代数幾何

Fefr

目次

1　代数多様体

1.1　代数的集合

代数幾何学は代数方程式で定められる図形の幾何学である. 一番素朴な形では, 体 k の元を係数とする連立方程式

$$f_\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad \alpha = 1, 2, \cdots, l \tag{1.1}$$

の解全体を幾何学的に考察することに他ならない.
しばらく, 体 k を代数的閉体と仮定して話を進める. 体 k の元の n 個の組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ の全体を k^n と記し, 体 k 上の n 次元**アフィン空間** (affine space) と呼ぶ、k^n は体 k 上の n 次元ベクトル空間の構造を持つ.
さて, 連立方程式 (1.1) の体 k での解の全体を $V(f_1, f_2, \cdots, f_l)$ としるし, 連立方程式 (1.1) が定める**代数的集合** (algebraic set) または**アフィン代数的集合** (affine algebraic set) と呼ぶ, すなわち

$$V(f_1, f_2, \cdots, f_l) = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in k^n \mid f_\alpha(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0,\ \alpha = 1, 2, \cdots, l\}$$

一方, $f_1, f_2, \cdots, f_l$ より生成される n 変数多項式環 $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ のイデアル $(f_1, f_2, \cdots, f_l)$ の任意の元 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して, $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in V(f_1, f_2, \cdots, f_l)$ であれば,

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$$

が成り立つ.
多項式環 $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ のイデアル I に対して

$$V(I) = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in k^n \mid \forall f \in I : f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0\}$$

と定義し,$V(I)$ をイデアル I が定める代数的集合またはアフィン代数的集合という. すると, 次の補題が成り立つ.

補題 1.1

$I = (f_1, f_2, \cdots, f_l)$ のとき

$$V(I) = V(f_1, f_2, \cdots, f_l)$$

証明

$V(f_1, f_2, \cdots, f_l) \subset V(I)$ は上で示した. 逆に $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in V(I)$ であれば,
$f_\alpha \in I(\alpha = 1, 2, \cdots, l)$ より

$$f_\alpha(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$$

が成り立ち,$V(I) \subset V(f_1, f_2, \cdots, f_l)$ がわかる.