# 代数幾何まとめノート

Fefr

2024 年 6 月 14 日

# 目次

# 第 1 章 Scheme

## 1.1 Zariski Topology

atodekakuyo

## 1.2 Algebraic Sets

atodekakuyo

## 1.3 Sheaves

**Definition 1.3.1.** $X$ を位相空間とする.$X$ 上の (アーベル群の) **前層** (presheaf) $\mathcal{F}$ とは次のデータ

- $U$ を任意の $X$ の開集合に対して $\mathcal{F}(U)$ はアーベル群.
- 制限写像 (restriction map) と言われる群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が任意の開集合 $V \subset U$ に対して存在する.

そして次の条件を満たす.

(1) $\rho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$
(2) 任意の開集合 $W \subset V \subset U$ に対して $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ となる.

$s \in \mathcal{F}(U)$ を $U$ 上の $\mathcal{F}$ の**切断** (section) という. また,$\rho_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$ を $s|_V$ と書いて $s$ の $V$

への制限という.
また, 単に $\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H},\dots$ などと書いたら (前) 層を表すことや、$\rho$ と書いたら制限写像を意味する。また, どの (前) 層の制限写像かを明示するため, 例えば,$\rho^{\mathcal{F}}_{U,V}$ などと書くことがある。

**Definition 1.3.2.** 前層 $\mathcal{F}$ が層 (sheaf) とは次の条件を満たすことをいう.

(4) (Uniqueness) $U$ を $X$ の開集合とし $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする. $s\in\mathcal{F}(U)$ が任意の $i$ に対して $s|_{U_i}=0$ ならば $s=0$

(5) (Glueing local sections) 上の状況で,$s_i\in\mathcal{F}(U_i)$ が $s_i|_{U_i\cap U_j}=s_j|_{U_i\cap U_j}$ を満たすならば,$s|_{U_i}=s_i$ を満たす $s\in\mathcal{F}(U)$ が存在する.

**Remark .** $\mathcal{F}$ が層ならば $\mathcal{F}(\varnothing)=0$ となる.

**Example 1.3.1.** $X$ を位相空間とする.
$\mathcal{C}^0_X$ を $X$ の開集合 $U$ に対して $U\to\mathbf{C}$ なる連続写像全体の集合 $\mathcal{C}^0_X(U)$ を対応させるものとし, 制限写像を普通の制限とする. すると,$\mathcal{C}^0_X$ は $X$ 上の層となる.

**Proof.** $V\subset U$ なる開集合 $U,V$ に対して $U$ 上の連続写像 $f\in\mathcal{C}^0_X(U)$ を $V$ に制限することによって得られる $V$ 上の連続写像を $\rho_{U,V}(f)(=f|_V)$ と書く. すると, これは $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間 ($\mathbf{C}$ 上の関数空間) の準同型 $\rho_{U,V}:\mathcal{C}^0_X(U)\to\mathcal{C}^0_X(V)$ となる. つまり $(\mathcal{C}^0_X,\rho)$ は前層となる.
また,(4) を満たすのは明らかで.(5) もすぐに成り立つことがわかる.$\{U_i\}_i$ を $U$ の開被覆とする.$f_i\in\mathcal{C}^0_X(U_i)$ が $f_i|_{U_i\cap U_j}=f_j|_{U_i\cap U_j}$ を満たすとする. するとそれらを張り合わせた関数を $f$ とすればこれは $f\in\mathcal{C}^0_X(U)$ であり,$f|_{U_i}=f_i$ となる. よって $(\mathcal{C}^0_X,\rho)$ は層となる. これを連続写像が成す層という. ■

**Example 1.3.2.** $X$ を位相空間とする.
$A$ を自明でないアーベル群とする.$\mathcal{A}_X$ を $X$ の空でない開集合 $U$ に対して $\mathcal{A}_X(U)=A$ に, 空集合 $\varnothing$ に対して $\mathcal{A}_X(\varnothing)=0$ に対応させるものとし, 制限写像を空でない開集合 $V\subset U$ に対して $\rho_{U,V}=\mathrm{id}_A$ とし,$\rho_{U,\varnothing}=0$ とする.
すると,$(\mathcal{A}_X,\rho)$ は $X$ 上の前層にはなるが, 一般に層とはならない.

**Proof.** 例えば,$X$ が連結でないとすると, 非交差な開集合 $U,V$ があって $X=U\cup V$ とかける. すると $\{U,V\}$ は $X$ の開被覆となる. $s_U\in\mathcal{A}_X(U)=A$ が $s_U|_{U\cap V}=s_U|_\varnothing=0=s_V|_{U\cap V}$ を満たすとする. このとき, 任意の $s\in\mathcal{A}_X(X)=A$ で $s|_U=s|_V=s$ となり層とならない. ■

**Example 1.3.3.** (skyscraper sheaf)
$X$ を位相空間、$A$ をアーベル群とする。$p \in X$ に対して $i_p : \{p\} \hookrightarrow X$ を包含写像とする。このとき $i_{p,*}\mathcal{A}$ を

$$i_{p,*}\mathcal{A}(U) = \begin{cases} A & p \in U \\ 1 & p \notin U \end{cases}$$

と定義する。これは層になる。

**Remark .** $\mathcal{B}$ を位相空間 $X$ の開基で有限交叉で閉じているものとする.(つまり任意の $U, V \in \mathcal{B}$ に対して $U \cap V \in \mathcal{B}$. e.g. $\operatorname{Spec} A$ の開基 $\{D(f)\}_f$) このとき $\mathcal{B}$-前層 ($\mathcal{B}$-presheaf) $\mathcal{F}_0$ とは

— $U \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{F}_0(U)$ はアーベル群.
— $V \subset U \in \mathcal{B}$ に対して群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}_0(U) \to \mathcal{F}_0(V)$ が定まる.

としたもの.
$\mathcal{B}$-層 ($\mathcal{B}$-sheaf)$\mathcal{F}_0$ から $X$ 上の層 $\mathcal{F}$ を作ることができる.
位相空間 $X$ の任意の開集合 $U$ をとり,$\{U_i\}_i$ をその開被覆とする.($U_i \in \mathcal{B}$)

$$\mathcal{F}(U) := \left\{ (s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}_0(U_i) \;\middle|\; \text{任意の } i, j \text{ に対して } s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \right\}$$

と定義する. するとこれは開被覆によらない. 実際 $\mathcal{F}(U)_{U_i}$ を開被覆 $\{U_i\}_i$ による $\mathcal{F}(U)$ とし,$\{V_j\}_j$ を別の開被覆とすると, $\{U_i \cap V_j\}_{i,j}$ はこれら 2 つの細分である.$\mathcal{F}(U)_{U_i} \to \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$ なる群準同型を $(s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap V_j})_{i,j}$ で定義できる. 実際

$$\begin{aligned} s_i|_{U_i \cap V_j}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} &= s_i\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\ &= s_i|_{U_i \cap U_{i'}}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\ &= s_{i'}|_{U_i \cap U_{i'}}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \quad (\because (s_i)_i \in \mathcal{F}(U)_{U_i}) \\ &= s_{i'}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\ &= s_{i'}|_{U_{i'} \cap V_{j'}}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \end{aligned}$$

より $(s_i|_{U_i \cap V_j})_{i,j} \in \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$
また,$(s_{ij})_{ij} \in \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$ を取ると, $(s_{ij})_{ij} = (s_i|_{U_i \cap V_j})$ と出来るので全射 (？？？？？)
Kernel を計算すると

$$\begin{aligned} s_i|_{U_i \cap V_j} &= 0 \quad (\forall i, j) \\ s_i|_{U_i} = s_i &= 0 \quad (\forall i) \quad (\because (4)) \end{aligned}$$

よって Kernel が自明なので単射.

**Definition 1.3.3.** 位相空間 $X$ 上の前層 $\mathcal{F}$ と $x \in X$ に対して,$x$ での $\mathcal{F}$ の**茎 (stalk)**$\mathcal{F}_x$ という群が定義できる.

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

ただし,$U$ は $x$ の開近傍をすべてを回る.$U$ 上の切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ に対して $x \in U$ の茎 $\mathcal{F}_x$ への自然な群準同型の像を $s_x$ と書いて,$x$ での $s$ の**芽 (germ)** という.

**Lemma 1.3.4.** $\mathcal{F}$ を $X$ 上の層とする.$s, t \in \mathcal{F}(X)$ が任意の $x \in X$ に対して $s_x = t_x$ ならば $s = t$

**Proof.** 差を考えれば $t = 0$ のときを考えればいい.$s_x = 0$ $(\forall x \in X)$ とすると,$x$ の開近傍 $U_x$ があって $s|_{U_x} = 0$ となる.$\{U_x\}_{x \in U_x}$ は $X$ の開被覆なので,$s = 0$ となる. ■

**Definition 1.3.4.** $X$ 上の 2 つの前層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ とする. **前層の射** $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは,$X$ の開集合 $U$ に対して群準同型 $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ があって, 任意の開集合の組 $V \subset U$ に対して $\alpha(V) \circ \rho^{\mathcal{F}}_{U,V} = \rho^{\mathcal{G}}_{U,V} \circ \alpha(U)$ を満たすことをいう.
$X$ の任意の開集合 $U$ に対して $\alpha(U)$ が単射ならば $\alpha$ は単射であるという.(全射はうまくいかんっぽい?)

$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を $X$ 上の前層の射とする. 任意の $x \in X$ に対して $\alpha$ から自然に誘導される群準同型 $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ で $(\alpha(U)(s))_x = \alpha_x(s_x)$ が $X$ の任意の開集合 $U, s \in \mathcal{F}(U), x \in U$ で成り立つものが取れる.
$\alpha_x$ が任意の $x \in X$ で全射なら $\alpha$ が全射であるという.

**Example 1.3.5.** $X = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ とし $\mathcal{F}$ を $X$ 上の正則関数がなす層とし, $\mathcal{G}$ を $X$ 上の双正則関数のなす層とする. 今, 任意の開集合 $U$ と任意の $f \in \mathcal{F}(U)$ に対して $\alpha(U)(f) = \exp(f)$ で定義される層の射 $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が全射であることはよく知られている. しかし $\alpha(X) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ は全射ではない. 例えば恒等写像は $\exp(f)$ と書けない.

**Proposition 1.3.6.** $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を $X$ 上の層の射とする.

$$\alpha \text{ が同型} \Leftrightarrow \alpha_x \text{ が同型} \ (\forall x \in X)$$

**Theorem 1.3.7.** 位相空間 $X$ 上の前層 $\mathcal{F}$ に対して, 前層 $\mathcal{F}$ の層化 (sheafification)$\mathcal{F}^\dagger$ は存在する.

**Proof.** $X$ の開集合 $U$ に対して

$$\mathcal{F}^\dagger(U) = \left\{ \sigma : U \to \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \,\middle|\, \forall x \in U, x \in \exists V \subset U : \mathrm{open}, \exists s \in \mathcal{F}(V) \, \mathrm{s.t.} \, \sigma(y) = s_y \, (\forall y \in V) \right\}$$

とする. ただし,$\sigma$ は任意の $x \in U$ に対して $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$ とする. また,$V \subset U$ なる開集合に対し,

$$\begin{array}{cccc} \rho^{\mathcal{F}^\dagger}_{U,V}: & \mathcal{F}^\dagger(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}^\dagger(V) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma|_V \end{array}$$

が定義できる. 実際, 任意の $x \in V$ をとる.$V \subset U$ であり, $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より

$$x \in \exists U_0 \subset U\text{:open},\exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y\ (\forall y \in U_0)$$

$V_0 = U_0 \cap V, \quad t = s|_{V_0}$ とすると任意の $y \in V_0$ に対して

$$\sigma(y) = \sigma|_V(y) = s_y$$

さらに帰納極限の定義から

$$\sigma|_V(y) = t_y$$

次に $\mathcal{F}^\dagger(U)$ がアーベル群, つまり $\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ ならば $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ を示そう.
$\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より任意の $x \in U$ に対して

$$\begin{aligned} &x \in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y\ (\forall y \in U_0) \\ &x \in \exists V_0 \subset U : \text{open}, \exists t \in \mathcal{F}(V_0) \text{ s.t. } \tau(z) = t_z\ (\forall z \in V_0) \end{aligned}$$

を満たす. いま $W = U_0 \cap V_0, s' = s|_W, t' = t|_W$ とすると,

$$\begin{aligned} x \in W \subset U : \text{open}, s', t' \in \mathcal{F}(W) \text{ s.t. } (\sigma + \tau)(y) &= \sigma(y) + \tau(y) \\ &= s_y + t_y \\ &= (s + t)_y\ (\forall y \in W) \end{aligned}$$

よって $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ また明らかに可換. よって $\mathcal{F}^\dagger(U)$ はアーベル群.
また, 通常の制限で制限写像を定義しているため,$\mathcal{F}^\dagger$ は前層となる.
更に層となることを示そう.
$U$ を $X$ の開集合とし,$\{U_i\}_i$ をその開被覆とする.$\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ が任意の $i$ に対して $\sigma|_{U_i} = 0$ とする. つまり任意の $x \in U_i$ に対して $\sigma(x) = 0$ とする.$U_i$ は $U$ を被覆するので結局 $\sigma = 0$ となる.
次に,$\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ とし, $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}$ と仮定すると,

$$\begin{array}{cccc} \sigma: & U & \longrightarrow & \displaystyle\prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & \sigma_i(x) \end{array}$$

ただし,$x \in U_i$. すると,$\sigma$ は $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ を張り合わせて作っているのでこれは $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ となることが容易にわかる。よって、$\mathcal{F}^\dagger$ は層になる。 ■

**Proposition 1.3.8.** **層化の射** $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^\dagger$ **に対して、その茎の射** $\theta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x^\dagger$ **は同型である。**

**Lemma 1.3.9.** $\mathcal{F}$ **を** $X$ **上の層とし、**$\mathcal{F}'$ **を** $\mathcal{F}$ **の部分層とする。このとき開集合** $U$ **を** $\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ **に対応させるものは前層になる。**

**Proof.** この対応を $\mathcal{G}$ とおく。$V \subset U$ なる開集合 $U, V$ をとる。制限写像を

$$\begin{array}{rccc} \rho^{\mathcal{G}}_{U,V}: & \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V)/\mathcal{F}'(V) \\ & \cup & & \cup \\ & s + \mathcal{F}'(U) & \longmapsto & \rho^{\mathcal{F}}_{U,V}(s) + \mathcal{F}'(V) \end{array}$$

とすると、これは well-defined である。また、$U \subset V \subset W$ なる開集合の組に対して

$$\rho^{\mathcal{G}}_{U,W} = \rho^{\mathcal{G}}_{V,W} \circ \rho^{\mathcal{G}}_{U,V}$$

が成り立つことは制限写像の定義から明らかである。よって $\mathcal{G}$ は前層。 ■

**Definition 1.3.5.** Lem:??で定義した前層の層化を $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ と書いて、**商層 (quotient shaef)** という。

**Definition 1.3.6.** $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前層の射とする。このとき開集合 $U$ に対して $U \mapsto \mathrm{Ker}\,(\alpha(U))$ とするものは $\mathcal{F}$ の部分層になる。これを $\mathrm{Ker}\,\alpha$ と書いて、$\alpha$ **の核 (kernel of** $\alpha$**)** という。
更に、$U \mapsto \mathrm{Im}\,(\alpha(U))$ は一般には前層となるので、これの層化を $\mathrm{Im}\,\alpha$ と書いて、$\alpha$ **の像 (image of** $\alpha$**)** という。

**Lemma 1.3.10.** $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ **を** $X$ **上の層,**$\mathcal{F}'$ **を** $\mathcal{F}$ **の部分層,**$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ **を前層の射とする。このとき、**

$$(\mathrm{Ker}\,\alpha)_x = \mathrm{Ker}\,\alpha_x$$
$$(\mathrm{Im}\,\alpha)_x = \mathrm{Im}\,\alpha_x$$
$$(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x$$

**が成り立つ。**

**Proof.** $\mathcal{Q}(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ とおく。
このとき、アーベル群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

が作れる。帰納極限は完全列を完全列に移すので、また Prop:??より

$$0 \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

を得る。よって

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x \longrightarrow 0$$

したがって、

$$\mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x \simeq (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x$$

を得る。
次に

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ker}\alpha)_x &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha(U)(s) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha_x(s_x) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \operatorname{Ker}\alpha_x\end{aligned}$$

を得る。同様に

$$\begin{aligned}(\operatorname{Im}\alpha)_x &= \{t_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in \exists U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U) \text{ s.t } t = \alpha(U)(s)\} \\ &= \{(\alpha(U)(s))_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \{\alpha_x(s_x) \in \mathcal{G}_x \mid s_x \in \mathcal{F}_x\} \\ &= \operatorname{Im}\alpha_x\end{aligned}$$

■

**Definition 1.3.7.** 層の列

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

が完全とは、$\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$ が成り立つことをいう。

**Proposition 1.3.11.** **層の列に対して次が成り立つ。**

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \text{ が完全} \iff \text{任意の } x \in X \text{ に対して } \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x \text{が完全}$$

**Proof.** 明らか。 ■

**Definition 1.3.8.** $X, Y$ を位相空間,$f : X \to Y$ を連続写像とする。このとき、$X$ 上の層 $\mathcal{F}$,$Y$ 上の層 $\mathcal{G}$ に対して、新たな $Y$ 上の層 $f_*\mathcal{F}$ が

$$V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

によって定義できる。これを $\mathcal{F}$ **の順像 (direct image of** $\mathcal{F}$**)** という。
また、

$$U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

で定義できる新たな $X$ 上の前層の層化 $f^{-1}\mathcal{G}$ を $\mathcal{G}$ **の逆像 (inverse image of $\mathcal{G}$)** という。

**Proposition 1.3.12.** 上の状況で

$$(f^{-1}\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)} \qquad \forall x \in X$$

**Proof.** 後で書く。■

**Remark .** $V$ を $Y$ の開集合とする。このとき自然な単射 $i : V \to Y$ に対して

$$i^{-1}\mathcal{G} = \mathcal{G}|_V$$

が成り立つ。

## 1.4 Ringed Topological Space

**Definition 1.4.1.** **局所環付き空間**とは位相空間 $X$ と $X$ 上の環の層 $\mathcal{O}_X$ の組 $(X, \mathcal{O}_X)$ で、任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X,x}$ が局所環となるものをいう。また、この $\mathcal{O}_X$ を $(X, \mathcal{O}_X)$ の**構造層 (structure sheaf)** という。また $(X, \mathcal{O}_X)$ を単に $\mathcal{O}_X$ と書くことがある。
また、$\mathcal{O}_{X,x}$ の唯一の極大イデアル $\mathfrak{m}_x$ に対してその剰余体 $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ を $X$ **の点 $x$ での剰余体 (residue field of X at x)** といって $k(x)$ と書く。

**Definition 1.4.2.** 局所環付き空間の射とは

$$(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

とは連続写像 $f : X \to Y$ と環の層の射 $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ の組 $(f, f^{\#})$ で、任意の $x \in X$ に対して $f^{\#}_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ は局所射となるものをいう。

**Definition 1.4.3.** 射 $(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ が**開はめ込み (open immersion)**(resp. **閉はめ込み (closed immersion)**) とは連続写像 $f$ が開はめ込み (resp. 閉はめ込み) [a]でかつ任意の $x \in X$ に対して $f^{\#}_x$ が同型 (resp. 全射) のときをいう。

[a] $f : X \to Y$ が (位相的) 開 (閉) はめ込みとは $X$ と $f(X)$ が同相で $f(X)$ が開 (閉) 集合のときをいう。

**Definition 1.4.4.** $(X, \mathcal{O}_X)$ を局所環付き空間とする。$\mathcal{J}$ が $\mathcal{O}_X$ の**イデアル層 (sheaf of ideals of** $\mathcal{O}_X$**)** とは任意の開集合 $U$ に対して $\mathcal{J}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ のイデアルになっているときをいう。

**Lemma 1.4.1.** $(X, \mathcal{O}_X)$ **を局所環付き空間とする。**$\mathcal{J}$ **を** $\mathcal{O}_X$ **のイデアル層とする。そして、**

$$V(\mathcal{J}) = \{x \in X \mid \mathcal{J}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$$

**とおく。(ちなみに上の諸々から** $\mathcal{J}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ **が分かる。)**
$j : V(\mathcal{J}) \hookrightarrow X$ **を包含写像とする。すると**

- $V(\mathcal{J})$ **は** $X$ **の閉集合**
- $(V(\mathcal{J}), j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$ **は局所環付き空間**
- $j^{\#}$ **は自然な全射**

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{J} = j_*(j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$$

**で** $(j, j^{\#}) : (V(\mathcal{J}), j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})) \to (X, \mathcal{O}_X)$ **は閉はめ込みである。**

**Proof.** **Claim1.**$V(\mathcal{J})$ は $X$ の閉集合
$x \in X \setminus V(\mathcal{J}) = \{x \in X \mid \mathcal{J}_x = \mathcal{O}_{X,x}\}$ に対して $f_x = 1$ なる $x$ の開近傍 $U$ と $f \in \mathcal{J}(U)$ をとる。つまり $f|_V = 1|_V = 1$ なる $x$ の開近傍 $V \subset U$ がある。すると任意の $y \in V$ に対して $f_y = 1 \in \mathcal{J}_y$ となって, この $y$ に対して $\mathcal{J}_y = \mathcal{O}_{X,y}$ なので $V \subset X \setminus V(\mathcal{J})$ となって $X \setminus V(\mathcal{J})$ が開であることがわかる。
**Claim2.**$(V(\mathcal{J}), j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$ は局所環付き空間
任意の $x \in V(\mathcal{J})$ に対して

$$(j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))_x = (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})_x = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{J}_x$$

は局所環。残りは自明。 ■

**Proposition 1.4.2.** $f : X \to Y$ **を局所環付き空間の閉はめ込みとする。**$Z$ **を局所環付き空間** $V(\mathcal{J})$ **とする。ただし、**$\mathcal{J} = \operatorname{Ker} f^{\#} \subset \mathcal{O}_Y$. **すると** $X \simeq Z$ **を自然な閉はめ込み** $Z \hookrightarrow Y$ **から得る。**

**Proof.** まず次の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

から Prop:1.3.11 より任意の $y = f(x) \in Y$ に対して

$$\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{J}_y = (f_*\mathcal{O}_X)_y = \mathcal{O}_{X,x}$$

を得る。よって

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus V(\mathcal{J}) \\ \mathcal{O}_{X,x} & y \in V(\mathcal{J}), y = f(x) \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

を得る。$f(X)$ は $Y$ の閉集合なので $x \in Y \setminus f(X)$ の開近傍 $U$ で

$$f(X) \cap U = \varnothing$$

となるものがとれる。よって

$$f_* \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(\varnothing) = 0$$

したがって、

$$(f_* \mathcal{O}_X)_x = 0$$

また、$x \in f(X)$ の開近傍 $U$ に対して $f$ での引き戻し $f^{-1}(U)$ は $y = f(x)$ の開近傍である。これを $V$ とおく。逆に、$f$ は閉はめ込みなので、$X$ は $f(X)$ と同相なので $X$ に自然に $Y$ の相対位相が入る。つまり、任意の $x \in X$ の開近傍 $U$ に対して $y = f(x) \in Y$ の開近傍 $V$ が存在して $f^{-1}(V)$ とかける。よって、

$$(f_* \mathcal{O}_X)_x = \varinjlim_{U \ni x} f_* \mathcal{O}_X(U) = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \varinjlim_{V \ni y} \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_{X,y}$$

つまり、

$$(f_* \mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus f(X) \\ \mathcal{O}_{X,x} & y = f(x) \end{cases}$$

$(*)$ と比較すれば

$$V(\mathcal{J}) = f(X)$$

が分かる。なので、$j : Z \hookrightarrow Y$ を包含写像とすると、$f$ から誘導される同相写像 $g : X \to Z$ に対して

$$f = j \circ g$$

で、

$$j_* \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Y / \mathcal{J} \simeq f_* \mathcal{O}_X$$

がわかる。容易に

$$f_* \mathcal{O}_X = j_* g_* \mathcal{O}_X$$

が分かるので

$$\mathcal{O}_Z = (j^{-1} \circ j)_* \mathcal{O}_Z = (j^{-1})_* j_* \mathcal{O}_Z \simeq (j^{-1})_* j_* g_* \mathcal{O}_X = (j^{-1} \circ j)_* g_* \mathcal{O}_X = g_* \mathcal{O}_X$$

である。よって、$g$ は局所環付き空間の同型射である。$f = j \circ g$ が局所環付き空間の射であることを確認するのは読者に委ねる。■

## 1.5 Schemes

**Proposition 1.5.1.** $A$ を環、$X = \operatorname{Spec} A$ とする。このとき以下が成り立つ。

(1) $\mathcal{O}'_X$ を環の $\mathfrak{B}$-層とする。$\mathcal{O}'_X$ が誘導する $X$ 上の層 $\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{O}_X(X) = A$ となる。

(2) 任意の $\mathfrak{p} \in X$ に対して、茎 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ は $A_\mathfrak{p}$ への標準的な同型がある。特に、$(X, \mathcal{O}_X)$ は局所環付き空間になる。

# Limit
第 A 章

## A.1 Inductive Limit

とりあえず, 帰納極限だけ述べる. 射影極限は双対概念なのでまぁ頑張って.

**Definition A.1.1.**(帰納系の定義)
$(\Lambda, \leq)$ を順序集合,$\mathscr{C}$ を圏とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し,$X_\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ が与えられ, $\lambda \leq \mu$ に対して射 $\varphi_{\mu,\lambda} : X_\lambda \to X_\mu$ があって次を満たすとき,$\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を**順系 (direct system)** または**帰納系 (inductive system)** という. しばしば $\varphi_{\mu,\lambda}$ を省略して $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ や $\{X_\lambda\}_\lambda$ で表す.

— 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\lambda,\lambda} = \mathrm{id}_{X_\lambda}$
— $\lambda \leq \mu \leq \nu$ なる任意の $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\nu,\lambda} = \varphi_{\nu,\mu} \circ \varphi_{\mu,\lambda}$

**Example A.1.1.** 位相空間 $X$ の開集合族 $\{U\}_U$ に対して

$$U \leq V \overset{\mathrm{def}}{\equiv} V \subset U$$

と定義する. そして,**AGrp** をアーベル群の成す圏,$\mathcal{F}$ を $X$ 上の前層とする. すると, 各開集合 $U$ に対し,$\mathcal{F}(U) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{AGrp})$ で, 前層の定義からアーベル群と制限写像との組 $\{\mathcal{F}(U), \rho_{U,V}\}$ は帰納系となる. 前層の定義は Def:1.3.1 を参照.

**Definition A.1.2.**(帰納系の射の定義)
$\Lambda$ を順序集合.$\{X_\lambda, \varphi_{\lambda,\mu}\}, \{Y_\lambda, \psi_{\lambda,\mu}\}$ を $\Lambda$ 上の圏 $\mathscr{C}$ における帰納系とする. このとき $\{X_\lambda\}$ から $\{Y_\lambda\}$ への射とは $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ なる射の族 $\{f_\lambda\}$ で, 任意の $\lambda \leq \mu$ に対して $\psi_{\lambda,\mu} \circ f_\mu = f_\lambda \circ \varphi_{\lambda,\mu}$ となるものを言う.

$$
\begin{tikzcd}
X_\mu \arrow[r, "f_\mu"] \arrow[d, "\varphi_{\lambda,\mu}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_\mu \arrow[d, "\psi_{\lambda,\mu}"] \\
X_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"'] & Y_\lambda
\end{tikzcd}
$$

**Definition A.1.3.** $\mathscr{C}$ を圏とし,$\Lambda$ を順序集合とする.$\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を $\mathscr{C}$ の帰納系とする.このとき $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ の**順極限 (direct limit)** または**帰納的極限 (inductive limit)** または**帰納極限**とは, $\mathscr{C}$ の対象 $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ と射の族 $\{\varphi_\lambda : X_\lambda \to \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の組 $\{\varinjlim X_\lambda, \varphi_\lambda\}$ で, 次の条件を満たすものをいう.

— $\lambda \leq \mu$ に対して $\varphi_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = \varphi_\lambda$

— $\lambda \leq \mu$ に対して $f_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = f_\lambda$ を満たす任意の射の族 $\{f_\lambda : X_\lambda \to Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, $f : \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to Y$ が一意に存在して

$$f \circ \varphi_\lambda = f_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

を満たす.

**Remark .** 一般の圏では帰納極限や射影極限は存在するとは限らない. しかし, 存在するとすれば, 同型を除いて一意である.

**Proposition A.1.2.** **帰納極限は存在すれば, 同型を除いて一意である.**

**Proof.** 証明は後で書く. ■

# Category Theory

第 B 章