# 代数幾何まとめノート

Fefr

2024 年 8 月 5 日

# 目次

# Scheme
第 1 章

## 1.1 Zariski Topology

atodekakuyo

## 1.2 Algebraic Sets

atodekakuyo

## 1.3 Sheaves

**Definition 1.3.1.** $X$ を位相空間とする.$X$ 上の (アーベル群の) **前層** (presheaf) $\mathcal{F}$ とは次のデータ

— $U$ を任意の $X$ の開集合に対して $\mathcal{F}(U)$ はアーベル群.
— 制限写像 (restriction map) と言われる群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が任意の開集合 $V \subset U$ に対して存在する.

そして次の条件を満たす.

(1) $\rho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$
(2) 任意の開集合 $W \subset V \subset U$ に対して $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ となる.

$s \in \mathcal{F}(U)$ を $U$ 上の $\mathcal{F}$ の**切断** (section) という. また,$\rho_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$ を $s|_V$ と書いて $s$ の $V$

への制限という.
また, 単に $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \ldots$ などと書いたら (前) 層を表すことや、$\rho$ と書いたら制限写像を意味する。また, どの (前) 層の制限写像かを明示するため, 例えば,$\rho^{\mathcal{F}}_{U,V}$ などと書くことがある。

**Definition 1.3.2.** 前層 $\mathcal{F}$ が層 (sheaf) とは次の条件を満たすことをいう.

(4) (Uniqueness) $U$ を $X$ の開集合とし $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする. $s \in \mathcal{F}(U)$ が任意の $i$ に対して $s|_{U_i} = 0$ ならば $s = 0$

(5) (Glueing local sections) 上の状況で,$s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ が $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすならば,$s|_{U_i} = s_i$ を満たす $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する.

**Remark .** $\mathcal{F}$ が層ならば $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$ となる.

**Example 1.3.1.** $X$ を位相空間とする.
$\mathcal{C}^0_X$ を $X$ の開集合 $U$ に対して $U \to \mathbf{C}$ なる連続写像全体の集合 $\mathcal{C}^0_X(U)$ を対応させるものとし, 制限写像を普通の制限とする.

$$\mathcal{C}^0_X(U) = \{f : U \to \mathbf{C} \mid f \text{ is continuous}\}$$

すると,$\mathcal{C}^0_X$ は $X$ 上の層となる.

**Proof.** $V \subset U$ なる開集合 $U, V$ に対して $U$ 上の連続写像 $f \in \mathcal{C}^0_X(U)$ を $V$ に制限することによって得られる $V$ 上の連続写像を $\rho_{U,V}(f)(= f|_V)$ と書く. すると, これは $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間 ($\mathbf{C}$ 上の関数空間) の準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{C}^0_X(U) \to \mathcal{C}^0_X(V)$ となる. つまり $(\mathcal{C}^0_X, \rho)$ は前層となる.
また,(4) を満たすのは明らかで.(5) もすぐに成り立つことがわかる.$\{U_i\}_i$ を $U$ の開被覆とする.$f_i \in \mathcal{C}^0_X(U_i)$ が $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすとする. するとそれらを張り合わせた関数を $f$ とすればこれは $f \in \mathcal{C}^0_X(U)$ であり,$f|_{U_i} = f_i$ となる. よって $(\mathcal{C}^0_X, \rho)$ は層となる. これを連続写像が成す層という. ■

**Example 1.3.2.** $X$ を位相空間とする.
$A$ を自明でないアーベル群とする.$\mathcal{A}_X$ を $X$ の空でない開集合 $U$ に対して $\mathcal{A}_X(U) = A$ に, 空集合 $\varnothing$ に対して $\mathcal{A}_X(\varnothing) = 0$ に対応させるものとし, 制限写像を空でない開集合 $V \subset U$ に対して $\rho_{U,V} = \mathrm{id}_A$ とし,$\rho_{U,\varnothing} = 0$ とする.
すると,$(\mathcal{A}_X, \rho)$ は $X$ 上の前層にはなるが, 一般に層とはならない.

**Proof.** 例えば,$X$ が連結でないとすると, 非交差な開集合 $U, V$ があって $X = U \cup V$ とかける. すると $\{U, V\}$ は $X$ の開被覆となる. $s_U \in \mathcal{A}_X(U) = A$ が $s_U|_{U \cap V} = s_U|_{\varnothing} = 0 = s_V|_{U \cap V}$ を満たすとする. このとき, 任意の $s \in \mathcal{A}_X(X) = A$ で $s|_U = s|_V = s$ となり層

とならない. ■

**Example 1.3.3.** (skyscraper sheaf)
$X$ を位相空間、$A$ をアーベル群とする。$p \in X$ に対して $i_p : \{p\} \hookrightarrow X$ を包含写像とする。このとき $i_{p,*}\mathcal{A}$ を

$$i_{p,*}\mathcal{A}(U) = \begin{cases} A & p \in U \\ 1 & p \notin U \end{cases}$$

と定義する。これは層になる。

**Definition 1.3.3.** 位相空間 $X$ 上の前層 $\mathcal{F}$ と $x \in X$ に対して,$x$ での $\mathcal{F}$ の**茎 (stalk)**$\mathcal{F}_x$ という群が定義できる.

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

ただし,$U$ は $x$ の開近傍をすべてを回る.$U$ 上の切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ に対して $x \in U$ の茎 $\mathcal{F}_x$ への自然な群準同型の像を $s_x$ と書いて,$x$ での $s$ の**芽 (germ)** という.

**Proposition 1.3.4.** **層の定義の (4),(5) を次の列が完全系列であるとすることができる.**

$$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : 0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{d_0} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d_1} \prod_i \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

**ただし,$\mathcal{U}$ は開集合 $U$ の開被覆で $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$.**
$d_0 : s \mapsto (s|_{U_i})_i, d_1 : (s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$

**Proof.** ■

**Lemma 1.3.5.** **$\mathcal{F}$ を $X$ 上の層とする.$s, t \in \mathcal{F}(X)$ が任意の $x \in X$ に対して $s_x = t_x$ ならば $s = t$**

**Proof.** 差を考えれば $t = 0$ のときを考えればいい.$s_x = 0$ $(\forall x \in X)$ とすると,$x$ の開近傍 $U_x$ があって $s|_{U_x} = 0$ となる.$\{U_x\}_{x \in U_x}$ は $X$ の開被覆なので,$s = 0$ となる. ■

**Definition 1.3.4.** $X$ 上の 2 つの前層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ とする. **前層の射** $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは,$X$ の開集合 $U$ に対して群準同型 $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ があって, 任意の開集合の組 $V \subset U$ に対して $\alpha(V) \circ \rho^{\mathcal{F}}_{U,V} = \rho^{\mathcal{G}}_{U,V} \circ \alpha(U)$ を満たすことをいう.
$X$ の任意の開集合 $U$ に対して $\alpha(U)$ が単射ならば $\alpha$ は単射であるという.(全射はうまくいかんっぽい?)

$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を $X$ 上の前層の射とする. 任意の $x \in X$ に対して $\alpha$ から自然に誘導される群準同型 $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ で $(\alpha(U)(s))_x = \alpha_x(s_x)$ が $X$ の任意の開集合 $U, s \in \mathcal{F}(U), x \in U$ で成り立つものが取れる.

$\alpha_x$ が任意の $x \in X$ で全射なら $\alpha$ が全射であるという.

**Example 1.3.6.** $X = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ とし $\mathcal{F}$ を $X$ 上の正則関数がなす層とし, $\mathcal{G}$ を $X$ 上の双正則関数のなす層とする. 今, 任意の開集合 $U$ と任意の $f \in \mathcal{F}(U)$ に対して $\alpha(U)(f) = \exp(f)$ で定義される層の射 $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が全射であることはよく知られている. しかし $\alpha(X) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ は全射ではない. 例えば恒等写像は $\exp(f)$ と書けない.

**Proposition 1.3.7.** $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を $X$ 上の層の射とする.

$$\alpha \text{ が同型} \Leftrightarrow \alpha_x \text{ が同型 } (\forall x \in X)$$

**Theorem 1.3.8.** 位相空間 $X$ 上の前層 $\mathcal{F}$ に対して, 前層 $\mathcal{F}$ の層化 (sheafification)$\mathcal{F}^\dagger$ は存在する.

**Proof.** $X$ の開集合 $U$ に対して

$$\mathcal{F}^\dagger(U) = \left\{ \sigma : U \to \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \,\middle|\, \forall x \in U, x \in \exists V \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(V) \,\text{s.t.}\, \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in V) \right\}$$

とする. ただし,$\sigma$ は任意の $x \in U$ に対して $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$ とする. また,$V \subset U$ なる開集合に対し,

$$\begin{array}{cccc} \rho^{\mathcal{F}^\dagger}_{U,V} : & \mathcal{F}^\dagger(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}^\dagger(V) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma|_V \end{array}$$

が定義できる. 実際, 任意の $x \in V$ をとる.$V \subset U$ であり, $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より

$$x \in \exists U_0 \subset U\text{:open,}\exists s \in \mathcal{F}(U_0) \ \text{ s.t. } \ \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0)$$

$V_0 = U_0 \cap V, \quad t = s|_{V_0}$ とすると任意の $y \in V_0$ に対して

$$\sigma(y) = \sigma|_V(y) = s_y$$

さらに帰納極限の定義から

$$\sigma|_V(y) = t_y$$

次に $\mathcal{F}^\dagger(U)$ がアーベル群, つまり $\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ ならば $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ を示そう.
$\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より任意の $x \in U$ に対して

$$\begin{aligned} &x \in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0) \\ &x \in \exists V_0 \subset U : \text{open}, \exists t \in \mathcal{F}(V_0) \text{ s.t. } \tau(z) = t_z \ (\forall z \in V_0) \end{aligned}$$

を満たす. いま $W = U_0 \cap V_0, s' = s|_W, t' = t|_W$ とすると,

$$\begin{aligned} x \in W \subset U : \text{open}, s', t' \in \mathcal{F}(W) \text{ s.t. } (\sigma + \tau)(y) &= \sigma(y) + \tau(y) \\ &= s_y + t_y \\ &= (s + t)_y \ (\forall y \in W) \end{aligned}$$

よって $\sigma+\tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ また明らかに可換. よって $\mathcal{F}^\dagger(U)$ はアーベル群.
また, 通常の制限で制限写像を定義しているため,$\mathcal{F}^\dagger$ は前層となる.
更に層となることを示そう.
$U$ を $X$ の開集合とし,$\{U_i\}_i$ をその開被覆とする.$\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ が任意の $i$ に対して $\sigma|_{U_i} = 0$ とする. つまり任意の $x \in U_i$ に対して $\sigma(x) = 0$ とする.$U_i$ は $U$ を被覆するので結局 $\sigma = 0$ となる.
次に,$\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ とし, $\sigma_i|_{U_i\cap U_j} = \sigma_j|_{U_i\cap U_j}$ と仮定すると,

$$\begin{array}{cccc} \sigma: & U & \longrightarrow & \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \\ & \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ & x & \longmapsto & \sigma_i(x) \end{array}$$

ただし,$x \in U_i$. すると,$\sigma$ は $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ を張り合わせて作っているのでこれは $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ となることが容易にわかる。よって、$\mathcal{F}^\dagger$ は層になる。 ■

**Proposition 1.3.9.** **層化の射 $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^\dagger$ に対して、その茎の射 $\theta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}^\dagger_x$ は同型である。**

**Lemma 1.3.10.** **$\mathcal{F}$ を $X$ 上の層とし、$\mathcal{F}'$ を $\mathcal{F}$ の部分層とする。このとき開集合 $U$ を $\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ に対応させるものは前層になる。**

**Proof.** この対応を $\mathcal{G}$ とおく。$V \subset U$ なる開集合 $U, V$ をとる。制限写像を

$$\begin{array}{cccc} \rho^{\mathcal{G}}_{U,V}: & \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V)/\mathcal{F}'(V) \\ & \cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid \\ & s+\mathcal{F}'(U) & \longmapsto & \rho^{\mathcal{F}}_{U,V}(s)+\mathcal{F}'(V) \end{array}$$

とすると、これは well-defined である。また、$U \subset V \subset W$ なる開集合の組に対して

$$\rho^{\mathcal{G}}_{U,W} = \rho^{\mathcal{G}}_{V,W} \circ \rho^{\mathcal{G}}_{U,V}$$

が成り立つことは制限写像の定義から明らかである。よって $\mathcal{G}$ は前層。 ■

**Definition 1.3.5.** Lem:**??**で定義した前層の層化を $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ と書いて、**商層 (quotient shaef)** という。

**Definition 1.3.6.** $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前層の射とする。このとき開集合 $U$ に対して $U \mapsto \mathrm{Ker}\,(\alpha(U))$ とするものは $\mathcal{F}$ の部分層になる。これを $\mathrm{Ker}\,\alpha$ と書いて、**$\alpha$ の核 (kernel of $\alpha$)** という。
更に、$U \mapsto \mathrm{Im}\,(\alpha(U))$ は一般には前層となるので、これの層化を $\mathrm{Im}\,\alpha$ と書いて、**$\alpha$ の像 (image of $\alpha$)** という。

また，$U \mapsto \operatorname{Coker}(\alpha(U)) = \mathcal{G}(U)/\operatorname{Im}(\alpha(U))$ は一般には前層となるので，これの層化を $\operatorname{Coker}\alpha$ と書いて，$\alpha$ **の余核 (cokernel of** $\alpha$**)** という．

**Lemma 1.3.11.** **$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を $X$ 上の層,$\mathcal{F}'$ を $\mathcal{F}$ の部分層,$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前層の射とする。このとき、**

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Ker}\alpha)_x &= \operatorname{Ker}\alpha_x \\
(\operatorname{Im}\alpha)_x &= \operatorname{Im}\alpha_x \\
(\operatorname{Coker}\alpha)_x &= \operatorname{Coker}\alpha_x \\
(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x &= \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x
\end{aligned}$$

**が成り立つ。**

**Proof.** $\mathcal{Q}(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ とおく。
このとき、アーベル群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

が作れる。帰納極限は完全列を完全列に移すので、また Prop:1.3.7 より

$$0 \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

を得る。よって

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x \longrightarrow 0$$

したがって、

$$\mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x \simeq (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x$$

を得る。
次に

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Ker}\alpha)_x &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha(U)(s) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\
&= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha_x(s_x) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\
&= \operatorname{Ker}\alpha_x
\end{aligned}$$

を得る。同様に

$$\begin{aligned}
(\operatorname{Im}\alpha)_x &= \{t_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in \exists U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U) \text{ s.t } t = \alpha(U)(s)\} \\
&= \{(\alpha(U)(s))_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\
&= \{\alpha_x(s_x) \in \mathcal{G}_x \mid s_x \in \mathcal{F}_x\} \\
&= \operatorname{Im}\alpha_x
\end{aligned}$$

を得る．また，$(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x$ より

$$(\operatorname{Coker}\alpha)_x = (\mathcal{G}/\operatorname{Im}\alpha)_x = \mathcal{G}_x/\operatorname{Im}\alpha_x = \operatorname{Coker}\alpha_x$$

■

**Definition 1.3.7.** 層の列

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

が完全とは、$\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$ が成り立つことをいう。

**Proposition 1.3.12.** **層の列に対して次が成り立つ。**

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \text{ が完全} \iff \text{任意の } x \in X \text{ に対して } \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x \text{が完全}$$

**Proof.** 明らか。 ■

**Definition 1.3.8.** $X, Y$ を位相空間,$f : X \to Y$ を連続写像とする。このとき、$X$ 上の層 $\mathcal{F}$,$Y$ 上の層 $\mathcal{G}$ に対して、新たな $Y$ 上の層 $f_*\mathcal{F}$ が

$$V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

によって定義できる。これを $\mathcal{F}$ **の順像 (direct image of** $\mathcal{F}$**)** という。
また、

$$U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

で定義できる新たな $X$ 上の前層 $f^{\cdot}\mathcal{G}$ の層化 $f^*\mathcal{G}$ を $\mathcal{G}$ **の逆像 (inverse image of** $\mathcal{G}$**)** という。

**Proposition 1.3.13.** **上の状況で**

$$(f^*\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)} \qquad \forall x \in X$$

**Proof.**

$$(f^*\mathcal{G})_x = \varinjlim_{x \in U} (f^*\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{x \in U} \varinjlim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V) = \mathcal{G}_{f(x)}$$

最後の等号は明らか. ■

**Remark .** $V$ を $Y$ の開集合とする。このとき自然な単射 $i : V \to Y$ に対して

$$i^*\mathcal{G} = \mathcal{G}|_V$$

が成り立つ。

**Proposition 1.3.14.** $f : X \to Y$ **を位相空間の間の連続写像とし,** $\mathcal{F}$ **を** $X$ **上の層.** $\mathcal{G}$ **を**

***$Y$* 上の層とする．このとき**

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}(X)}(f^*\mathcal{G},\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathsf{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

**ただし，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ は圏 $\mathcal{C}$ で $X \to Y$ なる射全体を表し，$\mathsf{Sh}(X)$ は $X$ 上の層全体を表す．**

**Proof.** 層化の普遍性より $\theta : f^{\cdot}\mathcal{G} \to f^*\mathcal{G} = (f^{\cdot}\mathcal{G})^{\dagger}$ を層化の射とすると，

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^{\cdot}\mathcal{G},\mathcal{F}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ph(X)}}(f^*\mathcal{G},\mathcal{F}) \\ \Psi & & \Psi \\ \alpha & \longmapsto & \tilde{\alpha}\circ\theta \end{array}$$

が成り立つ．つまり

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^{\cdot}\mathcal{G},\mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh(Y)}}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

を示せばいい．次に $X$ 上の開集合 $U$ に対して

$$f^{\cdot}\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{V\supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

なので，$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^{\cdot}\mathcal{G},\mathcal{F})$ に対して

$$\varphi(U) : \varinjlim_{V\supset f(U)} \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

を与えることは帰納極限の定義より $f(U) \subset V$ なる開集合 $V$ に対して

$$\psi'(V) : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

を $f(U) \subset V' \subset V$ ならば，

$$\psi'(V) = \psi'(V') \circ \rho^{\mathcal{G}}_{V,V'}$$

となるように与えることである．すなわち $\psi'(V)$ は

$$\psi(V) : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

と $\rho^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),U}$ を合成したものである．(帰納系の選び方によらない．)
したがって，$\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^{\cdot}\mathcal{G},\mathcal{F})$ を与えることは，$\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ph}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ を与えることと等しい． ■

### 1.3.1 $\mathfrak{B}$-sheaf

$\mathfrak{B}$-sheaf はアフィンスキームの構成にも必要な概念で，ラフに言えばすべての開集合 $U$ に対して $\mathcal{F}(U)$ が定まっているものではなく，開基 $\mathfrak{B}$ の元 $U$ に対してだけ定まっている層を $\mathfrak{B}$-sheaf という．

**Definition 1.3.9.** 位相空間 $X$ の**開基 $\mathfrak{B}$ が有限交叉で閉じている**とは，任意の $U, V \in \mathfrak{B}$ に対して $U \cap V \in \mathfrak{B}$ が成り立つことをいう．

**Example 1.3.15.** 環 $A$ の素イデアルの集合 $\operatorname{Spec} A$ の基本開集合による開基 $\{D(f)\}_{f \in A}$ は有限交叉で閉じている．

**Definition 1.3.10.** $X$ を位相空間．$\mathfrak{B}$ をその開基とする．このとき $\mathcal{F}$ が **$\mathfrak{B}$-前層 ($\mathfrak{B}$-presheaf)** であるとは，

— $U \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{F}(U)$ はアーベル群.
— $V \subset U \in \mathcal{B}$ に対して群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が定まる.

で，

(1) $\rho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$
(2) 任意の開集合 $W \subset V \subset U$ に対して $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ となる．

を満たすときをいう．

**Definition 1.3.11.** $\mathfrak{B}$ が有限交叉で閉じているとする．このとき $\mathfrak{B}$-前層が層の条件を満たすとき **$\mathfrak{B}$-層 ($\mathfrak{B}$-sheaf)** という．

**Proposition 1.3.16.** **$\mathcal{F}$ を $\mathfrak{B}$-前層とする．このとき，任意の開集合 $V$ に対して**

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(V) &= \varprojlim_{\substack{U \in \mathcal{B} \\ U \subset V}} \mathcal{F}(U) \\ &= \left\{ (s_U)_U \in \prod_{\substack{U \in \mathcal{B} \\ U \subset V}} \mathcal{F}(U) \;\middle|\; \forall U' \subset U \in \mathcal{B}, s_U|_{U'} = s_{U'} \right\}\end{aligned}$$

**制限写像は射影極限から誘導される射である．**

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{U,U'}} & \mathcal{F}(U') \\ \uparrow{\scriptstyle \varphi_U} & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle \psi_{U'}} \\ \varprojlim_{U \subset V} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow[\rho_{V,V'}]{} & \varprojlim_{U' \subset V'} \mathcal{F}(U') \end{array}$$

**するとこれは前層になる．**

**Proposition 1.3.17.** **更に，$\mathfrak{B}$ が有限交叉で閉じているなら，層になる．**

**Proof.** 任意の開集合 $V$ に対してその開被覆 $\{V_i\}_i$ を取る．ただし $V_i \in \mathfrak{B}$ とする．

**Claim (4)(Uniqueness) が成立する.**

$s \in \mathcal{F}(V)$ が任意の $i$ に対して $s|_{V_i} = 0$ とする．今定義から $s = 0$ とは $U \subset V$ なる任意の $U \in \mathfrak{B}$ に対して $s_U \in \mathcal{F}(U)$ が $0$ であることである．実際 $V$ の開被覆から $U$ の開被覆 $\{U \cap V_i\}_i \subset \mathfrak{B}$ を得る．また任意の $i$ に対して $U \cap V_i \subset V_i$ より $s|_{V_i}|_{U \cap V_i} = s|_{U \cap V_i} = 0$ となる．従って任意の $i$ に対して $s_U|_{U \cap V_i} = 0$ となる．今 $\mathcal{F}$ は $\mathfrak{B}$-sheaf なので $s_U = 0$ よって $s = 0$ が分かる．

**Claim (5)(Glueing local sections) が成立する.**

$s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ が任意の $i, j$ に対して $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ を満たすとする．今 $U \in \mathfrak{B}$ 成分への射影を

$$\varphi_U : \varprojlim_{U \subset V} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$$

と書くことにすると，制限写像 $\rho_{V, V_i} = \varphi_{V_i}$ で，つまり $(s_U)_U \in \mathcal{F}(V)$ で $(s_U)_U|_{V_i} = s_i$ なる $(s_U)_U$ があることを示せば良い．各 $i$ に対して $V_i \subset U_i$ なる $U_i \in \mathfrak{B}$ で $s_{U_i}|_{V_i} = s_i$ なる $s_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ があればいい．今 $U_i \subset V$ なので $U$ の開被覆 $\{U_i \cap V_j\}_j$ が取れる．

■

## 1.4 Ringed Topological Space

**Definition 1.4.1.** **局所環付き空間**とは位相空間 $X$ と $X$ 上の環の層 $\mathcal{O}_X$ の組 $(X, \mathcal{O}_X)$ で、任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X,x}$ が局所環となるものをいう。また、この $\mathcal{O}_X$ を $(X, \mathcal{O}_X)$ の**構造層 (structure sheaf)** という。また $(X, \mathcal{O}_X)$ を単に $\mathcal{O}_X$ と書くことがある。
また、$\mathcal{O}_{X,x}$ の唯一の極大イデアル $\mathfrak{m}_x$ に対してその剰余体 $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ を **$X$ の点 $x$ での剰余体 (residue field of X at x)** といって $k(x)$ と書く。

**Definition 1.4.2.** 局所環付き空間の射とは

$$(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

とは連続写像 $f : X \to Y$ と環の層の射 $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ の組 $(f, f^{\#})$ で、任意の $x \in X$ に対して $f_x^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ は局所射となるものをいう。(つまり $f_x^{\#}(\mathfrak{m}_{Y,f(x)}) \subset \mathfrak{m}_{X,x}$ を満たす．)

Prop:1.3.13 より

$$f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$$

を考えることは
$$f^{\#} : f^*\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$$
を考えることに等しい．Def:1.4.2 の $f_x^{\#}$ は下の式で考えている．

**Definition 1.4.3.** 射 $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が**開はめ込み (open immersion)**(resp. **閉はめ込み (closed immersion)**) とは連続写像 $f$ が開はめ込み (resp. 閉はめ込み) [a]でかつ任意の $x \in X$ に対して $f_x^{\#}$ が同型 (resp. 全射) のときをいう。

[a] $f : X \to Y$ が (位相的) 開 (閉) はめ込みとは $X$ と $f(X)$ が同相で $f(X)$ が開 (閉) 集合のときをいう。

**Definition 1.4.4.** $(X, \mathcal{O}_X)$ を局所環付き空間とする。$\mathcal{J}$ が $\mathcal{O}_X$ の**イデアル層 (sheaf of ideals of $\mathcal{O}_X$)** とは任意の開集合 $U$ に対して $\mathcal{J}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ のイデアルになっているときをいう。

**Lemma 1.4.1.** $(X, \mathcal{O}_X)$ を局所環付き空間とする。$\mathcal{J}$ を $\mathcal{O}_X$ のイデアル層とする。そして、
$$V(\mathcal{J}) = \{x \in X \mid \mathcal{J}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$$
とおく。(ちなみに上の諸々から $\mathcal{J}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ が分かる。)
$j : V(\mathcal{J}) \hookrightarrow X$ を包含写像とする。すると

— $V(\mathcal{J})$ は $X$ の閉集合
— $(V(\mathcal{J}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$ は局所環付き空間
— $j^{\#}$ は自然な全射
$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{J} = j_*(j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$$
で $(j, j^{\#}) : (V(\mathcal{J}), j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})) \to (X, \mathcal{O}_X)$ は閉はめ込みである。

*Proof.* **Claim1.**$V(\mathcal{J})$ は $X$ の閉集合
$x \in X \setminus V(\mathcal{J}) = \{x \in X \mid \mathcal{J}_x = \mathcal{O}_{X,x}\}$ に対して $f_x = 1$ なる $x$ の開近傍 $U$ と $f \in \mathcal{J}(U)$ をとる。つまり $f|_V = 1|_V = 1$ なる $x$ の開近傍 $V \subset U$ がある。すると任意の $y \in V$ に対して $f_y = 1 \in \mathcal{J}_y$ となって, この $y$ に対して $\mathcal{J}_y = \mathcal{O}_{X,y}$ なので $V \subset X \setminus V(\mathcal{J})$ となって $X \setminus V(\mathcal{J})$ が開であることがわかる。
**Claim2.**$(V(\mathcal{J}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$ は局所環付き空間
任意の $x \in V(\mathcal{J})$ に対して
$$(j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))_x = (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})_x = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{J}_x$$
は局所環。残りは自明。■

**Proposition 1.4.2.** **$f : X \to Y$ を局所環付き空間の閉はめ込みとする。$Z$ を局所環付き空間 $V(\mathcal{J})$ とする。ただし、$\mathcal{J} = \operatorname{Ker} f^{\#} \subset \mathcal{O}_Y$. すると $X \simeq Z$ を自然な閉はめ込み $Z \hookrightarrow Y$ から得る。**

**Proof.** まず次の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

から Prop:**??**より任意の $y \in Y$ に対して

$$\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{J}_y = (f_*\mathcal{O}_X)_y$$

を得る。よって

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus V(\mathcal{J}) \\ \mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{J}_y & y \in V(\mathcal{J}) \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

を得る。$f(X)$ は $Y$ の閉集合なので $x \in Y \setminus f(X)$ の開近傍 $U$ で

$$f(X) \cap U = \varnothing$$

となるものがとれる。よって

$$f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(\varnothing) = 0$$

したがって、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_x = 0$$

また、$x \in f(X)$ の開近傍 $U$ に対して $f$ での引き戻し $f^{-1}(U)$ は $y = f(x)$ の開近傍である。これを $V$ とおく。逆に、$f$ は閉はめ込みなので、$X$ は $f(X)$ と同相なので $X$ に自然に $Y$ の相対位相が入る。つまり、任意の $x \in X$ の開近傍 $U$ に対して $y = f(x) \in Y$ の開近傍 $V$ が存在して $f^{-1}(V)$ とかける。よって、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_x = \varinjlim_{U \ni x} f_*\mathcal{O}_X(U) = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \varinjlim_{V \ni y} \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_{X,y}$$

つまり、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus f(X) \\ \mathcal{O}_{X,x} & y = f(x) \end{cases}$$

$(*)$ と比較すれば

$$V(\mathcal{J}) = f(X)$$

が分かる。なので、$j : Z \hookrightarrow Y$ を包含写像とすると、$f$ から誘導される同相写像 $g : X \to Z$ に対して

$$f = j \circ g$$

で、

$$j_*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Y/\mathcal{J} \simeq f_*\mathcal{O}_X$$

がわかる。容易に

$$f_*\mathcal{O}_X = j_*g_*\mathcal{O}_X$$

が分かるので

$$\mathcal{O}_Z = (j^{-1}\circ j)_*\mathcal{O}_Z = (j^{-1})_*j_*\mathcal{O}_Z \simeq (j^{-1})_*j_*g_*\mathcal{O}_X = (j^{-1}\circ j)_*g_*\mathcal{O}_X = g_*\mathcal{O}_X$$

である。よって、$g$ は局所環付き空間の同型射である。$f = j\circ g$ が局所環付き空間の射であることを確認するのは読者に委ねる。■

## 1.5 Schemes

**Proposition 1.5.1.** $A$ を環、$X = \operatorname{Spec} A$ とする。このとき以下が成り立つ。

(1) $\mathcal{O}'_X$ を環の $\mathfrak{B}$-層とする。$\mathcal{O}'_X$ が誘導する $X$ 上の層 $\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{O}_X(X) = A$ となる。
(2) 任意の $\mathfrak{p} \in X$ に対して、茎 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ は $A_\mathfrak{p}$ への標準的な同型がある。特に、$(X, \mathcal{O}_X)$ は局所環付き空間になる。

**Proof.** まず，開集合 $U = X$ について Uniquness 条件を確認する．ほかの基本開集合も同様に示される．$U_i =$ ■

**Definition 1.5.1.** 上で定義した局所環付き空間 $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ を**アフィンスキーム (affine scheme)** という．

**Remark .** $X, Y$ をアフィンスキームとする．このとき $f : X \to Y$ がアフィンスキームの射とは局所環付き空間としての射として定義する．後に定義するスキームの射も同様である．また (アフィン) スキームが開 (閉) はめ込みも局所環付き空間として定義される．

**Lemma 1.5.2.** $A$ を整域とし $K$ をその商体とする．素イデアル $0$ に対応する $X = \operatorname{Spec} A$ の点を $\xi$ とする．このとき

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = K$$

が成り立つ．さらに，任意の空でない開集合 $U \subset X$ と $\xi \in U$ に対して標準的な準同型

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\xi}$$

は単射となる．開集合の組 $V \subset U$ に対して制限

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$$

**は単射となる．**

**Proof.** Prop:1.5.1(2) より

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = A_\xi = K$$

を得る．
$U = D(f)$ とすると，$\mathcal{O}_X(U) = A_f \subset K$．一般に

$$U = \bigcup_i D(f_i)$$

と置く．$s \in \mathcal{O}_X(U)$ を飛ばすと $0 \in K$ になるとする．各開被覆 $D(f_i) \subset U$ への制限を考えると

$$s|_{D(f_i)} = 0$$

が任意の $i$ で成り立つので，$s = 0$ である．よって $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\xi} \subset K$ は単射．
開集合の組 $\xi \in V \subset U$ に対して制限 $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ に対して帰納極限の定義より図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{O}_X(V) \arrow[dl] \\
\mathcal{O}_{X,\xi} &
\end{tikzcd}$$

が可換となるので，制限は単射である． ■

**Lemma 1.5.3.** **$X = \mathrm{Spec}\, A$ をアフィンスキームとし，$g \in A$ をとる．このとき開集合 $D(g)$ は $X$ から誘導される局所環付き空間で $\mathrm{Spec}\, A_g$ に同型なアフィンスキームになる．**

**Proof.** $Y = \mathrm{Spec}\, A_g$ と置く．局所化と素イデアルの対応より標準的な開はめ込み

$$i : Y \to X$$

がある ($\mathrm{Im}\, i = D(g)$)
$D(h) \subset D(g)$ とする．$A \xrightarrow{\varphi} A_g$ とする．また $\varphi(h) = \bar{h}$ と置く．このとき標準的な同型

$$\mathcal{O}_X(D(h)) = A_h \simeq (A_g)_{\bar{h}} = \mathcal{O}_Y(D(\bar{h})) = i_*\mathcal{O}_Y(D(h))$$

$\{D(h)\}_h$ は $D(g)$ の開基となるので，$i$ は $(Y, \mathcal{O}_Y)$ から $(D(g), \mathcal{O}_X|_{D(g)}) \subset (X, \mathcal{O}_X)$ への同型を誘導する．(Refer to Exercises 2.7) ■

**Definition 1.5.2.** **スキーム (scheme)** とは局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ で開被覆 $\{U_i\}_i$ に対して $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ がアフィンスキームになるものが存在するときをいう．また $\mathcal{O}_X(U)$ の元は (やや不適切であるが)$U$ **上の正則関数 (regular functions on** $U$**)** という．しかし，層の関数としての側面をよく表している．(Refer to Exercises 3.4 and Proposition 4.4)

明らかにアフィンスキームはスキームである．また，局所環付き空間 $X$ が開被覆 $\{U_i\}_i$ に対して $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ がスキームだったら $X$ はスキームである．逆に次の命題が従う．

**Proposition 1.5.4.** $X$ **をスキームとする．このとき任意の開集合** $U \subset X$ **に対して局所環付き空間** $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ **はまたスキームになる．**

**Proof.** 定義より $X = \bigcup_i U_i$ で $U_i$ は開集合で，アフィンスキームになるものがある．$U \cap U_i$ がスキームとなることを示せば十分である． ■

**Definition 1.5.3.** $X$ をスキームとする．$U$ を $X$ の開集合とする．スキーム $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ を $X$ の**開部分スキーム (open subscheme)** 更に $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ がアフィンスキームになるとき $U$ を**アフィン開集合 (affine open subset)** という．

以下，$X$ の開集合 $U$ はスキームの構造が与えられているとする．

**Definition 1.5.4.** $X$ をスキーム，$f \in \mathcal{O}_X(X)$ とする．

$$X_f := \{x \in X \mid f_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\}$$

ただし，$A^\times$ は $A$ の単元群である．(Liu の Definition 3.11. では*の記号を用いている．)

次の条件を考えよう．

$X$ は有限アフィン開被覆 $\{U_i\}_i$ があって $U_i \cap U_j$ はまた有限アフィン開被覆を持つ．

便宜上この条件を条件 A と呼称する．

**Proposition 1.5.5.** $X$ **をスキームとし** $f \in \mathcal{O}_X(X)$ **とする．このとき** $X_f$ **は** $X$ **の開集合で，更に，**$X$ **が条件 A を満たすなら，制限** $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X_f)$ **は同型**

$$\mathcal{O}_X(X)_f \simeq \mathcal{O}_X(X_f)$$

**を誘導する．**

**Proof.** $x \in X_f$ とする．$x$ の開近傍 $U$ と $g \in \mathcal{O}_X(U)$ があって，$f_x g_x = 1$ を満たすものがある．$f_x g_x = (fg)_x$ よりある $x$ の開近傍 $V \subset U$ があって $fg|_V = 1$ を満たす．した

がって，$V \subset X_f$ となる．よって $X_f$ は開集合である．
更に，$V$ が動くにつれて $f$ の逆元 $g \in \mathcal{O}_X(V)$ を張り合わせると $f|_{X_f}$ の $\mathcal{O}_X(X_f)$ での逆元を得る．
詳しく言えば，$X_f$ の上の $V$ を集めた開被覆 $\{V_i\}_i$ を取り，$fg_i|_{V_i} = 1$ なる $g_i \in \mathcal{O}_X(V_i)$ を考えれば任意の $i, j$ に対して

$$fg_i|_{V_i \cap V_j} = 1 = fg_j|_{V_i \cap V_j}$$

より

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= fg_i|_{V_i \cap V_j} - fg_j|_{V_i \cap V_j} \\ &= f|_{V_i \cap V_j}(g_i|_{V_i \cap V_j} - g_j|_{V_i \cap V_j}) \\ &= 0\end{aligned}$$

また，$f|_{V_i}$ は単元なので逆元 $(f|_{V_i})^{-1}$ がある．また，

$$f|_{V_i \cap V_j} = (f|_{V_i})|_{V_i \cap V_j}$$

なので，

$$\begin{aligned}f|_{V_i \cap V_j}((f|_{V_i})^{-1}|_{V_i \cap V_j}) &= (f|_{V_i})|_{V_i \cap V_j}((f|_{V_i})^{-1}|_{V_i \cap V_j}) \\ &= ((f|_{V_i})(f|_{V_i})^{-1})|_{V_i \cap V_j} \\ &= 1\end{aligned}$$

よって $f|_{V_i \cap V_j}$ はまた単元で $g_i|_{V_i \cap V_j} = g_j|_{V_i \cap V_j}$ を得る．
$\mathcal{O}_X$ は層なので, 貼り合わせ条件より $g|_{V_i} = g_i$ なる $g \in \mathcal{O}_X(X_f)$ がある．この $g$ が $f|_{X_f}$ の逆元になっている．
よって制限 $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X_f)$ から準同型

$$\alpha : \mathcal{O}_X(X)_f \to \mathcal{O}_X(X_f)$$

を誘導する．($\mathcal{O}_X(X)$ は環なので $\mathcal{O}_X(X)_f$ は $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ での局所化であることに注意しよう．) ここで条件 A を仮定すれば，$X$ は有限アフィン開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ を持つ．よって，

$$X_f = \bigcup_i U_i \cap X_f = \bigcup_i V_i = \bigcup_i D(f|_{U_i})$$

Lem:1.5.3 より $\mathcal{O}_X(U_i)_f = \mathcal{O}_X(V_i)$
今以下の完全系列を得る．

$$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) : 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{d_0} \bigoplus_i \mathcal{O}_X(U_i) \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$$

ただし $d_0 : s \mapsto (s|_{U_i})_i, d_1 : (s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$ とする．(有限個なら直積 $\prod$ と直和 $\bigoplus$ は同じ)
次にテンソルをとることは左完全関手なので $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(X)_f$ はまた，完全列である．よってこれは次の可換図式を与える．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X)_f \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] & \bigoplus_i \mathcal{O}_X(U_i)_f \arrow[r] & \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)_f \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X_f) \arrow[r] & \bigoplus_i \mathcal{O}_X(V_i) \arrow[r] & \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(V_i \cap V_j)
\end{tikzcd}
$$

■

### 1.5.1 Morphism of schemes

**Definition 1.5.5.** $f : X \to Y$ が**スキームの射 (morphism of schemes)** とは局所環付き空間としての射とする．

環の射 $\varphi : A \to B$ が誘導する射 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ を $\varphi^a$ と書くことにする．
つまり $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$ に対して $\varphi^a(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$

**Proposition 1.5.6.** $\varphi : A \to B$ **を環の射とする．このとき**

$$(\varphi^a, (\varphi^a)^\#) : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$$

**は** $(\varphi^a)^\#(\operatorname{Spec} A) = \varphi$ **を満たすスキームの射である．**

**Proof.** $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A$ と置く．任意の $f \in A$ に対して

$$(\varphi^a)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$$

が成り立ち，実際

$$
\begin{aligned}
(\varphi^a)^{-1}(D(f)) &= \{\mathfrak{p} \in X \mid \varphi^a(\mathfrak{p}) \in D(f)\} \\
&= \{\mathfrak{p} \in X \mid f \notin \varphi^a(\mathfrak{p})\} \\
&= \{\mathfrak{p} \in X \mid f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})\} \\
&= \{\mathfrak{p} \in X \mid \varphi(f) \notin \mathfrak{p}\} \\
&= D(\varphi(f))
\end{aligned}
$$

である．$\varphi$ から誘導される環の射

$$(\varphi^a)^\#(D(f)) : \mathcal{O}_Y(D(f)) = A_f \to B_{\varphi(f)} = \mathcal{O}_X(D(\varphi(f))) = (\varphi^a)_*\mathcal{O}_X(D(f))$$

これは制限写像と可換 (compatible という意味で) になる．よって層の射

$$(\varphi^a)^\# : \mathcal{O}_Y \to \varphi^a_*\mathcal{O}_X$$

に拡張できる．更に，任意の $\mathfrak{q} \in X$ に対して $\varphi$ から誘導される環の射

$$(\varphi^a)^\#_{\mathfrak{q}} : A_{\varphi^a(\mathfrak{q})} \to B_{\mathfrak{q}}$$

は局所射で，実際

$$\begin{aligned}(\varphi^a)^\#_{\mathfrak{q}}(\varphi^a(\mathfrak{q})A_{\varphi^a(\mathfrak{q})}) &= \{\varphi(a)/\varphi(p) \mid a \in \varphi^a(\mathfrak{q}), p \notin \varphi^a(\mathfrak{q})\} \\ &= \{\varphi(a)/\varphi(p) \mid \varphi(a) \in \mathfrak{q}, \varphi(p) \notin \mathfrak{q}\} \\ &\subset \{b/q \mid b \in \mathfrak{q}, q \notin \mathfrak{q}\} \\ &= \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}\end{aligned}$$

よって $(\varphi^a, (\varphi^a)^\#)$ は局所環付き空間の射になる．構成により

$$(\varphi^a)^\#(Y) : \mathcal{O}_Y(Y) = A \to B = \mathcal{O}_X(X) = (\varphi^a)_*\mathcal{O}_X(Y)$$

で $(\varphi^a)^\#(Y) = \varphi$ を満たす． ∎

**Lemma 1.5.7.** **$A$ を環とし，$I$ をそのイデアルとする．このとき，スキームの射**

$$i : \operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$$

**が自然な射影 $\varphi : A \to A/I$ によって誘導される．$i$ は $\operatorname{Im} i = V(I)$ へのスキームの閉はめ込みである．更に，任意の $\operatorname{Spec} A$ の基本開集合 $D(f)$ に対して**

$$(\operatorname{Ker} i^\#)(D(f)) = I \otimes_A A_f$$

**が成り立つ．**

**Proof.** $i$ が閉はめ込みであることはよい．次に，任意の $\operatorname{Spec} A$ の基本開集合 $D(f)$ に対して先ほどみたように，標準的な全射

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(f)) = A_f \to (A/I)_{\varphi(f)} = i_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(f))$$

がある．これにより，$i^\#$ の全射性と，$(\operatorname{Ker} i^\#)(D(f)) = I_f = I \otimes_A A_f$ がわかる． ∎

**Definition 1.5.6.** $Z$ を $X$ の閉集合とする．このとき $Z$ が**閉部分スキーム (closed subscheme)** とは包含写像 $j : Z \to X$ が閉はめ込み

$$(j, j^\#) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

となるときをいう．

**Proposition 1.5.8.** **$X = \operatorname{Spec} A$ をアフィンスキームとする．$j : Z \to X$ をスキームの閉はめ込みとする．このとき，$Z$ はアフィンスキームで，あるイデアル $J \subset A$ が唯一存在して $j$ は同型 $Z \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Spec} A/J$ を誘導する．**

**Definition 1.5.7.** $S$ をスキームとする．このとき $X$ が **$S$-スキーム ($S$-scheme)** または **$S$ 上のスキーム (scheme over $S$)** とはスキームの射 $\pi : X \to S$ が与えられているときをいう．この $\pi$ を**構造射 (structural morphism, structure morphism)**，$S$ を**基底スキーム (base scheme)** という．

スキーム $X, Y$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ is morphism of schemes}\}$$

また，環 $A, B$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A, B) := \{f : A \to B \mid f \text{ is morphism of rings}\}$$

とおく．このとき標準的な写像

$$\rho : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$$

がある．実際 $(f, f^{\#}) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y)$ とすると

$$f^{\#}(Y) : \mathcal{O}_Y(Y) \to f_*\mathcal{O}_X(Y) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(Y)) = \mathcal{O}_X(X)$$

がある．

# Limit

第 A 章

## A.1 Inductive Limit

とりあえず, 帰納極限だけ述べる. 射影極限は双対概念なのでまぁ頑張って.

**Definition A.1.1.**(帰納系の定義)
$(\Lambda, \leq)$ を順序集合,$\mathscr{C}$ を圏とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し,$X_\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ が与えられ, $\lambda \leq \mu$ に対して射 $\varphi_{\mu,\lambda} : X_\lambda \to X_\mu$ があって次を満たすとき,$\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を**順系 (direct system)** または**帰納系 (inductive system)** という. しばしば $\varphi_{\mu,\lambda}$ を省略して $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ や $\{X_\lambda\}_\lambda$ で表す.

— 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\lambda,\lambda} = \mathrm{id}_{X_\lambda}$
— $\lambda \leq \mu \leq \nu$ なる任意の $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\nu,\lambda} = \varphi_{\nu,\mu} \circ \varphi_{\mu,\lambda}$

**Example A.1.1.** 位相空間 $X$ の開集合族 $\{U\}_U$ に対して

$$U \leq V \overset{\text{def}}{\equiv} V \subset U$$

と定義する. そして,$\mathbf{AGrp}$ をアーベル群の成す圏,$\mathcal{F}$ を $X$ 上の前層とする. すると, 各開集合 $U$ に対し,$\mathcal{F}(U) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{AGrp})$ で, 前層の定義からアーベル群と制限写像との組 $\{\mathcal{F}(U), \rho_{U,V}\}$ は帰納系となる. 前層の定義は Def:1.3.1 を参照.

**Definition A.1.2.**(帰納系の射の定義)
$\Lambda$ を順序集合.$\{X_\lambda, \varphi_{\lambda,\mu}\}, \{Y_\lambda, \psi_{\lambda,\mu}\}$ を $\Lambda$ 上の圏 $\mathscr{C}$ における帰納系とする. このとき $\{X_\lambda\}$ から $\{Y_\lambda\}$ への射とは $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ なる射の族 $\{f_\lambda\}$ で, 任意の $\lambda \leq \mu$ に対して $\psi_{\lambda,\mu} \circ f_\mu = f_\lambda \circ \varphi_{\lambda,\mu}$ となるものを言う.

$$
\begin{tikzcd}
X_\mu \arrow[r, "f_\mu"] \arrow[d, "\varphi_{\lambda,\mu}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_\mu \arrow[d, "\psi_{\lambda,\mu}"] \\
X_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"'] & Y_\lambda
\end{tikzcd}
$$

**Definition A.1.3.** $\mathscr{C}$ を圏とし,$\Lambda$ を順序集合とする.$\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を $\mathscr{C}$ の帰納系とする. このとき $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ の**順極限 (direct limit)** または**帰納的極限 (inductive limit)** または**帰納極限**とは, $\mathscr{C}$ の対象 $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ と射の族 $\{\varphi_\lambda : X_\lambda \to \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の組 $\{\varinjlim X_\lambda, \varphi_\lambda\}$ で, 次の条件を満たすものをいう.

— $\lambda \leq \mu$ に対して $\varphi_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = \varphi_\lambda$

— $\lambda \leq \mu$ に対して $f_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = f_\lambda$ を満たす任意の射の族 $\{f_\lambda : X_\lambda \to Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, $f : \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to Y$ が一意に存在して

$$f \circ \varphi_\lambda = f_\lambda \quad (\forall\lambda \in \Lambda)$$

を満たす.

**Remark .** 一般の圏では帰納極限や射影極限は存在するとは限らない. しかし, 存在するとすれば, 同型を除いて一意である.

**Proposition A.1.2.** 帰納極限は存在すれば, 同型を除いて一意である.

**Proof.** 証明は後で書く. ■