代数幾何まとめノート

Fefr

2024 年 5 月 22 日

目次

Scheme
第 1 章

1.1 Zariski Topology

atodekakuyo

1.2 Algebraic Sets

atodekakuyo

1.3 Sheaves

Definition 1.3.1. X を位相空間とする。X 上の (アーベル群の) **前層** (presheaf) $\mathcal{F}$ とは次のデータ

— U を任意の X の開集合に対して $\mathcal{F}(U)$ はアーベル群。
— 制限写像 (restriction map) と言われる群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が任意の開集合 $V \subset U$ に対して存在する。

そして次の条件を満たす。

(1) $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$
(2) $\rho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$
(3) 任意の開集合 $W \subset V \subset U$ に対して $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ となる。

$s \in \mathcal{F}(U)$ を U 上の $\mathcal{F}$ の**切断** (section) という。また、$\rho_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$ を $s|_V$ と書いて s の V への制限という。

Definition 1.3.2. 前層 $\mathcal{F}$ が層 (sheaf) とは次の条件を満たすことをいう。

(4) (Uniqueness) U を X の開集合とし $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする。$s \in \mathcal{F}(U)$ が任意の i に対して $s|_{U_i} = 0$ ならば $s = 0$

(5) (Glueing local sections) 上の状況で、$s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ が $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすならば、$s|_{U_i} = s_i$ を満たす $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する。

Remark . $\mathcal{B}$ を位相空間 X の開基で有限交叉で閉じているものとする。(つまり任意の $U, V \in \mathcal{B}$ に対して $U \cap V \in \mathcal{B}$. e.g. $\operatorname{Spec} A$ の開基 $\{D(f)\}_f$) このとき $\mathcal{B}$-前層 ($\mathcal{B}$-presheaf) $\mathcal{F}_0$ とは

— $U \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{F}_0(U)$ はアーベル群。
— $V \subset U \in \mathcal{B}$ に対して群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}_0(U) \to \mathcal{F}_0(V)$ が定まる。

としたもの。
$\mathcal{B}$-層 ($\mathcal{B}$-sheaf)$\mathcal{F}_0$ から X 上の層 $\mathcal{F}$ を作ることができる。
位相空間 X の任意の開集合 U をとり、$\{U_i\}_i$ をその開被覆とする。($U_i \in \mathcal{B}$)

$$\mathcal{F}(U) := \left\{ (s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}_0(U_i) \;\middle|\; \text{任意の } i, j \text{ に対して } s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \right\}$$

と定義する。するとこれは開被覆によらない。実際 $\mathcal{F}(U)_{U_i}$ を開被覆 $\{U_i\}_i$ による $\mathcal{F}(U)$ とし、$\{V_j\}_j$ を別の開被覆とすると、$\{U_i \cap V_j\}_{i,j}$ はこれら 2 つの細分である。$\mathcal{F}(U)_{U_i} \to \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$ なる群準同型を $(s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap V_j})_{i,j}$ で定義できる。実際

$$\begin{aligned}
s_i|_{U_i \cap V_j}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} &= s_i\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\
&= s_i|_{U_i \cap U_{i'}}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\
&= s_{i'}|_{U_i \cap U_{i'}}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \quad (\because (s_i)_i \in \mathcal{F}(U)_{U_i}) \\
&= s_{i'}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\
&= s_{i'}|_{U_{i'} \cap V_{j'}}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})}
\end{aligned}$$

より $(s_i|_{U_i \cap V_j})_{i,j} \in \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$
また、$(s_{ij})_{ij} \in \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$ を取ると、$(s_{ij})_{ij} = (s_i|_{U_i \cap V_j})$ と出来るので全射 (？？？？？)
Kernel を計算すると

$$\begin{aligned}
s_i|_{U_i \cap V_j} &= 0 \quad (\forall i, j) \\
s_i|_{U_i} = s_i &= 0 \quad (\forall i) \quad (\because (4))
\end{aligned}$$

よって Kernel が自明なので単射。