基礎気象学講義 復習問題

第 7 回

気象力学 前編：プリミティブ方程式系

1　問題

$\boxed{1}$ 気象力学におけるプリミティブ方程式系とは、通常次の 5 つの方程式をさす。

- 球面座標系における運動方程式 (3 成分を別と数える場合、プリミティブ方程式系は 7 つの方程式からなる)
- 熱力学の第一法則
- 気体の状態方程式
- 連続方程式 (質量保存則)
- 静水圧平衡の式や浅水方程式など、層構造あるいは水蒸気輸送に関する方程式

これらについて、その式・式全体及び各項の意味・出てくる変数とその表す物理量の一覧を書き下しなさい。
但し、「層構造あるいは水蒸気輸送に関する方程式」については、静水圧平衡の式を採用して記しなさい。

$\boxed{2}$ 教科書の以下の式をプリミティブ方程式から導出しなさい。

(1) (5.23) 式
(2) (5.28) 及び (5.29) 式
(3) (5.30) 式
(4) (5.31) 式

$\boxed{3}$ 気象力学は式いじりが非常に多く、理論の権化であるという印象を抱いたかもしれない。そこで、本問では具体例について考察することで、実際の現象に目を向けてみよう。複雑な計算は電卓などを用いて良い。
以下の問題では、大気の気体定数は $R = 287\mathrm{J\ K^{-1}\ kg^{-1}}$ とする。(本問は、筆者が受けた気象力学の授業の問題の引用である)

(1) 北緯 35 度の地点にある大砲から砲弾を 20km 先の目標に目がけて 1000m/s の速度で発射した。砲弾はコリオリ力の影響でどれだけ目標からずれるか計算しなさい。なお、地球の自転角速度は $\Omega = 7.292 \times 10^{-5}\mathrm{s^{-1}}$ で、砲弾は空気抵抗で減速したり、重力によって途中で着地しないとする。
(2) 赤道上にある高さ 5000m の台の上から物体を落下させたとき、空気抵抗を無視すると、物体が地上に落下した地点は、放出した地点からどの方向にどれだけずれているか。
(3) 一定の角速度で回転している竜巻を考える。竜巻の中心から 100m の距離での風速は 100m/s で、気圧は 1000hPa である。この地点より竜巻の中心までの範囲で、風は完全に同心円状に吹いており、気圧と風速の間には旋衡風の関係が成り立っているとする。さらに、この範囲では気温は一定で 288K だとした場合、竜巻の中心および中心から半径 50m の地点の気圧を求めなさい。
(4) コリオリパラメータが $1.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{s^{-1}}$ の地点で 850hPa 面での地衡風は風速 10m/s の北風だった。またこの地点上空の 850hPa から 700hPa の間の平均気温は南東向きに 100km あたり 3K 上昇する勾配が、700hPa から 500hPa の間の平均気温は南向きに同じ大きさの勾配が見られた。以上のデータからこの地点上空 700hPa および 500hPa での地衡風の風速と風向（真北から時計回りに測った角度：単位は度）を

求めなさい。

2 答案

$\boxed{1}$

$$\frac{du}{dt}-\frac{\tan\varphi}{a}uv-fv=F_\lambda-\frac{1}{\rho a\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial\lambda} \tag{1}$$
$$\frac{dv}{dt}-\frac{\tan\varphi}{a}u^2-fu=F_\varphi-\frac{1}{\rho a}\frac{\partial p}{\partial\varphi} \tag{2}$$
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g=0 \tag{3}$$
$$C_p\frac{dT}{dt}-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dt}=dQ \tag{4}$$
$$p=\rho RT \tag{5}$$
$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{6}$$
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g=0 \tag{7}$$
$$\tag{8}$$

(1) 水平方向 (緯線方向) の運動方程式
左辺 1 項目は x 方向の加速度、2 項目は風による摩擦力、3 項目はコリオリ力となる。右辺 1 項目は経度方向の摩擦力、2 項目は気圧傾度力である。
(2) 水平方向 (経線方向) の運動方程式
左辺 1 項目は y 方向の加速度、2 項目は風による摩擦力、3 項目はコリオリ力となる。右辺 1 項目は緯度方向の摩擦力、2 項目は気圧傾度力である。
(3) 鉛直方向の運動方程式
左辺 1 項目は気圧傾度力、2 項目は重力加速度を意味する。
(4) 熱力学第 1 法則
エネルギー変化を記述した式。左辺 1 項目はした仕事、2 項目はされた仕事、右辺は残った熱量
(5) 状態方程式
大気状態を記述した式。左辺は気圧、右辺は左から空気密度、気体定数、(絶対) 温度である。
(6) 連続の式
質量の保存を意味する。左辺 1 項目は空気密度の時間変化率、2 項目は密度の移流である。
(7) 静水圧平衡の式
重力と圧力が釣り合っている状態の式。左辺 1 項目は圧力の差によってはたらく加速度、2 項目は重力加速度を意味する。
変数: λ: 経度, φ: 緯度, a: 地球の半径, f: 摩擦力, u:x 方向 (緯線) の速度, v:y 方向 (経線) の速度, ρ: 気体の密度, p: 気圧, g: 重力加速度

$\boxed{2}$

$\boxed{3}$ (1) この物体が 20km 先に着弾するまでにかかる時間は 20[km]/1[km/s] = 20[s] である。
ここで、等加速度運動の距離は $\frac{1}{2}at^2$ なので、コリオリ力 f は $f=2vsin\phi=2\times7.292\times10^{-5}[s^{-1}]\times\sin(\frac{7}{36}\pi)$ となる。
従って、$\frac{1}{2}\times(2\times7.292\times10^{-5}[s^{-1}]\times\sin(\frac{7}{36}\pi))20^2=0.0167...$
よって約 16m ずれる。

(2) 地球中心からの距離 r にある物体の緯度方向の角運動量は保存されるので、

$$r^2\left(\Omega + \frac{d\phi}{dt}\right) = const \tag{9}$$

となる。これを時間微分すると、$2r(\Omega + \frac{d\phi}{dt})\frac{dr}{dt} + r^2\frac{d^2\phi}{dt^2} = 0$ となり、変形すると $\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{2}{r}(\Omega + \frac{d\phi}{dt})\frac{dr}{dt}$ となる。

高さ 5000m のため、重力加速度がほぼ一定と見なせるので、$\frac{dr}{dt} = -gt$ となる。また、$|\Omega| \gg |\frac{d\phi}{dt}|$ なので、

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} \simeq \frac{2\Omega g}{r}t \tag{10}$$

となる。

時間積分すると、$\phi = \frac{\Omega g}{3r}t^3 + C_0 t + C_1$ となる。ただし C_0, C_1 は積分定数。

物体が落下した直後は t=0 であり、$\phi = 0, \frac{d\phi}{dt} =$ なので、$C_0 = 0$ である。

地面に到着する直後は t=T, $\phi = \theta$ とすると、$C_1 = 0$ となる。

従って、$\theta = \frac{\Omega g T^3}{3r}$ となる。

一方、鉛直方向の運動は t=0 のとき r = a+h, t=T のとき r = a となる。(a は地球の半径) よって、h = $\frac{1}{2}gT^2$ となる。

従って、$\theta = \frac{\Omega g T^3}{3r} = \frac{\Omega (2h)^(3/2)}{3r\sqrt{(g)}}$ となる。また、r≃a なので、$\frac{\Omega (2h)^(3/2)}{3a\sqrt{(g)}}$ と見れる。

以上より、7.764... となり、約 7.76m 東にずれる。

(3) 状態方程式より、p=ρ RT となり、$\rho = \frac{P}{RT}$ と変形できる。また、円の速度は v = rΩ で求まる。

旋衡風の式 $V^2 = \frac{r}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$ に、状態方程式を代入すると、$V^2 = \frac{rRT}{p}\frac{\partial p}{\partial r}$ である。

この式を p について解くと、

$$p = A\exp^{\frac{r^2}{2RT}} \tag{11}$$

となる。ただし、A は任意定数である。また、$A = \frac{p}{\exp^{\frac{r^2}{2RT}}}$ を解くと A の値は約 941.3 となる。

よって、竜巻の中心では、941.3hPa,50m 離れたところでは、955.6hPa である。

(4)