代数幾何まとめノート

Fefr

2024 年 5 月 30 日

目次

第 1 章 Scheme

1.1 Zariski Topology

atodekakuyo

1.2 Algebraic Sets

atodekakuyo

1.3 Sheaves

Definition 1.3.1. X を位相空間とする.X 上の (アーベル群の) **前層** (presheaf) $\mathcal{F}$ とは次のデータ

- U を任意の X の開集合に対して $\mathcal{F}(U)$ はアーベル群.
- 制限写像 (restriction map) と言われる群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が任意の開集合 $V \subset U$ に対して存在する.

そして次の条件を満たす.

(1) $\rho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$
(2) 任意の開集合 $W \subset V \subset U$ に対して $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ となる.

$s \in \mathcal{F}(U)$ を U 上の $\mathcal{F}$ の**切断** (section) という. また,$\rho_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$ を $s|_V$ と書いて s の V

への制限という.

Definition 1.3.2. 前層 $\mathcal{F}$ が層 (sheaf) とは次の条件を満たすことをいう.

(4) (Uniqueness) U を X の開集合とし $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする. $s \in \mathcal{F}(U)$ が任意の i に対して $s|_{U_i} = 0$ ならば $s = 0$

(5) (Glueing local sections) 上の状況で,$s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ が $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすならば,$s|_{U_i} = s_i$ を満たす $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する.

Remark . $\mathcal{F}$ が層ならば $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$ となる.

Example 1.3.1. X を位相空間とする.
$\mathcal{C}_X^0$ を X の開集合 U に対して $U \to \mathbf{C}$ なる連続写像全体の集合 $\mathcal{C}_X^0(U)$ を対応させるものとし, 制限写像を普通の制限とする. すると,$\mathcal{C}_X^0$ は X 上の層となる.

Proof. $V \subset U$ なる開集合 U, V に対して U 上の連続写像 $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$ を V に制限することによって得られる V 上の連続写像を $\rho_{U,V}(f)(= f|_V)$ と書く. すると, これは $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間 ($\mathbf{C}$ 上の関数空間) の準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{C}_X^0(U) \to \mathcal{C}_X^0(V)$ となる. つまり $(\mathcal{C}_X^0, \rho)$ は前層となる.
また,(4) を満たすのは明らかで.(5) もすぐに成り立つことがわかる.$\{U_i\}_i$ を U の開被覆とする.$f_i \in \mathcal{C}_X^0(U_i)$ が $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすとする. するとそれらを張り合わせた関数を f とすればこれは $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$ であり,$f|_{U_i} = f_i$ となる. よって $(\mathcal{C}_X^0, \rho)$ は層となる. これを連続写像が成す層という. ■

Example 1.3.2. X を位相空間とする.
A を自明でないアーベル群とする.$\mathcal{A}_X$ を X の空でない開集合 U に対して $\mathcal{A}_X(U) = A$ に, 空集合 $\varnothing$ に対して $\mathcal{A}_X(\varnothing) = 0$ に対応させるものとし, 制限写像を空でない開集合 $V \subset U$ に対して $\rho_{U,V} = \mathrm{id}_A$ とし,$\rho_{U,\varnothing} = 0$ とする.
すると,$(\mathcal{A}_X, \rho)$ は X 上の前層にはなるが, 一般に層とはならない.

Proof. 例えば,X が連結でないとすると, 非交差な開集合 U, V があって $X = U \cup V$ とかける. すると $\{U, V\}$ は X の開被覆となる. $s_U \in \mathcal{A}_X(U) = A$ が $s_U|_{U \cap V} = s_U|_{\varnothing} = 0 = s_V|_{U \cap V}$ を満たすとする. このとき, 任意の $s \in \mathcal{A}_X(X) = A$ で $s|_U = s|_V = s$ となり層とならない. ■

Remark . $\mathcal{B}$ を位相空間 X の開基で有限交叉で閉じているものとする.(つまり任意の $U, V \in \mathcal{B}$ に対して $U \cap V \in \mathcal{B}$. e.g. $\operatorname{Spec} A$ の開基 $\{D(f)\}_f$) このとき $\mathcal{B}$-前層 ($\mathcal{B}$-presheaf) $\mathcal{F}_0$ とは

— $U \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{F}_0(U)$ はアーベル群.

— $V \subset U \in \mathcal{B}$ に対して群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}_0(U) \to \mathcal{F}_0(V)$ が定まる.

としたもの.

$\mathcal{B}$-層 ($\mathcal{B}$-sheaf)$\mathcal{F}_0$ から X 上の層 $\mathcal{F}$ を作ることができる.

位相空間 X の任意の開集合 U をとり,$\{U_i\}_i$ をその開被覆とする.$(U_i \in \mathcal{B})$

$$\mathcal{F}(U) := \left\{ (s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}_0(U_i) \;\middle|\; \text{任意の } i,j \text{ に対して } s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \right\}$$

と定義する. するとこれは開被覆によらない. 実際 $\mathcal{F}(U)_{U_i}$ を開被覆 $\{U_i\}_i$ による $\mathcal{F}(U)$ とし,$\{V_j\}_j$ を別の開被覆とすると, $\{U_i \cap V_j\}_{i,j}$ はこれら 2 つの細分である.$\mathcal{F}(U)_{U_i} \to \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$ なる群準同型を $(s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap V_j})_{i,j}$ で定義できる. 実際

$$\begin{aligned}
s_i|_{U_i \cap V_j}\Big|_{(U_i \cap V_j)\cap(U_{i'} \cap V_{j'})} &= s_i\Big|_{(U_i \cap V_j)\cap(U_{i'} \cap V_{j'})} \\
&= s_i|_{U_i \cap U_{i'}}\Big|_{(U_i \cap V_j)\cap(U_{i'} \cap V_{j'})} \\
&= s_{i'}|_{U_i \cap U_{i'}}\Big|_{(U_i \cap V_j)\cap(U_{i'} \cap V_{j'})} \qquad (\because (s_i)_i \in \mathcal{F}(U)_{U_i}) \\
&= s_{i'}\Big|_{(U_i \cap V_j)\cap(U_{i'} \cap V_{j'})} \\
&= s_{i'}|_{U_{i'} \cap V_{j'}}\Big|_{(U_i \cap V_j)\cap(U_{i'} \cap V_{j'})}
\end{aligned}$$

より $(s_i|_{U_i \cap V_j})_{i,j} \in \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$

また,$(s_{ij})_{ij} \in \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$ を取ると, $(s_{ij})_{ij} = (s_i|_{U_i \cap V_j})$ と出来るので全射 (？？？？？)

Kernel を計算すると

$$\begin{aligned}
s_i|_{U_i \cap V_j} &= 0 \quad (\forall i, j) \\
s_i|_{U_i} = s_i &= 0 \quad (\forall i) \quad (\because (4))
\end{aligned}$$

よって Kernel が自明なので単射.

Definition 1.3.3. 位相空間 X 上の前層 $\mathcal{F}$ と $x \in X$ に対して,x での $\mathcal{F}$ の**茎 (stalk)**$\mathcal{F}_x$ という群が定義できる.

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

ただし,U は x の開近傍をすべてを回る.U 上の切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ に対して $x \in U$ の茎 $\mathcal{F}_x$ への自然な群準同型の像を s_x と書いて,x での s の**芽 (germ)** という.

Lemma 1.3.3. **$\mathcal{F}$ を X 上の層とする.$s, t \in \mathcal{F}(X)$ が任意の $x \in X$ に対して $s_x = t_x$ ならば $s = t$**

Proof. 差を考えれば $t=0$ のときを考えればいい.$s_x = 0\ (\forall x \in X)$ とすると,x の開近傍 U_x があって $s|_{U_x} = 0$ となる.$\{U_x\}_{x \in U_x}$ は X の開被覆なので,$s=0$ となる. ■

Definition 1.3.4. X 上の 2 つの前層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ とする. **前層の射** $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは,X の開集合 U に対して群準同型 $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ があって, 任意の開集合の組 $V \subset U$ に対して $\alpha(V) \circ \rho^{\mathcal{F}}_{U,V} = \rho^{\mathcal{G}}_{U,V} \circ \alpha(U)$ を満たすことをいう.
X の任意の開集合 U に対して $\alpha(U)$ が単射ならば α は単射であるという.(全射はうまくいかんっぽい？)

$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を X 上の前層の射とする. 任意の $x \in X$ に対して α から自然に誘導される群準同型 $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ で $(\alpha(U)(s))_x = \alpha_x(s_x)$ が X の任意の開集合 $U, s \in \mathcal{F}(U), x \in U$ で成り立つものが取れる.
α_x が任意の $x \in X$ で全射なら α が全射であるという.

Example 1.3.4. $X = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ とし $\mathcal{F}$ を X 上の正則関数がなす層とし, $\mathcal{G}$ を X 上の双正則関数のなす層とする. 今, 任意の開集合 U と任意の $f \in \mathcal{F}(U)$ に対して $\alpha(U)(f) = \exp(f)$ で定義される層の射 $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が全射であることはよく知られている. しかし $\alpha(X) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ は全射ではない. 例えば恒等写像は $\exp(f)$ と書けない.

Proposition 1.3.5. $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ **を** X **上の層の射とする**.

$$\alpha \text{ が同型} \Leftrightarrow \alpha_x \text{ が同型 } (\forall x \in X)$$

Theorem 1.3.6. **位相空間** X **上の前層** $\mathcal{F}$ **に対して, 前層** $\mathcal{F}$ **の層化** (sheafification)$\mathcal{F}^\dagger$ **は存在する**.

Proof. X の開集合 U に対して

$$\mathcal{F}^\dagger(U) = \left\{ \sigma : U \to \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \,\middle|\, \forall x \in U, x \in \exists V \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(V) \,\text{s.t.}\, \sigma(y) = s_y\ (\forall y \in V) \right\}$$

とする. ただし,σ は任意の $x \in U$ に対して $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$ とする. また,$V \subset U$ なる開集合に対し,

$$\begin{array}{cccc} \rho^{\mathcal{F}^\dagger}_{U,V} : & \mathcal{F}^\dagger(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}^\dagger(V) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma|_V \end{array}$$

が定義できる. 実際, 任意の $x \in V$ をとる.$V \subset U$ であり, $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より

$$x \in \exists U_0 \subset U\text{:open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \ \text{ s.t. } \ \sigma(y) = s_y\ (\forall y \in U_0)$$

$V_0 = U_0 \cap V, \quad t = s|_{V_0}$ とすると任意の $y \in V_0$ に対して

$$\sigma(y) = \sigma|_V(y) = s_y$$

さらに帰納極限の定義から

$$\sigma|_V(y) = t_y$$

次に $\mathcal{F}^\dagger(U)$ がアーベル群, つまり $\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ ならば $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ を示そう.
$\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より任意の $x \in U$ に対して

$$\begin{aligned} &x \in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0) \\ &x \in \exists V_0 \subset U : \text{open}, \exists t \in \mathcal{F}(V_0) \text{ s.t. } \tau(z) = t_z \ (\forall z \in V_0) \end{aligned}$$

を満たす. いま $W = U_0 \cap V_0, s' = s|_W, t' = t|_W$ とすると,

$$\begin{aligned} x \in W \subset U : \text{open}, s', t' \in \mathcal{F}(W) \text{ s.t. } (\sigma + \tau)(y) &= \sigma(y) + \tau(y) \\ &= s_y + t_y \\ &= (s+t)_y \ (\forall y \in W) \end{aligned}$$

よって $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ また明らかに可換. よって $\mathcal{F}^\dagger(U)$ はアーベル群.
また, 通常の制限で制限写像を定義しているため,$\mathcal{F}^\dagger$ は前層となる.
更に層となることを示そう.
U を X の開集合とし,$\{U_i\}_i$ をその開被覆とする.$\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ が任意の i に対して $\sigma|_{U_i} = 0$ とする. つまり任意の $x \in U_i$ に対して $\sigma(x) = 0$ とする.U_i は U を被覆するので結局 $\sigma = 0$ となる.
次に,$\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ とし, $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}$ と仮定すると,

$$\begin{array}{cccc} \sigma: & U & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ & \Cup & & \Cup \\ & x & \longmapsto & \sigma_i(x) \end{array}$$

ただし,$x \in U_i$. すると,σ は $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ を張り合わせて作っているのでこれは $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ となることが容易にわかる。よって、$\mathcal{F}^\dagger$ は層になる。 ■

極限

第 2 章

とりあえず, 帰納極限だけ述べる. 射影極限は双対概念なのでまぁ頑張って.

Definition 2.0.1.(帰納系の定義)
$(\Lambda, \leq)$ を順序集合,$\mathscr{C}$ を圏とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し,$X_\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ が与えられ, $\lambda \leq \mu$ に対して射 $\varphi_{\mu,\lambda} : X_\lambda \to X_\mu$ があって次を満たすとき,$\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を**順系 (direct system)** または**帰納系 (inductive system)** という. しばし $\varphi_{\mu,\lambda}$ を省略して $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ や $\{X_\lambda\}_\lambda$ で表す.

— 任意の $\lambda \in \Lambda$ に他逸して $\varphi_{\lambda,\lambda} = \mathrm{id}_{X_\lambda}$
— $\lambda \leq \mu \leq \nu$ なる任意の $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\nu,\lambda} = \varphi_{\nu,\mu} \circ \varphi_{\mu,\lambda}$

Example 2.0.1. 位相空間 X の開集合族 $\{U\}_U$ に対して

$$U \leq V \overset{\mathrm{def}}{\equiv} V \subset U$$

と定義する. そして,**AGrp** をアーベル群の成す圏,$\mathcal{F}$ を X 上の前層とする. すると, 各開集合 U に対し,$\mathcal{F}(U) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{AGrp})$ で, 前層の定義からアーベル群と制限写像との組 $\{\mathcal{F}(U), \rho_{U,V}\}$ は帰納系となる. 前層の定義は Def:1.3.1 を参照.

Definition 2.0.2.(帰納系の射の定義)
Λ を順序集合.$\{X_\lambda, \varphi_{\lambda,\mu}\}, \{Y_\lambda, \psi_{\lambda,\mu}\}$ を Λ 上の圏 $\mathscr{C}$ における帰納系とする. このとき $\{X_\lambda\}$ から $\{Y_\lambda\}$ への射とは $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ なる射の族 $\{f_\lambda\}$ で, 任意の $\lambda \leq \mu$ に対して $\psi_{\lambda,\mu} \circ f_\mu = f_\lambda \circ \varphi_{\lambda,\mu}$ となるものを言う.

$$\begin{tikzcd}
X_\mu \arrow[r, "f_\mu"] \arrow[d, "\varphi_{\lambda,\mu}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_\mu \arrow[d, "\psi_{\lambda,\mu}"] \\
X_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"'] & Y_\lambda
\end{tikzcd}$$

Definition 2.0.3. $\mathscr{C}$ を圏とし,Λ を順序集合とする.$\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を $\mathscr{C}$ の帰納系とする.このとき $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ の**順極限 (direct limit)** または**帰納的極限 (inductive limit)** または**帰納極限**とは, $\mathscr{C}$ の対象 $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ と射の族 $\{\varphi_\lambda : X_\lambda \to \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の組 $\{\varinjlim X_\lambda, \varphi_\lambda\}$ で, 次の条件を満たすものをいう.

— $\lambda \leq \mu$ に対して $\varphi_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = \varphi_\lambda$

— $\lambda \leq \mu$ に対して $f_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = f_\lambda$ を満たす任意の射の族 $\{f_\lambda : X_\lambda \to Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, $f : \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to Y$ が一意に存在して

$$f \circ \varphi_\lambda = f_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

を満たす.

Remark . 一般の圏では帰納極限や射影極限は存在するとは限らない. しかし, 存在するとすれば, 同型を除いて一意である.

Proposition 2.0.2. **帰納極限は存在すれば, 同型を除いて一意である.**

Proof. 証明は後で書く. ■