代数幾何

Fefr

目次

1　代数多様体

1.1　代数的集合

　代数幾何学は代数方程式で定められる図形の幾何学である. 一番素朴な形では, 体 k の元を係数とする連立方程式

$$f_\alpha(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 \quad \alpha = 1, 2, \cdots, l \tag{1.1}$$

の解全体を幾何学的に考察することに他ならない.
しばらく, 体 k を代数的閉体と仮定して話を進める. 体 k の元の n 個の組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ の全体を k^n と記し, 体 k 上の n 次元**アフィン空間** (affine space) と呼ぶ、k^n は体 k 上の n 次元ベクトル空間の構造を持つ.
さて, 連立方程式 (1.1) の体 k での解の全体を $V(f_1, f_2, \cdots, f_l)$ としるし, 連立方程式 (1.1) が定める**代数的集合** (algebraic set) または**アフィン代数的集合** (affine algebraic set) と呼ぶ, すなわち

$$V(f_1, f_2, \cdots, f_l) = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in k^n \mid f_\alpha(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0,\ \alpha = 1, 2, \cdots, l\}$$

一方, $f_1, f_2, \cdots, f_l$ より生成される n 変数多項式環 $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ のイデアル $(f_1, f_2, \cdots, f_l)$ の任意の元 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に対して, $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in V(f_1, f_2, \cdots, f_l)$ であれば,

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$$

が成り立つ.
多項式環 $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ のイデアル I に対して

$$V(I) = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in k^n \mid \forall f \in I : f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0\}$$

と定義し,$V(I)$ をイデアル I が定める代数的集合またはアフィン代数的集合という. すると, 次の補題が成り立つ.

補題 1.1

$I = (f_1, f_2, \cdots, f_l)$ のとき

$$V(I) = V(f_1, f_2, \cdots, f_l)$$

証明

$V(f_1, f_2, \cdots, f_l) \subset V(I)$ は上で示した. 逆に $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in V(I)$ であれば,
$f_\alpha \in I(\alpha = 1, 2, \cdots, l)$ より

$$f_\alpha(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$$

が成り立ち,$V(I) \subset V(f_1, f_2, \cdots, f_l)$ がわかる.

　よって, 今後は連立方程式 (1.1) の代わりにイデアル I から定まる代数的集合 $V(I)$ を考えることにする.

ところで, 零イデアル (0) に対して $V((0)) = k^n$ であるので k^n もアフィン代数的集合と考えることができる. そこで, 以下体 k 上の n 次元アフィン空間を $\mathbb{A}_k^n$ と記すことにする. また, 体 k が文脈的に明らかであれば $\mathbb{A}^n$ と記すことが多い.
さて, このようにイデアルが定めるアフィン代数的集合を考えても, 実際は連立方程式を考えることと本質的に同じであることは、Hilbert **の基底定理** (Hilbert's basis theorem) が保証する.

定理 1.2(Hilbert の基底定理)

多項式環 $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ のイデアルは有限生成である. すなわち, イデアル I は

$$I = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$$

と表すことができる.

命題 1.3

体 k 上の多項式環 $k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ のイデアル $I, J, I_\lambda(\lambda \in \Lambda)$($\Lambda$ は無限集合でもよい) に関して以下が成り立つ.

(1) $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$
(2) $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda) = V(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda)$
(3) $\sqrt{I} \subset \sqrt{J}$ ならば $V(I) \supset V(J)$

証明 (1)

(1)$I \subset J$ であれば $V(I) \supset V(J)$ であることに注意すると,

$$V(I \cap J) \supset V(I), \quad V(I \cap J) \supset V(J)$$

がわかる. したがって,

$$V(I) \cup V(J) \subset V(I \cap J)$$

が成り立つ. 逆に $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in V(I \cap J)$ を考える. もし $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \notin V(I)$ であれば,

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq 0$$

を満たす $f \in I$ がある. このとき, 任意の元 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in J$ に対して $h = fg \in I \cap J$ であるので,

$$h(a_1, a_2, \cdots, a_n) = f(a_1, a_2, \cdots, a_n) g(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$$

であり,

$$g(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$$

が成り立つ. よって $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in V(J)$ である. したがって

$$V(I \cap J) \subset V(I) \cup V(J)$$

が成り立ち (1) がわかる.

証明 (2)

$I_\mu \subset \sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda (\mu \in \Lambda)$ であるので

$$V(I_\mu) \supset V(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda)$$

が成り立ち, したがって

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(\lambda) \supset V(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda)$$

が成り立つことがわかる. 各 λ に対して

$$I_\lambda = (h_{\lambda 1}, h_{\lambda 2}, \cdots, h_{\lambda m_\lambda})$$

とすると,$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V(I_\lambda)$ であれば

$$h_{\lambda j}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m_\lambda$$

が成り立つ.
一方 $\{h_{\lambda j}\}_{\lambda \in \Lambda,\ 1 \leq j \leq m_\lambda}$ はイデアル $\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ を生成するので, $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in V(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda)$ が成り立つ.

証明 (3)

$V(\sqrt{I}) = V(I)$ を示せば十分である.$\sqrt{I} \supset I$ であるので

$$V(\sqrt{I}) \subset V(I)$$

が成り立つ. 一方 $f \in \sqrt{I}$ であれば $f^m \in I$ となる正整数 m が存在する.
$(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in V(I)$ であれば

$$(f(a_1, a_2, \cdots, a_n))^m = 0$$

となり, したがって

$$f(a_1, a_2, \cdots, a_n) = 0$$

が成り立つ. これは $(a_1, a_2, \cdots, a_n) \in V(\sqrt{I})$ を意味する. よって

$$V(\sqrt{I}) \supset V(I)$$

系 1.4

$k[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ の有限個のイデアル $I_1, I_2, \cdots, I_s$ に関して

$$\bigcup_{j=1}^{s} V(I_j) = V(\bigcap_{j=1}^{s} I_j)$$