代数幾何まとめノート

Fefr

2024 年 9 月 6 日

目次

Scheme
第 1 章

1.1 Zariski Topology

$\operatorname{Spec} A$ を幾何的な対象に昇華するために，位相を導入しよう．まず，環 A のイデアル I に対して

$$\begin{aligned} V(I) &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid I \subset \mathfrak{p}\} \\ D(I) &= \operatorname{Spec} A \setminus V(I) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid I \not\subset \mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

更に，$f \in A$ に対して

$$\begin{aligned} V(f) &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid Af \subset \mathfrak{p}\} \\ D(f) &= \operatorname{Spec} A \setminus V(Af) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid Af \not\subset \mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

と定義する．また，$Af \subset \mathfrak{p}$ より $af \in Af$ は $af \in \mathfrak{p}$ なので，$a = 1$ とすれば $f \in \mathfrak{p}$ がわかり，イデアルの定義より，

$$\begin{aligned} V(f) &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \in \mathfrak{p}\} \\ D(f) &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid f \notin \mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

がわかる．次に $\{D(f)\}_{f \in A}$ を開集合族とする位相が定まることを示そう．

Proposition 1.1.1. ああああ

1.2 Algebraic Sets

1.3 Sheaves

Definition 1.3.1. X を位相空間とする.X 上の (アーベル群の) **前層** (presheaf) $\mathcal{F}$ とは次のデータ

— U を任意の X の開集合に対して $\mathcal{F}(U)$ はアーベル群.

— 制限写像 (restriction map) と言われる群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が任意の開集合 $V \subset U$ に対して存在する.

そして次の条件を満たす.

(1) $\rho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$

(2) 任意の開集合 $W \subset V \subset U$ に対して $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ となる.

$s \in \mathcal{F}(U)$ を U 上の $\mathcal{F}$ の**切断** (section) という. また,$\rho_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$ を $s|_V$ と書いて s の V への制限という.
また, 単に $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \ldots$ などと書いたら (前) 層を表すことや、ρ と書いたら制限写像を意味する。また, どの (前) 層の制限写像かを明示するため, 例えば,$\rho^{\mathcal{F}}_{U,V}$ などと書くことがある.

Remark . $\mathcal{F}(U)$ を $\Gamma(U, \mathcal{F})$ と書くことがある. これはたぶん $\mathcal{F}$ が複雑だったり U が複雑だったりするからである.

Definition 1.3.2. 前層 $\mathcal{F}$ が層 (sheaf) とは次の条件を満たすことをいう.

(4) (Uniqueness) U を X の開集合とし $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする. $s \in \mathcal{F}(U)$ が任意の i に対して $s|_{U_i} = 0$ ならば $s = 0$

(5) (Glueing local sections) 上の状況で,$s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ が $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすならば,$s|_{U_i} = s_i$ を満たす $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する.

Remark . $\mathcal{F}$ が層ならば $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$ となる.

Example 1.3.1. X を位相空間とする.
$\mathcal{C}^0_X$ を X の開集合 U に対して $U \to \mathbf{C}$ なる連続写像全体の集合 $\mathcal{C}^0_X(U)$ を対応させるものとし, 制限写像を普通の制限とする.

$$\mathcal{C}^0_X(U) = \{f : U \to \mathbf{C} \mid f \text{ is continuous}\}$$

すると,$\mathcal{C}^0_X$ は X 上の層となる.

Proof. $V \subset U$ なる開集合 U, V に対して U 上の連続写像 $f \in \mathcal{C}^0_X(U)$ を V に制限することによって得られる V 上の連続写像を $\rho_{U,V}(f)(= f|_V)$ と書く. すると, これは $\mathbf{C}$

上のベクトル空間 ($\mathbf{C}$ 上の関数空間) の準同型 $\rho_{U,V}:\mathcal{C}^0_X(U)\to\mathcal{C}^0_X(V)$ となる. つまり $(\mathcal{C}^0_X,\rho)$ は前層となる.
また,(4) を満たすのは明らかで.(5) もすぐに成り立つことがわかる.$\{U_i\}_i$ を U の開被覆とする.$f_i\in\mathcal{C}^0_X(U_i)$ が $f_i|_{U_i\cap U_j}=f_j|_{U_i\cap U_j}$ を満たすとする. するとそれらを張り合わせた関数を f とすればこれは $f\in\mathcal{C}^0_X(U)$ であり,$f|_{U_i}=f_i$ となる. よって $(\mathcal{C}^0_X,\rho)$ は層となる. これを連続写像が成す層という. ■

Example 1.3.2. X を位相空間とする.
A を自明でないアーベル群とする.$\mathcal{A}_X$ を X の空でない開集合 U に対して $\mathcal{A}_X(U)=A$ に, 空集合 $\varnothing$ に対して $\mathcal{A}_X(\varnothing)=0$ に対応させるものとし, 制限写像を空でない開集合 $V\subset U$ に対して $\rho_{U,V}=\mathrm{id}_A$ とし,$\rho_{U,\varnothing}=0$ とする.
すると,$(\mathcal{A}_X,\rho)$ は X 上の前層にはなるが, 一般に層とはならない.

Proof. 例えば,X が連結でないとすると, 非交差な開集合 U,V があって $X=U\cup V$ とかける. すると $\{U,V\}$ は X の開被覆となる. $s_U\in\mathcal{A}_X(U)=A$ が $s_U|_{U\cap V}=s_U|_{\varnothing}=0=s_V|_{U\cap V}$ を満たすとする. このとき, 任意の $s\in\mathcal{A}_X(X)=A$ で $s|_U=s|_V=s$ となり層とならない. ■

Example 1.3.3. (skyscraper sheaf)
X を位相空間、A をアーベル群とする。$p\in X$ に対して $i_p:\{p\}\hookrightarrow X$ を包含写像とする。このとき $i_{p,*}\mathcal{A}$ を

$$i_{p,*}\mathcal{A}(U)=\begin{cases}A & p\in U\\ 1 & p\notin U\end{cases}$$

と定義する。これは層になる。

Example 1.3.4. $\mathcal{F}$ を X 上の前層とする. このとき X の開集合 U に対して U 上の前層 $\mathcal{F}|_U$ が $V\subset U$ なる開集合に対して $\mathcal{F}|_U(V)=\mathcal{F}(V)$ として定義される. これを **$\mathcal{F}$ の U への制限 (restriction of $\mathcal{F}$ to U)** という. もし $\mathcal{F}$ が層なら $\mathcal{F}|_U$ も層である.

Definition 1.3.3. 位相空間 X 上の前層 $\mathcal{F}$ と $x\in X$ に対して,x での $\mathcal{F}$ の**茎 (stalk)**$\mathcal{F}_x$ という群が定義できる.

$$\mathcal{F}_x=\varinjlim_{U\ni x}\mathcal{F}(U)$$

ただし,U は x の開近傍をすべてを回る.U 上の切断 $s\in\mathcal{F}(U)$ に対して $x\in U$ の茎 $\mathcal{F}_x$ への自然な群準同型の像を s_x と書いて,x での s の**芽 (germ)** という.

Remark . ここで，$\mathcal{F}_x$ は x 近傍の情報を持っていると言える．実際，

$$\mathcal{F}_x = \left. \bigsqcup_{x \in U_i} \mathcal{F}(U_i) \middle/ \sim \right. \qquad \cdots (*)$$

ここで，同値関係は

$$(t, U) \sim (s, V) \overset{\text{def}}{\equiv} \exists W \subset U, V, x \in W \text{ s.t. } t|_W = s|_W$$

である．ただし，(t, U) とは x の開近傍 U で $t \in \mathcal{F}(U)$ という意味である．また $(*)$ を見れば分かるように，$\mathcal{F}_x$ の任意の元はある x 近傍 U 上の切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ の芽である．

Proposition 1.3.5. **層の定義の (4),(5) を次の列が完全系列であるとすることができる．**

$$C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{F}) : 0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{d_0} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d_1} \prod_i \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

ただし，$\mathfrak{U}$ **は開集合** U **の開被覆で** $\mathfrak{U} = \{U_i\}_i$**．**
$d_0 : s \mapsto (s|_{U_i})_i, d_1 : (s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$

Proof. ■

Lemma 1.3.6. $\mathcal{F}$ **を** X **上の層とする．**$s, t \in \mathcal{F}(X)$ **が任意の** $x \in X$ **に対して** $s_x = t_x$ **ならば** $s = t$

Proof. 差を考えれば $t = 0$ のときを考えればいい.$s_x = 0$ $(\forall x \in X)$ とすると,x の開近傍 U_x があって $s|_{U_x} = 0$ となる.$\{U_x\}_{x \in U_x}$ は X の開被覆なので,$s = 0$ となる． ■

Definition 1.3.4. X 上の 2 つの前層 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ とする. **前層の射** $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは,X の開集合 U に対して群準同型 $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ があって, 任意の開集合の組 $V \subset U$ に対して $\alpha(V) \circ \rho^{\mathcal{F}}_{U,V} = \rho^{\mathcal{G}}_{U,V} \circ \alpha(U)$ を満たすことをいう.
X の任意の開集合 U に対して $\alpha(U)$ が単射ならば α は単射であるという.(全射はうまくいかんっぽい？)

$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を X 上の前層の射とする. 任意の $x \in X$ に対して α から自然に誘導される群準同型 $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ で $(\alpha(U)(s))_x = \alpha_x(s_x)$ が X の任意の開集合 $U, s \in \mathcal{F}(U), x \in U$ で成り立つものが取れる.
α_x が任意の $x \in X$ で全射なら α が全射であるという.

Example 1.3.7. $X = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ とし $\mathcal{F}$ を X 上の正則関数がなす層とし, $\mathcal{G}$ を X 上の双正則関数のなす層とする. 今, 任意の開集合 U と任意の $f \in \mathcal{F}(U)$ に対して $\alpha(U)(f) = \exp(f)$ で定義される層の射 $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が全射であることはよく知られている. しかし

$\alpha(X) : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ は全射ではない. 例えば恒等写像は $\exp(f)$ と書けない.

Proposition 1.3.8. $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を X 上の層の射とする.

$$\alpha \text{ が同型} \Leftrightarrow \alpha_x \text{ が同型 } (\forall x \in X)$$

Theorem 1.3.9. 位相空間 X 上の前層 $\mathcal{F}$ に対して, 前層 $\mathcal{F}$ の層化 (sheafification)$\mathcal{F}^\dagger$ は存在する.

Proof. X の開集合 U に対して

$$\mathcal{F}^\dagger(U) = \left\{ \sigma : U \to \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \;\middle|\; \forall x \in U, x \in \exists V \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(V) \,\text{s.t.}\, \sigma(y) = s_y \,(\forall y \in V) \right\}$$

とする. ただし,σ は任意の $x \in U$ に対して $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$ とする. また,$V \subset U$ なる開集合に対し,

$$\begin{array}{cccc} \rho^{\mathcal{F}^\dagger}_{U,V} : & \mathcal{F}^\dagger(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}^\dagger(V) \\ & \Cup & & \Cup \\ & \sigma & \longmapsto & \sigma|_V \end{array}$$

が定義できる. 実際, 任意の $x \in V$ をとる.$V \subset U$ であり, $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より

$$x \in \exists U_0 \subset U\text{:open,}\exists s \in \mathcal{F}(U_0) \ \text{ s.t. } \ \sigma(y) = s_y \,(\forall y \in U_0)$$

$V_0 = U_0 \cap V, \quad t = s|_{V_0}$ とすると任意の $y \in V_0$ に対して

$$\sigma(y) = \sigma|_V(y) = s_y$$

さらに帰納極限の定義から

$$\sigma|_V(y) = t_y$$

次に $\mathcal{F}^\dagger(U)$ がアーベル群, つまり $\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ ならば $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ を示そう.
$\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より任意の $x \in U$ に対して

$$\begin{aligned} &x \in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0) \\ &x \in \exists V_0 \subset U : \text{open}, \exists t \in \mathcal{F}(V_0) \text{ s.t. } \tau(z) = t_z \ (\forall z \in V_0) \end{aligned}$$

を満たす. いま $W = U_0 \cap V_0, s' = s|_W, t' = t|_W$ とすると,

$$\begin{aligned} x \in W \subset U : \text{open}, s', t' \in \mathcal{F}(W) \text{ s.t. } (\sigma + \tau)(y) &= \sigma(y) + \tau(y) \\ &= s_y + t_y \\ &= (s + t)_y \ (\forall y \in W) \end{aligned}$$

よって $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ また明らかに可換. よって $\mathcal{F}^\dagger(U)$ はアーベル群.
また, 通常の制限で制限写像を定義しているため,$\mathcal{F}^\dagger$ は前層となる.
更に層となることを示そう.

U を X の開集合とし,$\{U_i\}_i$ をその開被覆とする.$\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ が任意の i に対して $\sigma|_{U_i} = 0$ とする. つまり任意の $x \in U_i$ に対して $\sigma(x) = 0$ とする.U_i は U を被覆するので結局 $\sigma = 0$ となる.
次に,$\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ とし, $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}$ と仮定すると,

$$\begin{array}{cccc} \sigma: & U & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ & \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ & x & \longmapsto & \sigma_i(x) \end{array}$$

ただし,$x \in U_i$. すると,σ は $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ を張り合わせて作っているのでこれは $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ となることが容易にわかる。よって、$\mathcal{F}^\dagger$ は層になる。 ■

Proposition 1.3.10. **層化の射 $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^\dagger$ に対して、その茎の射 $\theta_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x^\dagger$ は同型である。**

Lemma 1.3.11. **$\mathcal{F}$ を X 上の層とし、$\mathcal{F}'$ を $\mathcal{F}$ の部分層とする。このとき開集合 U を $\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ に対応させるものは前層になる。**

Proof. この対応を $\mathcal{G}$ とおく。$V \subset U$ なる開集合 U, V をとる。制限写像を

$$\begin{array}{cccc} \rho^{\mathcal{G}}_{U,V}: & \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V)/\mathcal{F}'(V) \\ & \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ & s + \mathcal{F}'(U) & \longmapsto & \rho^{\mathcal{F}}_{U,V}(s) + \mathcal{F}'(V) \end{array}$$

とすると、これは well-defined である。また、$U \subset V \subset W$ なる開集合の組に対して

$$\rho^{\mathcal{G}}_{U,W} = \rho^{\mathcal{G}}_{V,W} \circ \rho^{\mathcal{G}}_{U,V}$$

が成り立つことは制限写像の定義から明らかである。よって $\mathcal{G}$ は前層。 ■

Definition 1.3.5. Lem:??で定義した前層の層化を $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ と書いて、 **商層 (quotient shaef)** という。

Definition 1.3.6. $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前層の射とする。このとき開集合 U に対して $U \mapsto \mathrm{Ker}\,(\alpha(U))$ とするものは $\mathcal{F}$ の部分層になる。これを $\mathrm{Ker}\,\alpha$ と書いて、**α の核 (kernel of α)** という。
更に、$U \mapsto \mathrm{Im}\,(\alpha(U))$ は一般には前層となるので、これの層化を $\mathrm{Im}\,\alpha$ と書いて、**α の像 (image of α)** という。
また，$U \mapsto \mathrm{Coker}\,(\alpha(U)) = \mathcal{G}(U)/\mathrm{Im}\,(\alpha(U))$ は一般には前層となるので，これの層化を $\mathrm{Coker}\,\alpha$ と書いて， **α の余核 (cokernel of α)** という.

Lemma 1.3.12. $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を X 上の層,$\mathcal{F}'$ を $\mathcal{F}$ の部分層,$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前層の射とする。このとき、

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ker}\alpha)_x &= \operatorname{Ker}\alpha_x \\ (\operatorname{Im}\alpha)_x &= \operatorname{Im}\alpha_x \\ (\operatorname{Coker}\alpha)_x &= \operatorname{Coker}\alpha_x \\ (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x &= \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x\end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. $\mathcal{Q}(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ とおく。
このとき、アーベル群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

が作れる。帰納極限は完全列を完全列に移すので、また Prop:**??**より

$$0 \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

を得る。よって

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x \longrightarrow 0$$

したがって、

$$\mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x \simeq (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x$$

を得る。
次に

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ker}\alpha)_x &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha(U)(s) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha_x(s_x) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \operatorname{Ker}\alpha_x\end{aligned}$$

を得る。同様に

$$\begin{aligned}(\operatorname{Im}\alpha)_x &= \{t_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in \exists U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U) \text{ s.t } t = \alpha(U)(s)\} \\ &= \{(\alpha(U)(s))_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \{\alpha_x(s_x) \in \mathcal{G}_x \mid s_x \in \mathcal{F}_x\} \\ &= \operatorname{Im}\alpha_x\end{aligned}$$

を得る．また，$(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x$ より

$$(\operatorname{Coker}\alpha)_x = (\mathcal{G}/\operatorname{Im}\alpha)_x = \mathcal{G}_x/\operatorname{Im}\alpha_x = \operatorname{Coker}\alpha_x$$

■

Definition 1.3.7. 層の列

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

が完全とは、$\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$ が成り立つことをいう。

Proposition 1.3.13. **層の列に対して次が成り立つ。**

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \text{ が完全} \iff \text{任意の } x \in X \text{ に対して } \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x \text{が完全}$$

Proof. 明らか。 ■

Definition 1.3.8. X, Y を位相空間,$f : X \to Y$ を連続写像とする。このとき、X 上の層 $\mathcal{F}$,Y 上の層 $\mathcal{G}$ に対して、新たな Y 上の層 $f_*\mathcal{F}$ が

$$V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

によって定義できる。これを $\mathcal{F}$ **の順像 (direct image of** $\mathcal{F}$**)** という。
また、

$$U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

で定義できる新たな X 上の前層 $f^{\cdot}\mathcal{G}$ の層化 $f^*\mathcal{G}$ を $\mathcal{G}$ **の逆像 (inverse image of** $\mathcal{G}$**)** という。

Proposition 1.3.14. **上の状況で**

$$(f^*\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)} \qquad \forall x \in X$$

Proof.

$$(f^*\mathcal{G})_x = \varinjlim_{x \in U} (f^*\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{x \in U} \varinjlim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V) = \mathcal{G}_{f(x)}$$

最後の等号は明らか. ■

Remark . V を Y の開集合とする。このとき自然な単射 $i : V \to Y$ に対して

$$i^*\mathcal{G} = \mathcal{G}|_V$$

が成り立つ。

Proposition 1.3.15. $f : X \to Y$ **を位相空間の間の連続写像とし，**$\mathcal{F}$ **を** X **上の層．**$\mathcal{G}$ **を** Y **上の層とする．このとき**

$$\operatorname{Hom}_{\mathsf{Sh}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathsf{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

ただし，$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ **は圏** $\mathcal{C}$ **で** $X \to Y$ **なる射全体を表し，**$\mathsf{Sh}(X)$ **は** X **上の層全体を**

表す.

Proof. 層化の普遍性より $\theta : f^{\cdot}\mathcal{G} \to f^*\mathcal{G} = (f^{\cdot}\mathcal{G})^{\dagger}$ を層化の射とすると,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^{\cdot}\mathcal{G}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ph(X)}}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \\ \Psi & & \Psi \\ \alpha & \longmapsto & \tilde{\alpha} \circ \theta \end{array}$$

が成り立つ. つまり

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^{\cdot}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh(Y)}}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

を示せばいい. 次に X 上の開集合 U に対して

$$f^{\cdot}\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

なので, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^{\cdot}\mathcal{G}, \mathcal{F})$ に対して

$$\varphi(U) : \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

を与えることは帰納極限の定義より $f(U) \subset V$ なる開集合 V に対して

$$\psi'(V) : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

を $f(U) \subset V' \subset V$ ならば,

$$\psi'(V) = \psi'(V') \circ \rho^{\mathcal{G}}_{V,V'}$$

となるように与えることである. すなわち $\psi'(V)$ は

$$\psi(V) : \mathcal{G}(V) \to \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

と $\rho^{\mathcal{F}}_{f^{-1}(V),U}$ を合成したものである. (帰納系の選び方によらない.)
したがって, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^{\cdot}\mathcal{G}, \mathcal{F})$ を与えることは, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ph}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ を与えることと等しい. ■

Example 1.3.16. $\mathcal{F}$ を X 上の層とする. このとき

$$\mathrm{Supp}\,\mathcal{F} = \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$$

と定義して $\mathcal{F}$ **の台 (Supports of $\mathcal{F}$)** という. 一般にはこれは閉集合ではない.

1.3.1 $\mathfrak{B}$-sheaf

$\mathfrak{B}$-sheaf はアフィンスキームの構成にも必要な概念で, ラフに言えばすべての開集合 U に対して $\mathcal{F}(U)$ が定まっているものではなく, 開基 $\mathfrak{B}$ の元 U に対してだけ定まっている層を $\mathfrak{B}$-sheaf という.

Definition 1.3.9. 位相空間 X の**開基 $\mathfrak{B}$ が有限交叉で閉じている**とは，任意の $U, V \in \mathfrak{B}$ に対して $U \cap V \in \mathfrak{B}$ が成り立つことをいう．

Example 1.3.17. 環 A の素イデアルの集合 $\operatorname{Spec} A$ の基本開集合による開基 $\{D(f)\}_{f\in A}$ は有限交叉で閉じている．

Definition 1.3.10. X を位相空間．$\mathfrak{B}$ をその開基とする．このとき $\mathcal{F}$ が **$\mathfrak{B}$-前層 ($\mathfrak{B}$-presheaf)** であるとは，

— $U \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{F}(U)$ はアーベル群.
— $V \subset U \in \mathcal{B}$ に対して群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が定まる.

で，

(1) $\rho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$
(2) 任意の開集合 $W \subset V \subset U$ に対して $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ となる．

を満たすときをいう．

Definition 1.3.11. $\mathfrak{B}$ が有限交叉で閉じているとする．このとき $\mathfrak{B}$-前層が層の条件を満たすとき **$\mathfrak{B}$-層 ($\mathfrak{B}$-sheaf)** という．

Proposition 1.3.18. $\mathcal{F}$ を $\mathfrak{B}$-層とする．このとき，任意の開集合 V に対して

$$\mathcal{F}(V) = \left\{ (s_U)_U \in \prod_{\substack{U\in\mathfrak{B}\\ U\subset V}} \mathcal{F}(U) \;\middle|\; \forall U, U' \in \mathfrak{B},\ s_U|_{U\cap U'} = s_{U'}|_{U\cap U'} \right\}$$

とおく．演算を

$$(s_U)_U + (t_U)_U = (s_U + t_U)_U$$

で定めるとアーベル群になる．
また，$V' \subset V$ に対して制限写像 $\rho_{V,V'} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(V')$ を $(s_U)_U \in \mathcal{F}(V)$ を $V' \subsetneq U \subset V$ なる s_U は無視するということで定義する．

Proposition 1.3.19. 更に，$\mathfrak{B}$ が有限交叉で閉じているなら，層になる．

Proof. **Claim (4)(Uniqueness) が成立する.**
$s \in \mathcal{F}(V)$ が任意の i に対して $s|_{V_i} = 0$ とする．今定義から $s = 0$ とは $U \subset V$ なる任意の $U \in \mathfrak{B}$ に対して $s_U \in \mathcal{F}(U)$ が 0 であることである．実際 V の開被覆から U の開被覆 $\{U \cap V_i\}_i \subset \mathfrak{B}$ を得る．また任意の i に対して $U \cap V_i \subset V_i$ より $s|_{V_i}|_{U\cap V_i} = s|_{U\cap V_i} = 0$ となる．従って任意の i に対して $s_U|_{U\cap V_i} = 0$ となる．今 $\mathcal{F}$ は $\mathfrak{B}$-sheaf なので $s_U = 0$

よって $s=0$ が分かる．

Claim (5)(Glueing local sections) が成立する.

$s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ が任意の i,j に対して $s_i|_{V_i\cap V_j} = s_j|_{V_i\cap V_j}$ を満たすとする．今 $U \in \mathfrak{B}$ 成分への射影を

$$\varphi_U : \varprojlim_{U\subset V} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$$

と書くことにすると，制限写像 $\rho_{V,V_i} = \varphi_{V_i}$ で，つまり $(s_U)_U \in \mathcal{F}(V)$ で $(s_U)_U|_{V_i} = s_i$ なる $(s_U)_U$ があることを示せば良い．各 i に対して $V_i \subset U_i$ なる $U_i \in \mathfrak{B}$ で $s_{U_i}|_{V_i} = s_i$ なる $s_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$ があればいい．今 $U_i \subset V$ なので U の開被覆 $\{U_i \cap V_j\}_j$ が取れる．

■

1.4 Ringed Topological Space

Definition 1.4.1. **局所環付き空間**とは位相空間 X と X 上の環の層 $\mathcal{O}_X$ の組 $(X,\mathcal{O}_X)$ で、任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X,x}$ が局所環となるものをいう。また、この $\mathcal{O}_X$ を $(X,\mathcal{O}_X)$ の **構造層 (structure sheaf)** という。また $(X,\mathcal{O}_X)$ を単に $\mathcal{O}_X$ と書くことがある。また、$\mathcal{O}_{X,x}$ の唯一の極大イデアル $\mathfrak{m}_x$ に対してその剰余体 $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ を **X の点 x での剰余体 (residue field of X at x)** といって $k(x)$ と書く。

Definition 1.4.2. 局所環付き空間の射とは

$$(f,f^{\#}) : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$$

とは連続写像 $f : X \to Y$ と環の層の射 $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ の組 $(f,f^{\#})$ で、任意の $x \in X$ に対して $f_x^{\#} : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ は局所射となるものをいう。(つまり $f_x^{\#}(\mathfrak{m}_{Y,f(x)}) \subset \mathfrak{m}_{X,x}$ を満たす．)

Prop:1.3.13 より

$$f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$$

を考えることは

$$f^{\#} : f^*\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$$

を考えることに等しい．Def:1.4.2 の $f_x^{\#}$ は下の式で考えている．

Definition 1.4.3. 射 $(f,f^{\#}) : (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ が**開はめ込み (open immersion)**(resp. **閉はめ込み (closed immersion)**) とは連続写像 f が開はめ込み (resp. 閉はめ込み) [a]でかつ任意の $x \in X$ に対して $f_x^{\#}$ が同型 (resp. 全射) のときをいう。

---

[a] $f : X \to Y$ が (位相的) 開 (閉) はめ込みとは X と $f(X)$ が同相で $f(X)$ が開 (閉) 集合のときをいう。

Definition 1.4.4. $(X, \mathcal{O}_X)$ を局所環付き空間とする。$\mathcal{I}$ が $\mathcal{O}_X$ の**イデアル層 (sheaf of ideals of $\mathcal{O}_X$)** とは任意の開集合 U に対して $\mathcal{I}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ のイデアルになっているときをいう。

Lemma 1.4.1. $(X, \mathcal{O}_X)$ **を局所環付き空間とする。**$\mathcal{I}$ **を** $\mathcal{O}_X$ **のイデアル層とする。そして、**

$$V(\mathcal{I}) = \{x \in X \mid \mathcal{I}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$$

とおく。(ちなみに上の諸々から $\mathcal{I}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ **が分かる。)**
$j : V(\mathcal{I}) \hookrightarrow X$ **を包含写像とする。すると**

- $V(\mathcal{I})$ **は** X **の閉集合**
- $(V(\mathcal{I}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$ **は局所環付き空間**
- $j^\#$ **は自然な全射**

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I} = j_*(j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$$

で $(j, j^\#) : (V(\mathcal{I}), j^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})) \to (X, \mathcal{O}_X)$ **は閉はめ込みである。**

Proof. <u>Claim1.</u>$V(\mathcal{I})$ は X の閉集合
$x \in X \setminus V(\mathcal{I}) = \{x \in X \mid \mathcal{I}_x = \mathcal{O}_{X,x}\}$ に対して $f_x = 1$ なる x の開近傍 U と $f \in \mathcal{I}(U)$ をとる。つまり $f|_V = 1|_V = 1$ なる x の開近傍 $V \subset U$ がある。すると任意の $y \in V$ に対して $f_y = 1 \in \mathcal{I}_y$ となって, この y に対して $\mathcal{I}_y = \mathcal{O}_{X,y}$ なので $V \subset X \setminus V(\mathcal{I})$ となって $X \setminus V(\mathcal{I})$ が開であることがわかる。
<u>Claim2.</u>$(V(\mathcal{I}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$ は局所環付き空間
任意の $x \in V(\mathcal{I})$ に対して

$$(j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))_x = (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_x$$

は局所環。残りは自明。 ■

Proposition 1.4.2. $f : X \to Y$ **を局所環付き空間の閉はめ込みとする。**Z **を局所環付き空間** $V(\mathcal{I})$ **とする。ただし、**$\mathcal{I} = \mathrm{Ker}\, f^\# \subset \mathcal{O}_Y$. **すると** $X \simeq Z$ **を自然な閉はめ込み** $Z \hookrightarrow Y$ **から得る。**

Proof. まず次の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

から Prop:**??**より任意の $y \in Y$ に対して

$$\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{I}_y = (f_*\mathcal{O}_X)_y$$

を得る。よって

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus V(\mathcal{J}) \\ \mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{J}_y & y \in V(\mathcal{J}) \end{cases} \qquad \cdots (*)$$

を得る。$f(X)$ は Y の閉集合なので $x \in Y \setminus f(X)$ の開近傍 U で

$$f(X) \cap U = \varnothing$$

となるものがとれる。よって

$$f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(\varnothing) = 0$$

したがって、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_x = 0$$

また、$x \in f(X)$ の開近傍 U に対して f での引き戻し $f^{-1}(U)$ は $y = f(x)$ の開近傍である。これを V とおく。逆に、f は閉はめ込みなので、X は $f(X)$ と同相なので X に自然に Y の相対位相が入る。つまり、任意の $x \in X$ の開近傍 U に対して $y = f(x) \in Y$ の開近傍 V が存在して $f^{-1}(V)$ とかける。よって、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_x = \varinjlim_{U \ni x} f_*\mathcal{O}_X(U) = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \varinjlim_{V \ni y} \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_{X,y}$$

つまり、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus f(X) \\ \mathcal{O}_{X,x} & y = f(x) \end{cases}$$

$(*)$ と比較すれば

$$V(\mathcal{J}) = f(X)$$

が分かる。なので、$j : Z \hookrightarrow Y$ を包含写像とすると、f から誘導される同相写像 $g : X \to Z$ に対して

$$f = j \circ g$$

で、

$$j_*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Y/\mathcal{J} \simeq f_*\mathcal{O}_X$$

がわかる。容易に

$$f_*\mathcal{O}_X = j_*g_*\mathcal{O}_X$$

が分かるので

$$\mathcal{O}_Z = (j^{-1} \circ j)_*\mathcal{O}_Z = (j^{-1})_*j_*\mathcal{O}_Z \simeq (j^{-1})_*j_*g_*\mathcal{O}_X = (j^{-1} \circ j)_*g_*\mathcal{O}_X = g_*\mathcal{O}_X$$

である。よって、g は局所環付き空間の同型射である。$f = j \circ g$ が局所環付き空間の射であることを確認するのは読者に委ねる。■

1.5 Schemes

後できちんとした定義を述べるが，スキーム (scheme) とは局所環付き空間で局所的にはアフィンスキーム (affine scheme) とみれる空間のことである．すなわち，先にアフィンスキームを定義せねばなるまい．
まず，A を環とし $X = \operatorname{Spec} A$ とし，Zariski 位相が与えられてるとする．このとき，X 上の層 $\mathcal{O}_X$ を構成しよう．
まず, $D(f) \subset X$ に対して $\mathcal{O}_X(D(f)) = A_f(= A[1/f])$ とする．次に射 $\rho_{D(f),D(g)} : \mathcal{O}_X(D(f)) \to \mathcal{O}_X(D(g))$ を定義しよう．
まず，$D(g) \subset D(f)$ とする．つまり
$$g \in \sqrt{fA}$$
である．これは
$$\exists m \in \mathbf{N} - \{0\}, \exists b \in A \text{ s.t. } g^m = fb \tag{1.1}$$
を意味する．よって f は A_g で単元である．実際上の式に両辺 $1/g^m$ をかけることによって
$$f^{-1} = b/g^m$$
を得る．これによって制限写像 $A_f \to A_g$ を
$$a/f^n \mapsto ab^n/g^{mn}$$
で定義できる．もし $D(f) = D(g)$ なら $A_f \to A_g$ は同型射になる．(計算すれば容易にわかる．) 従って, $\mathcal{O}_X(D(f))$ は f の選び方に依らない．$\{D(f)\}_f$ は有限交叉で閉じた開基であったから，これは $\mathfrak{B}$-presheaf である．

Proposition 1.5.1. **A を環、$X = \operatorname{Spec} A$ とする。このとき以下が成り立つ。**

(1) $\mathcal{O}'_X$ を環の $\mathfrak{B}$-層とする。$\mathcal{O}'_X$ が誘導する X 上の層 $\mathcal{O}_X$ は $\mathcal{O}_X(X) = A$ となる。
(2) 任意の $\mathfrak{p} \in X$ に対して、茎 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ は $A_\mathfrak{p}$ への標準的な同型がある。特に、$(X, \mathcal{O}_X)$ は局所環付き空間になる。

Proof. まず，開集合 $U = X$ について Uniquness 条件を確認する．ほかの基本開集合も同様に示される．$U_i =$ ■

Definition 1.5.1. 上で定義した局所環付き空間 $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ を **アフィンスキーム (affine scheme)** という．

Example 1.5.2. 環 R に対して $\mathbf{A}^n_R := \operatorname{Spec} R[X_1, \cdots, X_n]$ とおく．これを **R 上の相対次元 n のアフィン空間 (affine space of relative dimension n over R)** という．もちろん $(\mathbf{A}^n_R, \mathcal{O}_{\mathbf{A}^n_R})$ はアフィンスキーム

Lemma 1.5.3. A を整域とし K をその商体とする．素イデアル 0 に対応する $X = \mathrm{Spec}\, A$ の点を ξ とする．このとき

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = K$$

が成り立つ．さらに，任意の空でない開集合 $U \subset X$ と $\xi \in U$ に対して標準的な準同型

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\xi}$$

は単射となる．開集合の組 $V \subset U$ に対して制限

$$\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$$

は単射となる．

Proof. Prop:1.5.1(2) より

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = A_\xi = K$$

を得る．
$U = D(f)$ とすると，$\mathcal{O}_X(U) = A_f \subset K$．一般に

$$U = \bigcup_i D(f_i)$$

と置く．$s \in \mathcal{O}_X(U)$ を飛ばすと $0 \in K$ になるとする．各開被覆 $D(f_i) \subset U$ への制限を考えると

$$s|_{D(f_i)} = 0$$

が任意の i で成り立つので，$s = 0$ である．よって $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,\xi} \subset K$ は単射．
開集合の組 $\xi \in V \subset U$ に対して制限 $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_X(V)$ に対して帰納極限の定義より図式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathcal{O}_X(V) \arrow[dl] \\
\mathcal{O}_{X,\xi} &
\end{tikzcd}$$

が可換となるので，制限は単射である．■

Lemma 1.5.4. $X = \mathrm{Spec}\, A$ をアフィンスキームとし，$g \in A$ をとる．このとき開集合 $D(g)$ は X から誘導される局所環付き空間で $\mathrm{Spec}\, A_g$ に同型なアフィンスキームになる．

Proof. $Y=\operatorname{Spec} A_g$ と置く．局所化と素イデアルの対応より標準的な開はめ込み

$$i: Y \to X$$

がある ($\operatorname{Im} i = D(g)$)
$D(h) \subset D(g)$ とする．$A \xrightarrow{\varphi} A_g$ とする．また $\varphi(h)=\bar{h}$ と置く．このとき標準的な同型

$$\mathcal{O}_X(D(h)) = A_h \simeq (A_g)_{\bar{h}} = \mathcal{O}_Y(D(\bar{h})) = i_*\mathcal{O}_Y(D(h))$$

今 $A_h \simeq (A_g)_{\bar{h}}$ は感覚的には

$$(A_g)_{\bar{h}} = (A[1/g])_{\bar{h}} = A[1/g, 1/\bar{h}]$$

で，$D(h) \subset D(g)$ より $h^n = gb$ となる $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ と $b \in A$ がある．よって

$$A[1/g, 1/\bar{h}] = A[b/h^n, 1/\bar{h}] = A[1/h] = A_h$$

具体的にはまず，φ が単射ではないとき，

$$\operatorname{Ker}\varphi \neq 0 \Leftrightarrow A_g = 0$$

に注意すると (よって $(A_g)_{\bar{h}}=0$)，定義から $\operatorname{Ker}\varphi \ni a \neq 0$ とすると

$$\exists m \in \mathbf{N} \text{ s.t. } g^m a = 0$$

を満たす．また $h^n = gb$ より $h^{nm}a = g^m a b^m = 0$ より $\operatorname{Ker}(A \to A_h)$ は 0 でない．従って，$A_h = 0$ だから自明に同型である．よって φ を単射とする．

$$(A_g)_{\bar{h}} \to A_h$$

を，

$$\frac{a}{g^m}\frac{1}{\bar{h}^k} \mapsto \frac{ab^m}{h^{mn}}\frac{1}{h^k} = \frac{ab^m}{h^{mn+k}}$$

で定義する．これは簡単に準同型で $0 \leq k < n$ としてよい．次に

$$A_h \to (A_g)_{\bar{h}}$$

を，

$$\frac{a}{h^n} \mapsto \frac{\bar{a}}{\bar{h}^n}$$

ただし, $0 \leq k < n$ とする．これらは互いに逆射を与えるので, $\{D(h)\}_h$ は $D(g)$ の開基となるので，i は $(Y, \mathcal{O}_Y)$ から $(D(g), \mathcal{O}_X|_{D(g)}) \subset (X, \mathcal{O}_X)$ への同型を誘導する．(Refer to Exercises 2.7) ■

Definition 1.5.2. **スキーム (scheme)** とは局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ で開被覆 $\{U_i\}_i$ に対して $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ がアフィンスキームになるものが存在するときをいう．また $\mathcal{O}_X(U)$ の元は (やや不適切であるが) **U 上の正則関数 (regular functions on U)** という．しかし，層の関数としての側面をよく表している．(Refer to Exercises 3.4 and Proposition 4.4)

明らかにアフィンスキームはスキームである．また，局所環付き空間 X が開被覆 $\{U_i\}_i$ に対して $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ がスキームだったら X はスキームである．逆に次の命題が従う．

Proposition 1.5.5. ***X をスキームとする．このとき任意の開集合 $U \subset X$ に対して局所環付き空間 $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ はまたスキームになる．***

Proof. 定義より $X = \bigcup_i U_i$ で U_i は開集合で，アフィンスキームになるものがある．$U \cap U_i$ がスキームとなることを示せば十分である． ■

Definition 1.5.3. X をスキームとする．U を X の開集合とする．スキーム $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ を X の **開部分スキーム (open subscheme)** 更に $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ がアフィンスキームになるとき U を **アフィン開集合 (affine open subset)** という．

以下，X の開集合 U はスキームの構造が与えられているとする．

Definition 1.5.4. X をスキーム，$f \in \mathcal{O}_X(X)$ とする．

$$X_f := \{x \in X \mid f_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\}$$

ただし，$A^\times$ は A の単元群である．(Liu の Definition 3.11. では*の記号を用いている．)

次の条件を考えよう．

X は有限アフィン開被覆 $\{U_i\}_i$ があって $U_i \cap U_j$ はまた有限アフィン開被覆を持つ．

便宜上この条件を条件 A と呼称する．

Proposition 1.5.6. ***X をスキームとし $f \in \mathcal{O}_X(X)$ とする．このとき X_f は X の開集合で，更に，X が条件 A を満たすなら，制限 $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X_f)$ は同型***

$$\mathcal{O}_X(X)_f \simeq \mathcal{O}_X(X_f)$$

を誘導する．

Proof. $x \in X_f$ とする．x の開近傍 U と $g \in \mathcal{O}_X(U)$ があって，$f_x g_x = 1$ を満たすものがある．$f_x g_x = (fg)_x$ よりある x の開近傍 $V \subset U$ があって $fg|_V = 1$ を満たす．した

がって，$V \subset X_f$ となる．よって X_f は開集合である．
更に，V が動くにつれて f の逆元 $g \in \mathcal{O}_X(V)$ を張り合わせると $f|_{X_f}$ の $\mathcal{O}_X(X_f)$ での逆元を得る．
詳しく言えば，X_f の上の V を集めた開被覆 $\{V_i\}_i$ を取り，$fg_i|_{V_i} = 1$ なる $g_i \in \mathcal{O}_X(V_i)$ を考えれば任意の i, j に対して

$$fg_i|_{V_i \cap V_j} = 1 = fg_j|_{V_i \cap V_j}$$

より

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= fg_i|_{V_i \cap V_j} - fg_j|_{V_i \cap V_j} \\ &= f|_{V_i \cap V_j}(g_i|_{V_i \cap V_j} - g_j|_{V_i \cap V_j}) \\ &= 0\end{aligned}$$

また，$f|_{V_i}$ は単元なので逆元 $(f|_{V_i})^{-1}$ がある．また，

$$f|_{V_i \cap V_j} = (f|_{V_i})|_{V_i \cap V_j}$$

なので，

$$\begin{aligned}f|_{V_i \cap V_j}((f|_{V_i})^{-1}|_{V_i \cap V_j}) &= (f|_{V_i})|_{V_i \cap V_j}((f|_{V_i})^{-1}|_{V_i \cap V_j}) \\ &= ((f|_{V_i})(f|_{V_i})^{-1})|_{V_i \cap V_j} \\ &= 1\end{aligned}$$

よって $f|_{V_i \cap V_j}$ はまた単元で $g_i|_{V_i \cap V_j} = g_j|_{V_i \cap V_j}$ を得る．
$\mathcal{O}_X$ は層なので，貼り合わせ条件より $g|_{V_i} = g_i$ なる $g \in \mathcal{O}_X(X_f)$ がある．この g が $f|_{X_f}$ の逆元になっている．
よって制限 $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_X(X_f)$ から準同型

$$\alpha : \mathcal{O}_X(X)_f \to \mathcal{O}_X(X_f); \frac{x}{f^n} \mapsto \rho_{X, X_f}(x) f^{-n} = \rho_{X, X_f}(x) g^n$$

を誘導する．($\mathcal{O}_X(X)$ は環なので $\mathcal{O}_X(X)_f$ は $\{f^n\}_{n \in \mathbf{N}}$ での局所化であることに注意しよう．) ここで条件 A を仮定すれば，X は有限アフィン開被覆 $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ を持つ．
よって，

$$X_f = \bigcup_i U_i \cap X_f = \bigcup_i V_i = \bigcup_i D(f|_{U_i})$$

ここで，$U_i = \operatorname{Spec} A_i$ とすると

$$\begin{aligned}U_i \cap X_f &= \{x \in X \cap \operatorname{Spec} A_i \mid f_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\} \\ &= \{x \in \operatorname{Spec} A_i \mid f_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\} \\ &= \{x \in \operatorname{Spec} A_i \mid f_x \in (\mathcal{O}_X|_{\operatorname{Spec} A_i, x})^\times\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A_i \mid f_\mathfrak{p} \in A_{i,\mathfrak{p}}^\times\}\end{aligned}$$

ここで，素イデアルの局所化 $A_\mathfrak{p}$ が局所環でその極大イデアルが $A_\mathfrak{p} \setminus A_\mathfrak{p}^\times = \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ となることに注意すると

$$\begin{aligned}\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A_i \mid f_\mathfrak{p} \in A_{i,\mathfrak{p}}^\times\} &= \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A_i \mid f_\mathfrak{p} \notin \mathfrak{p}A_{i,\mathfrak{p}}\} \\ &= \{\}\end{aligned}$$

Lem:1.5.3 より $\mathcal{O}_X(U_i)_f = \mathcal{O}_X(V_i)$
今以下の完全系列を得る．

$$C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) : 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{d_0} \bigoplus_i \mathcal{O}_X(U_i) \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$$

ただし $d_0 : s \mapsto (s|_{U_i})_i, d_1 : (s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i\cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$ とする．(有限個なら直積 $\prod$ と直和 $\bigoplus$ は同じ)
次にテンソルをとることは左完全関手なので $C^\bullet(\mathfrak{U}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(X)_f$ はまた，完全列である．よってこれは次の可換図式を与える．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X)_f \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] & \bigoplus_i \mathcal{O}_X(U_i)_f \arrow[r] & \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)_f \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X_f) \arrow[r] & \bigoplus_i \mathcal{O}_X(V_i) \arrow[r] & \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(V_i \cap V_j)
\end{tikzcd}$$

■

1.5.1 Morphism of schemes

Definition 1.5.5. $f : X \to Y$ が**スキームの射 (morphism of schemes)** とは局所環付き空間としての射とする．

環の射 $\varphi : A \to B$ が誘導する射 $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ を φ^a と書くことにする．
つまり $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$ に対して $\varphi^a(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$

Proposition 1.5.7. **$\varphi : A \to B$ を環の射とする．このとき**

$$(\varphi^a, (\varphi^a)^\#) : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$$

は $(\varphi^a)^\#(\operatorname{Spec} A) = \varphi$ を満たすスキームの射である．

Proof. $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A$ と置く．任意の $f \in A$ に対して

$$(\varphi^a)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$$

が成り立ち，実際

$$\begin{aligned}
(\varphi^a)^{-1}(D(f)) &= \{\mathfrak{p} \in X \mid \varphi^a(\mathfrak{p}) \in D(f)\} \\
&= \{\mathfrak{p} \in X \mid f \notin \varphi^a(\mathfrak{p})\} \\
&= \{\mathfrak{p} \in X \mid f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})\} \\
&= \{\mathfrak{p} \in X \mid \varphi(f) \notin \mathfrak{p}\} \\
&= D(\varphi(f))
\end{aligned}$$

である．φ から誘導される環の射

$$(\varphi^a)^\#(D(f)) : \mathcal{O}_Y(D(f)) = A_f \to B_{\varphi(f)} = \mathcal{O}_X(D(\varphi(f))) = (\varphi^a)_*\mathcal{O}_X(D(f))$$

これは制限写像と可換 (compatible という意味で) になる．よって層の射

$$(\varphi^a)^\# : \mathcal{O}_Y \to \varphi^a_*\mathcal{O}_X$$

に拡張できる．更に，任意の $\mathfrak{q} \in X$ に対して φ から誘導される環の射

$$(\varphi^a)^\#_{\mathfrak{q}} : A_{\varphi^a(\mathfrak{q})} \to B_{\mathfrak{q}}$$

は局所射で，実際

$$\begin{aligned}
(\varphi^a)^\#_{\mathfrak{q}}(\varphi^a(\mathfrak{q})A_{\varphi^a(\mathfrak{q})}) &= \{\varphi(a)/\varphi(p) \mid a \in \varphi^a(\mathfrak{q}), p \notin \varphi^a(\mathfrak{q})\} \\
&= \{\varphi(a)/\varphi(p) \mid \varphi(a) \in \mathfrak{q}, \varphi(p) \notin \mathfrak{q}\} \\
&\subset \{b/q \mid b \in \mathfrak{q}, q \notin \mathfrak{q}\} \\
&= \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}
\end{aligned}$$

よって $(\varphi^a, (\varphi^a)^\#)$ は局所環付き空間の射になる．構成により

$$(\varphi^a)^\#(Y) : \mathcal{O}_Y(Y) = A \to B = \mathcal{O}_X(X) = (\varphi^a)_*\mathcal{O}_X(Y)$$

で $(\varphi^a)^\#(Y) = \varphi$ を満たす． ■

Example 1.5.8. A を環とする．$f \in A$ に対して $\varphi : A \to A_f$ を自然な射とする．よって Prop:1.5.7 より $\varphi^a : \operatorname{Spec} A_f \to \operatorname{Spec} A$ はアフィンスキームの射で，$\operatorname{Spec} A_f \simeq D(f)$ で，$D(f) \to \operatorname{Spec} A$ は開はめ込みである．

Example 1.5.9. X をスキームとする．$x \in X$ に対して標準的な射 $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$ がある．実際 $x \in U$ なるアフィン開集合に対して標準的な射 $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x}$ から誘導される射 $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(U) = U$ がとれる．また $U \hookrightarrow X$ は自然に開はめ込みだと見れるので射 $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \to X$ を得る．これは U の選び方に依らない．

Lemma 1.5.10. **A を環とし，I をそのイデアルとする．このとき，スキームの射**

$$i : \operatorname{Spec} A/I \to \operatorname{Spec} A$$

が自然な射影 $\varphi : A \to A/I$ によって誘導される．i は $\operatorname{Im} i = V(I)$ へのスキームの閉はめ込みである．更に，任意の $\operatorname{Spec} A$ の基本開集合 $D(f)$ に対して

$$(\operatorname{Ker} i^\#)(D(f)) = I \otimes_A A_f$$

が成り立つ．

Proof. i が閉はめ込みであることはよい．次に，任意の $\operatorname{Spec} A$ の基本開集合 $D(f)$ に対して先ほどみたように，標準的な全射

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(f)) = A_f \to (A/I)_{\varphi(f)} = i_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/I}(D(f))$$

がある．これにより，$i^\#$ の全射性と，

$$\begin{aligned}(\operatorname{Ker} i^\#)(D(f)) &= \operatorname{Ker}(i^\#(D(f))) \\ &= \operatorname{Ker}(A_f \to (A/I)_{\varphi(f)}) \\ &= I_f \\ &= I \otimes_A A_f\end{aligned}$$

がわかる． ■

Example 1.5.11. X をスキームとする．$x \in X$ に対して $k(x)$ は点 x での X の剰余体であった．(Def:1.4.1 を参照．) このとき標準的な全射 $\mathcal{O}_{X,x} \to k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ は閉はめ込み $\operatorname{Spec} k(x) \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$ を誘導する．Ex:1.5.9 より射 $\mathcal{O}_{X,x} \to X$ がある．よって射 $\operatorname{Spec} k(x) \to X$ を得る．この射は $\operatorname{Spec} k(x)$ の唯一の点を $x \in X$ に送る射である．

Definition 1.5.6. Z を X の閉集合とする．このとき Z が **閉部分スキーム (closed subscheme)** とは包含写像 $j : Z \to X$ が閉はめ込み

$$(j, j^\#) : (Z, \mathcal{O}_Z) \to (X, \mathcal{O}_X)$$

となるときをいう．

Proposition 1.5.12. *$X = \operatorname{Spec} A$ をアフィンスキームとする．$j : Z \to X$ をスキームの閉はめ込みとする．このとき，Z はアフィンスキームで，あるイデアル $J \subset A$ が唯一存在して j は同型 $Z \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Spec} A/J$ を誘導する．*

Definition 1.5.7. S をスキームとする．このとき X が **S-スキーム (S-scheme)** または **S 上のスキーム (scheme over S)** とはスキームの射 $\pi : X \to S$ が与えられているときをいう．この π を **構造射 (structural morphism, structure morphism)**，S を **基底スキーム (base scheme)** という．$S = \operatorname{Spec} A$ のときまた X を **A-スキーム (A-scheme)** または **A 上のスキーム (scheme over A)** という．このとき A を**基底環 (base ring)**

Definition 1.5.8. $\pi : X \to S, \rho : Y \to S$ を S 上のスキームとする．このとき **S-スキームの射 (morphism of S-scheme)** $f : X \to Y$ とは f がスキームの射で $\rho \circ f = \pi$ を満たすことをいう．

スキーム X, Y に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y) := \{f : X \to Y \mid f \text{ is morphism of schemes}\}$$

また，環 A, B に対して

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(A, B) := \{f : A \to B \mid f \text{ is morphism of rings}\}$$

とおく．このとき標準的な写像

$$\rho : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$$

がある．実際 $(f, f^{\#}) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y)$ とすると

$$f^{\#}(Y) : \mathcal{O}_Y(Y) \to f_*\mathcal{O}_X(Y) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(Y)) = \mathcal{O}_X(X)$$

がある．

Definition 1.5.9. $\pi : X \to S$ を S 上のスキームとする．X **の切断 (section of** X**)** とは S 上のスキームの射 $\sigma : S \to X$ で $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_S$ となるときをいう．X の切断の集合を $X(S)(S = \mathrm{Spec}\, A$ のときは $X(A))$ とかく．

Example 1.5.13. X を体 k 上のスキームとする．このとき

$$X(k) = \{x \in X \mid k(x) = k\}$$

実際 $\sigma \in X(k)$ をとる．$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, k,(0)} = k_{(0)} = k$ より

$$\sigma^{\#}_{(0)} : \mathcal{O}_{X,\sigma((0))} \to \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\, k,(0)} = k$$

で，

Definition 1.5.10. X を体 k 上のスキームとする．上の例より $X(k)$ の点を X **の** k**-有理点 (**k**-rational points of** X**)** という．

Remark . Y を X の開 (閉) 部分スキームとする．任意の点 $y \in Y$ に対してその点での剰余体は $\mathcal{O}_Y$ で考えたときと $\mathcal{O}_X$ で考えたときの二種類が考えられるがこれらは同型である．よって X を体 k 上のスキームとすると $Y(k) = X(k) \cap Y$ である．

Lemma 1.5.14. S をスキームとする．$\{X_i\}_i$ を S 上のスキームの族とする．X_{ij} を X_i の開部分スキームとして $f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$，$f_{ij}(X_{ij} \cap X_{ik}) = X_{ji} \cap X_{jk}$ と $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ が $X_{ij} \cap X_{ik}$ 上で成り立つ S スキームの同型射 $f_{ij} : X_{ij} \xrightarrow{\simeq} X_{ji}$ が与えられているとき，ある S 上のスキーム X が同型を除いて唯一存在して以下を満たす．

$$\text{開はめ込み } g_i : X_i \to X \text{ があって } X_{ij} \text{ 上で } g_i = g_j \circ f_{ij} \text{ で } X = \bigcup_i g_i(X_i)$$

Proof. 先に X を構成しそれが条件を満たすことを確認する．

$$X = \coprod_i X_i \Big/ \sim$$

とおく．ここで

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\equiv} x \in X_i, y \in X_j, y = f_{ij}(x)$$

と定義する．また X に商位相を入れる．包含写像 $g_i : X_i \hookrightarrow X$ は位相的開はめ込みで $g_i = g_j \circ f_{ij}$ を満たす．$U_i = g_i(X_i)$ と置いて $\mathcal{O}_{U_i} = g_{i*}\mathcal{O}_X$ とおくと

$$\mathcal{O}_{U_i}|_{U_i \cap U_j} = \mathcal{O}_{U_j}|_{U_i \cap U_j}$$

を満たす．実際

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{U_i}|_{U_i \cap U_j} &= (g_{i*}\mathcal{O}_X)|_{U_i \cap U_j} \\
&= ((g_j \circ f_{ij})_*\mathcal{O}_X)|_{U_i \cap U_j} \\
&= (g_{j*} f_{ij*}\mathcal{O}_X)|_{U_i \cap U_j}
\end{aligned}$$

■

1.5.2 Projective schemes

まず初めに次数環

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} A_n$$

を固定する．ここでイデアル $I \subset A$ が斉次イデアルとは

$$I = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} (I \cap A_n)$$

のときをいう．ここで

$$A/I = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} A_n \Big/ \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} (I \cap A_n)$$

だが

$$\begin{array}{rccc}
\varphi\colon & \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} A_n/(I \cap A_n) & \longrightarrow & A/I \\
& \Psi & & \Psi \\
& (x_i + I \cap A_i)_i & \longmapsto & (x_i)_i + I
\end{array}$$

とするとこれは全準同型で単射性は $(x_i)_i + I = (y_i)_i + I$ とすると $(x_i)_i - (y_i)_i = (x_i - y_i)_i \in I$ と $x_i \in A_i$ より $x_i - y_i \in I \cap A_i$ でこれは単射であることを意味する．よって，

$$A/I = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} A_n/(I \cap A_n)$$

である．ここで $\operatorname{Proj} A$ を次のように定義しよう．

$$\operatorname{Proj} A := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{p} \text{ は斉次イデアルで } A_+ \not\subset \mathfrak{p}\}$$

とおく．ただし

$$A_+ := \bigoplus_{n>0} A_n$$

である．あとで $\operatorname{Proj} A$ にスキームの構造が入ることを示そう．
任意の斉次イデアル $I \subset A$ に対して

$$V_+(I) := \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} A \mid I \subset \mathfrak{p}\}$$

と定義する．このとき

$$\bigcap_\mu V_+(I_\mu) = V_+(\sum_\mu I_\mu) \tag{1.2}$$

$$V_+(I) \cup V_+(J) = V_+(I \cap J) \tag{1.3}$$

$$V_+(A) = \varnothing \tag{1.4}$$

$$V_+(0) = \operatorname{Proj} A \tag{1.5}$$

が成り立つ．実際 (1.1) から示そう．

$$I_\lambda \subset \sum_\mu I_\mu$$

なので

$$V_+(\sum_\mu I_\mu) \subset V_+(I_\lambda)$$

である．よって

$$V_+(\sum_\mu I_\mu) \subset \bigcap_\mu V_+(I_\mu)$$

逆に $\mathfrak{p} \in \bigcap V_+(I_\mu)$ とすると任意の μ に対して $I_\mu \subset \mathfrak{p}$ なので $\sum I_\mu \subset \mathfrak{p}$ が成り立ち逆の包含関係もわかる．
(1.2) は $\mathfrak{p} \in V_+(I)$ なら $I \subset \mathfrak{p}$ なので $I \cap J \subset \mathfrak{p}$ だから $V_+(I) \subset V_+(I \cap J)$ で同様に $V_+(J) \subset V_+(I \cap J)$ なので

$$V_+(I) \cup V_+(J) \subset V_+(I \cap J)$$

逆に $\mathfrak{p} \in V_+(I \cap J)$ なら $I \cap J \subset \mathfrak{p}$ で $I \not\subset \mathfrak{p}$ なら $a \in I$ かつ $a \notin \mathfrak{p}$ なる元がある．しかし，任意の $b \in J$ に対して $ab \in I \cap J$ なので $ab \in \mathfrak{p}$ で今 $a \notin \mathfrak{p}$ なので $b \in \mathfrak{p}$ である．よって $J \subset \mathfrak{p}$ なので $V_+(I \cap J) \subset V_+(J)$ だから逆の包含関係もわかる．残り二つは自明である．
Spec の場合と同様に $\operatorname{Proj} A$ にも $\{V_+(I)\}_I$ を閉集合族とする位相を入れることにする．この位相を同様に Zariski 位相ということにする．
I を A の任意のイデアルとすると，I に伴う斉次イデアル $I^h = \bigoplus(I \cap A_n)$(ここで h 乗ではなく単なる記号であることに注意) が定義できる．

Lemma 1.5.15. **I, J を次数環 A のイデアルとする．このとき以下が成り立つ．**

(1) **I が素イデアルならそれに伴う斉次イデアル I^h も素イデアル．**

(2) I と J が斉次イデアルとする．このとき

$$V_+(I) \subset V_+(J) \Leftrightarrow J \cap A_+ \subset \sqrt{I}$$

(3) $\operatorname{Proj} A = \varnothing \Leftrightarrow A_+$ が冪零

Proof. (1)I を素イデアルとする．$a, b \in A$ が $ab \in I^h$ で $a, b \notin I^h$ を満たすとする．斉次元に分解すると

$$a = \sum_{i=0}^{n} a_i, \quad b = \sum_{j=0}^{m} b_j, \quad a_n, b_n \in A_n$$

よって $ab = a_n b_m + \{$ 次数 $n+m$ 未満の斉次元 $\}$ だから ab の $n+m$ 次斉次元は $a_n b_m$ で
(2) まず $(\Leftarrow)$ を示す．つまり $J \cap A_+ \subset \sqrt{I}$ とする．任意の $\mathfrak{p} \in V_+(I)$ に対して

$$\mathfrak{p} \supset J \cap A_+ \supset JA_+$$

■

斉次元 $f \in A$ に対して

$$D_+(f) = \operatorname{Proj} A \setminus V_+(fA)$$

これを **基本開集合 (principal open subset)** という．基本開集合の族 $\{D_+(f)\}_f$ は $\operatorname{Proj} A$ の開基になっている．

Lemma 1.5.16. 3.36

Proposition 1.5.17. 3.38

Lemma 1.5.18. 3.40

Lemma 1.5.19. 3.41

Definition 1.5.11. 3.42

Lemma 1.5.20. 3.43

Corollary 1.5.21. 3.44

1.5.3 Noetherian schemes, algebraic varieties

Definition 1.5.12. スキーム X の各点 x のアフィン開近傍 $\operatorname{Spec} A_x$ として，A_x がネーター環であるものがとれるとき **局所ネータースキーム (locally noetherian scheme)** という．更に X が準コンパクトであれば **ネータースキーム (noetherian scheme)** という．

Proposition 1.5.22. **X をネータースキームとする．**

(1) **X の任意の開 (閉) 部分スキームはネーターである．**
(2) **任意の点 $x \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X,x}$ はネーター**
(3) **任意のアフィン開集合 U に対して $\mathcal{O}_X(U)$ はネーター**

Proof. X はネーター的なので有限個のアフィン開集合 $\{X_i\}$ で被覆され $\mathcal{O}_X(X_i)$ はネーター環であるようにとる．
(1)Z を X の開 (閉) 部分スキームとする．$Z \cap X_i$ がネーター環であることを示せば十分である．また $Z \cap X_i$ は X_i の開 (閉) 部分スキームであるので，結局 X をアフィンスキームとしてよい．よって，$X = \operatorname{Spec} A$ とおく．もし Z が開だとすると，$Z = X \backslash V(I)$ なる I がある．いま A はネーター環なので I は有限生成よって Z は有限個の基本開集合 $D(f_j)$ で被覆され，更にその局所化 (例えば A_{f_j}) はまたネーター的である．従って Z はネーターである．
次に Z を閉のときは Prop:1.5.12 よりよい．
(2) 環 $\mathcal{O}_{X,x}$ はネーター環の局所化なので再びネーター環になる．
(3) 上で見たように $U \cap X_i$ は X_i の有限個のネーターアフィン開集合で被覆される．従って U は有限個のネーターアフィン開集合 U_j で被覆されているとしてよい．I を $A = \mathcal{O}_X(U)$ のイデアルとする．$I\mathcal{O}_X(U_j)$ は有限生成である．$J\mathcal{O}_X(U_j) = I\mathcal{O}_X(U_j)$ が任意の j で成り立つ有限生成なイデアル $J \subset I$ が存在する．任意の点 $x \in U$ に対して $J\mathcal{O}_{U,x} = I\mathcal{O}_{U,x}$ よって

$$I\mathcal{O}_{U,x}/J\mathcal{O}_{U,x} = I/J \otimes_A A_{\mathfrak{p}} = 0$$

が任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ で成り立つ．今 $A_{\mathfrak{p}} \neq 0$ なので $I/J = 0$ で $I = J$ は有限生成である． ■

Definition 1.5.13. k を体とする．

Limit

第 A 章

A.1 Inductive Limit

とりあえず, 帰納極限だけ述べる. 射影極限は双対概念なのでまぁ頑張って.

Definition A.1.1.(帰納系の定義)
$(\Lambda, \leq)$ を順序集合,$\mathscr{C}$ を圏とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し,$X_\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ が与えられ, $\lambda \leq \mu$ に対して射 $\varphi_{\mu,\lambda} : X_\lambda \to X_\mu$ があって次を満たすとき,$\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を **順系 (direct system)** または**帰納系 (inductive system)** という. しばしば $\varphi_{\mu,\lambda}$ を省略して $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ や $\{X_\lambda\}_\lambda$ で表す.

— 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\lambda,\lambda} = \mathrm{id}_{X_\lambda}$
— $\lambda \leq \mu \leq \nu$ なる任意の $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\nu,\lambda} = \varphi_{\nu,\mu} \circ \varphi_{\mu,\lambda}$

Example A.1.1. 位相空間 X の開集合族 $\{U\}_U$ に対して

$$U \leq V \overset{\mathrm{def}}{\equiv} V \subset U$$

と定義する. そして,**AGrp** をアーベル群の成す圏,$\mathcal{F}$ を X 上の前層とする. すると, 各開集合 U に対し,$\mathcal{F}(U) \in \mathrm{Ob}(\mathbf{AGrp})$ で, 前層の定義からアーベル群と制限写像との組 $\{\mathcal{F}(U), \rho_{U,V}\}$ は帰納系となる. 前層の定義は Def:1.3.1 を参照.

Definition A.1.2.(帰納系の射の定義)
Λ を順序集合.$\{X_\lambda, \varphi_{\lambda,\mu}\}, \{Y_\lambda, \psi_{\lambda,\mu}\}$ を Λ 上の圏 $\mathscr{C}$ における帰納系とする. このとき $\{X_\lambda\}$ から $\{Y_\lambda\}$ への射とは $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ なる射の族 $\{f_\lambda\}$ で, 任意の $\lambda \leq \mu$ に対して $\psi_{\lambda,\mu} \circ f_\mu = f_\lambda \circ \varphi_{\lambda,\mu}$ となるものを言う.

$$\begin{tikzcd} X_\mu \arrow[r, "f_\mu"] \arrow[d, "\varphi_{\lambda,\mu}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Y_\mu \arrow[d, "\psi_{\lambda,\mu}"] \\ X_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"'] & Y_\lambda \end{tikzcd}$$

Definition A.1.3. $\mathscr{C}$ を圏とし,Λ を順序集合とする.$\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を $\mathscr{C}$ の帰納系とする.このとき $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ の **順極限 (direct limit)** または**帰納的極限 (inductive limit)** または**帰納極限**とは, $\mathscr{C}$ の対象 $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ と射の族 $\{\varphi_\lambda : X_\lambda \to \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の組 $\{\varinjlim X_\lambda, \varphi_\lambda\}$ で, 次の条件を満たすものをいう.

— $\lambda \leq \mu$ に対して $\varphi_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = \varphi_\lambda$
— $\lambda \leq \mu$ に対して $f_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = f_\lambda$ を満たす任意の射の族 $\{f_\lambda : X_\lambda \to Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して, $f : \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to Y$ が一意に存在して

$$f \circ \varphi_\lambda = f_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

を満たす.

Remark . 一般の圏では帰納極限や射影極限は存在するとは限らない. しかし, 存在するとすれば, 同型を除いて一意である.

Proposition A.1.2. **帰納極限は存在すれば, 同型を除いて一意である.**

Proof. 証明は後で書く. ■

Complex Analysis

第 B 章

B.1 Holomorphic Function

複素数 $z = x + iy \in \mathbf{C}$ に対して $|z|$ を

$$|z| \stackrel{\text{def}}{\equiv} \sqrt{x^2 + y^2} \tag{B.1}$$

と定義する．定義とコーシー・シュワルツの不等式から $z, w \in \mathbf{C}$ に対して

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \tag{B.2}$$
$$|zw| = |z||w| \tag{B.3}$$
$$|z + w| \leq |z| + |w| \qquad \text{(三角不等式)} \tag{B.4}$$

が成り立つ．三角不等式より

$$||z| - |w|| \leq |z - w| \tag{B.5}$$

が成り立つ．実際

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w|$$

より $|z| - |w| \leq |z - w|$ で，対称性から $-(|z| - |w|) \leq |z - w|$ より式 (B.5) を得る．

集合 $\Omega \subset \mathbf{C}$ 上で定義された関数 $f : \Omega \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ が $z_0 \in \Omega$ で**連続 (continuous)** とは，任意の $\varepsilon \in \mathbf{R}_{>0}$ に対して，ある $\delta \in \mathbf{R}_{>0}$ が存在して

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \tag{B.6}$$

を満たすことである．[*1] これは，Ω 内の点列 $(z_n)_n$ で $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$ なる任意の点列に対して，

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(z_0) \tag{B.7}$$

が成り立つことと同値である．f が Ω 上で連続とは Ω の任意の点で連続なときを言う．

f が連続ならば実数値関数 $|f|$ も連続であることがわかる．実際 (B.5) より

$$||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)| \tag{B.8}$$

[*1] ただし，δ を十分小さく取る．具体的には $z \in \Omega$ となる程度

なのでよい．
f が点 $z_0 \in \Omega$ で最大値をとるとは，

$$|f(z)| \leq |f(z_0)| \qquad (z \in \Omega)$$

を満たすことである．同様に最小値も定義される．

Theorem B.1.1. **コンパクト集合 Ω 上の連続関数は有界で，Ω において最大値と最小値をとる．**

証明は省く．

Definition B.1.1. $\Omega \subset \mathbf{C}$ を開集合とし，$f : \Omega \to \mathbf{C}$ が $z_0 \in \Omega$ で **正則 (regular/non-singular)** であるとは，

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{B.9}$$

が $h \to 0$ のときに極限を持つことである．ただし，(B.9) が定義されるために，$h \in \mathbf{C}$ をゼロでない複素数で $|h|$ を十分小さく $z + h \in \Omega$ となるように取る．この極限が存在する場合 $f'(z_0)$ と書いて f の z_0 における微分という．ただし，この極限において h はすべての方向から 0 に近づくような複素数であることに注意．
f が Ω で正則とは，f が Ω の任意の点で正則であるときを言う．
Ω が開でないときは，Ω を含むある開集合上で正則で f が正則であるということにする．f が $\mathbf{C}$ で正則のとき f を **整関数**という．

Proposition B.1.2. **f, g を Ω 上の正則関数とする．このとき以下が成り立つ．**

- **$f + g$ は Ω 上で正則で，$(f+g)' = f' + g'$ である．**
- **fg は Ω 上で正則で，$(fg)' = f'g + fg'$ である．**
- **$g(z_0) \neq 0$ ならば f/g は z_0 で正則で，**

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

- **もし $f : \Omega \to U, g : U \to \mathbf{C}$ が正則なら，**

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z) \qquad (z \in \Omega)$$

が成り立つ．

Example B.1.3. $f(z) = z$ は正則で，$f'(z) = 1$ である．よって Prop:B.1.2 より，多項式

$$p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

は $\mathbf{C}$ で正則で,

$$p'(z) = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

である.

Example B.1.4. $f(z) = \bar{z}$ は正則ではない.

(B.9) の h が実数の場合の極限を考えよう. 特に $h = h_1 + ih_2$ として $h_2 = 0$ の場合を考えよう. このとき $f(z) = f(x,y)$ と書くことにすると,

$$f'(z) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{f(x+h_1,y) - f(x,y)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x}(z) \tag{B.10}$$

次に $h_1 = 0$ として考えると,

$$f'(z) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{f(x,y+h_2) - f(x,y)}{ih_2} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z) \tag{B.11}$$

よって, f が正則なら

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{B.12}$$

が成り立つ. $f = u + iv$ とかけば,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{B.13}$$

が成り立つことがわかる. これらの関係式を **コーシー・リーマンの方程式 (Cauchy-Riemann equations)** という. ここで, ウェルティンガーの微分を定義する.

$$\frac{\partial}{\partial z} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \stackrel{\text{def}}{\equiv} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{B.14}$$

Proposition B.1.5. **f が z_0 で正則なら**

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0 \tag{B.15}$$

Proof. $f = u + iv$ と置くと,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial xL}\right)\right)
\end{aligned}$$

よってコーシー・リーマンの方程式と同値である. ■