

# 代数幾何まとめノート

Fefr

2024 年 6 月 1 日



# 目次

---

第 1 章	Scheme	5
1.1	Zariski Topology . . . . .	5
1.2	Algebraic Sets . . . . .	5
1.3	Sheaves . . . . .	5
1.4	Ringed Topological Space . . . . .	11
第 2 章	極限	13



# Scheme

## 第 1 章

### 1.1 Zariski Topology

atodekakuyo

### 1.2 Algebraic Sets

atodekakuyo

### 1.3 Sheaves

**Definition 1.3.1.**  $X$  を位相空間とする.  $X$  上の (アーベル群の) 前層 (presheaf)  $\mathcal{F}$  とは次のデータ

- $U$  を任意の  $X$  の開集合に対して  $\mathcal{F}(U)$  はアーベル群.
- 制限写像 (restriction map) と言われる群準同型  $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  が任意の開集合  $V \subset U$  に対して存在する.

そして次の条件を満たす.

- (1)  $\rho_{U,U} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$
- (2) 任意の開集合  $W \subset V \subset U$  に対して  $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$  となる.

$s \in \mathcal{F}(U)$  を  $U$  上の  $\mathcal{F}$  の切断 (section) という. また,  $\rho_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$  を  $s|_V$  と書いて  $s$  の  $V$

への制限という.

また, 単に  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$  などと書いたら (前) 層を表すことや,  $\rho$  と書いたら制限写像を意味する. また, どの (前) 層の制限写像かを明示するため, 例えば,  $\rho_{U,V}^{\mathcal{F}}$  などと書くことがある.

**Definition 1.3.2.** 前層  $\mathcal{F}$  が層 (sheaf) とは次の条件を満たすことをいう.

- (4) (Uniqueness)  $U$  を  $X$  の開集合とし  $\{U_i\}_i$  をその開被覆とする.  $s \in \mathcal{F}(U)$  が任意の  $i$  に対して  $s|_{U_i} = 0$  ならば  $s = 0$
- (5) (Glueing local sections) 上の状況で,  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  が  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  を満たすならば,  $s|_{U_i} = s_i$  を満たす  $s \in \mathcal{F}(U)$  が存在する.

**Remark .**  $\mathcal{F}$  が層ならば  $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$  となる.

**Example 1.3.1.**  $X$  を位相空間とする.

$\mathcal{C}_X^0$  を  $X$  の開集合  $U$  に対して  $U \rightarrow \mathbf{C}$  なる連続写像全体の集合  $\mathcal{C}_X^0(U)$  を対応させるものとし, 制限写像を普通の制限とする. すると,  $\mathcal{C}_X^0$  は  $X$  上の層となる.

**Proof.**  $V \subset U$  なる開集合  $U, V$  に対して  $U$  上の連続写像  $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$  を  $V$  に制限することによって得られる  $V$  上の連続写像を  $\rho_{U,V}(f) (= f|_V)$  と書く. すると, これは  $\mathbf{C}$  上のベクトル空間 ( $\mathbf{C}$  上の関数空間) の準同型  $\rho_{U,V} : \mathcal{C}_X^0(U) \rightarrow \mathcal{C}_X^0(V)$  となる. つまり  $(\mathcal{C}_X^0, \rho)$  は前層となる.

また, (4) を満たすのは明らかで, (5) もすぐに成り立つことがわかる.  $\{U_i\}_i$  を  $U$  の開被覆とする.  $f_i \in \mathcal{C}_X^0(U_i)$  が  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  を満たすとする. するとそれらを張り合わせた関数を  $f$  とすればこれは  $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$  であり,  $f|_{U_i} = f_i$  となる. よって  $(\mathcal{C}_X^0, \rho)$  は層となる. これを連続写像が成す層という. ■

**Example 1.3.2.**  $X$  を位相空間とする.

$A$  を自明でないアーベル群とする.  $\mathcal{A}_X$  を  $X$  の空でない開集合  $U$  に対して  $\mathcal{A}_X(U) = A$  に, 空集合  $\emptyset$  に対して  $\mathcal{A}_X(\emptyset) = 0$  に対応させるものとし, 制限写像を空でない開集合  $V \subset U$  に対して  $\rho_{U,V} = \text{id}_A$  とし,  $\rho_{U,\emptyset} = 0$  とする.

すると,  $(\mathcal{A}_X, \rho)$  は  $X$  上の前層にはなるが, 一般に層とはならない.

**Proof.** 例えば,  $X$  が連結でないとする, 非交差な開集合  $U, V$  があって  $X = U \cup V$  とかける. すると  $\{U, V\}$  は  $X$  の開被覆となる.  $s_U \in \mathcal{A}_X(U) = A$  が  $s_U|_{U \cap V} = s_U|_{\emptyset} = 0 = s_V|_{U \cap V}$  を満たすとする. このとき, 任意の  $s \in \mathcal{A}_X(X) = A$  で  $s|_U = s|_V = s$  となり層とならない. ■

**Remark .**  $\mathcal{B}$  を位相空間  $X$  の開基で有限交叉で閉じているものとする.(つまり任意の  $U, V \in \mathcal{B}$  に対して  $U \cap V \in \mathcal{B}$ . e.g.  $\text{Spec } A$  の開基  $\{D(f)\}_f$ ) このとき  $\mathcal{B}$ -前層 ( $\mathcal{B}$ -presheaf)  $\mathcal{F}_0$  とは

- $U \in \mathcal{B}$  に対して  $\mathcal{F}_0(U)$  はアーベル群.
- $V \subset U \in \mathcal{B}$  に対して群準同型  $\rho_{U,V} : \mathcal{F}_0(U) \rightarrow \mathcal{F}_0(V)$  が定まる.

としたもの.

$\mathcal{B}$ -層 ( $\mathcal{B}$ -sheaf)  $\mathcal{F}_0$  から  $X$  上の層  $\mathcal{F}$  を作ることができる.

位相空間  $X$  の任意の開集合  $U$  をとり,  $\{U_i\}_i$  をその開被覆とする. ( $U_i \in \mathcal{B}$ )

$$\mathcal{F}(U) := \left\{ (s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}_0(U_i) \mid \text{任意の } i, j \text{ に対して } s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \right\}$$

と定義する. するとこれは開被覆によらない. 実際  $\mathcal{F}(U)_{U_i}$  を開被覆  $\{U_i\}_i$  による  $\mathcal{F}(U)$  とし,  $\{V_j\}_j$  を別の開被覆とすると,  $\{U_i \cap V_j\}_{i,j}$  はこれら 2 つの細分である.  $\mathcal{F}(U)_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$  なる群準同型を  $(s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap V_j})_{i,j}$  で定義できる. 実際

$$\begin{aligned} s_i|_{U_i \cap V_j} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} &= s_i \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\ &= s_i|_{U_i \cap U_{i'}} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\ &= s_{i'}|_{U_i \cap U_{i'}} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \quad (\because (s_i)_i \in \mathcal{F}(U)_{U_i}) \\ &= s_{i'} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\ &= s_{i'}|_{U_{i'} \cap V_{j'}} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \end{aligned}$$

より  $(s_i|_{U_i \cap V_j})_{i,j} \in \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$

また,  $(s_{ij})_{ij} \in \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$  を取ると,  $(s_{ij})_{ij} = (s_i|_{U_i \cap V_j})$  と出来るので全射 (?????)

Kernel を計算すると

$$\begin{aligned} s_i|_{U_i \cap V_j} &= 0 \quad (\forall i, j) \\ s_i|_{U_i} &= s_i = 0 \quad (\forall i) \quad (\because (4)) \end{aligned}$$

よって Kernel が自明なので単射.

**Definition 1.3.3.** 位相空間  $X$  上の前層  $\mathcal{F}$  と  $x \in X$  に対して,  $x$  での  $\mathcal{F}$  の茎 (stalk)  $\mathcal{F}_x$  という群が定義できる.

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

ただし,  $U$  は  $x$  の開近傍をすべてを回る  $U$  上の切断  $s \in \mathcal{F}(U)$  に対して  $x \in U$  の茎  $\mathcal{F}_x$  への自然な群準同型の像を  $s_x$  と書いて,  $x$  での  $s$  の芽 (germ) という.

**Lemma 1.3.3.**  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の層とする.  $s, t \in \mathcal{F}(X)$  が任意の  $x \in X$  に対して  $s_x = t_x$  ならば  $s = t$

**Proof.** 差を考えれば  $t = 0$  のときを考えればいい.  $s_x = 0$  ( $\forall x \in X$ ) とすると,  $x$  の開近傍  $U_x$  があって  $s|_{U_x} = 0$  となる.  $\{U_x\}_{x \in X}$  は  $X$  の開被覆なので,  $s = 0$  となる. ■

**Definition 1.3.4.**  $X$  上の 2 つの前層  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  とする. 前層の射  $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  とは,  $X$  の開集合  $U$  に対して群準同型  $\alpha(U): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  があって, 任意の開集合の組  $V \subset U$  に対して  $\alpha(V) \circ \rho_{U,V}^{\mathcal{F}} = \rho_{U,V}^{\mathcal{G}} \circ \alpha(U)$  を満たすことをいう.  
 $X$  の任意の開集合  $U$  に対して  $\alpha(U)$  が単射ならば  $\alpha$  は単射であるという. (全射はうまくいかんっぽい?)

$\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を  $X$  上の前層の射とする. 任意の  $x \in X$  に対して  $\alpha$  から自然に誘導される群準同型  $\alpha_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  で  $(\alpha(U)(s))_x = \alpha_x(s_x)$  が  $X$  の任意の開集合  $U, s \in \mathcal{F}(U), x \in U$  で成り立つものが取れる.

$\alpha_x$  が任意の  $x \in X$  で全射なら  $\alpha$  が全射であるという.

**Example 1.3.4.**  $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  とし  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の正則関数がなす層とし,  $\mathcal{G}$  を  $X$  上の双正則関数のなす層とする. 今, 任意の開集合  $U$  と任意の  $f \in \mathcal{F}(U)$  に対して  $\alpha(U)(f) = \exp(f)$  で定義される層の射  $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  が全射であることはよく知られている. しかし  $\alpha(X): \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$  は全射ではない. 例えば恒等写像は  $\exp(f)$  と書けない.

**Proposition 1.3.5.**  $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を  $X$  上の層の射とする.

$$\alpha \text{ が同型} \Leftrightarrow \alpha_x \text{ が同型 } (\forall x \in X)$$

**Theorem 1.3.6.** 位相空間  $X$  上の前層  $\mathcal{F}$  に対して, 前層  $\mathcal{F}$  の層化 (sheafification)  $\mathcal{F}^\dagger$  は存在する.

**Proof.**  $X$  の開集合  $U$  に対して

$$\mathcal{F}^\dagger(U) = \left\{ \sigma: U \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid \forall x \in U, x \in \exists V \subset U: \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(V) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in V) \right\}$$

とする. ただし,  $\sigma$  は任意の  $x \in U$  に対して  $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$  とする. また,  $V \subset U$  なる開集合に対し,

$$\begin{array}{ccc} \rho_{U,V}^{\mathcal{F}^\dagger}: & \mathcal{F}^\dagger(U) & \longrightarrow \mathcal{F}^\dagger(V) \\ & \Downarrow & \Downarrow \\ & \sigma & \longmapsto \sigma|_V \end{array}$$

が定義できる. 実際, 任意の  $x \in V$  をとる.  $V \subset U$  であり,  $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  より

$$x \in \exists U_0 \subset U: \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0)$$



$V_0 = U_0 \cap V$ ,  $t = s|_{V_0}$  とすると任意の  $y \in V_0$  に対して

$$\sigma(y) = \sigma|_V(y) = s_y$$

さらに帰納極限の定義から

$$\sigma|_V(y) = t_y$$

次に  $\mathcal{F}^\dagger(U)$  がアーベル群, つまり  $\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  ならば  $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  を示そう.

$\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  より任意の  $x \in U$  に対して

$$x \in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0)$$

$$x \in \exists V_0 \subset U : \text{open}, \exists t \in \mathcal{F}(V_0) \text{ s.t. } \tau(z) = t_z \ (\forall z \in V_0)$$

を満たす. いま  $W = U_0 \cap V_0$ ,  $s' = s|_W$ ,  $t' = t|_W$  とすると,

$$\begin{aligned} x \in W \subset U : \text{open}, s', t' \in \mathcal{F}(W) \text{ s.t. } (\sigma + \tau)(y) &= \sigma(y) + \tau(y) \\ &= s_y + t_y \\ &= (s + t)_y \ (\forall y \in W) \end{aligned}$$

よって  $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  また明らかに可換. よって  $\mathcal{F}^\dagger(U)$  はアーベル群.

また, 通常の制限で制限写像を定義しているため,  $\mathcal{F}^\dagger$  は前層となる.

更に層となることを示そう.

$U$  を  $X$  の開集合とし,  $\{U_i\}_i$  をその開被覆とする.  $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  が任意の  $i$  に対して  $\sigma|_{U_i} = 0$  とする. つまり任意の  $x \in U_i$  に対して  $\sigma(x) = 0$  とする.  $U_i$  は  $U$  を被覆するので結局  $\sigma = 0$  となる.

次に,  $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$  とし,  $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}$  と仮定すると,

$$\begin{array}{ccc} \sigma : U & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x & \longmapsto & \sigma_i(x) \end{array}$$

ただし,  $x \in U_i$ . すると,  $\sigma$  は  $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$  を張り合わせて作っている所以これは  $\sigma \in \mathcal{F}(U)$  となることが容易にわかる. よって,  $\mathcal{F}^\dagger$  は層になる. ■

**Lemma 1.3.7.**  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の層とし,  $\mathcal{F}'$  を  $\mathcal{F}$  の部分層とする. このとき開集合  $U$  を  $\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$  に対応させるものは前層になる。

**Proof.** この対応を  $\mathcal{G}$  とおく.  $V \subset U$  なる開集合  $U, V$  をとる. 制限写像を

$$\begin{array}{ccc} \rho_{U,V}^{\mathcal{G}} : \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V)/\mathcal{F}'(V) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ s + \mathcal{F}'(U) & \longmapsto & \rho_{U,V}^{\mathcal{F}}(s) + \mathcal{F}'(V) \end{array}$$

とすると, これは well-defined である. また,  $U \subset V \subset W$  なる開集合の組に対して

$$\rho_{U,W}^{\mathcal{G}} = \rho_{V,W}^{\mathcal{G}} \circ \rho_{U,V}^{\mathcal{G}}$$

が成り立つことは制限写像の定義から明らかである。よって  $\mathcal{G}$  は前層。 ■

**Definition 1.3.5.** Lem:1.3.7 で定義した前層の層化を  $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$  と書いて、商層 (quotient sheaf) という。

**Definition 1.3.6.**  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を前層の射とする。このとき開集合  $U$  に対して  $U \mapsto \text{Ker}(\alpha(U))$  とするものは  $\mathcal{F}$  の部分層になる。これを  $\text{Ker } \alpha$  と書いて、 $\alpha$  の核 (kernel of  $\alpha$ ) という。

更に、 $U \mapsto \text{Im}(\alpha(U))$  は一般には前層となるので、この層化を  $\text{Im } \alpha$  と書いて、 $\alpha$  の像 (image of  $\alpha$ ) という。

**Lemma 1.3.8.**  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  を  $X$  上の層,  $\mathcal{F}'$  を  $\mathcal{F}$  の部分層,  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を前層の射とする。このとき、

$$\begin{aligned} (\text{Ker } \alpha)_x &= \text{Ker } \alpha_x \\ (\text{Im } \alpha)_x &= \text{Im } \alpha_x \\ (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x &= \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x \end{aligned}$$

が成り立つ。

**Proof.** 任意の部分層は層の射の核としてかけるので、 $\mathcal{F}' = \text{Ker } \alpha$  とする。

また、 $\mathcal{K}(U) = \text{Ker}(\alpha(U))$ ,  $\mathcal{I}(U) = \text{Im}(\alpha(U))$ ,  $\mathcal{Q}(U) = \mathcal{F}(U)/\text{Ker}(\alpha(U))$  とおく。

このとき、アーベル群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{I}(U) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

が作れる。帰納極限は完全列を完全列に移すので、

$$0 \longrightarrow \varinjlim \mathcal{K}(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{I}(U) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \varinjlim \mathcal{I}(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{G}(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

を得る。よって

$$0 \longrightarrow (\text{Ker } \alpha)_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow (\text{Im } \alpha)_x \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow (\text{Im } \alpha)_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow (\mathcal{F}/\text{Ker } \alpha)_x \longrightarrow 0$$

したがって、完全列  $\mathcal{F}_x \longrightarrow (\text{Im } \alpha)_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$  を得る。これは  $\alpha_x$  のことである。よって

■

**Definition 1.3.7.** 層の列

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

が完全とは、 $\text{Im } \alpha = \text{Ker } \beta$  が成り立つことをいう。

**Proposition 1.3.9.** 層の列に対して次が成り立つ。

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \text{ が完全} \iff \text{任意の } x \in X \text{ に対して } \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x \text{ が完全}$$

**Proof.** 明らか。 ■

## 1.4 Ringed Topological Space

**Definition 1.4.1.** 局所環付き空間とは位相空間  $X$  と  $X$  上の環の層  $\mathcal{O}_X$  の組  $(X, \mathcal{O}_X)$  で、任意の  $x \in X$  に対して  $\mathcal{O}_{X,x}$  が局所環となるものをいう。また、この  $\mathcal{O}_X$  を  $(X, \mathcal{O}_X)$  の構造層 (structure sheaf) という。また  $(X, \mathcal{O}_X)$  を単に  $\mathcal{O}_X$  と書くことがある。また、 $\mathcal{O}_{X,x}$  の唯一の極大イデアル  $\mathfrak{m}_x$  に対してその剰余体  $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$  を  $X$  の点  $x$  での剰余体 (residue field of  $X$  at  $x$ ) といって  $k(x)$  と書く。

**Definition 1.4.2.** 局所環付き空間の射とは

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

とは連続写像  $f : X \rightarrow Y$  と環の層の射  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$  の組  $(f, f^\#)$  で、任意の  $x \in X$  に対して  $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  は局所射となるものをいう。



# 極限

## 第 2 章

とりあえず、帰納極限だけ述べる。射影極限は双対概念なのでまあ頑張る。

### Definition 2.0.1. (帰納系の定義)

$(\Lambda, \leq)$  を順序集合,  $\mathcal{C}$  を圏とする. 各  $\lambda \in \Lambda$  に対し,  $X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が与えられ,  $\lambda \leq \mu$  に対して射  $\varphi_{\mu, \lambda} : X_\lambda \rightarrow X_\mu$  があって次を満たすとき,  $\{X_\lambda, \varphi_{\mu, \lambda}\}$  を **順系 (direct system)** または **帰納系 (inductive system)** という. しばし  $\varphi_{\mu, \lambda}$  を省略して  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  や  $\{X_\lambda\}_\lambda$  で表す.

- 任意の  $\lambda \in \Lambda$  に他逸して  $\varphi_{\lambda, \lambda} = \text{id}_{X_\lambda}$
- $\lambda \leq \mu \leq \nu$  なる任意の  $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$  に対して  $\varphi_{\nu, \lambda} = \varphi_{\nu, \mu} \circ \varphi_{\mu, \lambda}$

### Example 2.0.1. 位相空間 $X$ の開集合族 $\{U\}_U$ に対して

$$U \leq V \stackrel{\text{def}}{=} V \subset U$$

と定義する. そして, **AGrp** をアーベル群の成す圏,  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の前層とする. すると, 各開集合  $U$  に対し,  $\mathcal{F}(U) \in \text{Ob}(\mathbf{AGrp})$  で, 前層の定義からアーベル群と制限写像との組  $\{\mathcal{F}(U), \rho_{U, V}\}$  は帰納系となる. 前層の定義は Def:1.3.1 を参照.

### Definition 2.0.2. (帰納系の射の定義)

$\Lambda$  を順序集合.  $\{X_\lambda, \varphi_{\lambda, \mu}\}, \{Y_\lambda, \psi_{\lambda, \mu}\}$  を  $\Lambda$  上の圏  $\mathcal{C}$  における帰納系とする. このとき  $\{X_\lambda\}$  から  $\{Y_\lambda\}$  への射とは  $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$  なる射の族  $\{f_\lambda\}$  で, 任意の  $\lambda \leq \mu$  に対して  $\psi_{\lambda, \mu} \circ f_\mu = f_\lambda \circ \varphi_{\lambda, \mu}$  となるものを言う.

$$\begin{array}{ccc}
 X_\mu & \xrightarrow{f_\mu} & Y_\mu \\
 \varphi_{\lambda,\mu} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \psi_{\lambda,\mu} \\
 X_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & Y_\lambda
 \end{array}$$

**Definition 2.0.3.**  $\mathcal{C}$  を圏とし,  $\Lambda$  を順序集合とする.  $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$  を  $\mathcal{C}$  の帰納系とする.

このとき  $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$  の順極限 (**direct limit**) または帰納的極限 (**inductive limit**) または帰納極限とは,  $\mathcal{C}$  の対象  $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  と射の族  $\{\varphi_\lambda : X_\lambda \rightarrow \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  の組  $\{\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \varphi_\lambda\}$  で, 次の条件を満たすものをいう.

- $\lambda \leq \mu$  に対して  $\varphi_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = \varphi_\lambda$
- $\lambda \leq \mu$  に対して  $f_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = f_\lambda$  を満たす任意の射の族  $\{f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y\}_{\lambda \in \Lambda}$  に対して,  $f : \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow Y$  が一意に存在して

$$f \circ \varphi_\lambda = f_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

を満たす.

**Remark .** 一般の圏では帰納極限や射影極限は存在するとは限らない. しかし, 存在するとすれば, 同型を除いて一意である.

**Proposition 2.0.2.** 帰納極限は存在すれば, 同型を除いて一意である.

**Proof.** 証明は後で書く. ■