

# 代数幾何まとめノート

Fefr

2024 年 7 月 3 日



# 目次

---

第 1 章	Scheme	5
1.1	Zariski Topology . . . . .	5
1.2	Algebraic Sets . . . . .	5
1.3	Sheaves . . . . .	5
1.4	Ringed Topological Space . . . . .	13
1.5	Schemes . . . . .	16
付録 A	Limit	19
A.1	Inductive Limit . . . . .	19
付録 B	Category Theory	21



# Scheme

## 第 1 章

### 1.1 Zariski Topology

atodekakuyo

### 1.2 Algebraic Sets

atodekakuyo

### 1.3 Sheaves

**Definition 1.3.1.**  $X$  を位相空間とする.  $X$  上の (アーベル群の) 前層 (presheaf)  $\mathcal{F}$  とは次のデータ

- $U$  を任意の  $X$  の開集合に対して  $\mathcal{F}(U)$  はアーベル群.
- 制限写像 (restriction map) と言われる群準同型  $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  が任意の開集合  $V \subset U$  に対して存在する.

そして次の条件を満たす.

- (1)  $\rho_{U,U} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$
- (2) 任意の開集合  $W \subset V \subset U$  に対して  $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$  となる.

$s \in \mathcal{F}(U)$  を  $U$  上の  $\mathcal{F}$  の切断 (section) という. また,  $\rho_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$  を  $s|_V$  と書いて  $s$  の  $V$

への制限という.

また, 単に  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$  などと書いたら (前) 層を表すことや、 $\rho$  と書いたら制限写像を意味する。また, どの (前) 層の制限写像かを明示するため, 例えば,  $\rho_{U,V}^{\mathcal{F}}$  などと書くことがある。

**Definition 1.3.2.** 前層  $\mathcal{F}$  が層 (sheaf) とは次の条件を満たすことをいう。

- (4) (Uniqueness)  $U$  を  $X$  の開集合とし  $\{U_i\}_i$  をその開被覆とする.  $s \in \mathcal{F}(U)$  が任意の  $i$  に対して  $s|_{U_i} = 0$  ならば  $s = 0$
- (5) (Glueing local sections) 上の状況で,  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  が  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  を満たすならば,  $s|_{U_i} = s_i$  を満たす  $s \in \mathcal{F}(U)$  が存在する。

**Remark .**  $\mathcal{F}$  が層ならば  $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$  となる。

**Example 1.3.1.**  $X$  を位相空間とする。

$\mathcal{C}_X^0$  を  $X$  の開集合  $U$  に対して  $U \rightarrow \mathbf{C}$  なる連続写像全体の集合  $\mathcal{C}_X^0(U)$  を対応させるものとし, 制限写像を普通の制限とする. すると,  $\mathcal{C}_X^0$  は  $X$  上の層となる。

**Proof.**  $V \subset U$  なる開集合  $U, V$  に対して  $U$  上の連続写像  $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$  を  $V$  に制限することによって得られる  $V$  上の連続写像を  $\rho_{U,V}(f) (= f|_V)$  と書く. すると, これは  $\mathbf{C}$  上のベクトル空間 ( $\mathbf{C}$  上の関数空間) の準同型  $\rho_{U,V} : \mathcal{C}_X^0(U) \rightarrow \mathcal{C}_X^0(V)$  となる. つまり  $(\mathcal{C}_X^0, \rho)$  は前層となる。

また, (4) を満たすのは明らかで, (5) もすぐに成り立つことがわかる.  $\{U_i\}_i$  を  $U$  の開被覆とする.  $f_i \in \mathcal{C}_X^0(U_i)$  が  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  を満たすとする. するとそれらを張り合わせた関数を  $f$  とすればこれは  $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$  であり,  $f|_{U_i} = f_i$  となる. よって  $(\mathcal{C}_X^0, \rho)$  は層となる. これを連続写像が成す層という. ■

**Example 1.3.2.**  $X$  を位相空間とする。

$A$  を自明でないアーベル群とする.  $\mathcal{A}_X$  を  $X$  の空でない開集合  $U$  に対して  $\mathcal{A}_X(U) = A$  に, 空集合  $\emptyset$  に対して  $\mathcal{A}_X(\emptyset) = 0$  に対応させるものとし, 制限写像を空でない開集合  $V \subset U$  に対して  $\rho_{U,V} = \text{id}_A$  とし,  $\rho_{U,\emptyset} = 0$  とする。

すると,  $(\mathcal{A}_X, \rho)$  は  $X$  上の前層にはなるが, 一般に層とはならない。

**Proof.** 例えば,  $X$  が連結でないとする, 非交差な開集合  $U, V$  があって  $X = U \cup V$  とかける. すると  $\{U, V\}$  は  $X$  の開被覆となる.  $s_U \in \mathcal{A}_X(U) = A$  が  $s_U|_{U \cap V} = s_U|_{\emptyset} = 0 = s_V|_{U \cap V}$  を満たすとする. このとき, 任意の  $s \in \mathcal{A}_X(X) = A$  で  $s|_U = s|_V = s$  となり層とならない. ■

**Example 1.3.3.** (skyscraper sheaf)

$X$  を位相空間、 $A$  をアーベル群とする。 $p \in X$  に対して  $i_p: \{p\} \hookrightarrow X$  を包含写像とする。このとき  $i_{p,*}A$  を

$$i_{p,*}A(U) = \begin{cases} A & p \in U \\ 1 & p \notin U \end{cases}$$

と定義する。これは層になる。

**Remark .**  $\mathcal{B}$  を位相空間  $X$  の開基で有限交叉で閉じているものとする。(つまり任意の  $U, V \in \mathcal{B}$  に対して  $U \cap V \in \mathcal{B}$ . e.g.  $\text{Spec } A$  の開基  $\{D(f)\}_f$ ) このとき  $\mathcal{B}$ -前層 ( $\mathcal{B}$ -presheaf)  $\mathcal{F}'$  とは

- $U \in \mathcal{B}$  に対して  $\mathcal{F}'(U)$  はアーベル群.
- $V \subset U \in \mathcal{B}$  に対して群準同型  $\rho_{U,V}: \mathcal{F}'(U) \rightarrow \mathcal{F}'(V)$  が定まる.

としたもの.

$\mathcal{B}$ -層 ( $\mathcal{B}$ -sheaf)  $\mathcal{F}'$  から  $X$  上の層  $\mathcal{F}$  を作ることができる.

位相空間  $X$  の任意の開集合  $V$  に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(V) &= \varprojlim_{\substack{U \in \mathcal{B} \\ U \subset V}} \mathcal{F}'(U) \\ &= \left\{ (s_U)_U \in \prod_{\substack{U \in \mathcal{B} \\ U \subset V}} \mathcal{F}'(U) \mid \forall U' \subset U \in \mathcal{B}, s_U|_{U'} = s_{U'} \right\} \end{aligned}$$

と定める. 制限写像は射影極限から誘導される射である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{\rho_{U,U'}} & \mathcal{F}'(U') \\ \uparrow \varphi_U & \circlearrowleft & \uparrow \psi_{U'} \\ \varprojlim_U \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{f} & \varprojlim_{U'} \mathcal{F}'(U') \end{array}$$

これが層となることを確かめよう. まず, 任意の開集合  $V$  とその開被覆  $\{U_i\}_i \subset \mathcal{B}$  をとる.  $s \in \mathcal{F}(V)$  に対して  $s|_{U_i} = 0$  とする. すると定義から  $U \subset V$  なる任意の  $U \in \mathcal{B}$  に対して  $s_U \in \mathcal{F}'(U)$  が 0 であることを示せば  $s = 0$  ということである. 実際  $V$  の開被覆から  $U$  の開被覆  $\{U \cap U_i\}_i \subset \mathcal{B}$  が得られる. また任意の  $i$  に対して  $U \cap U_i \subset U_i$  より  $s_{U_i}|_{U \cap U_i} = s_{U \cap U_i} = 0$  となる. (いま  $s_{U_i}$  は  $s|_{U_i}$  のこと) したがって任意の  $i$  に対して  $s_U|_{U \cap U_i} = 0$  となる. いま  $\mathcal{F}'$  は層なので  $s_U = 0$  よって  $s = 0$  がわかった.

また,  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  が  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  を満たすとする. よって,  $U_i \cap U_j \in \mathcal{B}$  より

**Definition 1.3.3.** 位相空間  $X$  上の前層  $\mathcal{F}$  と  $x \in X$  に対して,  $x$  での  $\mathcal{F}$  の茎 (stalk)  $\mathcal{F}_x$  という群が定義できる.

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

ただし,  $U$  は  $x$  の開近傍をすべてを回る  $U$  上の切断  $s \in \mathcal{F}(U)$  に対して  $x \in U$  の茎  $\mathcal{F}_x$  への自然な群準同型の像を  $s_x$  と書いて,  $x$  での  $s$  の芽 (germ) という.

**Lemma 1.3.4.**  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の層とする.  $s, t \in \mathcal{F}(X)$  が任意の  $x \in X$  に対して  $s_x = t_x$  ならば  $s = t$

**Proof.** 差を考えれば  $t = 0$  のときを考えればいい.  $s_x = 0$  ( $\forall x \in X$ ) とすると,  $x$  の開近傍  $U_x$  があって  $s|_{U_x} = 0$  となる.  $\{U_x\}_{x \in X}$  は  $X$  の開被覆なので,  $s = 0$  となる. ■

**Definition 1.3.4.**  $X$  上の 2 つの前層  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  とする. 前層の射  $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  とは,  $X$  の開集合  $U$  に対して群準同型  $\alpha(U): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  があって, 任意の開集合の組  $V \subset U$  に対して  $\alpha(V) \circ \rho_{U,V}^{\mathcal{F}} = \rho_{U,V}^{\mathcal{G}} \circ \alpha(U)$  を満たすことをいう.  $X$  の任意の開集合  $U$  に対して  $\alpha(U)$  が単射ならば  $\alpha$  は単射であるという. (全射はうまくいかんっぽい?)

$\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を  $X$  上の前層の射とする. 任意の  $x \in X$  に対して  $\alpha$  から自然に誘導される群準同型  $\alpha_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  で  $(\alpha(U)(s))_x = \alpha_x(s_x)$  が  $X$  の任意の開集合  $U, s \in \mathcal{F}(U), x \in U$  で成り立つものが取れる.

$\alpha_x$  が任意の  $x \in X$  で全射なら  $\alpha$  が全射であるという.

**Example 1.3.5.**  $X = \mathbf{C} \setminus \{0\}$  とし  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の正則関数がなす層とし,  $\mathcal{G}$  を  $X$  上の双正則関数のなす層とする. 今, 任意の開集合  $U$  と任意の  $f \in \mathcal{F}(U)$  に対して  $\alpha(U)(f) = \exp(f)$  で定義される層の射  $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  が全射であることはよく知られている. しかし  $\alpha(X): \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$  は全射ではない. 例えば恒等写像は  $\exp(f)$  と書けない.

**Proposition 1.3.6.**  $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を  $X$  上の層の射とする.

$$\alpha \text{ が同型} \Leftrightarrow \alpha_x \text{ が同型 } (\forall x \in X)$$

**Theorem 1.3.7.** 位相空間  $X$  上の前層  $\mathcal{F}$  に対して, 前層  $\mathcal{F}$  の層化 (sheafification)  $\mathcal{F}^\dagger$  は存在する.

**Proof.**  $X$  の開集合  $U$  に対して

$$\mathcal{F}^\dagger(U) = \left\{ \sigma: U \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid \forall x \in U, x \in \exists V \subset U: \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(V) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in V) \right\}$$



とする. ただし,  $\sigma$  は任意の  $x \in U$  に対して  $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$  とする. また,  $V \subset U$  なる開集合に対し,

$$\begin{array}{ccc} \rho_{U,V}^{\mathcal{F}^\dagger} : \mathcal{F}^\dagger(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}^\dagger(V) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \sigma & \longmapsto & \sigma|_V \end{array}$$

が定義できる. 実際, 任意の  $x \in V$  をとる.  $V \subset U$  であり,  $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  より

$$x \in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0)$$

$V_0 = U_0 \cap V$ ,  $t = s|_{V_0}$  とすると任意の  $y \in V_0$  に対して

$$\sigma(y) = \sigma|_V(y) = s_y$$

さらに帰納極限の定義から

$$\sigma|_V(y) = t_y$$

次に  $\mathcal{F}^\dagger(U)$  がアーベル群, つまり  $\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  ならば  $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  を示そう.

$\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  より任意の  $x \in U$  に対して

$$x \in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0)$$

$$x \in \exists V_0 \subset U : \text{open}, \exists t \in \mathcal{F}(V_0) \text{ s.t. } \tau(z) = t_z \ (\forall z \in V_0)$$

を満たす. いま  $W = U_0 \cap V_0$ ,  $s' = s|_W$ ,  $t' = t|_W$  とすると,

$$\begin{aligned} x \in W \subset U : \text{open}, s', t' \in \mathcal{F}(W) \text{ s.t. } (\sigma + \tau)(y) &= \sigma(y) + \tau(y) \\ &= s_y + t_y \\ &= (s + t)_y \ (\forall y \in W) \end{aligned}$$

よって  $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  また明らかに可換. よって  $\mathcal{F}^\dagger(U)$  はアーベル群.

また, 通常の制限で制限写像を定義しているため,  $\mathcal{F}^\dagger$  は前層となる.

更に層となることを示そう.

$U$  を  $X$  の開集合とし,  $\{U_i\}_i$  をその開被覆とする.  $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  が任意の  $i$  に対して  $\sigma|_{U_i} = 0$  とする. つまり任意の  $x \in U_i$  に対して  $\sigma(x) = 0$  とする.  $U_i$  は  $U$  を被覆するので結局  $\sigma = 0$  となる.

次に,  $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$  とし,  $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}$  と仮定すると,

$$\begin{array}{ccc} \sigma : U & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x & \longmapsto & \sigma_i(x) \end{array}$$

ただし,  $x \in U_i$ . すると,  $\sigma$  は  $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$  を張り合わせて作っているなのでこれは  $\sigma \in \mathcal{F}(U)$  となることが容易にわかる. よって,  $\mathcal{F}^\dagger$  は層になる. ■

**Proposition 1.3.8.** 層化の射  $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\dagger$  に対して、その茎の射  $\theta_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^\dagger$  は同型である。

**Lemma 1.3.9.**  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の層とし、 $\mathcal{F}'$  を  $\mathcal{F}$  の部分層とする。このとき開集合  $U$  を  $\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$  に対応させるものは前層になる。

**Proof.** この対応を  $\mathcal{G}$  とおく。  $V \subset U$  なる開集合  $U, V$  をとる。制限写像を

$$\begin{array}{ccc} \rho_{U,V}^{\mathcal{G}} : \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V)/\mathcal{F}'(V) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ s + \mathcal{F}'(U) & \longmapsto & \rho_{U,V}^{\mathcal{F}}(s) + \mathcal{F}'(V) \end{array}$$

とすると、これは well-defined である。また、 $U \subset V \subset W$  なる開集合の組に対して

$$\rho_{U,W}^{\mathcal{G}} = \rho_{V,W}^{\mathcal{G}} \circ \rho_{U,V}^{\mathcal{G}}$$

が成り立つことは制限写像の定義から明らかである。よって  $\mathcal{G}$  は前層。 ■

**Definition 1.3.5.** Lem:??で定義した前層の層化を  $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$  と書いて、商層 (quotient sheaf) という。

**Definition 1.3.6.**  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を前層の射とする。このとき開集合  $U$  に対して  $U \mapsto \text{Ker}(\alpha(U))$  とするものは  $\mathcal{F}$  の部分層になる。これを  $\text{Ker } \alpha$  と書いて、 $\alpha$  の核 (kernel of  $\alpha$ ) という。

更に、 $U \mapsto \text{Im}(\alpha(U))$  は一般には前層となるので、この層化を  $\text{Im } \alpha$  と書いて、 $\alpha$  の像 (image of  $\alpha$ ) という。

また、 $U \mapsto \text{Coker}(\alpha(U)) = \mathcal{G}(U)/\text{Im}(\alpha(U))$  は一般には前層となるので、この層化を  $\text{Coker } \alpha$  と書いて、 $\alpha$  の余核 (cokernel of  $\alpha$ ) という。

**Lemma 1.3.10.**  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  を  $X$  上の層、 $\mathcal{F}'$  を  $\mathcal{F}$  の部分層、 $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を前層の射とする。このとき、

$$\begin{aligned} (\text{Ker } \alpha)_x &= \text{Ker } \alpha_x \\ (\text{Im } \alpha)_x &= \text{Im } \alpha_x \\ (\text{Coker } \alpha)_x &= \text{Coker } \alpha_x \\ (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x &= \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x \end{aligned}$$

が成り立つ。

**Proof.**  $\mathcal{Q}(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$  とおく。

このとき、アーベル群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

が作れる。帰納極限は完全列を完全列に移すので、また Prop:?? より

$$0 \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

を得る。よって

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x \longrightarrow 0$$

したがって、

$$\mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x \simeq (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x$$

を得る。

次に

$$\begin{aligned} (\text{Ker } \alpha)_x &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha(U)(s) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha_x(s_x) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \text{Ker } \alpha_x \end{aligned}$$

を得る。同様に

$$\begin{aligned} (\text{Im } \alpha)_x &= \{t_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in \exists U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U) \text{ s.t } t = \alpha(U)(s)\} \\ &= \{(\alpha(U)(s))_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \{\alpha_x(s_x) \in \mathcal{G}_x \mid s_x \in \mathcal{F}_x\} \\ &= \text{Im } \alpha_x \end{aligned}$$

を得る。また、 $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x$  より

$$(\text{Coker } \alpha)_x = (\mathcal{G}/\text{Im } \alpha)_x = \mathcal{G}_x/\text{Im } \alpha_x = \text{Coker } \alpha_x$$

■

**Definition 1.3.7.** 層の列

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

が完全とは、 $\text{Im } \alpha = \text{Ker } \beta$  が成り立つことをいう。

**Proposition 1.3.11.** 層の列に対して次が成り立つ。

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \text{ が完全} \iff \text{任意の } x \in X \text{ に対して } \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x \text{ が完全}$$

**Proof.** 明らか。 ■

**Definition 1.3.8.**  $X, Y$  を位相空間,  $f: X \rightarrow Y$  を連続写像とする。このとき、 $X$  上の層  $\mathcal{F}$ ,  $Y$  上の層  $\mathcal{G}$  に対して、新たな  $Y$  上の層  $f_*\mathcal{F}$  が

$$V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

によって定義できる。これを  $\mathcal{F}$  の順像 (direct image of  $\mathcal{F}$ ) という。

また、

$$U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

で定義できる新たな  $X$  上の前層  $f^*\mathcal{G}$  の層化  $f^*\mathcal{G}$  を  $\mathcal{G}$  の逆像 (inverse image of  $\mathcal{G}$ ) という。

**Proposition 1.3.12.** 上の状況で

$$(f^*\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)} \quad \forall x \in X$$

**Proof.**

$$(f^*\mathcal{G})_x = \varinjlim_{x \in U} (f^*\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{x \in U} \varinjlim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V) = \mathcal{G}_{f(x)}$$

最後の等号は明らか。 ■

**Remark .**  $V$  を  $Y$  の開集合とする。このとき自然な単射  $i: V \rightarrow Y$  に対して

$$i^*\mathcal{G} = \mathcal{G}|_V$$

が成り立つ。

**Proposition 1.3.13.**  $f: X \rightarrow Y$  を位相空間の間の連続写像とし、 $\mathcal{F}$  を  $X$  上の層、 $\mathcal{G}$  を  $Y$  上の層とする。このとき

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

ただし、 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  は圏  $\mathcal{C}$  で  $X \rightarrow Y$  なる射全体を表し、 $\mathrm{Sh}(X)$  は  $X$  上の層全体を表す。

**Proof.** 層化の普遍性より  $\theta: f^*\mathcal{G} \rightarrow f^*\mathcal{G} = (f^*\mathcal{G})^\dagger$  を層化の射とすると、

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ph}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \\ & \longmapsto & \tilde{\alpha} \circ \theta \end{array}$$

が成り立つ。つまり

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

を示せばいい。次に  $X$  上の開集合  $U$  に対して

$$f_*\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

なので,  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{PreSh}(X)}(f_*\mathcal{G}, \mathcal{F})$  に対して

$$\varphi(U) : \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

を与えることは帰納極限の定義より  $f(U) \subset V$  なる開集合  $V$  に対して

$$\psi'(V) : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

を  $f(U) \subset V' \subset V$  ならば,

$$\psi'(V) = \psi'(V') \circ \rho_{V', V}^{\mathcal{G}}$$

となるように与えることである。すなわち  $\psi'(V)$  は

$$\psi(V) : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

と  $\rho_{f^{-1}(V), U}^{\mathcal{F}}$  を合成したものである。(帰納系の選び方によらない。)

したがって,  $\varphi \in \text{Hom}_{\text{PreSh}(X)}(f_*\mathcal{G}, \mathcal{F})$  を与えることは,  $\psi \in \text{Hom}_{\text{Ph}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$  を与えることと等しい。■

## 1.4 Ringed Topological Space

**Definition 1.4.1.** 局所環付き空間とは位相空間  $X$  と  $X$  上の環の層  $\mathcal{O}_X$  の組  $(X, \mathcal{O}_X)$  で、任意の  $x \in X$  に対して  $\mathcal{O}_{X,x}$  が局所環となるものをいう。また、この  $\mathcal{O}_X$  を  $(X, \mathcal{O}_X)$  の構造層 (structure sheaf) という。また  $(X, \mathcal{O}_X)$  を単に  $\mathcal{O}_X$  と書くことがある。また、 $\mathcal{O}_{X,x}$  の唯一の極大イデアル  $\mathfrak{m}_x$  に対してその剰余体  $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$  を  $X$  の点  $x$  での剰余体 (residue field of  $X$  at  $x$ ) といって  $k(x)$  と書く。

**Definition 1.4.2.** 局所環付き空間の射とは

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

とは連続写像  $f : X \rightarrow Y$  と環の層の射  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  の組  $(f, f^\#)$  で、任意の  $x \in X$  に対して  $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  は局所射となるものをいう。(つまり  $f_x^\#(\mathfrak{m}_{Y, f(x)}) \subset \mathfrak{m}_{X,x}$  を満たす。)

Prop:1.3.13 より

$$f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$$

を考えることは

$$f^\# : f^* \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$$

を考えることに等しい。Def:1.4.2 の  $f_x^\#$  は下の式で考えている。

**Definition 1.4.3.** 射  $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  が開はめ込み (open immersion)(resp. 閉はめ込み (closed immersion)) とは連続写像  $f$  が開はめ込み (resp. 閉はめ込み) <sup>a</sup>でかつ任意の  $x \in X$  に対して  $f_x^\#$  が同型 (resp. 全射) のときをいう。

<sup>a</sup>  $f : X \rightarrow Y$  が (位相的) 開 (閉) はめ込みとは  $X$  と  $f(X)$  が同相で  $f(X)$  が開 (閉) 集合のときをいう。

**Definition 1.4.4.**  $(X, \mathcal{O}_X)$  を局所環付き空間とする。 $\mathcal{I}$  が  $\mathcal{O}_X$  のイデアル層 (sheaf of ideals of  $\mathcal{O}_X$ ) とは任意の開集合  $U$  に対して  $\mathcal{I}(U)$  が  $\mathcal{O}_X(U)$  のイデアルになっているときをいう。

**Lemma 1.4.1.**  $(X, \mathcal{O}_X)$  を局所環付き空間とする。 $\mathcal{I}$  を  $\mathcal{O}_X$  のイデアル層とする。そして、

$$V(\mathcal{I}) = \{x \in X \mid \mathcal{I}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$$

とおく。(ちなみに上の諸々から  $\mathcal{I}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$  が分かる。)

$j : V(\mathcal{I}) \hookrightarrow X$  を包含写像とする。すると

- $V(\mathcal{I})$  は  $X$  の閉集合
- $(V(\mathcal{I}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$  は局所環付き空間
- $j^\#$  は自然な全射

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I} = j_*(j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$$

で  $(j, j^\#) : (V(\mathcal{I}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  は閉はめ込みである。

**Proof.** Claim1.  $V(\mathcal{I})$  は  $X$  の閉集合

$x \in X \setminus V(\mathcal{I}) = \{x \in X \mid \mathcal{I}_x = \mathcal{O}_{X,x}\}$  に対して  $f_x = 1$  なる  $x$  の開近傍  $U$  と  $f \in \mathcal{I}(U)$  をとる。つまり  $f|_V = 1|_V = 1$  なる  $x$  の開近傍  $V \subset U$  がある。すると任意の  $y \in V$  に対して  $f_y = 1 \in \mathcal{I}_y$  となって、この  $y$  に対して  $\mathcal{I}_y = \mathcal{O}_{X,y}$  なので  $V \subset X \setminus V(\mathcal{I})$  となって  $X \setminus V(\mathcal{I})$  が開であることがわかる。

Claim2.  $(V(\mathcal{I}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$  は局所環付き空間

任意の  $x \in V(\mathcal{I})$  に対して

$$(j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))_x = (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_x$$

は局所環。残りは自明。 ■

**Proposition 1.4.2.**  $f : X \rightarrow Y$  を局所環付き空間の閉はめ込みとする。 $Z$  を局所環付き空間  $V(\mathcal{J})$  とする。ただし、 $\mathcal{J} = \text{Ker } f^\# \subset \mathcal{O}_Y$ 。すると  $X \simeq Z$  を自然な閉はめ込み  $Z \hookrightarrow Y$  から得る。

**Proof.** まず次の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

から Prop:1.3.11 より任意の  $y \in Y$  に対して

$$\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{J}_y = (f_*\mathcal{O}_X)_y$$

を得る。よって

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus V(\mathcal{J}) \\ \mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{J}_y & y \in V(\mathcal{J}) \end{cases} \quad \dots (*)$$

を得る。 $f(X)$  は  $Y$  の閉集合なので  $x \in Y \setminus f(X)$  の開近傍  $U$  で

$$f(X) \cap U = \emptyset$$

となるものがとれる。よって

$$f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(\emptyset) = 0$$

したがって、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_x = 0$$

また、 $x \in f(X)$  の開近傍  $U$  に対して  $f$  での引き戻し  $f^{-1}(U)$  は  $y = f(x)$  の開近傍である。これを  $V$  とおく。逆に、 $f$  は閉はめ込みなので、 $X$  は  $f(X)$  と同相なので  $X$  に自然に  $Y$  の相対位相が入る。つまり、任意の  $x \in X$  の開近傍  $U$  に対して  $y = f(x) \in Y$  の開近傍  $V$  が存在して  $f^{-1}(V)$  とかける。よって、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_x = \varinjlim_{U \ni x} f_*\mathcal{O}_X(U) = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \varinjlim_{V \ni y} \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_{X,y}$$

つまり、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus f(X) \\ \mathcal{O}_{X,x} & y = f(x) \end{cases}$$

(\*) と比較すれば

$$V(\mathcal{J}) = f(X)$$

が分かる。なので、 $j : Z \hookrightarrow Y$  を包含写像とすると、 $f$  から誘導される同相写像  $g : X \rightarrow Z$  に対して

$$f = j \circ g$$

で、

$$j_*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Y/\mathcal{J} \simeq f_*\mathcal{O}_X$$

がわかる。容易に

$$f_*\mathcal{O}_X = j_*g_*\mathcal{O}_X$$

が分かるので

$$\mathcal{O}_Z = (j^{-1} \circ j)_*\mathcal{O}_Z = (j^{-1})_*j_*\mathcal{O}_Z \simeq (j^{-1})_*j_*g_*\mathcal{O}_X = (j^{-1} \circ j)_*g_*\mathcal{O}_X = g_*\mathcal{O}_X$$

である。よって、 $g$  は局所環付き空間の同型射である。 $f = j \circ g$  が局所環付き空間の射であることを確認するのは読者に委ねる。 ■

## 1.5 Schemes

**Proposition 1.5.1.**  $A$  を環、 $X = \operatorname{Spec} A$  とする。このとき以下が成り立つ。

- (1)  $\mathcal{O}'_X$  を環の  $\mathfrak{B}$ -層とする。 $\mathcal{O}'_X$  が誘導する  $X$  上の層  $\mathcal{O}_X$  は  $\mathcal{O}_X(X) = A$  となる。
- (2) 任意の  $\mathfrak{p} \in X$  に対して、茎  $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$  は  $A_{\mathfrak{p}}$  への標準的な同型がある。特に、 $(X, \mathcal{O}_X)$  は局所環付き空間になる。

**Proof.** まず、開集合  $U = X$  について Uniqueness 条件を確認する。ほかの基本開集合も同様に示される。  $U_i =$  ■

**Definition 1.5.1.** 上で定義した局所環付き空間  $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$  をアフィンスキーム (affine scheme) という。

**Lemma 1.5.2.**  $A$  を整域とし  $K$  をその商体とする。素イデアル  $0$  に対応する  $X = \operatorname{Spec} A$  の点を  $\xi$  とする。このとき

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = K$$

が成り立つ。さらに、任意の空でない開集合  $U \subset X$  と  $\xi \in U$  に対して標準的な準同型

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$$

は単射となる。開集合の組  $V \subset U$  に対して制限

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$$

は単射となる。

**Proof.** Prop:1.5.1(2) より

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = A_{\xi} = K$$



を得る.

$U = D(f)$  とすると,  $\mathcal{O}_X(U) = A_f \subset K$ . 一般に

$$U = \bigcup_i D(f_i)$$

と置く.  $s \in \mathcal{O}_X(U)$  を飛ばすと  $0 \in K$  になるとする. 各開被覆  $D(f_i) \subset U$  への制限を考えると

$$s|_{D(f_i)} = 0$$

が任意の  $i$  で成り立つので,  $s = 0$  である. よって  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi} \subset K$  は単射.

開集合の組  $\xi \in V \subset U$  に対して制限  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$  に対して帰納極限の定義より図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(V) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \swarrow \\ & \mathcal{O}_{X,\xi} & \end{array}$$

が可換となるので, 制限は単射である. ■

**Lemma 1.5.3.**  $X = \operatorname{Spec} A$  をアフィンスキームとし,  $g \in A$  をとる. このとき開集合  $D(g)$  は  $X$  から誘導される局所環付き空間で  $\operatorname{Spec} A_g$  に同型なアフィンスキームになる.

**Proof.**  $Y = \operatorname{Spec} A_g$  と置く. 局所化と素イデアルの対応より標準的な開はめ込み

$$i: Y \rightarrow X$$

がある ( $\operatorname{Im} i = D(g)$ )

$D(h) \subset D(g)$  とする.  $A \xrightarrow{\varphi} A_g$  とする. また  $\varphi(h) = \bar{h}$  と置く. このとき標準的な同型

$$\mathcal{O}_X(D(h)) = A_h \simeq (A_g)_{\bar{h}} = \mathcal{O}_Y(D(\bar{h})) = i_* \mathcal{O}_Y(D(h))$$

$\{D(h)\}_h$  は  $D(g)$  の開基となるので,  $i$  は  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  から  $(D(g), \mathcal{O}_X|_{D(g)}) \subset (X, \mathcal{O}_X)$  への同型を誘導する. (Refer to Exercises 2.7) ■

**Definition 1.5.2.** スキーム (scheme) とは局所環付き空間  $(X, \mathcal{O}_X)$  で開被覆  $\{U_i\}_i$  に対して  $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$  がアフィンスキームになるものが存在するときをいう. また  $\mathcal{O}_X(U)$  の元は (やや不適切であるが)  $U$  上の正則関数 (regular functions on  $U$ ) という. しかし, 層の関数としての側面をよく表している. (Refer to Exercises 3.4 and Proposition 4.4)

明らかにアフィンスキームはスキームである．また，局所環付き空間  $X$  が開被覆  $\{U_i\}_i$  に対して  $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$  がスキームだったら  $X$  はスキームである．逆に次の命題が従う．

**Proposition 1.5.4.**  $X$  をスキームとする．このとき任意の開集合  $U \subset X$  に対して局所環付き空間  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  はまたスキームになる．

**Proof.** 定義より  $X = \bigcup_i U_i$  で  $U_i$  は開集合で，アフィンスキームになるものがある． $U \cap U_i$  がスキームとなることを示せば十分である． ■

## Limit

## 第 A 章

## A.1 Inductive Limit

とりあえず, 帰納極限だけ述べる. 射影極限は双対概念なのでまあ頑張って.

**Definition A.1.1.**(帰納系の定義)

$(\Lambda, \leq)$  を順序集合,  $\mathcal{C}$  を圏とする. 各  $\lambda \in \Lambda$  に対し,  $X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が与えられ,  $\lambda \leq \mu$  に対して射  $\varphi_{\mu, \lambda} : X_\lambda \rightarrow X_\mu$  があって次を満たすとき,  $\{X_\lambda, \varphi_{\mu, \lambda}\}$  を**順系 (direct system)** または**帰納系 (inductive system)** という. しばし  $\varphi_{\mu, \lambda}$  を省略して  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  や  $\{X_\lambda\}_\lambda$  で表す.

- 任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $\varphi_{\lambda, \lambda} = \text{id}_{X_\lambda}$
- $\lambda \leq \mu \leq \nu$  なる任意の  $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$  に対して  $\varphi_{\nu, \lambda} = \varphi_{\nu, \mu} \circ \varphi_{\mu, \lambda}$

**Example A.1.1.** 位相空間  $X$  の開集合族  $\{U\}_U$  に対して

$$U \leq V \stackrel{\text{def}}{=} V \subset U$$

と定義する. そして, **AGrp** をアーベル群の成す圏,  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の前層とする. すると, 各開集合  $U$  に対し,  $\mathcal{F}(U) \in \text{Ob}(\mathbf{AGrp})$  で, 前層の定義からアーベル群と制限写像との組  $\{\mathcal{F}(U), \rho_{U, V}\}$  は帰納系となる. 前層の定義は Def:1.3.1 を参照.

**Definition A.1.2.**(帰納系の射の定義)

$\Lambda$  を順序集合.  $\{X_\lambda, \varphi_{\lambda, \mu}\}, \{Y_\lambda, \psi_{\lambda, \mu}\}$  を  $\Lambda$  上の圏  $\mathcal{C}$  における帰納系とする. このとき  $\{X_\lambda\}$  から  $\{Y_\lambda\}$  への射とは  $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$  なる射の族  $\{f_\lambda\}$  で, 任意の  $\lambda \leq \mu$  に対して  $\psi_{\lambda, \mu} \circ f_\mu = f_\lambda \circ \varphi_{\lambda, \mu}$  となるものを言う.

$$\begin{array}{ccc}
 X_\mu & \xrightarrow{f_\mu} & Y_\mu \\
 \varphi_{\lambda,\mu} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \psi_{\lambda,\mu} \\
 X_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & Y_\lambda
 \end{array}$$

**Definition A.1.3.**  $\mathcal{C}$  を圏とし,  $\Lambda$  を順序集合とする.  $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$  を  $\mathcal{C}$  の帰納系とする. このとき  $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$  の順極限 (**direct limit**) または帰納的極限 (**inductive limit**) または帰納極限とは,  $\mathcal{C}$  の対象  $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  と射の族  $\{\varphi_\lambda : X_\lambda \rightarrow \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  の組  $\{\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \varphi_\lambda\}$  で, 次の条件を満たすものをいう.

- $\lambda \leq \mu$  に対して  $\varphi_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = \varphi_\lambda$
- $\lambda \leq \mu$  に対して  $f_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = f_\lambda$  を満たす任意の射の族  $\{f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y\}_{\lambda \in \Lambda}$  に対して,  $f : \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow Y$  が一意に存在して

$$f \circ \varphi_\lambda = f_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

を満たす.

**Remark .** 一般の圏では帰納極限や射影極限は存在するとは限らない. しかし, 存在するとすれば, 同型を除いて一意である.

**Proposition A.1.2.** 帰納極限は存在すれば, 同型を除いて一意である.

**Proof.** 証明は後で書く. ■

# Category Theory

## 第 B 章