

# 代数幾何まとめノート

Fefr

2024 年 8 月 6 日



# 目次

---

第 1 章	Scheme	5
1.1	Zariski Topology . . . . .	5
1.2	Algebraic Sets . . . . .	5
1.3	Sheaves . . . . .	6
1.3.1	$\mathfrak{B}$ -sheaf . . . . .	13
1.4	Ringed Topological Space . . . . .	15
1.5	Schemes . . . . .	17
1.5.1	Morphism of schemes . . . . .	21
付録 A	Limit	25
A.1	Inductive Limit . . . . .	25



## Scheme

## 第 1 章

## 1.1 Zariski Topology

$\text{Spec } A$  を幾何的な対象に昇華するために、位相を導入しよう。まず、環  $A$  のイデアル  $I$  に対して

$$\begin{aligned} V(I) &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid I \subset \mathfrak{p}\} \\ D(I) &= \text{Spec } A \setminus V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid I \not\subset \mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

更に、 $f \in A$  に対して

$$\begin{aligned} V(f) &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid Af \subset \mathfrak{p}\} \\ D(f) &= \text{Spec } A \setminus V(Af) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid Af \not\subset \mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

と定義する。また、 $Af \subset \mathfrak{p}$  より  $af \in Af$  は  $af \in \mathfrak{p}$  なので、 $a = 1$  とすれば  $f \in \mathfrak{p}$  がわかり、イデアルの定義より、

$$\begin{aligned} V(f) &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \in \mathfrak{p}\} \\ D(f) &= \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } A \mid f \notin \mathfrak{p}\} \end{aligned}$$

がわかる。次に  $\{D(f)\}_{f \in A}$  を開集合族とする位相が定まることを示そう。

**Proposition 1.1.1.** ああああ

## 1.2 Algebraic Sets

## 1.3 Sheaves

**Definition 1.3.1.**  $X$  を位相空間とする.  $X$  上の (アーベル群の) 前層 (presheaf)  $\mathcal{F}$  とは次のデータ

- $U$  を任意の  $X$  の開集合に対して  $\mathcal{F}(U)$  はアーベル群.
- 制限写像 (restriction map) と言われる群準同型  $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  が任意の開集合  $V \subset U$  に対して存在する.

そして次の条件を満たす.

- (1)  $\rho_{U,U} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$
- (2) 任意の開集合  $W \subset V \subset U$  に対して  $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$  となる.

$s \in \mathcal{F}(U)$  を  $U$  上の  $\mathcal{F}$  の切断 (section) という. また,  $\rho_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$  を  $s|_V$  と書いて  $s$  の  $V$  への制限という.

また, 単に  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$  などと書いたら (前) 層を表すことや,  $\rho$  と書いたら制限写像を意味する. また, どの (前) 層の制限写像かを明示するため, 例えば,  $\rho_{U,V}^{\mathcal{F}}$  などと書くことがある.

**Definition 1.3.2.** 前層  $\mathcal{F}$  が層 (sheaf) とは次の条件を満たすことをいう.

- (4) (Uniqueness)  $U$  を  $X$  の開集合とし  $\{U_i\}_i$  をその開被覆とする.  $s \in \mathcal{F}(U)$  が任意の  $i$  に対して  $s|_{U_i} = 0$  ならば  $s = 0$
- (5) (Glueing local sections) 上の状況で,  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  が  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  を満たすならば,  $s|_{U_i} = s_i$  を満たす  $s \in \mathcal{F}(U)$  が存在する.

**Remark .**  $\mathcal{F}$  が層ならば  $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$  となる.

**Example 1.3.1.**  $X$  を位相空間とする.

$\mathcal{C}_X^0$  を  $X$  の開集合  $U$  に対して  $U \rightarrow \mathbf{C}$  なる連続写像全体の集合  $\mathcal{C}_X^0(U)$  を対応させるものとし, 制限写像を普通の制限とする.

$$\mathcal{C}_X^0(U) = \{f : U \rightarrow \mathbf{C} \mid f \text{ is continuous}\}$$

すると,  $\mathcal{C}_X^0$  は  $X$  上の層となる.

**Proof.**  $V \subset U$  なる開集合  $U, V$  に対して  $U$  上の連続写像  $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$  を  $V$  に制限することによって得られる  $V$  上の連続写像を  $\rho_{U,V}(f)(= f|_V)$  と書く. すると, これは  $\mathbf{C}$  上のベクトル空間 ( $\mathbf{C}$  上の関数空間) の準同型  $\rho_{U,V} : \mathcal{C}_X^0(U) \rightarrow \mathcal{C}_X^0(V)$  となる. つまり

$(\mathcal{C}_X^0, \rho)$  は前層となる.

また, (4) を満たすのは明らかで, (5) もすぐに成り立つことがわかる.  $\{U_i\}_i$  を  $U$  の開被覆とする.  $f_i \in \mathcal{C}_X^0(U_i)$  が  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  を満たすとする. するとそれらを張り合わせた関数を  $f$  とすればこれは  $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$  であり,  $f|_{U_i} = f_i$  となる. よって  $(\mathcal{C}_X^0, \rho)$  は層となる. これを連続写像が成す層という. ■

**Example 1.3.2.**  $X$  を位相空間とする.

$A$  を自明でないアーベル群とする.  $\mathcal{A}_X$  を  $X$  の空でない開集合  $U$  に対して  $\mathcal{A}_X(U) = A$  に, 空集合  $\emptyset$  に対して  $\mathcal{A}_X(\emptyset) = 0$  に対応させるものとし, 制限写像を空でない開集合  $V \subset U$  に対して  $\rho_{U,V} = \text{id}_A$  とし,  $\rho_{U,\emptyset} = 0$  とする.

すると,  $(\mathcal{A}_X, \rho)$  は  $X$  上の前層にはなるが, 一般に層とはならない.

**Proof.** 例えば,  $X$  が連結でないとする, 非交差な開集合  $U, V$  があって  $X = U \cup V$  とかける. すると  $\{U, V\}$  は  $X$  の開被覆となる.  $s_U \in \mathcal{A}_X(U) = A$  が  $s_U|_{U \cap V} = s_U|_{\emptyset} = 0 = s_V|_{U \cap V}$  を満たすとする. このとき, 任意の  $s \in \mathcal{A}_X(X) = A$  で  $s|_U = s|_V = s$  となり層とならない. ■

**Example 1.3.3.** (skyscraper sheaf)

$X$  を位相空間,  $A$  をアーベル群とする.  $p \in X$  に対して  $i_p: \{p\} \hookrightarrow X$  を包含写像とする. このとき  $i_{p,*}\mathcal{A}$  を

$$i_{p,*}\mathcal{A}(U) = \begin{cases} A & p \in U \\ 1 & p \notin U \end{cases}$$

と定義する. これは層になる.

**Definition 1.3.3.** 位相空間  $X$  上の前層  $\mathcal{F}$  と  $x \in X$  に対して,  $x$  での  $\mathcal{F}$  の **茎 (stalk)**  $\mathcal{F}_x$  という群が定義できる.

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

ただし,  $U$  は  $x$  の開近傍をすべてを回る  $U$  上の切断  $s \in \mathcal{F}(U)$  に対して  $x \in U$  の茎  $\mathcal{F}_x$  への自然な群準同型の像を  $s_x$  と書いて,  $x$  での  $s$  の **芽 (germ)** という.

**Remark .** ここで,  $\mathcal{F}_x$  は  $x$  近傍の情報を持っていると言える. 実際,

$$\mathcal{F}_x = \bigsqcup_i U_i / \sim \quad \dots (*)$$

ここで, 同値関係は

$$(t, U) \sim (s, V) \stackrel{\text{def}}{\equiv} \exists W \subset U, V, x \in W \text{ s.t. } t|_W = s|_W$$

である．ただし， $(t, U)$  とは  $x$  の開近傍  $U$  で  $t \in \mathcal{F}(U)$  という意味である．また  $(*)$  を見れば分かるように， $\mathcal{F}_x$  の任意の元はある  $x$  近傍  $U$  上の切断  $s \in \mathcal{F}(U)$  の芽である．

**Proposition 1.3.4.** 層の定義の (4),(5) を次の列が完全系列であるとすることができる．

$$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : 0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{d_0} \prod_i \mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{d_1} \prod_i \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$$

ただし， $\mathcal{U}$  は開集合  $U$  の開被覆で  $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$ ．

$$d_0 : s \mapsto (s|_{U_i})_i, d_1 : (s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$$

**Proof.** ■

**Lemma 1.3.5.**  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の層とする． $s, t \in \mathcal{F}(X)$  が任意の  $x \in X$  に対して  $s_x = t_x$  ならば  $s = t$

**Proof.** 差を考えれば  $t = 0$  のときを考えればいい． $s_x = 0$  ( $\forall x \in X$ ) とすると， $x$  の開近傍  $U_x$  があって  $s|_{U_x} = 0$  となる． $\{U_x\}_{x \in X}$  は  $X$  の開被覆なので， $s = 0$  となる． ■

**Definition 1.3.4.**  $X$  上の 2 つの前層  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  とする．前層の射  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  とは， $X$  の開集合  $U$  に対して群準同型  $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$  があって，任意の開集合の組  $V \subset U$  に対して  $\alpha(V) \circ \rho_{U,V}^{\mathcal{F}} = \rho_{U,V}^{\mathcal{G}} \circ \alpha(U)$  を満たすことをいう． $X$  の任意の開集合  $U$  に対して  $\alpha(U)$  が単射ならば  $\alpha$  は単射であるという．(全射はうまくいかんっぽい?)

$\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を  $X$  上の前層の射とする．任意の  $x \in X$  に対して  $\alpha$  から自然に誘導される群準同型  $\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  で  $(\alpha(U)(s))_x = \alpha_x(s_x)$  が  $X$  の任意の開集合  $U, s \in \mathcal{F}(U), x \in U$  で成り立つものが取れる．

$\alpha_x$  が任意の  $x \in X$  で全射なら  $\alpha$  が全射であるという．

**Example 1.3.6.**  $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  とし  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の正則関数がなす層とし， $\mathcal{G}$  を  $X$  上の双正則関数のなす層とする．今，任意の開集合  $U$  と任意の  $f \in \mathcal{F}(U)$  に対して  $\alpha(U)(f) = \exp(f)$  で定義される層の射  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  が全射であることはよく知られている．しかし  $\alpha(X) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$  は全射ではない．例えば恒等写像は  $\exp(f)$  と書けない．

**Proposition 1.3.7.**  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を  $X$  上の層の射とする．

$$\alpha \text{ が同型} \Leftrightarrow \alpha_x \text{ が同型 } (\forall x \in X)$$



**Theorem 1.3.8.** 位相空間  $X$  上の前層  $\mathcal{F}$  に対して, 前層  $\mathcal{F}$  の層化 (sheafification)  $\mathcal{F}^\dagger$  は存在する.

**Proof.**  $X$  の開集合  $U$  に対して

$$\mathcal{F}^\dagger(U) = \left\{ \sigma : U \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid \forall x \in U, x \in \exists V \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(V) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y (\forall y \in V) \right\}$$

とする. ただし,  $\sigma$  は任意の  $x \in U$  に対して  $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$  とする. また,  $V \subset U$  なる開集合に対し,

$$\begin{array}{ccc} \rho_{U,V}^{\mathcal{F}^\dagger} : \mathcal{F}^\dagger(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}^\dagger(V) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \sigma & \longmapsto & \sigma|_V \end{array}$$

が定義できる. 実際, 任意の  $x \in V$  をとる.  $V \subset U$  であり,  $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  より

$$x \in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y (\forall y \in U_0)$$

$V_0 = U_0 \cap V$ ,  $t = s|_{V_0}$  とすると任意の  $y \in V_0$  に対して

$$\sigma(y) = \sigma|_V(y) = s_y$$

さらに帰納極限の定義から

$$\sigma|_V(y) = t_y$$

次に  $\mathcal{F}^\dagger(U)$  がアーベル群, つまり  $\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  ならば  $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  を示そう.

$\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  より任意の  $x \in U$  に対して

$$\begin{aligned} x &\in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y (\forall y \in U_0) \\ x &\in \exists V_0 \subset U : \text{open}, \exists t \in \mathcal{F}(V_0) \text{ s.t. } \tau(z) = t_z (\forall z \in V_0) \end{aligned}$$

を満たす. いま  $W = U_0 \cap V_0$ ,  $s' = s|_W$ ,  $t' = t|_W$  とすると,

$$\begin{aligned} x \in W \subset U : \text{open}, s', t' \in \mathcal{F}(W) \text{ s.t. } (\sigma + \tau)(y) &= \sigma(y) + \tau(y) \\ &= s_y + t_y \\ &= (s + t)_y (\forall y \in W) \end{aligned}$$

よって  $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  また明らかに可換. よって  $\mathcal{F}^\dagger(U)$  はアーベル群.

また, 通常の前層で制限写像を定義しているため,  $\mathcal{F}^\dagger$  は前層となる.

更に層となることを示そう.

$U$  を  $X$  の開集合とし,  $\{U_i\}_i$  をその開被覆とする.  $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$  が任意の  $i$  に対して  $\sigma|_{U_i} = 0$  とする. つまり任意の  $x \in U_i$  に対して  $\sigma(x) = 0$  とする.  $U_i$  は  $U$  を被覆するので結局  $\sigma = 0$  となる.

次に,  $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$  とし,  $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}$  と仮定すると,

$$\begin{array}{ccc} \sigma : U & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x & \longmapsto & \sigma_i(x) \end{array}$$

ただし,  $x \in U_i$ . すると,  $\sigma$  は  $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$  を張り合わせて作っているのだからこれは  $\sigma \in \mathcal{F}(U)$  となるのが容易にわかる。よって、 $\mathcal{F}^\dagger$  は層になる。 ■

**Proposition 1.3.9.** 層化の射  $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\dagger$  に対して、その茎の射  $\theta_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^\dagger$  は同型である。

**Lemma 1.3.10.**  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の層とし、 $\mathcal{F}'$  を  $\mathcal{F}$  の部分層とする。このとき開集合  $U$  を  $\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$  に対応させるものは前層になる。

**Proof.** この対応を  $\mathcal{G}$  とおく。  $V \subset U$  なる開集合  $U, V$  をとる。制限写像を

$$\begin{array}{ccc} \rho_{U,V}^{\mathcal{G}} : \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V)/\mathcal{F}'(V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ s + \mathcal{F}'(U) & \longmapsto & \rho_{U,V}^{\mathcal{F}}(s) + \mathcal{F}'(V) \end{array}$$

とすると、これは well-defined である。また、 $U \subset V \subset W$  なる開集合の組に対して

$$\rho_{U,W}^{\mathcal{G}} = \rho_{V,W}^{\mathcal{G}} \circ \rho_{U,V}^{\mathcal{G}}$$

が成り立つことは制限写像の定義から明らかである。よって  $\mathcal{G}$  は前層。 ■

**Definition 1.3.5.** Lem:?? で定義した前層の層化を  $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$  と書いて、商層 (quotient sheaf) という。

**Definition 1.3.6.**  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を前層の射とする。このとき開集合  $U$  に対して  $U \mapsto \text{Ker}(\alpha(U))$  とするものは  $\mathcal{F}$  の部分層になる。これを  $\text{Ker } \alpha$  と書いて、 $\alpha$  の核 (kernel of  $\alpha$ ) という。

更に、 $U \mapsto \text{Im}(\alpha(U))$  は一般には前層となるので、この層化を  $\text{Im } \alpha$  と書いて、 $\alpha$  の像 (image of  $\alpha$ ) という。

また、 $U \mapsto \text{Coker}(\alpha(U)) = \mathcal{G}(U)/\text{Im}(\alpha(U))$  は一般には前層となるので、この層化を  $\text{Coker } \alpha$  と書いて、 $\alpha$  の余核 (cokernel of  $\alpha$ ) という。

**Lemma 1.3.11.**  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  を  $X$  上の層,  $\mathcal{F}'$  を  $\mathcal{F}$  の部分層,  $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を前層の射とする。このとき、

$$\begin{aligned} (\text{Ker } \alpha)_x &= \text{Ker } \alpha_x \\ (\text{Im } \alpha)_x &= \text{Im } \alpha_x \\ (\text{Coker } \alpha)_x &= \text{Coker } \alpha_x \\ (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x &= \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x \end{aligned}$$

が成り立つ。

**Proof.**  $\mathcal{Q}(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$  とおく。

このとき、アーベル群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

が作れる。帰納極限は完全列を完全列に移すので、また Prop:1.3.7 より

$$0 \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

を得る。よって

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x \longrightarrow 0$$

したがって、

$$\mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x \simeq (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x$$

を得る。

次に

$$\begin{aligned} (\text{Ker } \alpha)_x &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha(U)(s) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha_x(s_x) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \text{Ker } \alpha_x \end{aligned}$$

を得る。同様に

$$\begin{aligned} (\text{Im } \alpha)_x &= \{t_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in \exists U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U) \text{ s.t. } t = \alpha(U)(s)\} \\ &= \{(\alpha(U)(s))_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \{\alpha_x(s_x) \in \mathcal{G}_x \mid s_x \in \mathcal{F}_x\} \\ &= \text{Im } \alpha_x \end{aligned}$$

を得る。また、 $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x$  より

$$(\text{Coker } \alpha)_x = (\mathcal{G}/\text{Im } \alpha)_x = \mathcal{G}_x/\text{Im } \alpha_x = \text{Coker } \alpha_x$$

■

**Definition 1.3.7.** 層の列

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

が完全とは、 $\text{Im } \alpha = \text{Ker } \beta$  が成り立つことをいう。

**Proposition 1.3.12.** 層の列に対して次が成り立つ。

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \text{ が完全} \iff \text{任意の } x \in X \text{ に対して } \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x \text{ が完全}$$

**Proof.** 明らか。 ■

**Definition 1.3.8.**  $X, Y$  を位相空間,  $f: X \rightarrow Y$  を連続写像とする。このとき、 $X$  上の層  $\mathcal{F}$ ,  $Y$  上の層  $\mathcal{G}$  に対して、新たな  $Y$  上の層  $f_*\mathcal{F}$  が

$$V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

によって定義できる。これを  $\mathcal{F}$  の順像 (direct image of  $\mathcal{F}$ ) という。

また、

$$U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

で定義できる新たな  $X$  上の前層  $f^*\mathcal{G}$  の層化  $f^*\mathcal{G}$  を  $\mathcal{G}$  の逆像 (inverse image of  $\mathcal{G}$ ) という。

**Proposition 1.3.13.** 上の状況で

$$(f^*\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)} \quad \forall x \in X$$

**Proof.**

$$(f^*\mathcal{G})_x = \varinjlim_{U \ni x} (f^*\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{x \in U} \varinjlim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V) = \mathcal{G}_{f(x)}$$

最後の等号は明らか。 ■

**Remark .**  $V$  を  $Y$  の開集合とする。このとき自然な単射  $i: V \rightarrow Y$  に対して

$$i^*\mathcal{G} = \mathcal{G}|_V$$

が成り立つ。

**Proposition 1.3.14.**  $f: X \rightarrow Y$  を位相空間の間の連続写像とし、 $\mathcal{F}$  を  $X$  上の層、 $\mathcal{G}$  を  $Y$  上の層とする。このとき

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

ただし、 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  は圏  $\mathcal{C}$  で  $X \rightarrow Y$  なる射全体を表し、 $\mathrm{Sh}(X)$  は  $X$  上の層全体を表す。

**Proof.** 層化の普遍性より  $\theta: f^*\mathcal{G} \rightarrow f^*\mathcal{G} = (f^*\mathcal{G})^\dagger$  を層化の射とすると、

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ph}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \\ \alpha & \longmapsto & \tilde{\alpha} \circ \theta \end{array}$$

が成り立つ。つまり

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

を示せばいい。次に  $X$  上の開集合  $U$  に対して

$$f^*\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

なので,  $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F})$  に対して

$$\varphi(U) : \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

を与えることは帰納極限の定義より  $f(U) \subset V$  なる開集合  $V$  に対して

$$\psi'(V) : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

を  $f(U) \subset V' \subset V$  ならば,

$$\psi'(V) = \psi'(V') \circ \rho_{V', V}^{\mathcal{G}}$$

となるように与えることである。すなわち  $\psi'(V)$  は

$$\psi(V) : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

と  $\rho_{f^{-1}(V), U}^{\mathcal{F}}$  を合成したものである。(帰納系の選び方によらない。)

したがって,  $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F})$  を与えることは,  $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ph}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$  を与えることと等しい。 ■

### 1.3.1 $\mathfrak{B}$ -sheaf

$\mathfrak{B}$ -sheaf はアフィンスキームの構成にも必要な概念で, ラフに言えばすべての開集合  $U$  に対して  $\mathcal{F}(U)$  が定まっているものではなく, 開基  $\mathfrak{B}$  の元  $U$  に対してだけ定まっている層を  $\mathfrak{B}$ -sheaf という。

**Definition 1.3.9.** 位相空間  $X$  の開基  $\mathfrak{B}$  が有限交叉で閉じているとは, 任意の  $U, V \in \mathfrak{B}$  に対して  $U \cap V \in \mathfrak{B}$  が成り立つことをいう。

**Example 1.3.15.** 環  $A$  の素イデアルの集合  $\mathrm{Spec} A$  の基本開集合による開基  $\{D(f)\}_{f \in A}$  は有限交叉で閉じている。

**Definition 1.3.10.**  $X$  を位相空間.  $\mathfrak{B}$  をその開基とする. このとき  $\mathcal{F}$  が  $\mathfrak{B}$ -前層 ( $\mathfrak{B}$ -presheaf) であるとは,

- $U \in \mathfrak{B}$  に対して  $\mathcal{F}(U)$  はアーベル群.
- $V \subset U \in \mathfrak{B}$  に対して群準同型  $\rho_{U, V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  が定まる.

で,

- (1)  $\rho_{U,U} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$
- (2) 任意の開集合  $W \subset V \subset U$  に対して  $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$  となる.

を満たすときをいう.

**Definition 1.3.11.**  $\mathfrak{B}$  が有限交叉で閉じているとする. このとき  $\mathfrak{B}$ -前層が層の条件を満たすとき  $\mathfrak{B}$ -層 ( $\mathfrak{B}$ -sheaf) という.

**Proposition 1.3.16.**  $\mathcal{F}$  を  $\mathfrak{B}$ -前層とする. このとき, 任意の開集合  $V$  に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(V) &= \varprojlim_{\substack{U \in \mathfrak{B} \\ U \subset V}} \mathcal{F}(U) \\ &= \left\{ (s_U)_U \in \prod_{\substack{U \in \mathfrak{B} \\ U \subset V}} \mathcal{F}(U) \mid \forall U' \subset U \in \mathfrak{B}, s_U|_{U'} = s_{U'} \right\} \end{aligned}$$

制限写像は射影極限から誘導される射である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{U,U'}} & \mathcal{F}(U') \\ \uparrow \varphi_U & \circlearrowleft & \uparrow \psi_{U'} \\ \varprojlim_{U \subset V} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\rho_{V,V'}} & \varprojlim_{U' \subset V'} \mathcal{F}(U') \end{array}$$

するとこれは前層になる.

**Proposition 1.3.17.** 更に,  $\mathfrak{B}$  が有限交叉で閉じているなら, 層になる.

**Proof.** 任意の開集合  $V$  に対してその開被覆  $\{V_i\}_i$  を取る. ただし  $V_i \in \mathfrak{B}$  とする.

**Claim (4)(Uniqueness) が成立する.**

$s \in \mathcal{F}(V)$  が任意の  $i$  に対して  $s|_{V_i} = 0$  とする. 今定義から  $s = 0$  とは  $U \subset V$  なる任意の  $U \in \mathfrak{B}$  に対して  $s_U \in \mathcal{F}(U)$  が 0 であることである. 実際  $V$  の開被覆から  $U$  の開被覆  $\{U \cap V_i\}_i \subset \mathfrak{B}$  を得る. また任意の  $i$  に対して  $U \cap V_i \subset V_i$  より  $s|_{V_i}|_{U \cap V_i} = s|_{U \cap V_i} = 0$  となる. 従って任意の  $i$  に対して  $s_U|_{U \cap V_i} = 0$  となる. 今  $\mathcal{F}$  は  $\mathfrak{B}$ -sheaf なので  $s_U = 0$  よって  $s = 0$  が分かる.

**Claim (5)(Glueing local sections) が成立する.**

$s_i \in \mathcal{F}(V_i)$  が任意の  $i, j$  に対して  $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$  を満たすとする. 今  $U \in \mathfrak{B}$  成分へ

の射影を

$$\varphi_U : \varprojlim_{U \subset V} \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

と書くことにすると, 制限写像  $\rho_{V,V_i} = \varphi_{V_i}$  で, つまり  $(s_U)_U \in \mathcal{F}(V)$  で  $(s_U)_U|_{V_i} = s_i$  なる  $(s_U)_U$  があることを示せば良い. 各  $i$  に対して  $V_i \subset U_i$  なる  $U_i \in \mathfrak{B}$  で  $s_{U_i}|_{V_i} = s_i$  なる  $s_{U_i} \in \mathcal{F}(U_i)$  があればいい. 今  $U_i \subset V$  なので  $U$  の開被覆  $\{U_i \cap V_j\}_j$  が取れる.

■

## 1.4 Ringed Topological Space

**Definition 1.4.1.** 局所環付き空間とは位相空間  $X$  と  $X$  上の環の層  $\mathcal{O}_X$  の組  $(X, \mathcal{O}_X)$  で, 任意の  $x \in X$  に対して  $\mathcal{O}_{X,x}$  が局所環となるものをいう. また, この  $\mathcal{O}_X$  を  $(X, \mathcal{O}_X)$  の構造層 (structure sheaf) という. また  $(X, \mathcal{O}_X)$  を単に  $\mathcal{O}_X$  と書くことがある. また,  $\mathcal{O}_{X,x}$  の唯一の極大イデアル  $\mathfrak{m}_x$  に対してその剰余体  $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$  を  $X$  の点  $x$  での剰余体 (residue field of  $X$  at  $x$ ) といって  $k(x)$  と書く.

**Definition 1.4.2.** 局所環付き空間の射とは

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

とは連続写像  $f : X \rightarrow Y$  と環の層の射  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$  の組  $(f, f^\#)$  で, 任意の  $x \in X$  に対して  $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$  は局所射となるものをいう. (つまり  $f_x^\#(\mathfrak{m}_{Y,f(x)}) \subset \mathfrak{m}_{X,x}$  を満たす.)

Prop:1.3.13 より

$$f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$$

を考えることは

$$f^\# : f^*\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$$

を考えることに等しい. Def:1.4.2 の  $f_x^\#$  は下の式で考えている.

**Definition 1.4.3.** 射  $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  が開はめ込み (open immersion) (resp. 閉はめ込み (closed immersion)) とは連続写像  $f$  が開はめ込み (resp. 閉はめ込み) <sup>a</sup>でかつ任意の  $x \in X$  に対して  $f_x^\#$  が同型 (resp. 全射) のときをいう.

<sup>a</sup>  $f : X \rightarrow Y$  が (位相的) 開 (閉) はめ込みとは  $X$  と  $f(X)$  が同相で  $f(X)$  が開 (閉) 集合のときをいう.

**Definition 1.4.4.**  $(X, \mathcal{O}_X)$  を局所環付き空間とする。 $\mathcal{J}$  が  $\mathcal{O}_X$  のイデアル層 (sheaf of ideals of  $\mathcal{O}_X$ ) とは任意の開集合  $U$  に対して  $\mathcal{J}(U)$  が  $\mathcal{O}_X(U)$  のイデアルになっているときをいう。

**Lemma 1.4.1.**  $(X, \mathcal{O}_X)$  を局所環付き空間とする。 $\mathcal{J}$  を  $\mathcal{O}_X$  のイデアル層とする。そして、

$$V(\mathcal{J}) = \{x \in X \mid \mathcal{J}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$$

とおく。(ちなみに上の諸々から  $\mathcal{J}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$  が分かる。)

$j: V(\mathcal{J}) \hookrightarrow X$  を包含写像とする。すると

- $V(\mathcal{J})$  は  $X$  の閉集合
- $(V(\mathcal{J}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$  は局所環付き空間
- $j^\#$  は自然な全射

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{J} = j_*(j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$$

で  $(j, j^\#): (V(\mathcal{J}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$  は閉はめ込みである。

**Proof. Claim1.**  $V(\mathcal{J})$  は  $X$  の閉集合

$x \in X \setminus V(\mathcal{J}) = \{x \in X \mid \mathcal{J}_x = \mathcal{O}_{X,x}\}$  に対して  $f_x = 1$  なる  $x$  の開近傍  $U$  と  $f \in \mathcal{J}(U)$  をとる。つまり  $f|_V = 1|_V = 1$  なる  $x$  の開近傍  $V \subset U$  がある。すると任意の  $y \in V$  に対して  $f_y = 1 \in \mathcal{J}_y$  となって、この  $y$  に対して  $\mathcal{J}_y = \mathcal{O}_{X,y}$  なので  $V \subset X \setminus V(\mathcal{J})$  となって  $X \setminus V(\mathcal{J})$  が開であることがわかる。

**Claim2.**  $(V(\mathcal{J}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))$  は局所環付き空間

任意の  $x \in V(\mathcal{J})$  に対して

$$(j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{J}))_x = (\mathcal{O}_X/\mathcal{J})_x = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{J}_x$$

は局所環。残りは自明。■

**Proposition 1.4.2.**  $f: X \rightarrow Y$  を局所環付き空間の閉はめ込みとする。 $Z$  を局所環付き空間  $V(\mathcal{J})$  とする。ただし、 $\mathcal{J} = \text{Ker } f^\# \subset \mathcal{O}_Y$ 。すると  $X \simeq Z$  を自然な閉はめ込み  $Z \hookrightarrow Y$  から得る。

**Proof.** まず次の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

から Prop:?? より任意の  $y \in Y$  に対して

$$\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{J}_y = (f_*\mathcal{O}_X)_y$$

を得る。よって

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus V(\mathcal{J}) \\ \mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{J}_y & y \in V(\mathcal{J}) \end{cases} \quad \dots (*)$$



を得る。 $f(X)$  は  $Y$  の閉集合なので  $x \in Y \setminus f(X)$  の開近傍  $U$  で

$$f(X) \cap U = \emptyset$$

となるものがとれる。よって

$$f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(\emptyset) = 0$$

したがって、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_x = 0$$

また、 $x \in f(X)$  の開近傍  $U$  に対して  $f$  での引き戻し  $f^{-1}(U)$  は  $y = f(x)$  の開近傍である。これを  $V$  とおく。逆に、 $f$  は閉はめ込みなので、 $X$  は  $f(X)$  と同相なので  $X$  に自然に  $Y$  の相対位相が入る。つまり、任意の  $x \in X$  の開近傍  $U$  に対して  $y = f(x) \in Y$  の開近傍  $V$  が存在して  $f^{-1}(V)$  とかける。よって、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_x = \varinjlim_{U \ni x} f_*\mathcal{O}_X(U) = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \varinjlim_{V \ni y} \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_{X,y}$$

つまり、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus f(X) \\ \mathcal{O}_{X,x} & y = f(x) \end{cases}$$

(\*) と比較すれば

$$V(\mathcal{J}) = f(X)$$

が分かる。なので、 $j : Z \hookrightarrow Y$  を包含写像とすると、 $f$  から誘導される同相写像  $g : X \rightarrow Z$  に対して

$$f = j \circ g$$

で、

$$j_*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Y/\mathcal{J} \simeq f_*\mathcal{O}_X$$

がわかる。容易に

$$f_*\mathcal{O}_X = j_*g_*\mathcal{O}_X$$

が分かるので

$$\mathcal{O}_Z = (j^{-1} \circ j)_*\mathcal{O}_Z = (j^{-1})_*j_*\mathcal{O}_Z \simeq (j^{-1})_*j_*g_*\mathcal{O}_X = (j^{-1} \circ j)_*g_*\mathcal{O}_X = g_*\mathcal{O}_X$$

である。よって、 $g$  は局所環付き空間の同型射である。 $f = j \circ g$  が局所環付き空間の射であることを確認するのは読者に委ねる。■

## 1.5 Schemes

後できちんとした定義を述べるが、スキーム (scheme) とは局所環付き空間で局所的にはアフィンスキーム (affine scheme) とみれる空間のことである。すなわち、先にアフィンスキームを定義せねばなるまい。

**Proposition 1.5.1.**  $A$  を環、 $X = \text{Spec } A$  とする。このとき以下が成り立つ。

- (1)  $\mathcal{O}'_X$  を環の  $\mathfrak{B}$ -層とする。 $\mathcal{O}'_X$  が誘導する  $X$  上の層  $\mathcal{O}_X$  は  $\mathcal{O}_X(X) = A$  となる。
- (2) 任意の  $\mathfrak{p} \in X$  に対して、茎  $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$  は  $A_{\mathfrak{p}}$  への標準的な同型がある。特に、 $(X, \mathcal{O}_X)$  は局所環付き空間になる。

**Proof.** まず、開集合  $U = X$  について Uniqueness 条件を確認する。ほかの基本開集合も同様に示される。  $U_i = \blacksquare$

**Definition 1.5.1.** 上で定義した局所環付き空間  $(\text{Spec } A, \mathcal{O}_{\text{Spec } A})$  をアフィンスキーム (affine scheme) という。

**Lemma 1.5.2.**  $A$  を整域とし  $K$  をその商体とする。素イデアル  $0$  に対応する  $X = \text{Spec } A$  の点を  $\xi$  とする。このとき

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = K$$

が成り立つ。さらに、任意の空でない開集合  $U \subset X$  と  $\xi \in U$  に対して標準的な準同型

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$$

は単射となる。開集合の組  $V \subset U$  に対して制限

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$$

は単射となる。

**Proof.** Prop:1.5.1(2) より

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = A_{\xi} = K$$

を得る。

$U = D(f)$  とすると、 $\mathcal{O}_X(U) = A_f \subset K$ 。一般に

$$U = \bigcup_i D(f_i)$$

と置く。 $s \in \mathcal{O}_X(U)$  を飛ばすと  $0 \in K$  になるとする。各開被覆  $D(f_i) \subset U$  への制限を考えると

$$s|_{D(f_i)} = 0$$

が任意の  $i$  で成り立つので、 $s = 0$  である。よって  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi} \subset K$  は単射。

開集合の組  $\xi \in V \subset U$  に対して制限  $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$  に対して帰納極限の定義より

図式

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(V) \\
 \downarrow & \circlearrowleft & \searrow \\
 & \mathcal{O}_{X,\xi} &
 \end{array}$$

が可換となるので、制限は単射である。 ■

**Lemma 1.5.3.**  $X = \operatorname{Spec} A$  をアフィンスキームとし,  $g \in A$  をとる. このとき開集合  $D(g)$  は  $X$  から誘導される局所環付き空間で  $\operatorname{Spec} A_g$  に同型なアフィンスキームになる.

**Proof.**  $Y = \operatorname{Spec} A_g$  と置く. 局所化と素イデアルの対応より標準的な開はめ込み

$$i: Y \rightarrow X$$

がある ( $\operatorname{Im} i = D(g)$ )

$D(h) \subset D(g)$  とする.  $A \xrightarrow{\varphi} A_g$  とする. また  $\varphi(h) = \bar{h}$  と置く. このとき標準的な同型

$$\mathcal{O}_X(D(h)) = A_h \simeq (A_g)_{\bar{h}} = \mathcal{O}_Y(D(\bar{h})) = i_* \mathcal{O}_Y(D(h))$$

$\{D(h)\}_h$  は  $D(g)$  の開基となるので,  $i$  は  $(Y, \mathcal{O}_Y)$  から  $(D(g), \mathcal{O}_X|_{D(g)}) \subset (X, \mathcal{O}_X)$  への同型を誘導する. (Refer to Exercises 2.7) ■

**Definition 1.5.2.** スキーム (scheme) とは局所環付き空間  $(X, \mathcal{O}_X)$  で開被覆  $\{U_i\}_i$  に対して  $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$  がアフィンスキームになるものが存在するときをいう. また  $\mathcal{O}_X(U)$  の元は (やや不適切であるが)  $U$  上の正則関数 (regular functions on  $U$ ) という. しかし, 層の関数としての側面をよく表している. (Refer to Exercises 3.4 and Proposition 4.4)

明らかにアフィンスキームはスキームである. また, 局所環付き空間  $X$  が開被覆  $\{U_i\}_i$  に対して  $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$  がスキームだったら  $X$  はスキームである. 逆に次の命題が従う.

**Proposition 1.5.4.**  $X$  をスキームとする. このとき任意の開集合  $U \subset X$  に対して局所環付き空間  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  はまたスキームになる.

**Proof.** 定義より  $X = \bigcup_i U_i$  で  $U_i$  は開集合で, アフィンスキームになるものがある.  $U \cap U_i$  がスキームとなることを示せば十分である. ■

**Definition 1.5.3.**  $X$  をスキームとする.  $U$  を  $X$  の開集合とする. スキーム  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  を  $X$  の開部分スキーム (open subscheme) 更に  $(U, \mathcal{O}_X|_U)$  がアフィンスキームになるとき  $U$  をアフィン開集合 (affine open subset) という.

以下,  $X$  の開集合  $U$  はスキームの構造が与えられているとする.

**Definition 1.5.4.**  $X$  をスキーム,  $f \in \mathcal{O}_X(X)$  とする.

$$X_f := \{x \in X \mid f_x \in \mathcal{O}_{X,x}^\times\}$$

ただし,  $A^\times$  は  $A$  の単元群である. (Liu の Definition 3.11. では\*の記号を用いている.)

次の条件を考えよう.

$X$  は有限アフィン開被覆  $\{U_i\}_i$  があって  $U_i \cap U_j$  はまた有限アフィン開被覆を持つ.

便宜上この条件を条件 A と呼称する.

**Proposition 1.5.5.**  $X$  をスキームとし  $f \in \mathcal{O}_X(X)$  とする. このとき  $X_f$  は  $X$  の開集合で, 更に,  $X$  が条件 A を満たすなら, 制限  $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$  は同型

$$\mathcal{O}_X(X)_f \simeq \mathcal{O}_X(X_f)$$

を誘導する.

**Proof.**  $x \in X_f$  とする.  $x$  の開近傍  $U$  と  $g \in \mathcal{O}_X(U)$  があって,  $f_x g_x = 1$  を満たすものがある.  $f_x g_x = (fg)_x$  よりある  $x$  の開近傍  $V \subset U$  があって  $fg|_V = 1$  を満たす. したがって,  $V \subset X_f$  となる. よって  $X_f$  は開集合である.

更に,  $V$  が動くにつれて  $f$  の逆元  $g \in \mathcal{O}_X(V)$  を張り合わせると  $f|_{X_f}$  の  $\mathcal{O}_X(X_f)$  での逆元を得る.

詳しく言えば,  $X_f$  の上の  $V$  を集めた開被覆  $\{V_i\}_i$  を取り,  $fg_i|_{V_i} = 1$  なる  $g_i \in \mathcal{O}_X(V_i)$  を考えれば任意の  $i, j$  に対して

$$fg_i|_{V_i \cap V_j} = 1 = fg_j|_{V_i \cap V_j}$$

より

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= fg_i|_{V_i \cap V_j} - fg_j|_{V_i \cap V_j} \\ &= f|_{V_i \cap V_j} (g_i|_{V_i \cap V_j} - g_j|_{V_i \cap V_j}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

また,  $f|_{V_i}$  は単元なので逆元  $(f|_{V_i})^{-1}$  がある. また,

$$f|_{V_i \cap V_j} = (f|_{V_i})|_{V_i \cap V_j}$$

なので,

$$\begin{aligned} f|_{V_i \cap V_j} ((f|_{V_i})^{-1}|_{V_i \cap V_j}) &= (f|_{V_i})|_{V_i \cap V_j} ((f|_{V_i})^{-1}|_{V_i \cap V_j}) \\ &= ((f|_{V_i})(f|_{V_i})^{-1})|_{V_i \cap V_j} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって  $f|_{V_i \cap V_j}$  はまた単元で  $g_i|_{V_i \cap V_j} = g_j|_{V_i \cap V_j}$  を得る.

$\mathcal{O}_X$  は層なので, 貼り合わせ条件より  $g|_{V_i} = g_i$  なる  $g \in \mathcal{O}_X(X_f)$  がある. この  $g$  が  $f|_{X_f}$  の逆元になっている.

よって制限  $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$  から準同型

$$\alpha : \mathcal{O}_X(X)_f \rightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$$

を誘導する. ( $\mathcal{O}_X(X)$  は環なので  $\mathcal{O}_X(X)_f$  は  $\{f^n\}_{n \in \mathbb{N}}$  での局所化であることに注意しよう.) ここで条件 A を仮定すれば,  $X$  は有限アフィン開被覆  $\mathcal{U} = \{U_i\}_i$  を持つ. よって,

$$X_f = \bigcup_i U_i \cap X_f = \bigcup_i V_i = \bigcup_i D(f|_{U_i})$$

Lem:1.5.3 より  $\mathcal{O}_X(U_i)_f = \mathcal{O}_X(V_i)$

今以下の完全系列を得る.

$$C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) : 0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \xrightarrow{d_0} \bigoplus_i \mathcal{O}_X(U_i) \xrightarrow{d_1} \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$$

ただし  $d_0 : s \mapsto (s|_{U_i})_i$ ,  $d_1 : (s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$  とする. (有限個なら直積  $\prod$  と直和  $\bigoplus$  は同じ)

次にテンソルをとることは左完全関手なので  $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(X)_f$  はまた, 完全列である. よってこれは次の可換図式を与える.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(X)_f & \longrightarrow & \bigoplus_i \mathcal{O}_X(U_i)_f & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)_f \\ & & \downarrow \alpha & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(X_f) & \longrightarrow & \bigoplus_i \mathcal{O}_X(V_i) & \longrightarrow & \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(V_i \cap V_j) \end{array}$$

■

### 1.5.1 Morphism of schemes

**Definition 1.5.5.**  $f : X \rightarrow Y$  がスキームの射 (morphism of schemes) とは局所環付き空間としての射とする.

環の射  $\varphi : A \rightarrow B$  が誘導する射  $\mathrm{Spec} B \rightarrow \mathrm{Spec} A$  を  $\varphi^a$  と書くことにする.

つまり  $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$  に対して  $\varphi^a(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$

**Proposition 1.5.6.**  $\varphi : A \rightarrow B$  を環の射とする．このとき

$$(\varphi^a, (\varphi^a)^\#) : \operatorname{Spec} B \rightarrow \operatorname{Spec} A$$

は  $(\varphi^a)^\#(\operatorname{Spec} A) = \varphi$  を満たすスキームの射である．

**Proof.**  $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A$  と置く．任意の  $f \in A$  に対して

$$(\varphi^a)^{-1}(D(f)) = D(\varphi(f))$$

が成り立ち，実際

$$\begin{aligned} (\varphi^a)^{-1}(D(f)) &= \{\mathfrak{p} \in X \mid \varphi^a(\mathfrak{p}) \in D(f)\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in X \mid f \notin \varphi^a(\mathfrak{p})\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in X \mid f \notin \varphi^{-1}(\mathfrak{p})\} \\ &= \{\mathfrak{p} \in X \mid \varphi(f) \notin \mathfrak{p}\} \\ &= D(\varphi(f)) \end{aligned}$$

である． $\varphi$  から誘導される環の射

$$(\varphi^a)^\#(D(f)) : \mathcal{O}_Y(D(f)) = A_f \rightarrow B_{\varphi(f)} = \mathcal{O}_X(D(\varphi(f))) = (\varphi^a)_* \mathcal{O}_X(D(f))$$

これは制限写像と可換 (compatible という意味で) になる．よって層の射

$$(\varphi^a)^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_* \mathcal{O}_X$$

に拡張できる．更に，任意の  $\mathfrak{q} \in X$  に対して  $\varphi$  から誘導される環の射

$$(\varphi^a)^\#_{\mathfrak{q}} : A_{\varphi^a(\mathfrak{q})} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$$

は局所射で，実際

$$\begin{aligned} (\varphi^a)^\#_{\mathfrak{q}}(\varphi^a(\mathfrak{q})A_{\varphi^a(\mathfrak{q})}) &= \{\varphi(a)/\varphi(p) \mid a \in \varphi^a(\mathfrak{q}), p \notin \varphi^a(\mathfrak{q})\} \\ &= \{\varphi(a)/\varphi(p) \mid \varphi(a) \in \mathfrak{q}, \varphi(p) \notin \mathfrak{q}\} \\ &\subset \{b/q \mid b \in \mathfrak{q}, q \notin \mathfrak{q}\} \\ &= \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}} \end{aligned}$$

よって  $(\varphi^a, (\varphi^a)^\#)$  は局所環付き空間の射になる．構成により

$$(\varphi^a)^\#(Y) : \mathcal{O}_Y(Y) = A \rightarrow B = \mathcal{O}_X(X) = (\varphi^a)_* \mathcal{O}_X(Y)$$

で  $(\varphi^a)^\#(Y) = \varphi$  を満たす． ■

**Lemma 1.5.7.**  $A$  を環とし,  $I$  をそのイデアルとする. このとき, スキームの射

$$i : \operatorname{Spec} A/I \rightarrow \operatorname{Spec} A$$

が自然な射影  $\varphi : A \rightarrow A/I$  によって誘導される.  $i$  は  $\operatorname{Im} i = V(I)$  へのスキームの閉はめ込みである. 更に, 任意の  $\operatorname{Spec} A$  の基本開集合  $D(f)$  に対して

$$(\operatorname{Ker} i^\#)(D(f)) = I \otimes_A A_f$$

が成り立つ.

**Proof.**  $i$  が閉はめ込みであることはよい. 次に, 任意の  $\operatorname{Spec} A$  の基本開集合  $D(f)$  に対して先ほどみたように, 標準的な全射

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}(D(f)) = A_f \rightarrow (A/I)_{\varphi(f)} = i_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A/I}(D(f))$$

がある. これにより,  $i^\#$  の全射性と,  $(\operatorname{Ker} i^\#)(D(f)) = I_f = I \otimes_A A_f$  がわかる. ■

**Definition 1.5.6.**  $Z$  を  $X$  の閉集合とする. このとき  $Z$  が閉部分スキーム (closed subscheme) とは包含写像  $j : Z \rightarrow X$  が閉はめ込み

$$(j, j^\#) : (Z, \mathcal{O}_Z) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

となるときをいう.

**Proposition 1.5.8.**  $X = \operatorname{Spec} A$  をアフィンスキームとする.  $j : Z \rightarrow X$  をスキームの閉はめ込みとする. このとき,  $Z$  はアフィンスキームで, あるイデアル  $J \subset A$  が唯一存在して  $j$  は同型  $Z \xrightarrow{\cong} \operatorname{Spec} A/J$  を誘導する.

**Definition 1.5.7.**  $S$  をスキームとする. このとき  $X$  が  $S$ -スキーム ( $S$ -scheme) または  $S$  上のスキーム (scheme over  $S$ ) とはスキームの射  $\pi : X \rightarrow S$  が与えられているときをいう. この  $\pi$  を構造射 (structural morphism, structure morphism),  $S$  を基底スキーム (base scheme) という.

スキーム  $X, Y$  に対して

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{Sch}}(X, Y) := \{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ is morphism of schemes}\}$$

また, 環  $A, B$  に対して

$$\operatorname{Hom}_{\operatorname{Ring}}(A, B) := \{f : A \rightarrow B \mid f \text{ is morphism of rings}\}$$

とおく. このとき標準的な写像

$$\rho : \operatorname{Hom}_{\operatorname{Sch}}(X, Y) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\operatorname{Ring}}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$$

がある．実際  $(f, f^\#) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, Y)$  とすると

$$f^\#(Y) : \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow f_*\mathcal{O}_X(Y) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(Y)) = \mathcal{O}_X(X)$$

がある．



## Limit

## 第 A 章

## A.1 Inductive Limit

とりあえず, 帰納極限だけ述べる. 射影極限は双対概念なのでまあ頑張って.

**Definition A.1.1.**(帰納系の定義)

$(\Lambda, \leq)$  を順序集合,  $\mathcal{C}$  を圏とする. 各  $\lambda \in \Lambda$  に対し,  $X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  が与えられ,  $\lambda \leq \mu$  に対して射  $\varphi_{\mu, \lambda} : X_\lambda \rightarrow X_\mu$  があって次を満たすとき,  $\{X_\lambda, \varphi_{\mu, \lambda}\}$  を**順系 (direct system)** または**帰納系 (inductive system)** という. しばし  $\varphi_{\mu, \lambda}$  を省略して  $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  や  $\{X_\lambda\}_\lambda$  で表す.

- 任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $\varphi_{\lambda, \lambda} = \text{id}_{X_\lambda}$
- $\lambda \leq \mu \leq \nu$  なる任意の  $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$  に対して  $\varphi_{\nu, \lambda} = \varphi_{\nu, \mu} \circ \varphi_{\mu, \lambda}$

**Example A.1.1.** 位相空間  $X$  の開集合族  $\{U\}_U$  に対して

$$U \leq V \stackrel{\text{def}}{=} V \subset U$$

と定義する. そして, **AGrp** をアーベル群の成す圏,  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の前層とする. すると, 各開集合  $U$  に対し,  $\mathcal{F}(U) \in \text{Ob}(\mathbf{AGrp})$  で, 前層の定義からアーベル群と制限写像との組  $\{\mathcal{F}(U), \rho_{U, V}\}$  は帰納系となる. 前層の定義は Def:1.3.1 を参照.

**Definition A.1.2.**(帰納系の射の定義)

$\Lambda$  を順序集合.  $\{X_\lambda, \varphi_{\lambda, \mu}\}, \{Y_\lambda, \psi_{\lambda, \mu}\}$  を  $\Lambda$  上の圏  $\mathcal{C}$  における帰納系とする. このとき  $\{X_\lambda\}$  から  $\{Y_\lambda\}$  への射とは  $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$  なる射の族  $\{f_\lambda\}$  で, 任意の  $\lambda \leq \mu$  に対して  $\psi_{\lambda, \mu} \circ f_\mu = f_\lambda \circ \varphi_{\lambda, \mu}$  となるものを言う.

$$\begin{array}{ccc}
 X_\mu & \xrightarrow{f_\mu} & Y_\mu \\
 \varphi_{\lambda,\mu} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \psi_{\lambda,\mu} \\
 X_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & Y_\lambda
 \end{array}$$

**Definition A.1.3.**  $\mathcal{C}$  を圏とし,  $\Lambda$  を順序集合とする.  $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$  を  $\mathcal{C}$  の帰納系とする. このとき  $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$  の順極限 (**direct limit**) または帰納的極限 (**inductive limit**) または帰納極限とは,  $\mathcal{C}$  の対象  $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  と射の族  $\{\varphi_\lambda : X_\lambda \rightarrow \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  の組  $\{\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \varphi_\lambda\}$  で, 次の条件を満たすものをいう.

- $\lambda \leq \mu$  に対して  $\varphi_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = \varphi_\lambda$
- $\lambda \leq \mu$  に対して  $f_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = f_\lambda$  を満たす任意の射の族  $\{f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y\}_{\lambda \in \Lambda}$  に対して,  $f : \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow Y$  が一意に存在して

$$f \circ \varphi_\lambda = f_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

を満たす.

**Remark .** 一般の圏では帰納極限や射影極限は存在するとは限らない. しかし, 存在するとすれば, 同型を除いて一意である.

**Proposition A.1.2.** 帰納極限は存在すれば, 同型を除いて一意である.

**Proof.** 証明は後で書く. ■