

代数幾何まとめノート

Fefr

2024 年 5 月 31 日

目次

第 1 章	Scheme	5
1.1	Zariski Topology	5
1.2	Algebraic Sets	5
1.3	Sheaves	5
第 2 章	極限	11

Scheme

第 1 章

1.1 Zariski Topology

atodekakuyo

1.2 Algebraic Sets

atodekakuyo

1.3 Sheaves

Definition 1.3.1. X を位相空間とする. X 上の (アーベル群の) 前層 (presheaf) \mathcal{F} とは次のデータ

- U を任意の X の開集合に対して $\mathcal{F}(U)$ はアーベル群.
- 制限写像 (restriction map) と言われる群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ が任意の開集合 $V \subset U$ に対して存在する.

そして次の条件を満たす.

- (1) $\rho_{U,U} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$
- (2) 任意の開集合 $W \subset V \subset U$ に対して $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ となる.

$s \in \mathcal{F}(U)$ を U 上の \mathcal{F} の切断 (section) という. また, $\rho_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$ を $s|_V$ と書いて s の V

への制限という.

また, 単に $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$ などと書いたら (前) 層を表すことや、 ρ と書いたら制限写像を意味する。また, どの (前) 層の制限写像かを明示するため, 例えば, $\rho_{U,V}^{\mathcal{F}}$ などと書くことがある。

Definition 1.3.2. 前層 \mathcal{F} が層 (sheaf) とは次の条件を満たすことをいう。

- (4) (Uniqueness) U を X の開集合とし $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする. $s \in \mathcal{F}(U)$ が任意の i に対して $s|_{U_i} = 0$ ならば $s = 0$
- (5) (Glueing local sections) 上の状況で, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ が $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすならば, $s|_{U_i} = s_i$ を満たす $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する。

Remark . \mathcal{F} が層ならば $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ となる。

Example 1.3.1. X を位相空間とする。

\mathcal{C}_X^0 を X の開集合 U に対して $U \rightarrow \mathbf{C}$ なる連続写像全体の集合 $\mathcal{C}_X^0(U)$ を対応させるものとし, 制限写像を普通の制限とする. すると, \mathcal{C}_X^0 は X 上の層となる。

Proof. $V \subset U$ なる開集合 U, V に対して U 上の連続写像 $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$ を V に制限することによって得られる V 上の連続写像を $\rho_{U,V}(f) (= f|_V)$ と書く. すると, これは \mathbf{C} 上のベクトル空間 (\mathbf{C} 上の関数空間) の準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{C}_X^0(U) \rightarrow \mathcal{C}_X^0(V)$ となる. つまり (\mathcal{C}_X^0, ρ) は前層となる。

また, (4) を満たすのは明らかで, (5) もすぐに成り立つことがわかる. $\{U_i\}_i$ を U の開被覆とする. $f_i \in \mathcal{C}_X^0(U_i)$ が $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすとする. するとそれらを張り合わせた関数を f とすればこれは $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$ であり, $f|_{U_i} = f_i$ となる. よって (\mathcal{C}_X^0, ρ) は層となる. これを連続写像が成す層という. ■

Example 1.3.2. X を位相空間とする。

A を自明でないアーベル群とする. \mathcal{A}_X を X の空でない開集合 U に対して $\mathcal{A}_X(U) = A$ に, 空集合 \emptyset に対して $\mathcal{A}_X(\emptyset) = 0$ に対応させるものとし, 制限写像を空でない開集合 $V \subset U$ に対して $\rho_{U,V} = \text{id}_A$ とし, $\rho_{U,\emptyset} = 0$ とする。

すると, (\mathcal{A}_X, ρ) は X 上の前層にはなるが, 一般に層とはならない。

Proof. 例えば, X が連結でないとする, 非交差な開集合 U, V があって $X = U \cup V$ とかける. すると $\{U, V\}$ は X の開被覆となる. $s_U \in \mathcal{A}_X(U) = A$ が $s_U|_{U \cap V} = s_U|_{\emptyset} = 0 = s_V|_{U \cap V}$ を満たすとする. このとき, 任意の $s \in \mathcal{A}_X(X) = A$ で $s|_U = s|_V = s$ となり層とならない. ■

Remark . \mathcal{B} を位相空間 X の開基で有限交叉で閉じているものとする.(つまり任意の $U, V \in \mathcal{B}$ に対して $U \cap V \in \mathcal{B}$. e.g. $\text{Spec } A$ の開基 $\{D(f)\}_f$) このとき \mathcal{B} -前層 (\mathcal{B} -presheaf) \mathcal{F}_0 とは

- $U \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{F}_0(U)$ はアーベル群.
- $V \subset U \in \mathcal{B}$ に対して群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}_0(U) \rightarrow \mathcal{F}_0(V)$ が定まる.

としたもの.

\mathcal{B} -層 (\mathcal{B} -sheaf) \mathcal{F}_0 から X 上の層 \mathcal{F} を作ることができる.

位相空間 X の任意の開集合 U をとり, $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする. ($U_i \in \mathcal{B}$)

$$\mathcal{F}(U) := \left\{ (s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}_0(U_i) \mid \text{任意の } i, j \text{ に対して } s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \right\}$$

と定義する. するとこれは開被覆によらない. 実際 $\mathcal{F}(U)_{U_i}$ を開被覆 $\{U_i\}_i$ による $\mathcal{F}(U)$ とし, $\{V_j\}_j$ を別の開被覆とすると, $\{U_i \cap V_j\}_{i,j}$ はこれら 2 つの細分である. $\mathcal{F}(U)_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$ なる群準同型を $(s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap V_j})_{i,j}$ で定義できる. 実際

$$\begin{aligned} s_i|_{U_i \cap V_j} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} &= s_i \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\ &= s_i|_{U_i \cap U_{i'}} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\ &= s_{i'}|_{U_i \cap U_{i'}} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \quad (\because (s_i)_i \in \mathcal{F}(U)_{U_i}) \\ &= s_{i'} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\ &= s_{i'}|_{U_{i'} \cap V_{j'}} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \end{aligned}$$

より $(s_i|_{U_i \cap V_j})_{i,j} \in \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$

また, $(s_{ij})_{ij} \in \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$ を取ると, $(s_{ij})_{ij} = (s_i|_{U_i \cap V_j})$ と出来るので全射 (?????)

Kernel を計算すると

$$\begin{aligned} s_i|_{U_i \cap V_j} &= 0 \quad (\forall i, j) \\ s_i|_{U_i} &= s_i = 0 \quad (\forall i) \quad (\because (4)) \end{aligned}$$

よって Kernel が自明なので単射.

Definition 1.3.3. 位相空間 X 上の前層 \mathcal{F} と $x \in X$ に対して, x での \mathcal{F} の茎 (stalk) \mathcal{F}_x という群が定義できる.

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

ただし, U は x の開近傍をすべてを回る U 上の切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ に対して $x \in U$ の茎 \mathcal{F}_x への自然な群準同型の像を s_x と書いて, x での s の芽 (germ) という.

Lemma 1.3.3. \mathcal{F} を X 上の層とする. $s, t \in \mathcal{F}(X)$ が任意の $x \in X$ に対して $s_x = t_x$ ならば $s = t$

Proof. 差を考えれば $t = 0$ のときを考えればいい. $s_x = 0$ ($\forall x \in X$) とすると, x の開近傍 U_x があって $s|_{U_x} = 0$ となる. $\{U_x\}_{x \in X}$ は X の開被覆なので, $s = 0$ となる. ■

Definition 1.3.4. X 上の 2 つの前層 \mathcal{F}, \mathcal{G} とする. 前層の射 $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ とは, X の開集合 U に対して群準同型 $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ があって, 任意の開集合の組 $V \subset U$ に対して $\alpha(V) \circ \rho_{U,V}^{\mathcal{F}} = \rho_{U,V}^{\mathcal{G}} \circ \alpha(U)$ を満たすことをいう.
 X の任意の開集合 U に対して $\alpha(U)$ が単射ならば α は単射であるという. (全射はうまくいかんっぽい?)

$\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を X 上の前層の射とする. 任意の $x \in X$ に対して α から自然に誘導される群準同型 $\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ で $(\alpha(U)(s))_x = \alpha_x(s_x)$ が X の任意の開集合 $U, s \in \mathcal{F}(U), x \in U$ で成り立つものが取れる.

α_x が任意の $x \in X$ で全射なら α が全射であるという.

Example 1.3.4. $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とし \mathcal{F} を X 上の正則関数がなす層とし, \mathcal{G} を X 上の双正則関数のなす層とする. 今, 任意の開集合 U と任意の $f \in \mathcal{F}(U)$ に対して $\alpha(U)(f) = \exp(f)$ で定義される層の射 $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が全射であることはよく知られている. しかし $\alpha(X) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ は全射ではない. 例えば恒等写像は $\exp(f)$ と書けない.

Proposition 1.3.5. $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を X 上の層の射とする.

$$\alpha \text{ が同型} \Leftrightarrow \alpha_x \text{ が同型 } (\forall x \in X)$$

Theorem 1.3.6. 位相空間 X 上の前層 \mathcal{F} に対して, 前層 \mathcal{F} の層化 (sheafification) \mathcal{F}^\dagger は存在する.

Proof. X の開集合 U に対して

$$\mathcal{F}^\dagger(U) = \left\{ \sigma : U \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid \forall x \in U, x \in \exists V \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(V) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in V) \right\}$$

とする. ただし, σ は任意の $x \in U$ に対して $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$ とする. また, $V \subset U$ なる開集合に対し,

$$\begin{array}{ccc} \rho_{U,V}^{\mathcal{F}^\dagger} : \mathcal{F}^\dagger(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}^\dagger(V) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \sigma & \longmapsto & \sigma|_V \end{array}$$

が定義できる. 実際, 任意の $x \in V$ をとる. $V \subset U$ であり, $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より

$$x \in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0)$$

$V_0 = U_0 \cap V$, $t = s|_{V_0}$ とすると任意の $y \in V_0$ に対して

$$\sigma(y) = \sigma|_V(y) = s_y$$

さらに帰納極限の定義から

$$\sigma|_V(y) = t_y$$

次に $\mathcal{F}^\dagger(U)$ がアーベル群, つまり $\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ ならば $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ を示そう.

$\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より任意の $x \in U$ に対して

$$x \in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0)$$

$$x \in \exists V_0 \subset U : \text{open}, \exists t \in \mathcal{F}(V_0) \text{ s.t. } \tau(z) = t_z \ (\forall z \in V_0)$$

を満たす. いま $W = U_0 \cap V_0$, $s' = s|_W$, $t' = t|_W$ とすると,

$$\begin{aligned} x \in W \subset U : \text{open}, s', t' \in \mathcal{F}(W) \text{ s.t. } (\sigma + \tau)(y) &= \sigma(y) + \tau(y) \\ &= s_y + t_y \\ &= (s + t)_y \ (\forall y \in W) \end{aligned}$$

よって $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ また明らかに可換. よって $\mathcal{F}^\dagger(U)$ はアーベル群.

また, 通常の制限で制限写像を定義しているため, \mathcal{F}^\dagger は前層となる.

更に層となることを示そう.

U を X の開集合とし, $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする. $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ が任意の i に対して $\sigma|_{U_i} = 0$ とする. つまり任意の $x \in U_i$ に対して $\sigma(x) = 0$ とする. U_i は U を被覆するので結局 $\sigma = 0$ となる.

次に, $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ とし, $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}$ と仮定すると,

$$\begin{array}{ccc} \sigma : U & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x & \longmapsto & \sigma_i(x) \end{array}$$

ただし, $x \in U_i$. すると, σ は $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ を張り合わせて作っているのだからこれは $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ となるのが容易にわかる. よって, \mathcal{F}^\dagger は層になる. ■

Lemma 1.3.7. \mathcal{F} を X 上の層とし, \mathcal{F}' を \mathcal{F} の部分層とする. このとき開集合 U を $\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ に対応させるものは前層になる。

Proof. この対応を \mathcal{G} とおく. $V \subset U$ なる開集合 U, V をとる. 制限写像を

$$\begin{array}{ccc} \rho_{U,V}^{\mathcal{G}} : \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V)/\mathcal{F}'(V) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ s + \mathcal{F}'(U) & \longmapsto & \rho_{U,V}^{\mathcal{F}}(s) + \mathcal{F}'(V) \end{array}$$

とすると, これは well-defined である. また, $U \subset V \subset W$ なる開集合の組に対して

$$\rho_{U,W}^{\mathcal{G}} = \rho_{V,W}^{\mathcal{G}} \circ \rho_{U,V}^{\mathcal{G}}$$

が成り立つことは制限写像の定義から明らかである。よって \mathcal{G} は前層。 ■

極限

第 2 章

とりあえず、帰納極限だけ述べる。射影極限は双対概念なのでまあ頑張る。

Definition 2.0.1. (帰納系の定義)

(Λ, \leq) を順序集合, \mathcal{C} を圏とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し, $X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が与えられ, $\lambda \leq \mu$ に対して射 $\varphi_{\mu, \lambda} : X_\lambda \rightarrow X_\mu$ があって次を満たすとき, $\{X_\lambda, \varphi_{\mu, \lambda}\}$ を **順系 (direct system)** または **帰納系 (inductive system)** という. しばし $\varphi_{\mu, \lambda}$ を省略して $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ や $\{X_\lambda\}_\lambda$ で表す.

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に他逸して $\varphi_{\lambda, \lambda} = \text{id}_{X_\lambda}$
- $\lambda \leq \mu \leq \nu$ なる任意の $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\nu, \lambda} = \varphi_{\nu, \mu} \circ \varphi_{\mu, \lambda}$

Example 2.0.1. 位相空間 X の開集合族 $\{U\}_U$ に対して

$$U \leq V \stackrel{\text{def}}{=} V \subset U$$

と定義する. そして, **AGrp** をアーベル群の成す圏, \mathcal{F} を X 上の前層とする. すると, 各開集合 U に対し, $\mathcal{F}(U) \in \text{Ob}(\mathbf{AGrp})$ で, 前層の定義からアーベル群と制限写像との組 $\{\mathcal{F}(U), \rho_{U, V}\}$ は帰納系となる. 前層の定義は Def:1.3.1 を参照.

Definition 2.0.2. (帰納系の射の定義)

Λ を順序集合. $\{X_\lambda, \varphi_{\lambda, \mu}\}, \{Y_\lambda, \psi_{\lambda, \mu}\}$ を Λ 上の圏 \mathcal{C} における帰納系とする. このとき $\{X_\lambda\}$ から $\{Y_\lambda\}$ への射とは $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ なる射の族 $\{f_\lambda\}$ で, 任意の $\lambda \leq \mu$ に対して $\psi_{\lambda, \mu} \circ f_\mu = f_\lambda \circ \varphi_{\lambda, \mu}$ となるものを言う.

$$\begin{array}{ccc}
 X_\mu & \xrightarrow{f_\mu} & Y_\mu \\
 \varphi_{\lambda,\mu} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \psi_{\lambda,\mu} \\
 X_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & Y_\lambda
 \end{array}$$

Definition 2.0.3. \mathcal{C} を圏とし, Λ を順序集合とする. $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を \mathcal{C} の帰納系とする. このとき $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ の順極限 (**direct limit**) または帰納的極限 (**inductive limit**) または帰納極限とは, \mathcal{C} の対象 $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と射の族 $\{\varphi_\lambda : X_\lambda \rightarrow \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の組 $\{\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \varphi_\lambda\}$ で, 次の条件を満たすものをいう.

- $\lambda \leq \mu$ に対して $\varphi_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = \varphi_\lambda$
- $\lambda \leq \mu$ に対して $f_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = f_\lambda$ を満たす任意の射の族 $\{f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, $f : \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow Y$ が一意に存在して

$$f \circ \varphi_\lambda = f_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

を満たす.

Remark . 一般の圏では帰納極限や射影極限は存在するとは限らない. しかし, 存在するとすれば, 同型を除いて一意である.

Proposition 2.0.2. 帰納極限は存在すれば, 同型を除いて一意である.

Proof. 証明は後で書く. ■