代数幾何まとめノート

Fefr

2024 年 7 月 2 日

目次

第 1 章 Scheme

1.1 Zariski Topology

atodekakuyo

1.2 Algebraic Sets

atodekakuyo

1.3 Sheaves

Definition 1.3.1. X を位相空間とする.X 上の (アーベル群の) **前層** (presheaf) $\mathcal{F}$ とは次のデータ

- U を任意の X の開集合に対して $\mathcal{F}(U)$ はアーベル群.
- 制限写像 (restriction map) と言われる群準同型 $\rho_{U,V}:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(V)$ が任意の開集合 $V\subset U$ に対して存在する.

そして次の条件を満たす.

(1) $\rho_{U,U}=\mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$

(2) 任意の開集合 $W\subset V\subset U$ に対して $\rho_{U,W}=\rho_{V,W}\circ\rho_{U,V}$ となる.

$s\in\mathcal{F}(U)$ を U 上の $\mathcal{F}$ の**切断** (section) という. また,$\rho_{U,V}(s)\in\mathcal{F}(V)$ を $s|_V$ と書いて s の V

への制限という.
また,単に $\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H},\dots$ などと書いたら (前) 層を表すことや、ρ と書いたら制限写像を意味する。また,どの (前) 層の制限写像かを明示するため,例えば,$\rho^{\mathcal{F}}_{U,V}$ などと書くことがある。

Definition 1.3.2. 前層 $\mathcal{F}$ が層 (sheaf) とは次の条件を満たすことをいう.

(4) (Uniqueness) U を X の開集合とし $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする. $s \in \mathcal{F}(U)$ が任意の i に対して $s|_{U_i} = 0$ ならば $s = 0$

(5) (Glueing local sections) 上の状況で,$s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ が $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすならば,$s|_{U_i} = s_i$ を満たす $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する.

Remark . $\mathcal{F}$ が層ならば $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$ となる.

Example 1.3.1. X を位相空間とする.
$\mathcal{C}^0_X$ を X の開集合 U に対して $U \to \mathbf{C}$ なる連続写像全体の集合 $\mathcal{C}^0_X(U)$ を対応させるものとし, 制限写像を普通の制限とする. すると,$\mathcal{C}^0_X$ は X 上の層となる.

Proof. $V \subset U$ なる開集合 U,V に対して U 上の連続写像 $f \in \mathcal{C}^0_X(U)$ を V に制限することによって得られる V 上の連続写像を $\rho_{U,V}(f)(= f|_V)$ と書く. すると, これは $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間 ($\mathbf{C}$ 上の関数空間) の準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{C}^0_X(U) \to \mathcal{C}^0_X(V)$ となる. つまり $(\mathcal{C}^0_X,\rho)$ は前層となる.
また,(4) を満たすのは明らかで.(5) もすぐに成り立つことがわかる.$\{U_i\}_i$ を U の開被覆とする.$f_i \in \mathcal{C}^0_X(U_i)$ が $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすとする. するとそれらを張り合わせた関数を f とすればこれは $f \in \mathcal{C}^0_X(U)$ であり,$f|_{U_i} = f_i$ となる. よって $(\mathcal{C}^0_X,\rho)$ は層となる. これを連続写像が成す層という. ■

Example 1.3.2. X を位相空間とする.
A を自明でないアーベル群とする.$\mathcal{A}_X$ を X の空でない開集合 U に対して $\mathcal{A}_X(U) = A$ に, 空集合 $\varnothing$ に対して $\mathcal{A}_X(\varnothing) = 0$ に対応させるものとし, 制限写像を空でない開集合 $V \subset U$ に対して $\rho_{U,V} = \mathrm{id}_A$ とし,$\rho_{U,\varnothing} = 0$ とする.
すると,$(\mathcal{A}_X,\rho)$ は X 上の前層にはなるが, 一般に層とはならない.

Proof. 例えば,X が連結でないとすると, 非交差な開集合 U,V があって $X = U \cup V$ とかける. すると $\{U,V\}$ は X の開被覆となる. $s_U \in \mathcal{A}_X(U) = A$ が $s_U|_{U\cap V} = s_U|_{\varnothing} = 0 = s_V|_{U\cap V}$ を満たすとする. このとき, 任意の $s \in \mathcal{A}_X(X) = A$ で $s|_U = s|_V = s$ となり層とならない. ■

Example 1.3.3. (skyscraper sheaf)
X を位相空間、A をアーベル群とする。$p \in X$ に対して $i_p : \{p\} \hookrightarrow X$ を包含写像とする。このとき $i_{p,*}\mathcal{A}$ を

$$i_{p,*}\mathcal{A}(U) = \begin{cases} A & p \in U \\ 1 & p \notin U \end{cases}$$

と定義する。これは層になる。

Remark . $\mathcal{B}$ を位相空間 X の開基で有限交叉で閉じているものとする.(つまり任意の $U, V \in \mathcal{B}$ に対して $U \cap V \in \mathcal{B}$. e.g. $\operatorname{Spec} A$ の開基 $\{D(f)\}_f$) このとき $\mathcal{B}$-前層 ($\mathcal{B}$-presheaf) $\mathcal{F}'$ とは

— $U \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{F}'(U)$ はアーベル群.
— $V \subset U \in \mathcal{B}$ に対して群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}'(V)$ が定まる.

としたもの.
$\mathcal{B}$-層 ($\mathcal{B}$-sheaf)$\mathcal{F}'$ から X 上の層 $\mathcal{F}$ を作ることができる.

位相空間 X の任意の開集合 V に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(V) &= \varprojlim_{\substack{U \in \mathcal{B} \\ U \subset V}} \mathcal{F}'(U) \\
&= \left\{ (s_U)_U \in \prod_{\substack{U \in \mathcal{B} \\ U \subset V}} \mathcal{F}'(U) \;\middle|\; \forall U' \subset U \in \mathcal{B}, s_U|_{U'} = s_{U'} \right\}
\end{aligned}$$

と定める．制限写像は射影極限から誘導される射である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}'(U) \arrow[r, "\rho_{U,U'}"] & \mathcal{F}'(U') \\
\varprojlim_U \mathcal{F}'(U) \arrow[u, "\varphi_U"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \varprojlim_{U'} \mathcal{F}'(U') \arrow[u, "\psi_{U'}"']
\end{tikzcd}$$

これが層となることを確かめよう．まず，任意の開集合 V とその開被覆 $\{U_i\}_i \subset \mathcal{B}$ をとる．$s \in \mathcal{F}(V)$ に対して $s|_{U_i} = 0$ とする．すると定義から $U \subset V$ なる任意の $U \in \mathcal{B}$ に対して $s_U \in \mathcal{F}'(U)$ が 0 であることを示せば $s = 0$ ということである．実際 V の開被覆から U の開被覆 $\{U \cap U_i\}_i \subset \mathcal{B}$ が得られる．また任意の i に対して $U \cap U_i \subset U_i$ より $s_{U_i}|_{U \cap U_i} = s_{U \cap U_i} = 0$ となる．(いま s_{U_i} は $s|_{U_i}$ のこと) したがって任意の i に対して $s_U|_{U \cap U_i} = 0$ となる．いま $\mathcal{F}'$ は層なので $s_U = 0$ よって $s = 0$ がわかった．
また，$s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ が $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすとする．よって，$U_i \cap U_j \in \mathcal{B}$ より

Definition 1.3.3. 位相空間 X 上の前層 $\mathcal{F}$ と $x \in X$ に対して,x での $\mathcal{F}$ の**茎 (stalk)**$\mathcal{F}_x$ という群が定義できる.

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

ただし,U は x の開近傍をすべてを回る.U 上の切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ に対して $x \in U$ の茎 $\mathcal{F}_x$ への自然な群準同型の像を s_x と書いて,x での s の**芽 (germ)** という.

Lemma 1.3.4. *$\mathcal{F}$ を X 上の層とする.$s, t \in \mathcal{F}(X)$ が任意の $x \in X$ に対して $s_x = t_x$ ならば $s = t$*

Proof. 差を考えれば $t = 0$ のときを考えればいい.$s_x = 0$ $(\forall x \in X)$ とすると,x の開近傍 U_x があって $s|_{U_x} = 0$ となる.$\{U_x\}_{x \in U_x}$ は X の開被覆なので,$s = 0$ となる. ■

Definition 1.3.4. X 上の 2 つの前層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ とする. **前層の射** $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは,X の開集合 U に対して群準同型 $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ があって, 任意の開集合の組 $V \subset U$ に対して $\alpha(V) \circ \rho^{\mathcal{F}}_{U,V} = \rho^{\mathcal{G}}_{U,V} \circ \alpha(U)$ を満たすことをいう.
X の任意の開集合 U に対して $\alpha(U)$ が単射ならば α は単射であるという.(全射はうまくいかんっぽい？)

$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を X 上の前層の射とする. 任意の $x \in X$ に対して α から自然に誘導される群準同型 $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ で $(\alpha(U)(s))_x = \alpha_x(s_x)$ が X の任意の開集合 $U, s \in \mathcal{F}(U), x \in U$ で成り立つものが取れる.
α_x が任意の $x \in X$ で全射なら α が全射であるという.

Example 1.3.5. $X = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ とし $\mathcal{F}$ を X 上の正則関数がなす層とし, $\mathcal{G}$ を X 上の双正則関数のなす層とする. 今, 任意の開集合 U と任意の $f \in \mathcal{F}(U)$ に対して $\alpha(U)(f) = \exp(f)$ で定義される層の射 $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が全射であることはよく知られている. しかし $\alpha(X) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ は全射ではない. 例えば恒等写像は $\exp(f)$ と書けない.

Proposition 1.3.6. *$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を X 上の層の射とする.*

$$\alpha \text{ が同型} \Leftrightarrow \alpha_x \text{ が同型} \ (\forall x \in X)$$

Theorem 1.3.7. *位相空間 X 上の前層 $\mathcal{F}$ に対して, 前層 $\mathcal{F}$ の層化 (sheafification)$\mathcal{F}^\dagger$ は存在する.*

Proof. X の開集合 U に対して

$$\mathcal{F}^\dagger(U) = \left\{ \sigma : U \to \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \,\middle|\, \forall x \in U, x \in \exists V \subset U : \mathrm{open}, \exists s \in \mathcal{F}(V) \, \mathrm{s.t.} \, \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in V) \right\}$$

とする. ただし,σ は任意の $x \in U$ に対して $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$ とする. また,$V \subset U$ なる開集合に対し,

$$\begin{array}{rccc} \rho^{\mathcal{F}^\dagger}_{U,V}: & \mathcal{F}^\dagger(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}^\dagger(V) \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma|_V \end{array}$$

が定義できる. 実際, 任意の $x \in V$ をとる.$V \subset U$ であり, $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より

$$x \in \exists U_0 \subset U\text{:open},\exists s \in \mathcal{F}(U_0) \ \text{ s.t. } \ \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0)$$

$V_0 = U_0 \cap V, \quad t = s|_{V_0}$ とすると任意の $y \in V_0$ に対して

$$\sigma(y) = \sigma|_V(y) = s_y$$

さらに帰納極限の定義から

$$\sigma|_V(y) = t_y$$

次に $\mathcal{F}^\dagger(U)$ がアーベル群, つまり $\sigma,\tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ ならば $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ を示そう.
$\sigma,\tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より任意の $x \in U$ に対して

$$\begin{aligned} &x \in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0) \\ &x \in \exists V_0 \subset U : \text{open}, \exists t \in \mathcal{F}(V_0) \text{ s.t. } \tau(z) = t_z \ (\forall z \in V_0) \end{aligned}$$

を満たす. いま $W = U_0 \cap V_0, s' = s|_W, t' = t|_W$ とすると,

$$\begin{aligned} x \in W \subset U : \text{open}, s', t' \in \mathcal{F}(W) \text{ s.t. } (\sigma + \tau)(y) &= \sigma(y) + \tau(y) \\ &= s_y + t_y \\ &= (s+t)_y \ (\forall y \in W) \end{aligned}$$

よって $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ また明らかに可換. よって $\mathcal{F}^\dagger(U)$ はアーベル群.
また, 通常の制限で制限写像を定義しているため,$\mathcal{F}^\dagger$ は前層となる.
更に層となることを示そう.
U を X の開集合とし,$\{U_i\}_i$ をその開被覆とする.$\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ が任意の i に対して $\sigma|_{U_i} = 0$ とする. つまり任意の $x \in U_i$ に対して $\sigma(x) = 0$ とする.U_i は U を被覆するので結局 $\sigma = 0$ となる.
次に,$\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ とし, $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}$ と仮定すると,

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & U & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ & x & \longmapsto & \sigma_i(x) \end{array}$$

ただし,$x \in U_i$. すると,σ は $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ を張り合わせて作っているのでこれは $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ となることが容易にわかる。よって、$\mathcal{F}^\dagger$ は層になる。 ■

Proposition 1.3.8. **層化の射** $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^\dagger$ **に対して、その茎の射** $\theta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x^\dagger$ **は同型である。**

Lemma 1.3.9. $\mathcal{F}$ **を** X **上の層とし、**$\mathcal{F}'$ **を** $\mathcal{F}$ **の部分層とする。このとき開集合** U **を** $\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ **に対応させるものは前層になる。**

Proof. この対応を $\mathcal{G}$ とおく。$V \subset U$ なる開集合 U, V をとる。制限写像を

$$\begin{array}{cccc} \rho^{\mathcal{G}}_{U,V}: & \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V)/\mathcal{F}'(V) \\ & \cup & & \cup \\ & s + \mathcal{F}'(U) & \longmapsto & \rho^{\mathcal{F}}_{U,V}(s) + \mathcal{F}'(V) \end{array}$$

とすると、これは well-defined である。また、$U \subset V \subset W$ なる開集合の組に対して

$$\rho^{\mathcal{G}}_{U,W} = \rho^{\mathcal{G}}_{V,W} \circ \rho^{\mathcal{G}}_{U,V}$$

が成り立つことは制限写像の定義から明らかである。よって $\mathcal{G}$ は前層。 ■

Definition 1.3.5. Lem:??で定義した前層の層化を $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ と書いて、**商層 (quotient shaef)** という。

Definition 1.3.6. $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前層の射とする。このとき開集合 U に対して $U \mapsto \mathrm{Ker}\,(\alpha(U))$ とするものは $\mathcal{F}$ の部分層になる。これを $\mathrm{Ker}\,\alpha$ と書いて、α **の核 (kernel of** α**)** という。
更に、$U \mapsto \mathrm{Im}\,(\alpha(U))$ は一般には前層となるので、これの層化を $\mathrm{Im}\,\alpha$ と書いて、α **の像 (image of** α**)** という。
また，$U \mapsto \mathrm{Coker}\,(\alpha(U)) = \mathcal{G}(U)/\mathrm{Im}\,(\alpha(U))$ は一般には前層となるので，これの層化を $\mathrm{Coker}\,\alpha$ と書いて，α **の余核 (cokernel of** α**)** という．

Lemma 1.3.10. $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ **を** X **上の層,**$\mathcal{F}'$ **を** $\mathcal{F}$ **の部分層,**$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ **を前層の射とする。このとき、**

$$\begin{aligned} (\mathrm{Ker}\,\alpha)_x &= \mathrm{Ker}\,\alpha_x \\ (\mathrm{Im}\,\alpha)_x &= \mathrm{Im}\,\alpha_x \\ (\mathrm{Coker}\,\alpha)_x &= \mathrm{Coker}\,\alpha_x \\ (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x &= \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x \end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. $\mathcal{Q}(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ とおく。
このとき、アーベル群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

が作れる。帰納極限は完全列を完全列に移すので、また Prop:??より

$$0 \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

を得る。よって

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x \longrightarrow 0$$

したがって、

$$\mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x \simeq (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x$$

を得る。
次に

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ker}\alpha)_x &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha(U)(s) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha_x(s_x) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \operatorname{Ker}\alpha_x\end{aligned}$$

を得る。同様に

$$\begin{aligned}(\operatorname{Im}\alpha)_x &= \{t_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in \exists U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U) \text{ s.t } t = \alpha(U)(s)\} \\ &= \{(\alpha(U)(s))_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \{\alpha_x(s_x) \in \mathcal{G}_x \mid s_x \in \mathcal{F}_x\} \\ &= \operatorname{Im}\alpha_x\end{aligned}$$

を得る．また，$(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x$ より

$$(\operatorname{Coker}\alpha)_x = (\mathcal{G}/\operatorname{Im}\alpha)_x = \mathcal{G}_x/\operatorname{Im}\alpha_x = \operatorname{Coker}\alpha_x$$

■

Definition 1.3.7. 層の列

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

が完全とは、$\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$ が成り立つことをいう。

Proposition 1.3.11. 層の列に対して次が成り立つ。

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \text{ が完全} \iff \text{任意の } x \in X \text{ に対して } \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x \text{が完全}$$

Proof. 明らか。■

Definition 1.3.8. X, Y を位相空間,$f : X \to Y$ を連続写像とする。このとき、X 上の層 $\mathcal{F}$,Y 上の層 $\mathcal{G}$ に対して、新たな Y 上の層 $f_*\mathcal{F}$ が

$$V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

によって定義できる。これを $\mathcal{F}$ **の順像 (direct image of** $\mathcal{F}$**)** という。
また、

$$U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

で定義できる新たな X 上の前層 $f^{\cdot}\mathcal{G}$ の層化 $f^*\mathcal{G}$ を $\mathcal{G}$ **の逆像 (inverse image of** $\mathcal{G}$**)** という。

Proposition 1.3.12. **上の状況で**

$$(f^*\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)} \qquad \forall x \in X$$

Proof.

$$(f^*\mathcal{G})_x = \varinjlim_{x \in U} (f^*\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{x \in U} \varinjlim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V) = \mathcal{G}_{f(x)}$$

最後の等号は明らか. ■

Remark . V を Y の開集合とする。このとき自然な単射 $i : V \to Y$ に対して

$$i^*\mathcal{G} = \mathcal{G}|_V$$

が成り立つ。

Proposition 1.3.13. $f : X \to Y$ **を位相空間の間の連続写像とし,** $\mathcal{F}$ **を** X **上の層.** $\mathcal{G}$ **を** Y **上の層とする.このとき**

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

ただし, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ **は圏** $\mathcal{C}$ **で** $X \to Y$ **なる射全体を表し,** $\mathsf{Sh}(X)$ **は** X **上の層全体を表す.**

Proof. 層化の普遍性より $\theta : f^{\cdot}\mathcal{G} \to f^*\mathcal{G} = (f^{\cdot}\mathcal{G})^{\dagger}$ を層化の射とすると,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^{\cdot}\mathcal{G}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ph(X)}}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \\ \cup & & \cup \\ \alpha & \longmapsto & \tilde{\alpha} \circ \theta \end{array}$$

が成り立つ. つまり

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^{\cdot}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh(Y)}}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

を示せばいい．次に X 上の開集合 U に対して

$$f^{\cdot}\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

なので，$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^{\cdot}\mathcal{G}, \mathcal{F})$ に対して

$$\varphi(U) : \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

を与えることは帰納極限の定義より $f(U) \subset V$ なる開集合 V に対して

$$\psi'(V) : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

を $f(U) \subset V' \subset V$ ならば，

$$\psi'(V) = \psi'(V') \circ \rho^{\mathcal{G}}_{V,V'}$$

となるように与えることである．すなわち $\psi'(V)$ は

$$\psi(V) : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

と $\rho^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),U}$ を合成したものである．(帰納系の選び方によらない．)
したがって，$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^{\cdot}\mathcal{G}, \mathcal{F})$ を与えることは，$\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ph}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ を与えることと等しい． ■

1.4 Ringed Topological Space

Definition 1.4.1. **局所環付き空間**とは位相空間 X と X 上の環の層 $\mathcal{O}_X$ の組 $(X, \mathcal{O}_X)$ で、任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X,x}$ が局所環となるものをいう。また、この $\mathcal{O}_X$ を $(X, \mathcal{O}_X)$ の**構造層 (structure sheaf)** という。また $(X, \mathcal{O}_X)$ を単に $\mathcal{O}_X$ と書くことがある。
また、$\mathcal{O}_{X,x}$ の唯一の極大イデアル $\mathfrak{m}_x$ に対してその剰余体 $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ を **X の点 x での剰余体 (residue field of X at x)** といって $k(x)$ と書く。

Definition 1.4.2. 局所環付き空間の射とは

$$(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

とは連続写像 $f : X \to Y$ と環の層の射 $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ の組 $(f, f^{\#})$ で、任意の $x \in X$ に対して $f^{\#}_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ は局所射となるものをいう。(つまり $f^{\#}_x(\mathfrak{m}_{Y,f(x)}) \subset \mathfrak{m}_{X,x}$ を満たす．)

Prop:1.3.13 より

$$f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$$

を考えることは

$$f^{\#} : f_*\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$$

を考えることに等しい．Def:1.4.2 の $f_x^{\#}$ は下の式で考えている．

Definition 1.4.3. 射 $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が**開はめ込み (open immersion)**(resp. **閉はめ込み (closed immersion)**) とは連続写像 f が開はめ込み (resp. 閉はめ込み) [a]でかつ任意の $x \in X$ に対して $f_x^{\#}$ が同型 (resp. 全射) のときをいう。

[a] $f : X \to Y$ が (位相的) 開 (閉) はめ込みとは X と $f(X)$ が同相で $f(X)$ が開 (閉) 集合のときをいう。

Definition 1.4.4. $(X, \mathcal{O}_X)$ を局所環付き空間とする。$\mathcal{J}$ が $\mathcal{O}_X$ の**イデアル層 (sheaf of ideals of $\mathcal{O}_X$)** とは任意の開集合 U に対して $\mathcal{J}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ のイデアルになっているときをいう。

Lemma 1.4.1. $(X, \mathcal{O}_X)$ を局所環付き空間とする。$\mathcal{J}$ を $\mathcal{O}_X$ のイデアル層とする。そして、

$$V(\mathcal{J}) = \{x \in X \mid \mathcal{J}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$$

とおく。(ちなみに上の諸々から $\mathcal{J}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ が分かる。)
$j : V(\mathcal{J}) \hookrightarrow X$ を包含写像とする。すると

— $V(\mathcal{J})$ は X の閉集合
— $(V(\mathcal{J}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$ は局所環付き空間
— $j^{\#}$ は自然な全射

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{J} = j_*(j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$$

で $(j, j^{\#}) : (V(\mathcal{J}), j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})) \to (X, \mathcal{O}_X)$ は閉はめ込みである。

Proof. Claim1.$V(\mathcal{J})$ は X の閉集合
$x \in X \setminus V(\mathcal{J}) = \{x \in X \mid \mathcal{J}_x = \mathcal{O}_{X,x}\}$ に対して $f_x = 1$ なる x の開近傍 U と $f \in \mathcal{J}(U)$ をとる。つまり $f|_V = 1|_V = 1$ なる x の開近傍 $V \subset U$ がある。すると任意の $y \in V$ に対して $f_y = 1 \in \mathcal{J}_y$ となって, この y に対して $\mathcal{J}_y = \mathcal{O}_{X,y}$ なので $V \subset X \setminus V(\mathcal{J})$ となって $X \setminus V(\mathcal{J})$ が開であることがわかる。
Claim2.$(V(\mathcal{J}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$ は局所環付き空間
任意の $x \in V(\mathcal{J})$ に対して

$$(j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))_x = (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})_x = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{J}_x$$

は局所環。残りは自明。 ■

Proposition 1.4.2. $f : X \to Y$ を局所環付き空間の閉はめ込みとする。Z を局所環付き空間 $V(\mathcal{J})$ とする。ただし、$\mathcal{J} = \operatorname{Ker} f^{\#} \subset \mathcal{O}_Y$. すると $X \simeq Z$ を自然な閉はめ込み $Z \hookrightarrow Y$ から得る。

Proof. まず次の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

から Prop:1.3.11 より任意の $y \in Y$ に対して

$$\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{J}_y = (f_*\mathcal{O}_X)_y$$

を得る。よって

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus V(\mathcal{J}) \\ \mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{J}_y & y \in V(\mathcal{J}) \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

を得る。$f(X)$ は Y の閉集合なので $x \in Y \setminus f(X)$ の開近傍 U で

$$f(X) \cap U = \varnothing$$

となるものがとれる。よって

$$f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(\varnothing) = 0$$

したがって、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_x = 0$$

また、$x \in f(X)$ の開近傍 U に対して f での引き戻し $f^{-1}(U)$ は $y = f(x)$ の開近傍である。これを V とおく。逆に、f は閉はめ込みなので、X は $f(X)$ と同相なので X に自然に Y の相対位相が入る。つまり、任意の $x \in X$ の開近傍 U に対して $y = f(x) \in Y$ の開近傍 V が存在して $f^{-1}(V)$ とかける。よって、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_x = \varinjlim_{U \ni x} f_*\mathcal{O}_X(U) = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \varinjlim_{V \ni y} \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_{X,y}$$

つまり、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus f(X) \\ \mathcal{O}_{X,x} & y = f(x) \end{cases}$$

$(*)$ と比較すれば

$$V(\mathcal{J}) = f(X)$$

が分かる。なので、$j : Z \hookrightarrow Y$ を包含写像とすると、f から誘導される同相写像 $g : X \to Z$ に対して

$$f = j \circ g$$

で、

$$j_*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Y/\mathcal{J} \simeq f_*\mathcal{O}_X$$

がわかる。容易に
$$f_*\mathcal{O}_X = j_*g_*\mathcal{O}_X$$
が分かるので
$$\mathcal{O}_Z = (j^{-1}\circ j)_*\mathcal{O}_Z = (j^{-1})_*j_*\mathcal{O}_Z \simeq (j^{-1})_*j_*g_*\mathcal{O}_X = (j^{-1}\circ j)_*g_*\mathcal{O}_X = g_*\mathcal{O}_X$$
である。よって、g は局所環付き空間の同型射である。$f = j\circ g$ が局所環付き空間の射であることを確認するのは読者に委ねる。 ■

1.5 Schemes

Proposition 1.5.1. A を環、$X = \operatorname{Spec} A$ とする。このとき以下が成り立つ。

(1) $\mathcal{O}'_X$ を環の $\mathfrak{B}$-層とする。$\mathcal{O}'_X$ が誘導する X 上の層 $\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{O}_X(X) = A$ となる。
(2) 任意の $\mathfrak{p}\in X$ に対して、茎 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ は $A_\mathfrak{p}$ への標準的な同型がある。特に、$(X,\mathcal{O}_X)$ は局所環付き空間になる。

Proof. まず，開集合 $U = X$ について Uniquness 条件を確認する．ほかの基本開集合も同様に示される．$U_i =$ ■

Definition 1.5.1. 上で定義した局所環付き空間 $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ を**アフィンスキーム (affine scheme)** という．

Lemma 1.5.2. A を整域とし K をその商体とする．素イデアル 0 に対応する $X = \operatorname{Spec} A$ の点を ξ とする．このとき
$$\mathcal{O}_{X,\xi} = K$$
が成り立つ．さらに，任意の空でない開集合 $U\subset X$ と $\xi\in U$ に対して標準的な準同型
$$\mathcal{O}_X(U)\to\mathcal{O}_{X,\xi}$$
は単射となる．開集合の組 $V\subset U$ に対して制限
$$\mathcal{O}_X(U)\to\mathcal{O}_X(V)$$
は単射となる．

Proof. Prop:1.5.1(2) より
$$\mathcal{O}_{X,\xi} = A_\xi = K$$

を得る．

$U=D(f)$ とすると，$\mathcal{O}_X(U)=A_f\subset K$．一般に

$$U=\bigcup_i D(f_i)$$

と置く．$s\in\mathcal{O}_X(U)$ を飛ばすと $0\in K$ になるとする．各開被覆 $D(f_i)\subset U$ への制限を考えると

$$s|_{D(f_i)}=0$$

が任意の i で成り立つので，$s=0$ である．よって $\mathcal{O}_X(U)\to\mathcal{O}_{X,\xi}\subset K$ は単射．

開集合の組 $\xi\in V\subset U$ に対して制限 $\mathcal{O}_X(U)\to\mathcal{O}_X(V)$ に対して帰納極限の定義より図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(V) \arrow[dl] \\
\mathcal{O}_{X,\xi} \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"]
\end{tikzcd}$$

が可換となるので，制限は単射である． ■

Lemma 1.5.3. **$X=\mathsf{Spec}\,A$ をアフィンスキームとし，$g\in A$ をとる．このとき開集合 $D(g)$ は X から誘導される局所環付き空間で $\operatorname{Spec}A_g$ に同型なアフィンスキームになる．**

Proof. $Y=\operatorname{Spec}A_g$ と置く．局所化と素イデアルの対応より標準的な開はめ込み

$$i:Y\to X$$

がある $(\operatorname{Im}i=D(g))$

$D(h)\subset D(g)$ とする．$A\overset{\varphi}{\to}A_g$ とする．また $\varphi(h)=\bar{h}$ と置く．このとき標準的な同型

$$\mathcal{O}_X(D(h))=A_h\simeq(A_g)_{\bar{h}}=\mathcal{O}_Y(D(\bar{h}))=i_*\mathcal{O}_Y(D(h))$$

■

Limit

第 A 章

A.1 Inductive Limit

とりあえず, 帰納極限だけ述べる. 射影極限は双対概念なのでまぁ頑張って.

Definition A.1.1.(帰納系の定義)
$(\Lambda, \leq)$ を順序集合,$\mathscr{C}$ を圏とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し,$X_\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ が与えられ, $\lambda \leq \mu$ に対して射 $\varphi_{\mu,\lambda} : X_\lambda \to X_\mu$ があって次を満たすとき,$\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を**順系 (direct system)** または**帰納系 (inductive system)** という. しばしば $\varphi_{\mu,\lambda}$ を省略して $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ や $\{X_\lambda\}_\lambda$ で表す.

— 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\lambda,\lambda} = \mathrm{id}_{X_\lambda}$
— $\lambda \leq \mu \leq \nu$ なる任意の $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\nu,\lambda} = \varphi_{\nu,\mu} \circ \varphi_{\mu,\lambda}$

Example A.1.1. 位相空間 X の開集合族 $\{U\}_U$ に対して

$$U \leq V \overset{\mathrm{def}}{\equiv} V \subset U$$

と定義する. そして,**AGrp** をアーベル群の成す圏,$\mathcal{F}$ を X 上の前層とする. すると, 各開集合 U に対し,$\mathcal{F}(U) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{AGrp})$ で, 前層の定義からアーベル群と制限写像との組 $\{\mathcal{F}(U), \rho_{U,V}\}$ は帰納系となる. 前層の定義は Def:1.3.1 を参照.

Definition A.1.2.(帰納系の射の定義)
Λ を順序集合.$\{X_\lambda, \varphi_{\lambda,\mu}\}, \{Y_\lambda, \psi_{\lambda,\mu}\}$ を Λ 上の圏 $\mathscr{C}$ における帰納系とする. このとき $\{X_\lambda\}$ から $\{Y_\lambda\}$ への射とは $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ なる射の族 $\{f_\lambda\}$ で, 任意の $\lambda \leq \mu$ に対して $\psi_{\lambda,\mu} \circ f_\mu = f_\lambda \circ \varphi_{\lambda,\mu}$ となるものを言う.

$$\begin{CD} X_\mu @>{f_\mu}>> Y_\mu \\ @V{\varphi_{\lambda,\mu}}VV \circlearrowleft @VV{\psi_{\lambda,\mu}}V \\ X_\lambda @>>{f_\lambda}> Y_\lambda \end{CD}$$

Definition A.1.3. $\mathscr{C}$ を圏とし,Λ を順序集合とする.$\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を $\mathscr{C}$ の帰納系とする.このとき $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ の**順極限 (direct limit)** または**帰納的極限 (inductive limit)** または**帰納極限**とは, $\mathscr{C}$ の対象 $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ と射の族 $\{\varphi_\lambda : X_\lambda \to \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の組 $\{\varinjlim X_\lambda, \varphi_\lambda\}$ で, 次の条件を満たすものをいう.

— $\lambda \leq \mu$ に対して $\varphi_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = \varphi_\lambda$

— $\lambda \leq \mu$ に対して $f_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = f_\lambda$ を満たす任意の射の族 $\{f_\lambda : X_\lambda \to Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, $f : \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to Y$ が一意に存在して

$$f \circ \varphi_\lambda = f_\lambda \quad (\forall\lambda \in \Lambda)$$

を満たす.

Remark . 一般の圏では帰納極限や射影極限は存在するとは限らない. しかし, 存在するとすれば, 同型を除いて一意である.

Proposition A.1.2. **帰納極限は存在すれば, 同型を除いて一意である.**

Proof. 証明は後で書く. ■

Category Theory

第 B 章