

代数幾何まとめノート

Fefr

2024 年 8 月 20 日

目次

第 1 章	Scheme	5
1.1	Zariski Topology	5
1.2	Algebraic Sets	5
1.3	Sheaves	6
1.3.1	\mathfrak{B} -sheaf	14
1.4	Ringed Topological Space	15
1.5	Schemes	18
1.5.1	Morphism of schemes	22
付録 A	Limit	25
A.1	Inductive Limit	25
索引		58

Scheme

第 1 章

1.1 Zariski Topology

$\text{Spec } A$ を幾何的な対象に昇華するために、位相を導入しよう。まず、環 A のイデアル I に対して

$$\begin{aligned} V(I) &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid I \subset \mathfrak{p}\} \\ D(I) &= \text{Spec } A \setminus V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid I \not\subset \mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

更に、 $f \in A$ に対して

$$\begin{aligned} V(f) &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid Af \subset \mathfrak{p}\} \\ D(f) &= \text{Spec } A \setminus V(Af) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid Af \not\subset \mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

と定義する。また、 $Af \subset \mathfrak{p}$ より $af \in Af$ は $af \in \mathfrak{p}$ なので、 $a = 1$ とすれば $f \in \mathfrak{p}$ がわかり、イデアルの定義より、

$$\begin{aligned} V(f) &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \in \mathfrak{p}\} \\ D(f) &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

がわかる。次に $\{D(f)\}_{f \in A}$ を開集合族とする位相が定まることを示そう。

Proposition 1.1.1. ああああ

1.2 Algebraic Sets

A を Noether 環, I をそのイデアルとすると $\mathrm{bl}_I A$ は Noether 環である.
 $\mathrm{bl}_I A = A[It]$ に注意すると任意の元は I の生成元の集合を $\{a_1, \dots, a_r\}$ とすると

$$\sum_n \left(\sum_i a_{i,n} a_i \right)^n t^n = \sum_n \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ i_1 + i_2 + \dots + i_r = n}} b_{i_1, \dots, i_r, n} a_1^{i_1} \dots a_r^{i_r} t^n$$

なので $\varphi: A[X_1, \dots, X_r] \rightarrow A[It]$ を $X_i \mapsto a_i$ とすると

$$\begin{aligned} \varphi \left(\sum_{i_1, \dots, i_r} a_{i_1, \dots, i_r} X_1^{i_1} \dots X_r^{i_r} \right) &= \sum_{i_1, \dots, i_r} a_{i_1, \dots, i_r} a_1^{i_1} \dots a_r^{i_r} \\ &= \sum_n \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ i_1 + i_2 + \dots + i_r = n}} a_{i_1, \dots, i_r} a_1^{i_1} \dots a_r^{i_r} t^n \end{aligned}$$

全射準同型なので

$$A[X_1, \dots, X_r] / \mathrm{Ker} \varphi \simeq A[It]$$

左辺は Noether 環なので $\mathrm{bl}_I A$ は Noether 環である. 特に

$$\mathrm{gr}_I A = \mathrm{bl}_I A / I \mathrm{bl}_I A$$

も Noether 環である.

1.3 Sheaves

Definition 1.3.1. X を位相空間とする. X 上の (アーベル群の) 前層 (presheaf) \mathcal{F} とは次のデータ

- U を任意の X の開集合に対して $\mathcal{F}(U)$ はアーベル群.
- 制限写像 (restriction map) とされる群準同型 $\rho_{U,V}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ が任意の開集合 $V \subset U$ に対して存在する.

そして次の条件を満たす.

- (1) $\rho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$
- (2) 任意の開集合 $W \subset V \subset U$ に対して $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ となる.

$s \in \mathcal{F}(U)$ を U 上の \mathcal{F} の切断 (section) という. また, $\rho_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$ を $s|_V$ と書いて s の V への制限という.

また, 単に $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$ などと書いたら (前) 層を表すことや, ρ と書いたら制限写像を意味する. また, どの (前) 層の制限写像かを明示するため, 例えば, $\rho_{U,V}^{\mathcal{F}}$ などと書くことがある.

Definition 1.3.2. 前層 \mathcal{F} が層 (sheaf) とは次の条件を満たすことをいう。

- (4) (Uniqueness) U を X の開集合とし $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする. $s \in \mathcal{F}(U)$ が任意の i に対して $s|_{U_i} = 0$ ならば $s = 0$
- (5) (Glueing local sections) 上の状況で, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ が $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすならば, $s|_{U_i} = s_i$ を満たす $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する.

Remark . \mathcal{F} が層ならば $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ となる.

Example 1.3.1. X を位相空間とする.

\mathcal{C}_X^0 を X の開集合 U に対して $U \rightarrow \mathbf{C}$ なる連続写像全体の集合 $\mathcal{C}_X^0(U)$ を対応させるものとし, 制限写像を普通の制限とする.

$$\mathcal{C}_X^0(U) = \{f : U \rightarrow \mathbf{C} \mid f \text{ is continuous}\}$$

すると, \mathcal{C}_X^0 は X 上の層となる.

Proof. $V \subset U$ なる開集合 U, V に対して U 上の連続写像 $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$ を V に制限することによって得られる V 上の連続写像を $\rho_{U,V}(f) (= f|_V)$ と書く. すると, これは \mathbf{C} 上のベクトル空間 (\mathbf{C} 上の関数空間) の準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{C}_X^0(U) \rightarrow \mathcal{C}_X^0(V)$ となる. つまり (\mathcal{C}_X^0, ρ) は前層となる.

また, (4) を満たすのは明らかで, (5) もすぐに成り立つことがわかる. $\{U_i\}_i$ を U の開被覆とする. $f_i \in \mathcal{C}_X^0(U_i)$ が $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすとする. するとそれらを張り合わせた関数を f とすればこれは $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$ であり, $f|_{U_i} = f_i$ となる. よって (\mathcal{C}_X^0, ρ) は層となる. これを連続写像が成す層という. ■

Example 1.3.2. X を位相空間とする.

A を自明でないアーベル群とする. \mathcal{A}_X を X の空でない開集合 U に対して $\mathcal{A}_X(U) = A$ に, 空集合 \emptyset に対して $\mathcal{A}_X(\emptyset) = 0$ に対応させるものとし, 制限写像を空でない開集合 $V \subset U$ に対して $\rho_{U,V} = \text{id}_A$ とし, $\rho_{U,\emptyset} = 0$ とする.

すると, (\mathcal{A}_X, ρ) は X 上の前層にはなるが, 一般に層とはならない.

Proof. 例えば, X が連結でないとする. 非交差な開集合 U, V があって $X = U \cup V$ とかける. すると $\{U, V\}$ は X の開被覆となる. $s_U \in \mathcal{A}_X(U) = A$ が $s_U|_{U \cap V} = s_U|_{\emptyset} = 0 = s_V|_{U \cap V}$ を満たすとする. このとき, 任意の $s \in \mathcal{A}_X(X) = A$ で $s|_U = s|_V = s$ となり層とならない. ■

Example 1.3.3. (skyscraper sheaf)

X を位相空間、 A をアーベル群とする。 $p \in X$ に対して $i_p: \{p\} \hookrightarrow X$ を包含写像とする。このとき $i_{p,*}\mathcal{A}$ を

$$i_{p,*}\mathcal{A}(U) = \begin{cases} A & p \in U \\ 1 & p \notin U \end{cases}$$

と定義する。これは層になる。

Definition 1.3.3. 位相空間 X 上の前層 \mathcal{F} と $x \in X$ に対して、 x での \mathcal{F} の **茎 (stalk)** \mathcal{F}_x という群が定義できる。

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

ただし、 U は x の開近傍をすべてを回る U 上の切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ に対して $x \in U$ の茎 \mathcal{F}_x への自然な群準同型の像を s_x と書いて、 x での s の **芽 (germ)** という。

Remark . ここで、 \mathcal{F}_x は x 近傍の情報を持っていると言える。実際、

$$\mathcal{F}_x = \bigsqcup_i U_i / \sim \quad \dots (*)$$

ここで、同値関係は

$$(t, U) \sim (s, V) \stackrel{\text{def}}{=} \exists W \subset U, V, x \in W \text{ s.t. } t|_W = s|_W$$

である。ただし、 (t, U) とは x の開近傍 U で $t \in \mathcal{F}(U)$ という意味である。また $(*)$ を見れば分かるように、 \mathcal{F}_x の任意の元はある x 近傍 U 上の切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ の芽である。

Proposition 1.3.4. 層の定義の (4),(5) を次の列が完全系列であるとなすことができる。

$$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : 0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{d_0} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d_1} \prod_i \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

ただし、 \mathcal{U} は開集合 U の開被覆で $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ 。

$$d_0 : s \mapsto (s|_{U_i})_i, d_1 : (s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$$

Proof. ■

Lemma 1.3.5. \mathcal{F} を X 上の層とする。 $s, t \in \mathcal{F}(X)$ が任意の $x \in X$ に対して $s_x = t_x$ ならば $s = t$

Proof. 差を考えれば $t = 0$ のときを考えればいい。 $s_x = 0 \ (\forall x \in X)$ とすると、 x の開近傍 U_x があって $s|_{U_x} = 0$ となる。 $\{U_x\}_{x \in X}$ は X の開被覆なので、 $s = 0$ となる。 ■

Definition 1.3.4. X 上の2つの前層 \mathcal{F}, \mathcal{G} とする. 前層の射 $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ とは, X の開集合 U に対して群準同型 $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ があって, 任意の開集合の組 $V \subset U$ に対して $\alpha(V) \circ \rho_{U,V}^{\mathcal{F}} = \rho_{U,V}^{\mathcal{G}} \circ \alpha(U)$ を満たすことをいう.
 X の任意の開集合 U に対して $\alpha(U)$ が単射ならば α は単射であるという.(全射はうまくいかんっぽい?)

$\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を X 上の前層の射とする. 任意の $x \in X$ に対して α から自然に誘導される群準同型 $\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ で $(\alpha(U)(s))_x = \alpha_x(s_x)$ が X の任意の開集合 $U, s \in \mathcal{F}(U), x \in U$ で成り立つものが取れる.

α_x が任意の $x \in X$ で全射なら α が全射であるという.

Example 1.3.6. $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とし \mathcal{F} を X 上の正則関数がなす層とし, \mathcal{G} を X 上の双正則関数のなす層とする. 今, 任意の開集合 U と任意の $f \in \mathcal{F}(U)$ に対して $\alpha(U)(f) = \exp(f)$ で定義される層の射 $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が全射であることはよく知られている. しかし $\alpha(X) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ は全射ではない. 例えば恒等写像は $\exp(f)$ と書けない.

Proposition 1.3.7. $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を X 上の層の射とする.

$$\alpha \text{ が同型} \Leftrightarrow \alpha_x \text{ が同型 } (\forall x \in X)$$

Theorem 1.3.8. 位相空間 X 上の前層 \mathcal{F} に対して, 前層 \mathcal{F} の層化 (sheafification) \mathcal{F}^\dagger は存在する.

Proof. X の開集合 U に対して

$$\mathcal{F}^\dagger(U) = \left\{ \sigma : U \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid \forall x \in U, x \in \exists V \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(V) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y (\forall y \in V) \right\}$$

とする. ただし, σ は任意の $x \in U$ に対して $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$ とする. また, $V \subset U$ なる開集合に対し,

$$\begin{array}{ccc} \rho_{U,V}^{\mathcal{F}^\dagger} : \mathcal{F}^\dagger(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}^\dagger(V) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ \sigma & \longmapsto & \sigma|_V \end{array}$$

が定義できる. 実際, 任意の $x \in V$ をとる. $V \subset U$ であり, $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より

$$x \in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y (\forall y \in U_0)$$

$V_0 = U_0 \cap V$, $t = s|_{V_0}$ とすると任意の $y \in V_0$ に対して

$$\sigma(y) = \sigma|_V(y) = s_y$$

さらに帰納極限の定義から

$$\sigma|_V(y) = t_y$$

次に $\mathcal{F}^\dagger(U)$ がアーベル群, つまり $\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ ならば $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ を示そう.
 $\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より任意の $x \in U$ に対して

$$\begin{aligned} x &\in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0) \\ x &\in \exists V_0 \subset U : \text{open}, \exists t \in \mathcal{F}(V_0) \text{ s.t. } \tau(z) = t_z \ (\forall z \in V_0) \end{aligned}$$

を満たす. いま $W = U_0 \cap V_0, s' = s|_W, t' = t|_W$ とすると,

$$\begin{aligned} x \in W \subset U : \text{open}, s', t' \in \mathcal{F}(W) \text{ s.t. } (\sigma + \tau)(y) &= \sigma(y) + \tau(y) \\ &= s_y + t_y \\ &= (s + t)_y \ (\forall y \in W) \end{aligned}$$

よって $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ また明らかに可換. よって $\mathcal{F}^\dagger(U)$ はアーベル群.

また, 通常 of 制限で制限写像を定義しているため, \mathcal{F}^\dagger は前層となる.

更に層となることを示そう.

U を X の開集合とし, $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする. $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ が任意の i に対して $\sigma|_{U_i} = 0$ とする. つまり任意の $x \in U_i$ に対して $\sigma(x) = 0$ とする. U_i は U を被覆するので結局 $\sigma = 0$ となる.

次に, $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ とし, $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}$ と仮定すると,

$$\begin{array}{ccc} \sigma : U & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x & \longmapsto & \sigma_i(x) \end{array}$$

ただし, $x \in U_i$. すると, σ は $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ を張り合わせて作っているなのでこれは $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ となることが容易にわかる. よって, \mathcal{F}^\dagger は層になる. ■

Proposition 1.3.9. 層化の射 $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\dagger$ に対して、その茎の射 $\theta_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^\dagger$ は同型である。

Lemma 1.3.10. \mathcal{F} を X 上の層とし、 \mathcal{F}' を \mathcal{F} の部分層とする。このとき開集合 U を $\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ に対応させるものは前層になる。

Proof. この対応を \mathcal{G} とおく。 $V \subset U$ なる開集合 U, V をとる。制限写像を

$$\begin{array}{ccc} \rho_{U,V}^{\mathcal{G}} : \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V)/\mathcal{F}'(V) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ s + \mathcal{F}'(U) & \longmapsto & \rho_{U,V}^{\mathcal{F}}(s) + \mathcal{F}'(V) \end{array}$$

とすると、これは well-defined である。また、 $U \subset V \subset W$ なる開集合の組に対して

$$\rho_{U,W}^{\mathcal{G}} = \rho_{V,W}^{\mathcal{G}} \circ \rho_{U,V}^{\mathcal{G}}$$

が成り立つことは制限写像の定義から明らかである。よって \mathcal{G} は前層。 ■

Definition 1.3.5. Lem:??で定義した前層の層化を \mathcal{F}/\mathcal{F}' と書いて、**商層 (quotient sheaf)** という。

Definition 1.3.6. $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を前層の射とする。このとき開集合 U に対して $U \mapsto \text{Ker}(\alpha(U))$ とするものは \mathcal{F} の部分層になる。これを $\text{Ker } \alpha$ と書いて、 **α の核 (kernel of α)** という。

更に、 $U \mapsto \text{Im}(\alpha(U))$ は一般には前層となるので、この層化を $\text{Im } \alpha$ と書いて、 **α の像 (image of α)** という。

また、 $U \mapsto \text{Coker}(\alpha(U)) = \mathcal{G}(U)/\text{Im}(\alpha(U))$ は一般には前層となるので、この層化を $\text{Coker } \alpha$ と書いて、 **α の余核 (cokernel of α)** という。

Lemma 1.3.11. \mathcal{F}, \mathcal{G} を X 上の層, \mathcal{F}' を \mathcal{F} の部分層, $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を前層の射とする。このとき、

$$\begin{aligned} (\text{Ker } \alpha)_x &= \text{Ker } \alpha_x \\ (\text{Im } \alpha)_x &= \text{Im } \alpha_x \\ (\text{Coker } \alpha)_x &= \text{Coker } \alpha_x \\ (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x &= \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x \end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. $\mathcal{Q}(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ とおく。

このとき、アーベル群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

が作れる。帰納極限は完全列を完全列に移すので、また Prop:1.3.7 より

$$0 \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

を得る。よって

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x \longrightarrow 0$$

したがって、

$$\mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x \simeq (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x$$

を得る。

次に

$$\begin{aligned} (\text{Ker } \alpha)_x &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha(U)(s) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha_x(s_x) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \text{Ker } \alpha_x \end{aligned}$$

を得る。同様に

$$\begin{aligned}
 (\mathrm{Im} \alpha)_x &= \{t_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in \exists U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U) \text{ s.t. } t = \alpha(U)(s)\} \\
 &= \{(\alpha(U)(s))_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\
 &= \{\alpha_x(s_x) \in \mathcal{G}_x \mid s_x \in \mathcal{F}_x\} \\
 &= \mathrm{Im} \alpha_x
 \end{aligned}$$

を得る。また, $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x$ より

$$(\mathrm{Coker} \alpha)_x = (\mathcal{G}/\mathrm{Im} \alpha)_x = \mathcal{G}_x/\mathrm{Im} \alpha_x = \mathrm{Coker} \alpha_x$$

■

Definition 1.3.7. 層の列

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

が完全とは、 $\mathrm{Im} \alpha = \mathrm{Ker} \beta$ が成り立つことをいう。

Proposition 1.3.12. 層の列に対して次が成り立つ。

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \text{ が完全} \iff \text{任意の } x \in X \text{ に対して } \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x \text{ が完全}$$

Proof. 明らか。 ■

Definition 1.3.8. X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする。このとき、 X 上の層 \mathcal{F}, Y 上の層 \mathcal{G} に対して、新たな X 上の層 $f_*\mathcal{F}$ が

$$V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

によって定義できる。これを \mathcal{F} の順像 (direct image of \mathcal{F}) という。

また、

$$U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

で定義できる新たな X 上の前層 $f^*\mathcal{G}$ の層化 $f^*\mathcal{G}$ を \mathcal{G} の逆像 (inverse image of \mathcal{G}) という。

Proposition 1.3.13. 上の状況で

$$(f^*\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)} \quad \forall x \in X$$

Proof.

$$(f^*\mathcal{G})_x = \varinjlim_{x \in U} (f^*\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{x \in U} \varinjlim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V) = \mathcal{G}_{f(x)}$$

最後の等号は明らか。 ■

Remark . V を Y の開集合とする。このとき自然な単射 $i: V \rightarrow Y$ に対して

$$i^* \mathcal{G} = \mathcal{G}|_V$$

が成り立つ。

Proposition 1.3.14. $f: X \rightarrow Y$ を位相空間の間の連続写像とし, \mathcal{F} を X 上の層, \mathcal{G} を Y 上の層とする。このとき

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(f^* \mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F})$$

ただし, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は圏 \mathcal{C} で $X \rightarrow Y$ なる射全体を表し, $\mathrm{Sh}(X)$ は X 上の層全体を表す。

Proof. 層化の普遍性より $\theta: f_* \mathcal{G} \rightarrow f^* \mathcal{G} = (f_* \mathcal{G})^\dagger$ を層化の射とすると,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f_* \mathcal{G}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ph}(X)}(f^* \mathcal{G}, \mathcal{F}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \alpha & \longmapsto & \tilde{\alpha} \circ \theta \end{array}$$

が成り立つ。つまり

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f_* \mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F})$$

を示せばいい。次に X 上の開集合 U に対して

$$f_* \mathcal{G}(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

なので, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f_* \mathcal{G}, \mathcal{F})$ に対して

$$\varphi(U): \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

を与えることは帰納極限の定義より $f(U) \subset V$ なる開集合 V に対して

$$\psi'(V): \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

を $f(U) \subset V' \subset V$ ならば,

$$\psi'(V) = \psi'(V') \circ \rho_{V', V}^{\mathcal{G}}$$

となるように与えることである。すなわち $\psi'(V)$ は

$$\psi(V): \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

と $\rho_{f^{-1}(V), U}^{\mathcal{F}}$ を合成したものである。(帰納系の選び方によらない。)

したがって, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f_* \mathcal{G}, \mathcal{F})$ を与えることは, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ph}(Y)}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F})$ を与えることと等しい。 ■

1.3.1 \mathfrak{B} -sheaf

\mathfrak{B} -sheaf はアフィンスキームの構成にも必要な概念で、ラフに言えばすべての開集合 U に対して $\mathcal{F}(U)$ が定まっているものではなく、開基 \mathfrak{B} の元 U に対してだけ定まっている層を \mathfrak{B} -sheaf という。

Definition 1.3.9. 位相空間 X の開基 \mathfrak{B} が有限交叉で閉じているとは、任意の $U, V \in \mathfrak{B}$ に対して $U \cap V \in \mathfrak{B}$ が成り立つことをいう。

Example 1.3.15. 環 A の素イデアルの集合 $\text{Spec } A$ の基本開集合による開基 $\{D(f)\}_{f \in A}$ は有限交叉で閉じている。

Definition 1.3.10. X を位相空間、 \mathfrak{B} をその開基とする。このとき \mathcal{F} が \mathfrak{B} -前層 (\mathfrak{B} -presheaf) であるとは、

- $U \in \mathfrak{B}$ に対して $\mathcal{F}(U)$ はアーベル群。
- $V \subset U \in \mathfrak{B}$ に対して群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ が定まる。

で、

- (1) $\rho_{U,U} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$
- (2) 任意の開集合 $W \subset V \subset U$ に対して $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ となる。

を満たすときをいう。

Definition 1.3.11. \mathfrak{B} が有限交叉で閉じているとする。このとき \mathfrak{B} -前層が層の条件を満たすとき \mathfrak{B} -層 (\mathfrak{B} -sheaf) という。

Proposition 1.3.16. \mathcal{F} を \mathfrak{B} -層とする。このとき、任意の開集合 V に対して

$$\mathcal{F}(V) = \left\{ (s_U)_U \in \prod_{\substack{U \in \mathfrak{B} \\ U \subset V}} \mathcal{F}(U) \mid \forall U, U' \in \mathfrak{B}, s_U|_{U \cap U'} = s_{U'}|_{U \cap U'} \right\}$$

とおく。演算を

$$(s_U)_U + (t_U)_U = (s_U + t_U)_U$$

で定めるとアーベル群になる。

また、 $V' \subset V$ に対して制限写像 $\rho_{V,V'} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(V')$ を

Proposition 1.3.17. 更に、 \mathfrak{B} が有限交叉で閉じているなら、層になる。

Proof. 任意の開集合 V に対してその開被覆 $\{V_i\}_i$ を取る．ただし $V_i \in \mathfrak{B}$ とする．

Claim (4)(Uniqueness) が成立する．

$s \in \mathcal{F}(V)$ が任意の i に対して $s|_{V_i} = 0$ とする．今定義から $s = 0$ とは $U \subset V$ なる任意の $U \in \mathfrak{B}$ に対して $s_U \in \mathcal{F}(U)$ が 0 であることである．実際 V の開被覆から U の開被覆 $\{U \cap V_i\}_i \subset \mathfrak{B}$ を得る．また任意の i に対して $U \cap V_i \subset V_i$ より $s|_{V_i}|_{U \cap V_i} = s|_{U \cap V_i} = 0$ となる．従って任意の i に対して $s_U|_{U \cap V_i} = 0$ となる．今 \mathcal{F} は \mathfrak{B} -sheaf なので $s_U = 0$ によって $s = 0$ が分かる．

Claim (5)(Glueing local sections) が成立する．

$s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ が任意の i, j に対して $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ を満たすとする．今 $U \in \mathfrak{B}$ 成分への射影を

$$\varphi_U : \varinjlim_{U \subset V} \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

と書くことにすると、制限写像 $\rho_{V, V_i} = \varphi_{V_i}$ で、つまり $(s_U)_U \in \mathcal{F}(V)$ で $(s_U)_U|_{V_i} = s_i$ なる $(s_U)_U$ があることを示せば良い．各 i に対して $V_i \subset U_i$ なる $U_i \in \mathfrak{B}$ で $s_{U_i}|_{V_i} = s_i$ なる $s_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ があればいい．今 $U_i \subset V$ なので U の開被覆 $\{U_i \cap V_j\}_j$ が取れる．

■

1.4 Ringed Topological Space

Definition 1.4.1. 局所環付き空間とは位相空間 X と X 上の環の層 \mathcal{O}_X の組 (X, \mathcal{O}_X) で、任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X, x}$ が局所環となるものをいう．また、この \mathcal{O}_X を (X, \mathcal{O}_X) の **構造層 (structure sheaf)** という．また (X, \mathcal{O}_X) を単に \mathcal{O}_X と書くことがある．また、 $\mathcal{O}_{X, x}$ の唯一の極大イデアル \mathfrak{m}_x に対してその剰余体 $\mathcal{O}_{X, x}/\mathfrak{m}_x$ を X の点 x での剰余体 (residue field of X at x) といって $k(x)$ と書く．

Definition 1.4.2. 局所環付き空間の射とは

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

とは連続写像 $f : X \rightarrow Y$ と環の層の射 $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ の組 $(f, f^\#)$ で、任意の $x \in X$ に対して $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ は局所射となるものをいう．(つまり $f_x^\#(\mathfrak{m}_{Y, f(x)}) \subset \mathfrak{m}_{X, x}$ を満たす．)

Prop:1.3.13 より

$$f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$$

を考えることは

$$f^\# : f^*\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$$

を考えることに等しい。Def:1.4.2 の $f_x^\#$ は下の式で考えている。

Definition 1.4.3. 射 $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ が開はめ込み (open immersion) (resp. 閉はめ込み (closed immersion)) とは連続写像 f が開はめ込み (resp. 閉はめ込み) ^aでかつ任意の $x \in X$ に対して $f_x^\#$ が同型 (resp. 全射) のときをいう。

^a $f : X \rightarrow Y$ が (位相的) 開 (閉) はめ込みとは X と $f(X)$ が同相で $f(X)$ が開 (閉) 集合のときをいう。

Definition 1.4.4. (X, \mathcal{O}_X) を局所環付き空間とする。 \mathcal{J} が \mathcal{O}_X のイデアル層 (sheaf of ideals of \mathcal{O}_X) とは任意の開集合 U に対して $\mathcal{J}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ のイデアルになっているときをいう。

Lemma 1.4.1. (X, \mathcal{O}_X) を局所環付き空間とする。 \mathcal{J} を \mathcal{O}_X のイデアル層とする。そして、

$$V(\mathcal{J}) = \{x \in X \mid \mathcal{J}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$$

とおく。(ちなみに上の諸々から $\mathcal{J}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ が分かる。)

$j : V(\mathcal{J}) \hookrightarrow X$ を包含写像とする。すると

- $V(\mathcal{J})$ は X の閉集合
- $(V(\mathcal{J}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$ は局所環付き空間
- $j^\#$ は自然な全射

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{J} = j_*(j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$$

で $(j, j^\#) : (V(\mathcal{J}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ は閉はめ込みである。

Proof. Claim1. $V(\mathcal{J})$ は X の閉集合

$x \in X \setminus V(\mathcal{J}) = \{x \in X \mid \mathcal{J}_x = \mathcal{O}_{X,x}\}$ に対して $f_x = 1$ なる x の開近傍 U と $f \in \mathcal{J}(U)$ をとる。つまり $f|_V = 1|_V = 1$ なる x の開近傍 $V \subset U$ がある。すると任意の $y \in V$ に対して $f_y = 1 \in \mathcal{J}_y$ となって、この y に対して $\mathcal{J}_y = \mathcal{O}_{X,y}$ なので $V \subset X \setminus V(\mathcal{J})$ となって $X \setminus V(\mathcal{J})$ が開であることがわかる。

Claim2. $(V(\mathcal{J}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$ は局所環付き空間

任意の $x \in V(\mathcal{J})$ に対して

$$(j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))_x = (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})_x = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{J}_x$$

は局所環。残りは自明。 ■

Proposition 1.4.2. $f : X \rightarrow Y$ を局所環付き空間の閉はめ込みとする。 Z を局所環付き空間 $V(\mathcal{J})$ とする。ただし、 $\mathcal{J} = \text{Ker } f^\# \subset \mathcal{O}_Y$ 。すると $X \simeq Z$ を自然な閉はめ込み $Z \hookrightarrow Y$ から得る。

Proof. まず次の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

から Prop:?? より任意の $y \in Y$ に対して

$$\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{J}_y = (f_*\mathcal{O}_X)_y$$

を得る。よって

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus V(\mathcal{J}) \\ \mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{J}_y & y \in V(\mathcal{J}) \end{cases} \quad \dots (*)$$

を得る。 $f(X)$ は Y の閉集合なので $x \in Y \setminus f(X)$ の開近傍 U で

$$f(X) \cap U = \emptyset$$

となるものがとれる。よって

$$f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(\emptyset) = 0$$

したがって、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_x = 0$$

また、 $x \in f(X)$ の開近傍 U に対して f での引き戻し $f^{-1}(U)$ は $y = f(x)$ の開近傍である。これを V とおく。逆に、 f は閉はめ込みなので、 X は $f(X)$ と同相なので X に自然に Y の相対位相が入る。つまり、任意の $x \in X$ の開近傍 U に対して $y = f(x) \in Y$ の開近傍 V が存在して $f^{-1}(V)$ とかける。よって、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_x = \varinjlim_{U \ni x} f_*\mathcal{O}_X(U) = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \varinjlim_{V \ni y} \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_{X,y}$$

つまり、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus f(X) \\ \mathcal{O}_{X,x} & y = f(x) \end{cases}$$

(*) と比較すれば

$$V(\mathcal{J}) = f(X)$$

が分かる。なので、 $j : Z \hookrightarrow Y$ を包含写像とすると、 f から誘導される同相写像 $g : X \rightarrow Z$ に対して

$$f = j \circ g$$

で、

$$j_*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Y/\mathcal{J} \simeq f_*\mathcal{O}_X$$

がわかる。容易に

$$f_*\mathcal{O}_X = j_*g_*\mathcal{O}_X$$

が分かるので

$$\mathcal{O}_Z = (j^{-1} \circ j)_*\mathcal{O}_Z = (j^{-1})_*j_*\mathcal{O}_Z \simeq (j^{-1})_*j_*g_*\mathcal{O}_X = (j^{-1} \circ j)_*g_*\mathcal{O}_X = g_*\mathcal{O}_X$$

である。よって、 g は局所環付き空間の同型射である。 $f = j \circ g$ が局所環付き空間の射であることを確認するのは読者に委ねる。■

1.5 Schemes

後できちんとした定義を述べるが、スキーム (scheme) とは局所環付き空間で局所的にはアフィンスキーム (affine scheme) とみれる空間のことである。すなわち、先にアフィンスキームを定義せねばなるまい。

Proposition 1.5.1. A を環、 $X = \operatorname{Spec} A$ とする。このとき以下が成り立つ。

- (1) \mathcal{O}'_X を環の \mathfrak{B} -層とする。 \mathcal{O}'_X が誘導する X 上の層 \mathcal{O}_X は $\mathcal{O}_X(X) = A$ となる。
- (2) 任意の $\mathfrak{p} \in X$ に対して、茎 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ への標準的な同型がある。特に、 (X, \mathcal{O}_X) は局所環付き空間になる。

Proof. まず、開集合 $U = X$ について Uniqueness 条件を確認する。ほかの基本開集合も同様に示される。 $U_i = \blacksquare$

Definition 1.5.1. 上で定義した局所環付き空間 $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ を **アフィンスキーム (affine scheme)** という。

Lemma 1.5.2. A を整域とし K をその商体とする。素イデアル 0 に対応する $X = \operatorname{Spec} A$ の点を ξ とする。このとき

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = K$$

が成り立つ。さらに、任意の空でない開集合 $U \subset X$ と $\xi \in U$ に対して標準的な準同型

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$$

は単射となる。開集合の組 $V \subset U$ に対して制限

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$$

は単射となる。

Proof. Prop:1.5.1(2) より

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = A_{\xi} = K$$

を得る。

$U = D(f)$ とすると、 $\mathcal{O}_X(U) = A_f \subset K$ 。一般に

$$U = \bigcup_i D(f_i)$$

と置く． $s \in \mathcal{O}_X(U)$ を飛ばすと $0 \in K$ になるとする．各開被覆 $D(f_i) \subset U$ への制限を考えると

$$s|_{D(f_i)} = 0$$

が任意の i で成り立つので， $s = 0$ である．よって $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi} \subset K$ は単射．開集合の組 $\xi \in V \subset U$ に対して制限 $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ に対して帰納極限の定義より図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(V) \\ \downarrow & \searrow \circlearrowleft & \\ & \mathcal{O}_{X,\xi} & \end{array}$$

が可換となるので，制限は単射である． ■

Lemma 1.5.3. $X = \operatorname{Spec} A$ をアフィンスキームとし， $g \in A$ をとる．このとき開集合 $D(g)$ は X から誘導される局所環付き空間で $\operatorname{Spec} A_g$ に同型なアフィンスキームになる．

Proof. $Y = \operatorname{Spec} A_g$ と置く．局所化と素イデアルの対応より標準的な開はめ込み

$$i: Y \rightarrow X$$

がある ($\operatorname{Im} i = D(g)$)

$D(h) \subset D(g)$ とする． $A \xrightarrow{\varphi} A_g$ とする．また $\varphi(h) = \bar{h}$ と置く．このとき標準的な同型

$$\mathcal{O}_X(D(h)) = A_h \simeq (A_g)_{\bar{h}} = \mathcal{O}_Y(D(\bar{h})) = i_* \mathcal{O}_Y(D(h))$$

$\{D(h)\}_h$ は $D(g)$ の開基となるので， i は (Y, \mathcal{O}_Y) から $(D(g), \mathcal{O}_X|_{D(g)}) \subset (X, \mathcal{O}_X)$ への同型を誘導する．(Refer to Exercises 2.7) ■

Definition 1.5.2. スキーム (scheme) とは局所環付き空間 (X, \mathcal{O}_X) で開被覆 $\{U_i\}_i$ に対して $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ がアフィンスキームになるものが存在するときをいう．また $\mathcal{O}_X(U)$ の元は (やや不適切であるが) U 上の正則関数 (regular functions on U) という．しかし，層の関数としての側面をよく表している．(Refer to Exercises 3.4 and Proposition 4.4)

明らかにアフィンスキームはスキームである．また，局所環付き空間 X が開被覆 $\{U_i\}_i$ に対して $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ がスキームだったら X はスキームである．逆に次の命題が従う．

Proposition 1.5.4. X をスキームとする．このとき任意の開集合 $U \subset X$ に対して局所環付き空間 $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ はまたスキームになる．

Proof. 定義より $X = \bigcup_i U_i$ で U_i は開集合で、アフィンスキームになるものがある． $U \cap U_i$ がスキームとなることを示せば十分である． ■

Definition 1.5.3. X をスキームとする． U を X の開集合とする．スキーム $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ を X の **開部分スキーム (open subscheme)** 更に $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ がアフィンスキームになるとき U を **アフィン開集合 (affine open subset)** という．

以下、 X の開集合 U はスキームの構造が与えられているとする．

Definition 1.5.4. X をスキーム、 $f \in \mathcal{O}_X(X)$ とする．

$$X_f := \{x \in X \mid f_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\}$$

ただし、 A^\times は A の単元群である．(Liu の Definition 3.11. では*の記号を用いている．)

次の条件を考えよう．

X は有限アフィン開被覆 $\{U_i\}_i$ があって $U_i \cap U_j$ はまた有限アフィン開被覆を持つ．

便宜上この条件を条件 A と呼称する．

Proposition 1.5.5. X をスキームとし $f \in \mathcal{O}_X(X)$ とする．このとき X_f は X の開集合で、更に、 X が条件 A を満たすなら、制限 $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$ は同型

$$\mathcal{O}_X(X)_f \simeq \mathcal{O}_X(X_f)$$

を誘導する．

Proof. $x \in X_f$ とする． x の開近傍 U と $g \in \mathcal{O}_X(U)$ があって、 $f_x g_x = 1$ を満たすものがある． $f_x g_x = (fg)_x$ よりある x の開近傍 $V \subset U$ があって $fg|_V = 1$ を満たす．したがって、 $V \subset X_f$ となる．よって X_f は開集合である．

更に、 V が動くにつれて f の逆元 $g \in \mathcal{O}_X(V)$ を張り合わせると $f|_{X_f}$ の $\mathcal{O}_X(X_f)$ での逆元を得る．

詳しく言えば、 X_f の上の V を集めた開被覆 $\{V_i\}_i$ を取り、 $fg_i|_{V_i} = 1$ なる $g_i \in \mathcal{O}_X(V_i)$ を考えれば任意の i, j に対して

$$fg_i|_{V_i \cap V_j} = 1 = fg_j|_{V_i \cap V_j}$$

より

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= fg_i|_{V_i \cap V_j} - fg_j|_{V_i \cap V_j} \\ &= f|_{V_i \cap V_j}(g_i|_{V_i \cap V_j} - g_j|_{V_i \cap V_j}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

また, $f|_{V_i}$ は単元なので逆元 $(f|_{V_i})^{-1}$ がある. また,

$$f|_{V_i \cap V_j} = (f|_{V_i})|_{V_i \cap V_j}$$

なので,

$$\begin{aligned} f|_{V_i \cap V_j}((f|_{V_i})^{-1}|_{V_i \cap V_j}) &= (f|_{V_i})|_{V_i \cap V_j}((f|_{V_i})^{-1}|_{V_i \cap V_j}) \\ &= ((f|_{V_i})(f|_{V_i})^{-1})|_{V_i \cap V_j} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって $f|_{V_i \cap V_j}$ はまた単元で $g_i|_{V_i \cap V_j} = g_j|_{V_i \cap V_j}$ を得る.

\mathcal{O}_X は層なので, 貼り合わせ条件より $g|_{V_i} = g_i$ なる $g \in \mathcal{O}_X(X_f)$ がある. この g が $f|_{X_f}$ の逆元になっている.

よって制限 $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$ から準同型

$$\alpha : \mathcal{O}_X(X)_f \rightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$$

を誘導する. ($\mathcal{O}_X(X)$ は環なので $\mathcal{O}_X(X)_f$ は $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ での局所化であることに注意しよう.) ここで条件 A を仮定すれば, X は有限アフィン開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ を持つ. よって,

$$X_f = \bigcup_i U_i \cap X_f = \bigcup_i V_i = \bigcup_i D(f|_{U_i})$$

Lem:1.5.3 より $\mathcal{O}_X(U_i)_f = \mathcal{O}_X(V_i)$

今以下の完全系列を得る.

$$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) : 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{d_0} \bigoplus_i \mathcal{O}_X(U_i) \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$$

ただし $d_0 : s \mapsto (s|_{U_i})_i$, $d_1 : (s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$ とする. (有限個なら直積 \prod と直和 \bigoplus は同じ)

次にテンソルをとることは左完全関手なので $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(X)_f$ はまた, 完全列である. よってこれは次の可換図式を与える.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(X)_f & \longrightarrow & \bigoplus_i \mathcal{O}_X(U_i)_f & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)_f \\ & & \downarrow \alpha & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(X_f) & \longrightarrow & \bigoplus_i \mathcal{O}_X(V_i) & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(V_i \cap V_j) \end{array}$$

■

1.5.1 Morphism of schemes

Definition 1.5.5. $f : X \rightarrow Y$ がスキームの射 (morphism of schemes) とは局所環付き空間としての射とする.

環の射 $\varphi : A \rightarrow B$ が誘導する射 $\mathrm{Spec} B \rightarrow \mathrm{Spec} A$ を φ^a と書くことにする.
つまり $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} B$ に対して $\varphi^a(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$

Proposition 1.5.6. $\varphi : A \rightarrow B$ を環の射とする. このとき

$$(\varphi^a, (\varphi^a)^\#) : \mathrm{Spec} B \rightarrow \mathrm{Spec} A$$

は $(\varphi^a)^\#(\mathrm{Spec} A) = \varphi$ を満たすスキームの射である.

Proof. $X = \mathrm{Spec} B, Y = \mathrm{Spec} A$ と置く. 任意の $f \in A$ に対して

$$(\varphi^a)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$$

が成り立ち, 実際

$$\begin{aligned} (\varphi^a)^{-1}(D(f)) &= \{\mathfrak{p} \in X \mid \varphi^a(\mathfrak{p}) \in D(f)\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in X \mid f \notin \varphi^a(\mathfrak{p})\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in X \mid f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in X \mid \varphi(f) \notin \mathfrak{p}\} \\ &= D(\varphi(f)) \end{aligned}$$

である. φ から誘導される環の射

$$(\varphi^a)^\#(D(f)) : \mathcal{O}_Y(D(f)) = A_f \rightarrow B_{\varphi(f)} = \mathcal{O}_X(D(\varphi(f))) = (\varphi^a)_* \mathcal{O}_X(D(f))$$

これは制限写像と可換 (compatible という意味で) になる. よって層の射

$$(\varphi^a)^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$$

に拡張できる. 更に, 任意の $\mathfrak{q} \in X$ に対して φ から誘導される環の射

$$(\varphi^a)^\#_{\mathfrak{q}} : A_{\varphi^a(\mathfrak{q})} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$$

は局所射で, 実際

$$\begin{aligned} (\varphi^a)^\#_{\mathfrak{q}}(\varphi^a(\mathfrak{q})A_{\varphi^a(\mathfrak{q})}) &= \{\varphi(a)/\varphi(p) \mid a \in \varphi^a(\mathfrak{q}), p \notin \varphi^a(\mathfrak{q})\} \\ &= \{\varphi(a)/\varphi(p) \mid \varphi(a) \in \mathfrak{q}, \varphi(p) \notin \mathfrak{q}\} \\ &\subset \{b/q \mid b \in \mathfrak{q}, q \notin \mathfrak{q}\} \\ &= \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}} \end{aligned}$$

よって $(\varphi^a, (\varphi^a)^\#)$ は局所環付き空間の射になる. 構成により

$$(\varphi^a)^\#(Y) : \mathcal{O}_Y(Y) = A \rightarrow B = \mathcal{O}_X(X) = (\varphi^a)_* \mathcal{O}_X(Y)$$

で $(\varphi^a)^\#(Y) = \varphi$ を満たす. ■

Lemma 1.5.7. A を環とし, I をそのイデアルとする. このとき, スキームの射

$$i : \operatorname{Spec} A/I \rightarrow \operatorname{Spec} A$$

が自然な射影 $\varphi : A \rightarrow A/I$ によって誘導される. i は $\operatorname{Im} i = V(I)$ へのスキームの閉はめ込みである. 更に, 任意の $\operatorname{Spec} A$ の基本開集合 $D(f)$ に対して

$$(\operatorname{Ker} i^\#)(D(f)) = I \otimes_A A_f$$

が成り立つ.

Proof. i が閉はめ込みであることはよい. 次に, 任意の $\operatorname{Spec} A$ の基本開集合 $D(f)$ に対して先ほどみたように, 標準的な全射

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(f)) = A_f \rightarrow (A/I)_{\varphi(f)} = i_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/I}(D(f))$$

がある. これにより, $i^\#$ の全射性と,

$$\begin{aligned} (\operatorname{Ker} i^\#)(D(f)) &= \operatorname{Ker} (i^\#(D(f))) \\ &= \operatorname{Ker} (A_f \rightarrow (A/I)_{\varphi(f)}) \\ &= I_f \\ &= I \otimes_A A_f \end{aligned}$$

がわかる. ■

Definition 1.5.6. Z を X の閉集合とする. このとき Z が 閉部分スキーム (closed subscheme) とは包含写像 $j : Z \rightarrow X$ が閉はめ込み

$$(j, j^\#) : (Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

となるときをいう.

Proposition 1.5.8. $X = \operatorname{Spec} A$ をアフィンスキームとする. $j : Z \rightarrow X$ をスキームの閉はめ込みとする. このとき, Z はアフィンスキームで, あるイデアル $J \subset A$ が唯一存在して j は同型 $Z \xrightarrow{\cong} \operatorname{Spec} A/J$ を誘導する.

Definition 1.5.7. S をスキームとする. このとき X が S -スキーム (S -scheme) または S 上のスキーム (scheme over S) とはスキームの射 $\pi : X \rightarrow S$ が与えられているときをいう. この π を 構造射 (structural morphism, structure morphism), S を 基底スキーム (base scheme) という. $S = \operatorname{Spec} A$ のときまた X を A -スキーム (A -scheme) または A 上のスキーム (scheme over A) という. このとき A を基底環 (base ring)

Definition 1.5.8. $\pi : X \rightarrow S, \rho : Y \rightarrow S$ を S 上のスキームとする. このとき S -スキームの射 (morphism of S -scheme) $f : X \rightarrow Y$ とは f がスキームの射で $\rho \circ f = \pi$ を満たすことをいう.

スキーム X, Y に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ is morphism of schemes}\}$$

また, 環 A, B に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A, B) := \{f : A \rightarrow B \mid f \text{ is morphism of rings}\}$$

とおく. このとき標準的な写像

$$\rho : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$$

がある. 実際 $(f, f^\#) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y)$ とすると

$$f^\#(Y) : \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow f_*\mathcal{O}_X(Y) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(Y)) = \mathcal{O}_X(X)$$

がある.

Definition 1.5.9. $\pi : X \rightarrow S$ を S 上のスキームとする. X の切断 (section of X) とは S 上のスキームの射 $\sigma : S \rightarrow X$ で $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_S$ となることをいう. X の切断の集合を $X(S)$ ($S = \mathrm{Spec} A$ のときは $X(A)$) とかく.

Example 1.5.9. X を体 k 上のスキームとする. このとき

$$X(k) = \{x \in X \mid k(x) = k\}$$

実際 $\sigma \in X(k)$ をとる. $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k, (0)} = k_{(0)} = k$ より

$$\sigma_{(0)}^\# : \mathcal{O}_{X, \sigma((0))} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{Spec} k, (0)} = k$$

Limit

第 A 章

A.1 Inductive Limit

とりあえず, 帰納極限だけ述べる. 射影極限は双対概念なのでまあ頑張って.

Definition A.1.1.(帰納系の定義)

(Λ, \leq) を順序集合, \mathcal{C} を圏とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し, $X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が与えられ, $\lambda \leq \mu$ に対して射 $\varphi_{\mu, \lambda} : X_\lambda \rightarrow X_\mu$ があって次を満たすとき, $\{X_\lambda, \varphi_{\mu, \lambda}\}$ を **順系 (direct system)** または **帰納系 (inductive system)** という. しばし $\varphi_{\mu, \lambda}$ を省略して $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ や $\{X_\lambda\}_\lambda$ で表す.

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\lambda, \lambda} = \text{id}_{X_\lambda}$
- $\lambda \leq \mu \leq \nu$ なる任意の $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\nu, \lambda} = \varphi_{\nu, \mu} \circ \varphi_{\mu, \lambda}$

Example A.1.1. 位相空間 X の開集合族 $\{U\}_U$ に対して

$$U \leq V \stackrel{\text{def}}{=} V \subset U$$

と定義する. そして, **AGrp** をアーベル群の成す圏, \mathcal{F} を X 上の前層とする. すると, 各開集合 U に対し, $\mathcal{F}(U) \in \text{Ob}(\mathbf{AGrp})$ で, 前層の定義からアーベル群と制限写像との組 $\{\mathcal{F}(U), \rho_{U, V}\}$ は帰納系となる. 前層の定義は Def:1.3.1 を参照.

Definition A.1.2.(帰納系の射の定義)

Λ を順序集合. $\{X_\lambda, \varphi_{\lambda, \mu}\}, \{Y_\lambda, \psi_{\lambda, \mu}\}$ を Λ 上の圏 \mathcal{C} における帰納系とする. このとき $\{X_\lambda\}$ から $\{Y_\lambda\}$ への射とは $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ なる射の族 $\{f_\lambda\}$ で, 任意の $\lambda \leq \mu$ に対して $\psi_{\lambda, \mu} \circ f_\mu = f_\lambda \circ \varphi_{\lambda, \mu}$ となるものを言う.

$$\begin{array}{ccc}
 X_\mu & \xrightarrow{f_\mu} & Y_\mu \\
 \varphi_{\lambda,\mu} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \psi_{\lambda,\mu} \\
 X_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & Y_\lambda
 \end{array}$$

Definition A.1.3. \mathcal{C} を圏とし, Λ を順序集合とする. $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を \mathcal{C} の帰納系とする. このとき $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ の **順極限 (direct limit)** または **帰納的極限 (inductive limit)** または **帰納極限** とは, \mathcal{C} の対象 $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と射の族 $\{\varphi_\lambda : X_\lambda \rightarrow \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の組 $\{\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \varphi_\lambda\}$ で, 次の条件を満たすものをいう.

- $\lambda \leq \mu$ に対して $\varphi_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = \varphi_\lambda$
- $\lambda \leq \mu$ に対して $f_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = f_\lambda$ を満たす任意の射の族 $\{f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, $f : \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow Y$ が一意に存在して

$$f \circ \varphi_\lambda = f_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

を満たす.

Remark . 一般の圏では帰納極限や射影極限は存在するとは限らない. しかし, 存在するとすれば, 同型を除いて一意である.

Proposition A.1.2. 帰納極限は存在すれば, 同型を除いて一意である.

Proof. 証明は後で書く. ■

索引

第 A 章

A

A -scheme/scheme over A	23
affine open subset	20
affine scheme	18

B

\mathfrak{B} -presheaf	14
\mathfrak{B} -sheaf	14
base ring	23
base scheme	23

C

closed subscheme	23
------------------------	----

G

germ	8
------------	---

I

inductive limit/direct limit	26
inductive system/direct system	25
morphism	25

L

locally ringed space	15
closed immersion	16
morphism	15
open immersion	16

O

open subscheme	20
----------------------	----

P

presheaf	6
morphism	9
cokernel	11
image	11
kernel	11

Q

quotient sheaf	11
----------------------	----

R

regular function	19
residue field at point	15

S

S -scheme/scheme over S	23
morphism	24
scheme	19
morphism	22

section	6, 24
sheaf	7
direct image	12
inverse image	12
sheaf of ideals	16
sheafification	9
stalk	8
structural morphism	23
structure sheaf	15

あ

アフィン開集合	20
アフィンスキーム	18
イデアル層	16
A -スキーム/ A 上のスキーム	23
S -スキーム/ S 上のスキーム	23
の射	24

か

開部分スキーム	20
基底環	23
基底スキーム	23
帰納極限/順極限	26
帰納系/順系	25
の射	25
局所環付き空間	15
開はめ込み	16
の射	15
閉はめ込み	16
茎	8
構造射	23
構造層	15

さ

商層	11
スキーム	19
の射	22
正則関数	19
切断	6, 24
前層	6
の射	9
の核	11
の像	11
の余核	11
の層化	9
層	7
の逆像	12
の順像	12

た

点での剰余体	15
--------------	----

は

ℳ-前層	14
ℳ-層	14
閉部分スキーム	23

ま

芽	8
---------	---
