代数幾何まとめノート

Fefr

2024 年 5 月 29 日

目次

第 1 章 Scheme 5
1.1 Zariski Topology 5
1.2 Algebraic Sets 5
1.3 Sheaves 5

第 2 章 極限 11

Scheme

第 1 章

1.1 Zariski Topology

atodekakuyo

1.2 Algebraic Sets

atodekakuyo

1.3 Sheaves

Definition 1.3.1. X を位相空間とする。X 上の (アーベル群の) **前層** (presheaf) $\mathcal{F}$ とは次のデータ

— U を任意の X の開集合に対して $\mathcal{F}(U)$ はアーベル群。
— 制限写像 (restriction map) と言われる群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が任意の開集合 $V \subset U$ に対して存在する。

そして次の条件を満たす。

(1) $\rho_{U,U} = \mathrm{id}_{\mathcal{F}(U)}$
(2) 任意の開集合 $W \subset V \subset U$ に対して $\rho_{U,W} = \rho_{V,W} \circ \rho_{U,V}$ となる。

$s \in \mathcal{F}(U)$ を U 上の $\mathcal{F}$ の**切断** (section) という。また、$\rho_{U,V}(s) \in \mathcal{F}(V)$ を $s|_V$ と書いて s の

V への制限という。

Definition 1.3.2. 前層 $\mathcal{F}$ が層 (sheaf) とは次の条件を満たすことをいう。

(4) (Uniqueness) U を X の開集合とし $\{U_i\}_i$ をその開被覆とする。$s \in \mathcal{F}(U)$ が任意の i に対して $s|_{U_i} = 0$ ならば $s = 0$

(5) (Glueing local sections) 上の状況で、$s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ が $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすならば、$s|_{U_i} = s_i$ を満たす $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する。

Remark . $\mathcal{F}$ が層ならば $\mathcal{F}(\varnothing) = 0$ となる。

Example 1.3.1. X を位相空間とする。
$\mathcal{C}^0_X$ を X の開集合 U に対して $U \to \mathbf{C}$ なる連続写像全体の集合 $\mathcal{C}^0_X(U)$ を対応させるものとし、制限写像を普通の制限とする。すると、$\mathcal{C}^0_X$ は X 上の層となる。

Proof. $V \subset U$ なる開集合 U, V に対して U 上の連続写像 $f \in \mathcal{C}^0_X(U)$ を V に制限することによって得られる V 上の連続写像を $\rho_{U,V}(f)(= f|_V)$ と書く。すると、これは $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間 ($\mathbf{C}$ 上の関数空間) の準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{C}^0_X(U) \to \mathcal{C}^0_X(V)$ となる。つまり $(\mathcal{C}^0_X, \rho)$ は前層となる。
また、(4) を満たすのは明らかで。(5) もすぐに成り立つことがわかる。$\{U_i\}_i$ を U の開被覆とする。$f_i \in \mathcal{C}^0_X(U_i)$ が $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ を満たすとする。するとそれらを張り合わせた関数を f とすればこれは $f \in \mathcal{C}^0_X(U)$ であり、$f|_{U_i} = f_i$ となる。よって $(\mathcal{C}^0_X, \rho)$ は層となる。これを連続写像が成す層という。 ■

Example 1.3.2. X を位相空間とする。
A を自明でないアーベル群とする。$\mathcal{A}_X$ を X の空でない開集合 U に対して $\mathcal{A}_X(U) = A$ に、空集合 $\varnothing$ に対して $\mathcal{A}_X(\varnothing) = 0$ に対応させるものとし、制限写像を空でない開集合 $V \subset U$ に対して $\rho_{U,V} = \mathrm{id}_A$ とし、$\rho_{U,\varnothing} = 0$ とする。
すると、$(\mathcal{A}_X, \rho)$ は X 上の前層にはなるが、一般に層とはならない。

Proof. 例えば、X が連結でないとすると、非交差な開集合 U, V があって $X = U \cup V$ とかける。すると $\{U, V\}$ は X の開被覆となる。$s_U \in \mathcal{A}_X(U) = A$ が $s_U|_{U \cap V} = s_U|_{\varnothing} = 0 = s_V|_{U \cap V}$ を満たすとする。このとき、任意の $s \in \mathcal{A}_X(X) = A$ で $s|_U = s|_V = s$ となり層とならない。 ■

Remark . $\mathcal{B}$ を位相空間 X の開基で有限交叉で閉じているものとする。(つまり任意の $U, V \in \mathcal{B}$ に対して $U \cap V \in \mathcal{B}$. e.g. $\operatorname{Spec} A$ の開基 $\{D(f)\}_f$) このとき $\mathcal{B}$-前層 ($\mathcal{B}$-presheaf) $\mathcal{F}_0$ とは

— $U \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{F}_0(U)$ はアーベル群。
— $V \subset U \in \mathcal{B}$ に対して群準同型 $\rho_{U,V} : \mathcal{F}_0(U) \to \mathcal{F}_0(V)$ が定まる。

としたもの。
$\mathcal{B}$-層 ($\mathcal{B}$-sheaf)$\mathcal{F}_0$ から X 上の層 $\mathcal{F}$ を作ることができる。
位相空間 X の任意の開集合 U をとり、$\{U_i\}_i$ をその開被覆とする。($U_i \in \mathcal{B}$)

$$\mathcal{F}(U) := \left\{ (s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}_0(U_i) \;\middle|\; \text{任意の } i,j \text{ に対して } s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \right\}$$

と定義する。するとこれは開被覆によらない。実際 $\mathcal{F}(U)_{U_i}$ を開被覆 $\{U_i\}_i$ による $\mathcal{F}(U)$ とし、$\{V_j\}_j$ を別の開被覆とすると、$\{U_i \cap V_j\}_{i,j}$ はこれら 2 つの細分である。$\mathcal{F}(U)_{U_i} \to \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$ なる群準同型を $(s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap V_j})_{i,j}$ で定義できる。実際

$$\begin{aligned}
s_i|_{U_i \cap V_j}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} &= s_i\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\
&= s_i|_{U_i \cap U_{i'}}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\
&= s_{i'}|_{U_i \cap U_{i'}}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \qquad (\because (s_i)_i \in \mathcal{F}(U)_{U_i}) \\
&= s_{i'}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})} \\
&= s_{i'}|_{U_{i'} \cap V_{j'}}\Big|_{(U_i \cap V_j) \cap (U_{i'} \cap V_{j'})}
\end{aligned}$$

より $(s_i|_{U_i \cap V_j})_{i,j} \in \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$
また、$(s_{ij})_{ij} \in \mathcal{F}(U)_{U_i \cap V_j}$ を取ると、$(s_{ij})_{ij} = (s_i|_{U_i \cap V_j})$ と出来るので全射 (？？？？？)
Kernel を計算すると

$$\begin{aligned}
s_i|_{U_i \cap V_j} &= 0 \quad (\forall i,j) \\
s_i|_{U_i} = s_i &= 0 \quad (\forall i) \quad (\because (4))
\end{aligned}$$

よって Kernel が自明なので単射。

Definition 1.3.3. 位相空間 X 上の前層 $\mathcal{F}$ と $x \in X$ に対して、x での $\mathcal{F}$ の**茎 (stalk)**$\mathcal{F}_x$ という群が定義できる。

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

ただし、U は x の開近傍をすべてを回る。U 上の切断 $s \in \mathcal{F}(U)$ に対して $x \in U$ の茎 $\mathcal{F}_x$ への自然な群準同型の像を s_x と書いて、x での s の**芽 (germ)** という。

Lemma 1.3.3. ***$\mathcal{F}$ を X 上の層とする。$s, t \in \mathcal{F}(X)$ が任意の $x \in X$ に対して $s_x = t_x$ ならば $s = t$***

Proof. 差を考えれば $t=0$ のときを考えればいい。$s_x=0\ (\forall x\in X)$ とすると、x の開近傍 U_x があって $s|_{U_x}=0$ となる。$\{U_x\}_{x\in U_x}$ は X の開被覆なので、$s=0$ となる。 ■

Definition 1.3.4. X 上の 2 つの前層 $\mathcal{F},\mathcal{G}$ とする。**前層の射** $\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ とは、X の開集合 U に対して群準同型 $\alpha(U):\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$ があって、任意の開集合の組 $V\subset U$ に対して $\alpha(V)\circ\rho^{\mathcal{F}}_{U,V}=\rho^{\mathcal{G}}_{U,V}\circ\alpha(U)$ を満たすことをいう。
X の任意の開集合 U に対して $\alpha(U)$ が単射ならば α は単射であるという。(全射はうまくいかんっぽい？)

$\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ を X 上の前層の射とする。任意の $x\in X$ に対して α から自然に誘導される群準同型 $\alpha_x:\mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$ で $(\alpha(U)(s))_x=\alpha_x(s_x)$ が X の任意の開集合 $U,s\in\mathcal{F}(U),x\in U$ で成り立つものが取れる。
α_x が任意の $x\in X$ で全射なら α が全射であるという。

Example 1.3.4. $X=\mathbf{C}\setminus\{0\}$ とし $\mathcal{F}$ を X 上の正則関数がなす層とし、$\mathcal{G}$ を X 上の双正則関数のなす層とする。今、任意の開集合 U と任意の $f\in\mathcal{F}(U)$ に対して $\alpha(U)(f)=\exp(f)$ で定義される層の射 $\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ が全射であることはよく知られている。しかし $\alpha(X):\mathcal{F}(X)\to\mathcal{G}(X)$ は全射ではない。例えば恒等写像は $\exp(f)$ と書けない。

Proposition 1.3.5. ***$\alpha:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ を X 上の層の射とする。***

$$\alpha \text{ が同型} \Leftrightarrow \alpha_x \text{ が同型}\ (\forall x\in X)$$

Theorem 1.3.6. ***位相空間 X 上の前層 $\mathcal{F}$ に対して、前層 $\mathcal{F}$ の層化 (sheafification)$\mathcal{F}^\dagger$ は存在する。***

Proof. X の開集合 U に対して

$$\mathcal{F}^\dagger(U)=\left\{\sigma:U\to\prod_{x\in U}\mathcal{F}_x\ \middle|\ \forall x\in U, x\in\exists V\subset U:\mathrm{open},\exists s\in\mathcal{F}(V)\ \mathrm{s.t.}\ \sigma(y)=s_y\ (\forall y\in V)\right\}$$

とし、$V\subset U$ なる開集合に対し、

$$\begin{array}{cccc}\rho^{\mathcal{F}^\dagger}_{U,V}: & \mathcal{F}^\dagger(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}^\dagger(V)\\ & \cup & & \cup\\ & \sigma & \longmapsto & \sigma|_V\end{array}$$

が定義できる。実際、任意の $x\in V$ をとる。$V\subset U$ であり、$\sigma\in\mathcal{F}^\dagger(U)$ より

$$x\in\exists U_0\subset U\text{:open,}\exists s\in\mathcal{F}(U_0)\ \text{ s.t. }\ \sigma(y)=s_y\ (\forall y\in U_0)$$

$V_0=U_0\cap V,\quad t=s|_{V_0}$ とすると任意の $y\in V_0$ に対して

$$\sigma(y)=\sigma|_V(y)=s_y$$

さらに帰納極限の定義から

$$\sigma|_V(y) = t_y$$

次に $\rho^{\mathcal{F}^\dagger}_{U,V}$ が準同型になっていることつまり

$$\rho^{\mathcal{F}^\dagger}_{U,V}(\sigma + \tau) = \rho^{\mathcal{F}^\dagger}_{U,V}(\sigma) + \rho^{\mathcal{F}^\dagger}_{U,V}(\tau)$$

が成り立つことを示そう。■

極限

第 2 章

とりあえず、帰納極限だけ述べる。射影極限は双対概念なのでまぁ頑張って。

Definition 2.0.1.(帰納系の定義)
$(\Lambda, \le)$ を順序集合、$\mathscr{C}$ を圏とする。各 $\lambda \in \Lambda$ に対し、$X_\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ が与えられ、$\lambda \le \mu$ に対して射 $\varphi_{\mu,\lambda} : X_\lambda \to X_\mu$ があって次を満たすとき、$\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を**順系 (direct system)** または**帰納系 (inductive system)** という。しばし $\varphi_{\mu,\lambda}$ を省略して $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ や $\{X_\lambda\}_\lambda$ で表す。

— 任意の $\lambda \in \Lambda$ に他逸して $\varphi_{\lambda,\lambda} = \mathrm{id}_{X_\lambda}$
— $\lambda \le \mu \le \nu$ なる任意の $\lambda, \mu, \nu \in \Lambda$ に対して $\varphi_{\nu,\lambda} = \varphi_{\nu,\mu} \circ \varphi_{\mu,\lambda}$

Definition 2.0.2.(帰納系の射の定義)
Λ を順序集合。$\{X_\lambda, \varphi_{\lambda,\mu}\}, \{Y_\lambda, \psi_{\lambda,\mu}\}$ を Λ 上の圏 $\mathscr{C}$ における帰納系とする。このとき $\{X_\lambda\}$ から $\{Y_\lambda\}$ への射とは $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ なる射の族 $\{f_\lambda\}$ で、任意の $\lambda \le \mu$ に対して $\psi_{\lambda,\mu} \circ f_\mu = f_\lambda \circ \varphi_{\lambda,\mu}$ となるものを言う。

Definition 2.0.3. $\mathscr{C}$ を圏とし、Λ を順序集合とする。$\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ を $\mathscr{C}$ の帰納系とする。このとき $\{X_\lambda, \varphi_{\mu,\lambda}\}$ の**順極限 (direct limit)** または**帰納的極限 (inductive limit)** または**帰納極限**とは、$\mathscr{C}$ の対象 $\varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ と射の族 $\{\varphi_\lambda : X_\lambda \to \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の組 $\{\varinjlim X_\lambda, \varphi_\lambda\}$ で、次の条件を満たすものをいう。

— $\lambda \le \mu$ に対して $\varphi_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = \varphi_\lambda$
— $\lambda \le \mu$ に対して $f_\mu \circ \varphi_{\mu,\lambda} = f_\lambda$ を満たす任意の射の族 $\{f_\lambda : X_\lambda \to Y\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して、$f : \varinjlim_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to Y$ が一意に存在して

$$f \circ \varphi_\lambda = f_\lambda \quad (\forall \lambda \in \Lambda)$$

を満たす。

Remark . 一般の圏では帰納極限や射影極限は存在するとは限らない。しかし、存在するとすれば、同型を除いて一意である。

Proposition 2.0.1. **帰納極限は存在すれば、同型を除いて一意である。**

Proof. 証明は後で書く。■