

代数幾何まとめノート

Fefr

2024 年 7 月 6 日

目次

第 1 章	Scheme	5
1.1	Zariski Topology	5
1.2	Algebraic Sets	5
1.3	Sheaves	5
1.4	Ringed Topological Space	13
1.5	Schemes	16
付録 A	Limit	19
A.1	Inductive Limit	19
付録 B	Category Theory	21

Scheme

第 1 章

1.1 Zariski Topology

atodekakuyo

1.2 Algebraic Sets

atodekakuyo

1.3 Sheaves

Definition 1.3.1. X を位相空間とする. X 上の (アーベル群の) 前層 (presheaf) \mathcal{F} とは次のデータ

- U を任意の X の開集合に対して $\mathcal{F}(U)$ はアーベル群.
- 制限写像 (restriction map) と言われる群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ が任意の開集合 $V \subset U$ に対して存在する.

そして次の条件を満たす.

- (1) $\rho_{U,U} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$
- (2) 任意の開集合 $W \subset V \subset U$ に対して $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ となる.

$s \in \mathcal{F}(U)$ を U 上の \mathcal{F} の切断 (section) という. また, $\rho_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$ を $s|_V$ と書いて s の V

への制限という.

また, 単に $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}, \dots$ などと書いたら (前) 層を表すことや、 ρ と書いたら制限写像を意味する。また, どの (前) 層の制限写像かを明示するため, 例えば, $\rho_{U,V}^{\mathcal{F}}$ などと書くことがある。

Definition 1.3.2. 前層 \mathcal{F} が層 (sheaf) とは次の条件を満たすことをいう。

- (4) (Uniqueness) U を X の開集合とし $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする. $s \in \mathcal{F}(U)$ が任意の i に対して $s|_{U_i} = 0$ ならば $s = 0$
- (5) (Glueing local sections) 上の状況で, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ が $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすならば, $s|_{U_i} = s_i$ を満たす $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する。

Remark . \mathcal{F} が層ならば $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ となる。

Example 1.3.1. X を位相空間とする。

\mathcal{C}_X^0 を X の開集合 U に対して $U \rightarrow \mathbf{C}$ なる連続写像全体の集合 $\mathcal{C}_X^0(U)$ を対応させるものとし, 制限写像を普通の制限とする. すると, \mathcal{C}_X^0 は X 上の層となる。

Proof. $V \subset U$ なる開集合 U, V に対して U 上の連続写像 $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$ を V に制限することによって得られる V 上の連続写像を $\rho_{U,V}(f) (= f|_V)$ と書く. すると, これは \mathbf{C} 上のベクトル空間 (\mathbf{C} 上の関数空間) の準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{C}_X^0(U) \rightarrow \mathcal{C}_X^0(V)$ となる. つまり (\mathcal{C}_X^0, ρ) は前層となる。

また, (4) を満たすのは明らかで, (5) もすぐに成り立つことがわかる. $\{U_i\}_i$ を U の開被覆とする. $f_i \in \mathcal{C}_X^0(U_i)$ が $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすとする. するとそれらを張り合わせた関数を f とすればこれは $f \in \mathcal{C}_X^0(U)$ であり, $f|_{U_i} = f_i$ となる. よって (\mathcal{C}_X^0, ρ) は層となる. これを連続写像が成す層という. ■

Example 1.3.2. X を位相空間とする。

A を自明でないアーベル群とする. \mathcal{A}_X を X の空でない開集合 U に対して $\mathcal{A}_X(U) = A$ に, 空集合 \emptyset に対して $\mathcal{A}_X(\emptyset) = 0$ に対応させるものとし, 制限写像を空でない開集合 $V \subset U$ に対して $\rho_{U,V} = \text{id}_A$ とし, $\rho_{U,\emptyset} = 0$ とする。

すると, (\mathcal{A}_X, ρ) は X 上の前層にはなるが, 一般に層とはならない。

Proof. 例えば, X が連結でないとする, 非交差な開集合 U, V があって $X = U \cup V$ とかける. すると $\{U, V\}$ は X の開被覆となる. $s_U \in \mathcal{A}_X(U) = A$ が $s_U|_{U \cap V} = s_U|_{\emptyset} = 0 = s_V|_{U \cap V}$ を満たすとする. このとき, 任意の $s \in \mathcal{A}_X(X) = A$ で $s|_U = s|_V = s$ となり層とならない. ■

Example 1.3.3. (skyscraper sheaf)

X を位相空間、 A をアーベル群とする。 $p \in X$ に対して $i_p: \{p\} \hookrightarrow X$ を包含写像とする。このとき $i_{p,*}A$ を

$$i_{p,*}\mathcal{A}(U) = \begin{cases} A & p \in U \\ 1 & p \notin U \end{cases}$$

と定義する。これは層になる。

Remark . \mathcal{B} を位相空間 X の開基で有限交叉で閉じているものとする。(つまり任意の $U, V \in \mathcal{B}$ に対して $U \cap V \in \mathcal{B}$. e.g. $\text{Spec } A$ の開基 $\{D(f)\}_f$) このとき \mathcal{B} -前層 (\mathcal{B} -presheaf) \mathcal{F}' とは

- $U \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{F}'(U)$ はアーベル群.
- $V \subset U \in \mathcal{B}$ に対して群準同型 $\rho_{U,V}: \mathcal{F}'(U) \rightarrow \mathcal{F}'(V)$ が定まる.

としたもの.

\mathcal{B} -層 (\mathcal{B} -sheaf) \mathcal{F}' から X 上の層 \mathcal{F} を作ることができる.

位相空間 X の任意の開集合 V に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(V) &= \varprojlim_{\substack{U \in \mathcal{B} \\ U \subset V}} \mathcal{F}'(U) \\ &= \left\{ (s_U)_U \in \prod_{\substack{U \in \mathcal{B} \\ U \subset V}} \mathcal{F}'(U) \mid \forall U' \subset U \in \mathcal{B}, s_U|_{U'} = s_{U'} \right\} \end{aligned}$$

と定める. 制限写像は射影極限から誘導される射である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{\rho_{U,U'}} & \mathcal{F}'(U') \\ \uparrow \varphi_U & \circlearrowleft & \uparrow \psi_{U'} \\ \varprojlim_U \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{f} & \varprojlim_{U'} \mathcal{F}'(U') \end{array}$$

これが層となることを確かめよう. まず, 任意の開集合 V とその開被覆 $\{U_i\}_i \subset \mathcal{B}$ をとる. $s \in \mathcal{F}(V)$ に対して $s|_{U_i} = 0$ とする. すると定義から $U \subset V$ なる任意の $U \in \mathcal{B}$ に対して $s_U \in \mathcal{F}'(U)$ が 0 であることを示せば $s = 0$ ということである. 実際 V の開被覆から U の開被覆 $\{U \cap U_i\}_i \subset \mathcal{B}$ が得られる. また任意の i に対して $U \cap U_i \subset U_i$ より $s_{U_i}|_{U \cap U_i} = s_{U \cap U_i} = 0$ となる. (いま s_{U_i} は $s|_{U_i}$ のこと) したがって任意の i に対して $s_U|_{U \cap U_i} = 0$ となる. いま \mathcal{F}' は層なので $s_U = 0$ よって $s = 0$ がわかった.

また, $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ が $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすとする. よって, $U_i \cap U_j \in \mathcal{B}$ より

Definition 1.3.3. 位相空間 X 上の前層 \mathcal{F} と $x \in X$ に対して, x での \mathcal{F} の茎 (stalk) \mathcal{F}_x という群が定義できる.

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

ただし, U は x の開近傍をすべてを回る U 上の切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ に対して $x \in U$ の茎 \mathcal{F}_x への自然な群準同型の像を s_x と書いて, x での s の芽 (germ) という.

Lemma 1.3.4. \mathcal{F} を X 上の層とする. $s, t \in \mathcal{F}(X)$ が任意の $x \in X$ に対して $s_x = t_x$ ならば $s = t$

Proof. 差を考えれば $t = 0$ のときを考えればいい. $s_x = 0$ ($\forall x \in X$) とすると, x の開近傍 U_x があって $s|_{U_x} = 0$ となる. $\{U_x\}_{x \in X}$ は X の開被覆なので, $s = 0$ となる. ■

Definition 1.3.4. X 上の 2 つの前層 \mathcal{F}, \mathcal{G} とする. 前層の射 $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ とは, X の開集合 U に対して群準同型 $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ があって, 任意の開集合の組 $V \subset U$ に対して $\alpha(V) \circ \rho_{U,V}^{\mathcal{F}} = \rho_{U,V}^{\mathcal{G}} \circ \alpha(U)$ を満たすことをいう. X の任意の開集合 U に対して $\alpha(U)$ が単射ならば α は単射であるという. (全射はうまくいかんっぽい?)

$\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を X 上の前層の射とする. 任意の $x \in X$ に対して α から自然に誘導される群準同型 $\alpha_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ で $(\alpha(U)(s))_x = \alpha_x(s_x)$ が X の任意の開集合 $U, s \in \mathcal{F}(U), x \in U$ で成り立つものが取れる.

α_x が任意の $x \in X$ で全射なら α が全射であるという.

Example 1.3.5. $X = \mathbf{C} \setminus \{0\}$ とし \mathcal{F} を X 上の正則関数がなす層とし, \mathcal{G} を X 上の双正則関数のなす層とする. 今, 任意の開集合 U と任意の $f \in \mathcal{F}(U)$ に対して $\alpha(U)(f) = \exp(f)$ で定義される層の射 $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が全射であることはよく知られている. しかし $\alpha(X) : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$ は全射ではない. 例えば恒等写像は $\exp(f)$ と書けない.

Proposition 1.3.6. $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を X 上の層の射とする.

$$\alpha \text{ が同型} \Leftrightarrow \alpha_x \text{ が同型 } (\forall x \in X)$$

Theorem 1.3.7. 位相空間 X 上の前層 \mathcal{F} に対して, 前層 \mathcal{F} の層化 (sheafification) \mathcal{F}^\dagger は存在する.

Proof. X の開集合 U に対して

$$\mathcal{F}^\dagger(U) = \left\{ \sigma : U \rightarrow \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid \forall x \in U, x \in \exists V \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(V) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in V) \right\}$$

とする. ただし, σ は任意の $x \in U$ に対して $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$ とする. また, $V \subset U$ なる開集合に対し,

$$\begin{array}{ccc} \rho_{U,V}^{\mathcal{F}^\dagger} : \mathcal{F}^\dagger(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}^\dagger(V) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \sigma & \longmapsto & \sigma|_V \end{array}$$

が定義できる. 実際, 任意の $x \in V$ をとる. $V \subset U$ であり, $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より

$$x \in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0)$$

$V_0 = U_0 \cap V$, $t = s|_{V_0}$ とすると任意の $y \in V_0$ に対して

$$\sigma(y) = \sigma|_V(y) = s_y$$

さらに帰納極限の定義から

$$\sigma|_V(y) = t_y$$

次に $\mathcal{F}^\dagger(U)$ がアーベル群, つまり $\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ ならば $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ を示そう.

$\sigma, \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ より任意の $x \in U$ に対して

$$x \in \exists U_0 \subset U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U_0) \text{ s.t. } \sigma(y) = s_y \ (\forall y \in U_0)$$

$$x \in \exists V_0 \subset U : \text{open}, \exists t \in \mathcal{F}(V_0) \text{ s.t. } \tau(z) = t_z \ (\forall z \in V_0)$$

を満たす. いま $W = U_0 \cap V_0$, $s' = s|_W$, $t' = t|_W$ とすると,

$$\begin{aligned} x \in W \subset U : \text{open}, s', t' \in \mathcal{F}(W) \text{ s.t. } (\sigma + \tau)(y) &= \sigma(y) + \tau(y) \\ &= s_y + t_y \\ &= (s + t)_y \ (\forall y \in W) \end{aligned}$$

よって $\sigma + \tau \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ また明らかに可換. よって $\mathcal{F}^\dagger(U)$ はアーベル群.

また, 通常の制限で制限写像を定義しているため, \mathcal{F}^\dagger は前層となる.

更に層となることを示そう.

U を X の開集合とし, $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする. $\sigma \in \mathcal{F}^\dagger(U)$ が任意の i に対して $\sigma|_{U_i} = 0$ とする. つまり任意の $x \in U_i$ に対して $\sigma(x) = 0$ とする. U_i は U を被覆するので結局 $\sigma = 0$ となる.

次に, $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ とし, $\sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_i \cap U_j}$ と仮定すると,

$$\begin{array}{ccc} \sigma : U & \longrightarrow & \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x & \longmapsto & \sigma_i(x) \end{array}$$

ただし, $x \in U_i$. すると, σ は $\sigma_i \in \mathcal{F}^\dagger(U_i)$ を張り合わせて作っているのだからこれは $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ となることが容易にわかる. よって, \mathcal{F}^\dagger は層になる. ■

Proposition 1.3.8. 層化の射 $\theta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\dagger$ に対して、その茎の射 $\theta_x : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x^\dagger$ は同型である。

Lemma 1.3.9. \mathcal{F} を X 上の層とし、 \mathcal{F}' を \mathcal{F} の部分層とする。このとき開集合 U を $\mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ に対応させるものは前層になる。

Proof. この対応を \mathcal{G} とおく。 $V \subset U$ なる開集合 U, V をとる。制限写像を

$$\begin{array}{ccc} \rho_{U,V}^{\mathcal{G}} : \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V)/\mathcal{F}'(V) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ s + \mathcal{F}'(U) & \longmapsto & \rho_{U,V}^{\mathcal{F}}(s) + \mathcal{F}'(V) \end{array}$$

とすると、これは well-defined である。また、 $U \subset V \subset W$ なる開集合の組に対して

$$\rho_{U,W}^{\mathcal{G}} = \rho_{V,W}^{\mathcal{G}} \circ \rho_{U,V}^{\mathcal{G}}$$

が成り立つことは制限写像の定義から明らかである。よって \mathcal{G} は前層。 ■

Definition 1.3.5. Lem:??で定義した前層の層化を \mathcal{F}/\mathcal{F}' と書いて、商層 (quotient sheaf) という。

Definition 1.3.6. $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を前層の射とする。このとき開集合 U に対して $U \mapsto \text{Ker}(\alpha(U))$ とするものは \mathcal{F} の部分層になる。これを $\text{Ker } \alpha$ と書いて、 α の核 (kernel of α) という。

更に、 $U \mapsto \text{Im}(\alpha(U))$ は一般には前層となるので、この層化を $\text{Im } \alpha$ と書いて、 α の像 (image of α) という。

また、 $U \mapsto \text{Coker}(\alpha(U)) = \mathcal{G}(U)/\text{Im}(\alpha(U))$ は一般には前層となるので、この層化を $\text{Coker } \alpha$ と書いて、 α の余核 (cokernel of α) という。

Lemma 1.3.10. \mathcal{F}, \mathcal{G} を X 上の層、 \mathcal{F}' を \mathcal{F} の部分層、 $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を前層の射とする。このとき、

$$\begin{aligned} (\text{Ker } \alpha)_x &= \text{Ker } \alpha_x \\ (\text{Im } \alpha)_x &= \text{Im } \alpha_x \\ (\text{Coker } \alpha)_x &= \text{Coker } \alpha_x \\ (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x &= \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x \end{aligned}$$

が成り立つ。

Proof. $\mathcal{Q}(U) = \mathcal{F}(U)/\mathcal{F}'(U)$ とおく。

このとき、アーベル群の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

が作れる。帰納極限は完全列を完全列に移すので、また Prop:?? より

$$0 \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}'(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{F}(U) \longrightarrow \varinjlim \mathcal{Q}(U) \longrightarrow 0$$

を得る。よって

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'_x \longrightarrow \mathcal{F}_x \longrightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x \longrightarrow 0$$

したがって、

$$\mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x \simeq (\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x$$

を得る。

次に

$$\begin{aligned} (\text{Ker } \alpha)_x &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha(U)(s) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \{s_x \in \mathcal{F}_x \mid \alpha_x(s_x) = 0, x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \text{Ker } \alpha_x \end{aligned}$$

を得る。同様に

$$\begin{aligned} (\text{Im } \alpha)_x &= \{t_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in \exists U : \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(U) \text{ s.t } t = \alpha(U)(s)\} \\ &= \{(\alpha(U)(s))_x \in \mathcal{G}_x \mid x \in U : \text{open}, s \in \mathcal{F}(U)\} \\ &= \{\alpha_x(s_x) \in \mathcal{G}_x \mid s_x \in \mathcal{F}_x\} \\ &= \text{Im } \alpha_x \end{aligned}$$

を得る。また、 $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_x = \mathcal{F}_x/\mathcal{F}'_x$ より

$$(\text{Coker } \alpha)_x = (\mathcal{G}/\text{Im } \alpha)_x = \mathcal{G}_x/\text{Im } \alpha_x = \text{Coker } \alpha_x$$

■

Definition 1.3.7. 層の列

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$$

が完全とは、 $\text{Im } \alpha = \text{Ker } \beta$ が成り立つことをいう。

Proposition 1.3.11. 層の列に対して次が成り立つ。

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \text{ が完全} \iff \text{任意の } x \in X \text{ に対して } \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x \longrightarrow \mathcal{H}_x \text{ が完全}$$

Proof. 明らか。 ■

Definition 1.3.8. X, Y を位相空間, $f: X \rightarrow Y$ を連続写像とする。このとき、 X 上の層 \mathcal{F}, Y 上の層 \mathcal{G} に対して、新たな Y 上の層 $f_*\mathcal{F}$ が

$$V \mapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

によって定義できる。これを \mathcal{F} の順像 (direct image of \mathcal{F}) という。

また、

$$U \mapsto \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

で定義できる新たな X 上の前層 $f^*\mathcal{G}$ の層化 $f^*\mathcal{G}$ を \mathcal{G} の逆像 (inverse image of \mathcal{G}) という。

Proposition 1.3.12. 上の状況で

$$(f^*\mathcal{G})_x = \mathcal{G}_{f(x)} \quad \forall x \in X$$

Proof.

$$(f^*\mathcal{G})_x = \varinjlim_{x \in U} (f^*\mathcal{G})(U) = \varinjlim_{x \in U} \varinjlim_{f(U) \subset V} \mathcal{G}(V) = \mathcal{G}_{f(x)}$$

最後の等号は明らか。 ■

Remark . V を Y の開集合とする。このとき自然な単射 $i: V \rightarrow Y$ に対して

$$i^*\mathcal{G} = \mathcal{G}|_V$$

が成り立つ。

Proposition 1.3.13. $f: X \rightarrow Y$ を位相空間の間の連続写像とし、 \mathcal{F} を X 上の層、 \mathcal{G} を Y 上の層とする。このとき

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

ただし、 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ は圏 \mathcal{C} で $X \rightarrow Y$ なる射全体を表し、 $\mathrm{Sh}(X)$ は X 上の層全体を表す。

Proof. 層化の普遍性より $\theta: f^*\mathcal{G} \rightarrow f^*\mathcal{G} = (f^*\mathcal{G})^\dagger$ を層化の射とすると、

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ph}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \tilde{\alpha} \circ \theta \\ & \longmapsto & \end{array}$$

が成り立つ。つまり

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{PreSh}(X)}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

を示せばいい。次に X 上の開集合 U に対して

$$f_*\mathcal{G}(U) = \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V)$$

なので, $\varphi \in \text{Hom}_{\text{PreSh}(X)}(f_*\mathcal{G}, \mathcal{F})$ に対して

$$\varphi(U) : \varinjlim_{V \supset f(U)} \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

を与えることは帰納極限の定義より $f(U) \subset V$ なる開集合 V に対して

$$\psi'(V) : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

を $f(U) \subset V' \subset V$ ならば,

$$\psi'(V) = \psi'(V') \circ \rho_{V', V}^{\mathcal{G}}$$

となるように与えることである。すなわち $\psi'(V)$ は

$$\psi(V) : \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

と $\rho_{f^{-1}(V), U}^{\mathcal{F}}$ を合成したものである。(帰納系の選び方によらない。)

したがって, $\varphi \in \text{Hom}_{\text{PreSh}(X)}(f_*\mathcal{G}, \mathcal{F})$ を与えることは, $\psi \in \text{Hom}_{\text{Ph}(Y)}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ を与えることと等しい。■

1.4 Ringed Topological Space

Definition 1.4.1. 局所環付き空間とは位相空間 X と X 上の環の層 \mathcal{O}_X の組 (X, \mathcal{O}_X) で、任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{O}_{X, x}$ が局所環となるものをいう。また、この \mathcal{O}_X を (X, \mathcal{O}_X) の構造層 (structure sheaf) という。また (X, \mathcal{O}_X) を単に \mathcal{O}_X と書くことがある。また、 $\mathcal{O}_{X, x}$ の唯一の極大イデアル \mathfrak{m}_x に対してその剰余体 $\mathcal{O}_{X, x}/\mathfrak{m}_x$ を X の点 x での剰余体 (residue field of X at x) といって $k(x)$ と書く。

Definition 1.4.2. 局所環付き空間の射とは

$$(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

とは連続写像 $f : X \rightarrow Y$ と環の層の射 $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ の組 $(f, f^\#)$ で、任意の $x \in X$ に対して $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y, f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, x}$ は局所射となるものをいう。(つまり $f_x^\#(\mathfrak{m}_{Y, f(x)}) \subset \mathfrak{m}_{X, x}$ を満たす。)

Prop:1.3.13 より

$$f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$$

を考えることは

$$f^\# : f^* \mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_X$$

を考えることに等しい。Def:1.4.2 の $f_x^\#$ は下の式で考えている。

Definition 1.4.3. 射 $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ が開はめ込み (open immersion)(resp. 閉はめ込み (closed immersion)) とは連続写像 f が開はめ込み (resp. 閉はめ込み) ^aでかつ任意の $x \in X$ に対して $f_x^\#$ が同型 (resp. 全射) のときをいう。

^a $f : X \rightarrow Y$ が (位相的) 開 (閉) はめ込みとは X と $f(X)$ が同相で $f(X)$ が開 (閉) 集合のときをいう。

Definition 1.4.4. (X, \mathcal{O}_X) を局所環付き空間とする。 \mathcal{I} が \mathcal{O}_X のイデアル層 (sheaf of ideals of \mathcal{O}_X) とは任意の開集合 U に対して $\mathcal{I}(U)$ が $\mathcal{O}_X(U)$ のイデアルになっているときをいう。

Lemma 1.4.1. (X, \mathcal{O}_X) を局所環付き空間とする。 \mathcal{I} を \mathcal{O}_X のイデアル層とする。そして、

$$V(\mathcal{I}) = \{x \in X \mid \mathcal{I}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}$$

とおく。(ちなみに上の諸々から $\mathcal{I}_x \subset \mathcal{O}_{X,x}$ が分かる。)

$j : V(\mathcal{I}) \hookrightarrow X$ を包含写像とする。すると

- $V(\mathcal{I})$ は X の閉集合
- $(V(\mathcal{I}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$ は局所環付き空間
- $j^\#$ は自然な全射

$$\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I} = j_*(j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$$

で $(j, j^\#) : (V(\mathcal{I}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})) \rightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ は閉はめ込みである。

Proof. Claim1. $V(\mathcal{I})$ は X の閉集合

$x \in X \setminus V(\mathcal{I}) = \{x \in X \mid \mathcal{I}_x = \mathcal{O}_{X,x}\}$ に対して $f_x = 1$ なる x の開近傍 U と $f \in \mathcal{I}(U)$ をとる。つまり $f|_V = 1|_V = 1$ なる x の開近傍 $V \subset U$ がある。すると任意の $y \in V$ に対して $f_y = 1 \in \mathcal{I}_y$ となって、この y に対して $\mathcal{I}_y = \mathcal{O}_{X,y}$ なので $V \subset X \setminus V(\mathcal{I})$ となって $X \setminus V(\mathcal{I})$ が開であることがわかる。

Claim2. $(V(\mathcal{I}), j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))$ は局所環付き空間

任意の $x \in V(\mathcal{I})$ に対して

$$(j^*(\mathcal{O}_X/\mathcal{I}))_x = (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x = \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_x$$

は局所環。残りは自明。 ■

Proposition 1.4.2. $f : X \rightarrow Y$ を局所環付き空間の閉はめ込みとする。 Z を局所環付き空間 $V(\mathcal{J})$ とする。ただし、 $\mathcal{J} = \text{Ker } f^\# \subset \mathcal{O}_Y$ 。すると $X \simeq Z$ を自然な閉はめ込み $Z \hookrightarrow Y$ から得る。

Proof. まず次の完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

から Prop:1.3.11 より任意の $y \in Y$ に対して

$$\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{J}_y = (f_*\mathcal{O}_X)_y$$

を得る。よって

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus V(\mathcal{J}) \\ \mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{J}_y & y \in V(\mathcal{J}) \end{cases} \quad \dots (*)$$

を得る。 $f(X)$ は Y の閉集合なので $x \in Y \setminus f(X)$ の開近傍 U で

$$f(X) \cap U = \emptyset$$

となるものがとれる。よって

$$f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \mathcal{O}_X(\emptyset) = 0$$

したがって、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_x = 0$$

また、 $x \in f(X)$ の開近傍 U に対して f での引き戻し $f^{-1}(U)$ は $y = f(x)$ の開近傍である。これを V とおく。逆に、 f は閉はめ込みなので、 X は $f(X)$ と同相なので X に自然に Y の相対位相が入る。つまり、任意の $x \in X$ の開近傍 U に対して $y = f(x) \in Y$ の開近傍 V が存在して $f^{-1}(V)$ とかける。よって、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_x = \varinjlim_{U \ni x} f_*\mathcal{O}_X(U) = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)) = \varinjlim_{V \ni y} \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_{X,y}$$

つまり、

$$(f_*\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & y \in Y \setminus f(X) \\ \mathcal{O}_{X,x} & y = f(x) \end{cases}$$

(*) と比較すれば

$$V(\mathcal{J}) = f(X)$$

が分かる。なので、 $j : Z \hookrightarrow Y$ を包含写像とすると、 f から誘導される同相写像 $g : X \rightarrow Z$ に対して

$$f = j \circ g$$

で、

$$j_*\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Y/\mathcal{J} \simeq f_*\mathcal{O}_X$$

がわかる。容易に

$$f_*\mathcal{O}_X = j_*g_*\mathcal{O}_X$$

が分かるので

$$\mathcal{O}_Z = (j^{-1} \circ j)_*\mathcal{O}_Z = (j^{-1})_*j_*\mathcal{O}_Z \simeq (j^{-1})_*j_*g_*\mathcal{O}_X = (j^{-1} \circ j)_*g_*\mathcal{O}_X = g_*\mathcal{O}_X$$

である。よって、 g は局所環付き空間の同型射である。 $f = j \circ g$ が局所環付き空間の射であることを確認するのは読者に委ねる。 ■

1.5 Schemes

Proposition 1.5.1. A を環、 $X = \operatorname{Spec} A$ とする。このとき以下が成り立つ。

- (1) \mathcal{O}'_X を環の \mathfrak{B} -層とする。 \mathcal{O}'_X が誘導する X 上の層 \mathcal{O}_X は $\mathcal{O}_X(X) = A$ となる。
- (2) 任意の $\mathfrak{p} \in X$ に対して、茎 $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ への標準的な同型がある。特に、 (X, \mathcal{O}_X) は局所環付き空間になる。

Proof. まず、開集合 $U = X$ について Uniqueness 条件を確認する。ほかの基本開集合も同様に示される。 $U_i =$ ■

Definition 1.5.1. 上で定義した局所環付き空間 $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ をアフィンスキーム (affine scheme) という。

Lemma 1.5.2. A を整域とし K をその商体とする。素イデアル 0 に対応する $X = \operatorname{Spec} A$ の点を ξ とする。このとき

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = K$$

が成り立つ。さらに、任意の空でない開集合 $U \subset X$ と $\xi \in U$ に対して標準的な準同型

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$$

は単射となる。開集合の組 $V \subset U$ に対して制限

$$\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$$

は単射となる。

Proof. Prop:1.5.1(2) より

$$\mathcal{O}_{X,\xi} = A_{\xi} = K$$

を得る.

$U = D(f)$ とすると, $\mathcal{O}_X(U) = A_f \subset K$. 一般に

$$U = \bigcup_i D(f_i)$$

と置く. $s \in \mathcal{O}_X(U)$ を飛ばすと $0 \in K$ になるとする. 各開被覆 $D(f_i) \subset U$ への制限を考えると

$$s|_{D(f_i)} = 0$$

が任意の i で成り立つので, $s = 0$ である. よって $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_{X,\xi} \subset K$ は単射.

開集合の組 $\xi \in V \subset U$ に対して制限 $\mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ に対して帰納極限の定義より図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(V) \\ \downarrow & \circlearrowleft & \swarrow \\ & \mathcal{O}_{X,\xi} & \end{array}$$

が可換となるので, 制限は単射である. ■

Lemma 1.5.3. $X = \operatorname{Spec} A$ をアフィンスキームとし, $g \in A$ をとる. このとき開集合 $D(g)$ は X から誘導される局所環付き空間で $\operatorname{Spec} A_g$ に同型なアフィンスキームになる.

Proof. $Y = \operatorname{Spec} A_g$ と置く. 局所化と素イデアルの対応より標準的な開はめ込み

$$i: Y \rightarrow X$$

がある ($\operatorname{Im} i = D(g)$)

$D(h) \subset D(g)$ とする. $A \xrightarrow{\varphi} A_g$ とする. また $\varphi(h) = \bar{h}$ と置く. このとき標準的な同型

$$\mathcal{O}_X(D(h)) = A_h \simeq (A_g)_{\bar{h}} = \mathcal{O}_Y(D(\bar{h})) = i_* \mathcal{O}_Y(D(h))$$

$\{D(h)\}_h$ は $D(g)$ の開基となるので, i は (Y, \mathcal{O}_Y) から $(D(g), \mathcal{O}_X|_{D(g)}) \subset (X, \mathcal{O}_X)$ への同型を誘導する. (Refer to Exercises 2.7) ■

Definition 1.5.2. スキーム (scheme) とは局所環付き空間 (X, \mathcal{O}_X) で開被覆 $\{U_i\}_i$ に対して $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ がアフィンスキームになるものが存在するときをいう. また $\mathcal{O}_X(U)$ の元は (やや不適切であるが) U 上の正則関数 (regular functions on U) という. しかし, 層の関数としての側面をよく表している. (Refer to Exercises 3.4 and Proposition 4.4)

明らかにアフィンスキームはスキームである．また，局所環付き空間 X が開被覆 $\{U_i\}_i$ に対して $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ がスキームだったら X はスキームである．逆に次の命題が従う．

Proposition 1.5.4. X をスキームとする．このとき任意の開集合 $U \subset X$ に対して局所環付き空間 $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ はまたスキームになる．

Proof. 定義より $X = \bigcup_i U_i$ で U_i は開集合で，アフィンスキームになるものがある． $U \cap U_i$ がスキームとなることを示せば十分である． ■

Definition 1.5.3. X をスキームとする． U を X の開集合とする．スキーム $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ を X の開部分スキーム (open subscheme) 更に $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ がアフィンスキームになるとき U をアフィン開集合 (affine open subset) という．

以下， X の開集合 U はスキームの構造が与えられているとする．

Definition 1.5.4. X をスキーム， $f \in \mathcal{O}_X(X)$ とする．

$$X_f := \{x \in X \mid f_x \in \mathcal{O}_{X,x}\}$$

次の条件を考えよう．

X は有限アフィン開被覆 $\{U_i\}_i$ があって $U_i \cap U_j$ はまた有限アフィン開被覆を持つ．

便宜上この条件を条件 A と呼称する．

Proposition 1.5.5. X をスキームとし $f \in \mathcal{O}_X(X)$ とする．このとき X_f は X の開集合で，更に， X が条件 A を満たすなら，制限 $\mathcal{O}_X(X) \rightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$ は同型

$$\mathcal{O}_X(X)_f \simeq \mathcal{O}_X(X_f)$$

を誘導する．

Proof. $x \in X_f$ とする． x の開近傍 U と $g \in \mathcal{O}_X(U)$ があって， $f_x g_x = 1$ を満たすものがある． ■

Limit

第 A 章

A.1 Inductive Limit

とりあえず, 帰納極限だけ述べる. 射影極限は双対概念なのでまあ頑張って.

Definition A.1.1.(帰納系の定義)

(Λ, \leq) を順序集合, \mathcal{C} を圏とする. 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し, $X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ が与えられ, $\lambda \leq \mu$ に対して射 $\varphi_{\mu, \lambda} : X_\lambda \rightarrow X_\mu$ があって次を満たすとき, $\{X_\lambda, \varphi_{\mu, \lambda}\}$ を**順系 (direct system)** または**帰納系 (inductive system)** という. しばし $\varphi_{\mu, \lambda}$ を省略して $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ や $\{X_\lambda\}_\lambda$ で表す.

- 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\lambda, \lambda} = \text{id}_{X_\lambda}$
- $\lambda \leq \mu \leq \nu$ なる任意の $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\nu, \lambda} = \varphi_{\nu, \mu} \circ \varphi_{\mu, \lambda}$

Example A.1.1. 位相空間 X の開集合族 $\{U\}_U$ に対して

$$U \leq V \stackrel{\text{def}}{=} V \subset U$$

と定義する. そして, **AGrp** をアーベル群の成す圏, \mathcal{F} を X 上の前層とする. すると, 各開集合 U に対し, $\mathcal{F}(U) \in \text{Ob}(\mathbf{AGrp})$ で, 前層の定義からアーベル群と制限写像との組 $\{\mathcal{F}(U), \rho_{U, V}\}$ は帰納系となる. 前層の定義は Def:1.3.1 を参照.

Definition A.1.2.(帰納系の射の定義)

Λ を順序集合. $\{X_\lambda, \varphi_{\lambda, \mu}\}, \{Y_\lambda, \psi_{\lambda, \mu}\}$ を Λ 上の圏 \mathcal{C} における帰納系とする. このとき $\{X_\lambda\}$ から $\{Y_\lambda\}$ への射とは $f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y_\lambda$ なる射の族 $\{f_\lambda\}$ で, 任意の $\lambda \leq \mu$ に対して $\psi_{\lambda, \mu} \circ f_\mu = f_\lambda \circ \varphi_{\lambda, \mu}$ となるものを言う.

$$\begin{array}{ccc}
 X_\mu & \xrightarrow{f_\mu} & Y_\mu \\
 \varphi_{\lambda,\mu} \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \psi_{\lambda,\mu} \\
 X_\lambda & \xrightarrow{f_\lambda} & Y_\lambda
 \end{array}$$

Definition A.1.3. \mathcal{C} を圏とし, Λ を順序集合とする. $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を \mathcal{C} の帰納系とする. このとき $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ の順極限 (**direct limit**) または帰納的極限 (**inductive limit**) または帰納極限とは, \mathcal{C} の対象 $\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ と射の族 $\{\varphi_\lambda : X_\lambda \rightarrow \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の組 $\{\varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \varphi_\lambda\}$ で, 次の条件を満たすものをいう.

- $\lambda \leq \mu$ に対して $\varphi_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = \varphi_\lambda$
- $\lambda \leq \mu$ に対して $f_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = f_\lambda$ を満たす任意の射の族 $\{f_\lambda : X_\lambda \rightarrow Y\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して, $f : \varinjlim_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \rightarrow Y$ が一意に存在して

$$f \circ \varphi_\lambda = f_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

を満たす.

Remark . 一般の圏では帰納極限や射影極限は存在するとは限らない. しかし, 存在するとすれば, 同型を除いて一意である.

Proposition A.1.2. 帰納極限は存在すれば, 同型を除いて一意である.

Proof. 証明は後で書く. ■

Category Theory

第 B 章