

代数幾何まとめノート

Fefr

2024 年 5 月 29 日

目次

| | | |
|-------|----------------------------|---|
| 第 1 章 | Scheme | 5 |
| 1.1 | Zariski Topology | 5 |
| 1.2 | Algebraic Sets | 5 |
| 1.3 | Sheaves | 5 |
| 第 2 章 | 極限 | 9 |

Scheme

第 1 章

1.1 Zariski Topology

atodekakuyo

1.2 Algebraic Sets

atodekakuyo

1.3 Sheaves

Definition 1.3.1. X を位相空間とする。 X 上の (アーベル群の) 前層 (presheaf) \mathcal{F} とは次のデータ

- U を任意の X の開集合に対して $\mathcal{F}(U)$ はアーベル群。
- 制限写像 (restriction map) と言われる群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ が任意の開集合 $V \subset U$ に対して存在する。

そして次の条件を満たす。

- (1) $\rho_{U,U} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$
- (2) 任意の開集合 $W \subset V \subset U$ に対して $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ となる。

$s \in \mathcal{F}(U)$ を U 上の \mathcal{F} の切断 (section) という。また、 $\rho_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$ を $s|_V$ と書いて s の

V への制限という。

Definition 1.3.2. 前層 \mathcal{F} が層 (sheaf) とは次の条件を満たすことをいう。

- (4) (Uniqueness) U を X の開集合とし $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする。 $s \in \mathcal{F}(U)$ が任意の i に対して $s|_{U_i} = 0$ ならば $s = 0$
- (5) (Glueing local sections) 上の状況で、 $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ が $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすならば、 $s|_{U_i} = s_i$ を満たす $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する。

Example 1.3.1. X を位相空間とする。

\mathcal{C}_X^0 を X の開集合 U に対して $U \rightarrow \mathbf{C}$ なる連続写像全体の集合 $\mathcal{C}_X^0(U)$ を対応させるものとし、制限写像を普通の制限とする。すると、 \mathcal{C}_X^0 は X 上の層となる。

Proof. $V \subset U$ なる開集合 U, V に対して U 上の連続写像 $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$ を V に制限することによって得られる V 上の連続写像を $\rho_{U,V}(f) (= f|_V)$ と書く。すると、これは \mathbf{C} 上のベクトル空間 (\mathbf{C} 上の関数空間) の準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{C}_X^0(U) \rightarrow \mathcal{C}_X^0(V)$ となる。つまり (\mathcal{C}_X^0, ρ) は前層となる。

また、(4) を満たすのは明らかで、(5) もすぐに成り立つことがわかる。 $\{U_i\}_i$ を U の開被覆とする。 $f_i \in \mathcal{C}_X^0(U_i)$ が $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすとする。するとそれらを張り合わせた関数を f とすればこれは $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$ であり、 $f|_{U_i} = f_i$ となる。よって (\mathcal{C}_X^0, ρ) は層となる。これを連続写像が成す層という。 ■

Example 1.3.2. X を位相空間とする。

A を自明でないアーベル群とする。 \mathcal{A}_X を X の空でない開集合 U に対して $\mathcal{A}_X(U) = A$ とする。

Remark . \mathcal{B} を位相空間 X の開基で有限交叉で閉じているものとする。(つまり任意の $U, V \in \mathcal{B}$ に対して $U \cap V \in \mathcal{B}$. e.g. $\text{Spec } A$ の開基 $\{D(f)\}_f$) このとき \mathcal{B} -前層 (\mathcal{B} -presheaf) \mathcal{F}_0 とは

- $U \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{F}_0(U)$ はアーベル群。
- $V \subset U \in \mathcal{B}$ に対して群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}_0(U) \rightarrow \mathcal{F}_0(V)$ が定まる。

としたもの。

\mathcal{B} -層 (\mathcal{B} -sheaf) \mathcal{F}_0 から X 上の層 \mathcal{F} を作ることができる。

位相空間 X の任意の開集合 U をとり、 $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする。 ($U_i \in \mathcal{B}$)

$$\mathcal{F}(U) := \left\{ (s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}_0(U_i) \mid \text{任意の } i, j \text{ に対して } s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \right\}$$

と定義する。するとこれは開被覆によらない。実際 $\mathcal{F}(U)_{U_i}$ を開被覆 $\{U_i\}_i$ による

$\mathcal{F}(U)$ とし、 $\{V_j\}_j$ を別の開被覆とすると、 $\{U_i \cap V_j\}_{i,j}$ はこれら 2 つの細分である。
 $\mathcal{F}(U)_{U_i} \rightarrow \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$ なる群準同型を $(s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap V_j})_{i,j}$ で定義できる。実際

$$\begin{aligned} s_i|_{U_i \cap V_j} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} &= s_i \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\ &= s_i|_{U_i \cap U_{i'}} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\ &= s_{i'}|_{U_i \cap U_{i'}} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \quad (\because (s_i)_i \in \mathcal{F}(U)_{U_i}) \\ &= s_{i'} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\ &= s_{i'}|_{U_{i'} \cap V_{j'}} \Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \end{aligned}$$

より $(s_i|_{U_i \cap V_j})_{i,j} \in \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$

また、 $(s_{ij})_{ij} \in \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$ を取ると、 $(s_{ij})_{ij} = (s_i|_{U_i \cap V_j})$ と出来るので全射(?????)
 Kernel を計算すると

$$\begin{aligned} s_i|_{U_i \cap V_j} &= 0 \quad (\forall i, j) \\ s_i|_{U_i} &= s_i = 0 \quad (\forall i) \quad (\because (4)) \end{aligned}$$

よって Kernel が自明なので単射。

Definition 1.3.3. 位相空間 X 上の前層 \mathcal{F} と $x \in X$ に対して、 x での \mathcal{F} の **茎 (stalk)** \mathcal{F}_x という群が定義できる。

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

ただし、 U は x の開近傍をすべてを回る。 U 上の切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ に対して $x \in U$ の茎 \mathcal{F}_x への自然な群準同型の像を s_x と書いて、 x での s の **芽 (germ)** という。

Lemma 1.3.3. \mathcal{F} を X 上の層とする。 $s, t \in \mathcal{F}(X)$ が任意の $x \in X$ に対して $s_x = t_x$ ならば $s = t$

Proof. 差を考えれば $t = 0$ のときを考えればいい。 $s_x = 0 \ (\forall x \in X)$ とすると、 x の開近傍 U_x があって $s|_{U_x} = 0$ となる。 $\{U_x\}_{x \in U_x}$ は X の開被覆なので、 $s = 0$ となる。■

Definition 1.3.4. X 上の 2 つの前層 \mathcal{F}, \mathcal{G} とする。**前層の射** $\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ とは、 X の開集合 U に対して群準同型 $\alpha(U): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ があって、任意の開集合の組 $V \subset U$ に対して $\alpha(V) \circ \rho_{U,V}^{\mathcal{F}} = \rho_{U,V}^{\mathcal{G}} \circ \alpha(U)$ を満たすことをいう。
 X の任意の開集合 U に対して $\alpha(U)$ が単射ならば α は単射であるという。(全射はうまくいかんっぽい?)

$\alpha: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を X 上の前層の射とする。任意の $x \in X$ に対して α から自然に誘導される群

準同型 $\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ で $(\alpha(U)(s))_x = \alpha_x(s_x)$ が X の任意の開集合 $U, s \in \mathcal{F}(U), x \in U$ で成り立つものが取れる。

α_x が任意の $x \in X$ で全射なら α が全射であるという。

Example 1.3.4. $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とし \mathcal{F} を X 上の正則関数がなす層とし、 \mathcal{G} を X 上の双正則関数のなす層とする。今、任意の開集合 U と任意の $f \in \mathcal{F}(U)$ に対して $\alpha(U)(f) = \exp(f)$ で定義される層の射 $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が全射であることはよく知られている。しかし $\alpha(X) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ は全射ではない。例えば恒等写像は $\exp(f)$ と書けない。

Proposition 1.3.5. $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を X 上の層の射とする。

$$\alpha \text{ が同型} \Leftrightarrow \alpha_x \text{ が同型 } (\forall x \in X)$$

極限

第 2 章

とりあえず、帰納極限だけ述べる。射影極限は双対概念なのでまあ頑張って。

Definition 2.0.1. (帰納系の定義)

(Λ, \leq) を順序集合、 \mathcal{C} を圏とする。各 $\lambda \in \Lambda$ に対し、 $X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が与えられ、 $\lambda \leq \mu$ に対して射 $\varphi_{\mu, \lambda} : X_\lambda \rightarrow X_\mu$ があって次を満たすとき、 $\{X_\lambda, \varphi_{\mu, \lambda}\}$ を **順系 (direct system)** または **帰納系 (inductive system)** という。しばし $\varphi_{\mu, \lambda}$ を省略して $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ や $\{X_\lambda\}_\lambda$ で表す。

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に他逸して $\varphi_{\lambda, \lambda} = \text{id}_{X_\lambda}$
- $\lambda \leq \mu \leq \nu$ なる任意の $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\nu, \lambda} = \varphi_{\nu, \mu} \circ \varphi_{\mu, \lambda}$

Definition 2.0.2. (帰納系の射の定義)

Λ を順序集合。 $\{X_\lambda, \varphi_{\lambda, \mu}\}, \{Y_\lambda, \psi_{\lambda, \mu}\}$ を Λ 上の圏 \mathcal{C} における帰納系とする。このとき $\{X_\lambda\}$ から $\{Y_\lambda\}$ への射とは $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ なる射の族 $\{f_\lambda\}$ で、任意の $\lambda \leq \mu$ に対して $\psi_{\lambda, \mu} \circ f_\mu = f_\lambda \circ \varphi_{\lambda, \mu}$ となるものを言う。

Definition 2.0.3. \mathcal{C} を圏とし、 Λ を順序集合とする。 $\{X_\lambda, \varphi_{\mu, \lambda}\}$ を \mathcal{C} の帰納系とする。

このとき $\{X_\lambda, \varphi_{\mu, \lambda}\}$ の **順極限 (direct limit)** または **帰納的極限 (inductive limit)** または **帰納極限** とは、 \mathcal{C} の対象 $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と射の族 $\{\varphi_\lambda : X_\lambda \rightarrow \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の組 $\{\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \varphi_\lambda\}$ で、次の条件を満たすものをいう。

- $\lambda \leq \mu$ に対して $\varphi_\mu \circ \varphi_{\mu, \lambda} = \varphi_\lambda$
- $\lambda \leq \mu$ に対して $f_\mu \circ \varphi_{\mu, \lambda} = f_\lambda$ を満たす任意の射の族 $\{f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、 $f : \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow Y$ が一意に存在して

$$f \circ \varphi_\lambda = f_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

を満たす。

Remark . 一般の圏では帰納極限や射影極限は存在するとは限らない。しかし、存在するとすれば、同型を除いて一意である。

Proposition 2.0.1. 帰納極限は存在すれば、同型を除いて一意である。

Proof. 証明は後で書く。 ■