuclear Model 或 Collective Model。至於 Nuclear Shell Model 與 Unified Nuclear Model 的詳細討論可參考所列的參考書。

目前對核分裂尚無完全的理論可以處理，目前尚在從事各方面的努力，方向是由 Hamiltonian operator 來描述一理想化模型再加以有系統的靜力學、動力學及統計的方法處理。

本文大部參考下列書本，筆者主要目的在於引起一般人對此問題的注意，故文中結構並不嚴謹完整，有興趣者可參考下列各書及書內所列之論文。

附：感謝林清凉老師給我們的 outline 及修正了一些觀念，並提供了有關 L.D.M. 之 Shell effect 的討論的資料 (Nuclear Phys, A95 (1967) 420 by Strutinsky)

參考書：

Green: Nuclear physics, 1955.

Hyde: The properties of the heavy elements, Vol. III; Fission Phemomena, Vol. 1, Systematics of Nuclear Structer and Radioactivity, 1964.

Preston: Physics of the Nucleus, 1962.

Burcham: Nuclear Physics, 1963.

Bohr & Mottelson: Nuclear Structure 1969.

胡特曼 (Houtermans) 和阿特根生 (Atkinson) 在一九二七年完成了氫的融合反應方程式後，有一天胡特曼回憶道：我們完成論文的那天晚上，我和一位漂亮的女孩子在外面散步。天黑了以後，繁星點點而出，耀眼閃爍，我的友朋滿心歡悅，叫著說：「好美的星星！」我挺了挺胸，驕傲的說：「就在昨天，我知道了它們爲什麼發亮！」。

× × ×

第一顆原子彈在廣島爆炸以後，日本最有名的原子物理學家仁科芳雄 (Yozhio Nishina) 立即被請到參謀總部。仁科芳雄在1920年間曾在 Bohr 手下研究過，並和 Bohr 的另一名學生導出有名的 Klein-Nishina Formula。教授一到，副參謀總長川邊 (Kwabe) 就問：「你能不能在六個月內造出一顆原子彈？如果情況允許，我們也許還能够支持那麼久。」

× × ×

勞倫斯 (Ernest Lawrence) 在 1929 年發明迴旋加速器 (Cyclotron) 時年僅二十八歲，很快就出了名，他是一位不眠不休的工作者，他領導許多助手和研究生工作。並且不斷的驅使他們保持進度，有一次他忍不住當場開除一個人，因其工作精神太差，後來發現起個人原來是臨時請來修理電話的工人。