

0.1 Обчислення напруженості поля

Нехай є деяке електростатичне поле і невідома функція $u(x, y, z)$, що задає величину електростатичного потенціалу в кожній точці області простору.

Напруженість і потенціал електростатичного поля пов'язані співвідношенням

$$E = -\nabla u.$$

або

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial u}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial u}{\partial z}. \quad (1)$$

За теоремою Гауса для напруженості електричного поля [1]:

$$\nabla \cdot E = 0$$

або

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

Піставляючи 1 в 2, отримуємо рівняння, що описує невідому функцію $u(x, y, z)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

або

$$\Delta u = 0.$$

При цьому сумарний потенціал на поверхні тіла в початковий момент буде дорівнювати деякій константі

$$u|_S = 1.$$

(з огляду на те, що поверхня тіла є добре провідною, можна вважати, що потенціал на поверхні в кожний момент постійний)

Оскільки шукана функція u задана в обмеженій області і відомі її значення на границі цієї області, задача, що розглядається, є крайовою задачею Діріхле.

Фундаментальний розв'язок тривимірного рівняння Лапласа: $F_{mp} = \frac{1}{4\pi r_{mp}}$, де

$$r_{mp} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

(посилання на Тіхнова, Самарського - рівняння мат. фізики)

Для довільної точки М області, що розглядається, буде справедливо:

// **TODO** Розписати, як ми це отримали

$$u_M = \int_S \frac{\partial u}{\partial n}(P) F_{MP} dS_P - \int_S u_P \frac{\partial F_{MP}}{\partial n} dS_P$$

Оскільки поверхня нашого тіла апроксимується трикутними полігонами, можна інтеграли по площі поверхні тіла переписати як суму інтегралів по площі кожного з полігонів (постійна на кожному полігоні):

$$u_M = \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial n}(j) \int_{S_j} F_{MP} dS_j - \sum_{j=1}^N u_j \int_{S_j} \frac{\partial F_{MP}}{\partial n} dS_j \quad (3)$$

(u та її похідна можуть бути винесені з-під інтегралу, оскільки на кожному полігоні вони приймають постійне значення).

В останній формулі замість М послідовно підставивши N точок (N – кількість полігонів, які апроксимують поверхню тіла), кожна з яких є центром одного з полігонів, отримаємо N рівнянь:

$$u_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial n}(j) \int_{S_j} F_{iP} dS_j - \sum_{j=1}^N u_j \int_{S_j} \frac{\partial F_{iP}}{\partial n} dS_j, i = 1..N$$

Позначимо

$$A_{ij} = \int_{S_j} F_{iP} dS_j$$

$$B_{ij} = \int_{S_j} \frac{\partial F_{iP}}{\partial n} dS_j.$$

Ці коефіцієнти є постійними для задачі, що розглядається, тому можуть бути обчислені лише раз для кожного тіла і використовуватись в подальшому без змін. Можна побачити, що при $i = j$ в вищезазначених формулах з'являться невласні інтеграли, які належить обчислити окремо.

Отримаємо систему з N алгебраїчних рівнянь відносно $\frac{\partial u}{\partial n}(j)$

$$u_i = \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial n}(j) A_{ij} - \sum_{j=1}^N u_j B_{ij}, i = 1..N$$

або

$$\sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial n}(j) A_{ij} = u_i + \sum_{j=1}^N u_j B_{ij}, i = 1..N$$

Розв'язавши дану систему лінійних алгебраїчних рівнянь, отримаємо значення $\frac{\partial u}{\partial n}(j)$. Таким чином, підставивши ці значення в 3, можна знайти значення u_M для будь-якої точки області.

//задача дирихле, u , u_i на границе известно

//интеграл B_{ij} - телесный угол, под которым полигон виден из точки М

// интегральное уравнение Фернгольда 1-2 рода (1 рода - некорректно - но для случая гладких ядер. если $i=j$, то расстояние между ядрами 0)

0.2 Опис розв'язання

Програма дозволяє проводити моделювання як із врахуванням власного електричного поля КА, так і без нього.

Розглянемо, як обчислюється зміна траєкторії частинок при врахуванні електричного поля.

За допомогою підпрограми на фортрані знаходимо вектор градієнту G в бажаній точці. Як відомо, напруженість електричного поля E має зворотній напрямок:

$$E = -G.$$

Щоб знайти величину напруженості в точці, застосуємо закон Кулона для знаходження напруженості на відстані r від сфери, що має заряд q_S :

$$|E| = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q_S}{R^2},$$

де R – відстань від точки до центру сфери.

Отже, знайшовши вектор напруженості, змінюємо його довжину на цю величину.

Електричне поле діє на частинку із силою

$$F = q \cdot E,$$

де q – заряд частинки. Звідси, а також із другого закону Ньютона

$$F = m \cdot a,$$

знаходимо прискорення частинки:

$$a = \frac{E \cdot q}{m}.$$

Знаючи прискорення, знаходимо відстань, що пройде частинка, та її нову швидкість:

$$S = V \cdot t + G \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$V = V_0 + a \cdot t,$$

де t – крок часу, з яким проводиться моделювання.

Оскільки знайдена відстань є векторною величиною, можемо знайти координати нового положення частинки, виконавши зсув попереднього її положення на цей вектор:

$$P = P_0 + S.$$

0.3 Режими роботи програми

Програма має три режими роботи (бажаний режим задається аргументом командного рядка):

- 1.

Література

[1] А.М. Макаров, Л.А. Луньова *Основи електромагнетизму* МДТУ ім. Н.Е. Баумана