0.1 Обчислення напруженості поля

Нехай є деяке електростатичне поле і невідома функція $u(x, y, z)$, що задає величину електростатичного потенціалу в кожній точці області простору.

Напруженість і потенціал електростатичного поля пов'язані співвідношенням

$$E = -\nabla u.$$

або

$$E_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial u}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{1}$$

За теоремою Гауса для напруженості електричного поля [1]:

$$\nabla \cdot E = 0$$

або

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

Піставляючи 1 в 2, отримуємо рівняння, що описує невідому функцію $u(x, y, z)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

або

$$\Delta u = 0.$$

При цьому сумарний потенціал на поверхні тіла в початковий момент буде дорівнювати деякій константі

$$u|_S = 1.$$

(з огляду на те, що поверхня тіла є добре провідною, можна вважати, що потенціал на поверхні в кожний момент постійний).

Оскільки шукана функція u задана в обмеженій області і відомі її значення на границі цієї області, задача, що розглядається, є крайовою задачею Діріхле.

Введемо функцію

$$F_{MP} = \frac{1}{4\pi r_{MP}},$$

де

$$r_{MP} = \sqrt{(x_M - x_P)^2 + (y_M - y_P)^2 + (z_M - z_P)^2}.$$

Ця функція називається фундаментальним розв'язком тривимірного рівняння Лапласа. Тоді за другою формулою Гріна [2], для довільної точки M області (область поза літальним апаратом, яка обмежується поверхнею літального апарату) буде справедливо:

$$u_M = \int\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}(P) F_{MP}\, dS_P - \int\limits_S u_P \frac{\partial F_{MP}}{\partial n}\, \mathrm{d}S_P$$

Оскільки поверхня нашого тіла апроксимується трикутними полігонами, можна інтеграли по площі поверхні тіла переписати як суму інтегралів по площі кожного з полігонів (яка є постійною на кожному полігоні):

$$u_M = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial n}(j) \int\limits_{S_j} F_{MP}\, dS_j - \sum_{j=1}^{N} u_j \int\limits_{S_j} \frac{\partial F_{MP}}{\partial n}\, dS_j \tag{3}$$

(u та її похідна можуть бути винесені з-під знаку інтегралу, оскільки на кожному полігоні вони приймають постійне значення).

В останній формулі замість M послідовно підставивши N точок (N – кількість полігонів, які апроксимують поверхню тіла), кожна з яких є центром одного з полігонів, отримаємо N рівнянь:

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial n}(j) \int\limits_{S_j} F_{iP}\, dS_j - \sum_{j=1}^{N} u_j \int\limits_{S_j} \frac{\partial F_{iP}}{\partial n}\, dS_j, i = 1..N$$

Позначимо поверхневі інтеграли по полігонам, що є коефіцієнтами, наступним чином:

$$A_{ij} = \int\limits_{S_j} F_{iP}\, dS_j$$

$$B_{ij} = \int\limits_{S_j} \frac{\partial F_{iP}}{\partial n}\, dS_j.$$

Ці коефіцієнти є постійними для задачі, що розглядається, тому можуть бути обчислені лише раз для кожного тіла і використовуватись в подальшому без змін. Можна побачити, що при $i = j$ в вищезазначених формулах з'являться невласні інтеграли, які належить обчислити окремо.

Отримаємо систему з N алгребраїчних рівнянь відносно $\frac{\partial u}{\partial n}(j)$

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial n}(j) A_{ij} - \sum_{j=1}^{N} u_j B_{ij}, i = 1..N$$

або

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial n}(j) A_{ij} = u_i + \sum_{j=1}^{N} u_j B_{ij}, i = 1..N$$

Розв'язавши дану систему лінійних алгебраїчних рівнянь, отримаємо значення $\frac{\partial u}{\partial n}(j)$. Таким чином, підставивши ці значення в 3, маємо можливість знайти значення u_M для будь-якої точки області.

Розв'зання вищеописаної задачі Діріхле відбувається у зовнішньому модулі, що написаний на мові Fortran і підключається до програми як об'єктний файл.

0.2 Опис розв'зання

Програма дозволяє проводити моделювання як із врахуванням власного електричного поля КА, так і без нього.

Розглянемо, як обчислюється зміна траєкторії частинок при врахуванні електричного поля.

За допомогою підпрограми на фортрані знаходимо вектор градієнту G в бажаній точці. Як відомо, напруженість електричного поля E має зворотній напрямок:

$$E = -G.$$

Щоб знайти величину напруженості в точці, застосуємо закон Кулона для знаходження напруженості на відстані r від сфери, що має заряд q_S:

$$|E| = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{q_S}{R^2},$$

де R – відстань від точки до центру сфери.

Отже, знайшовши вектор напруженості, змінюємо його довжину на цю величину.

Електричне поле діє на частинку із силою

$$F = q \cdot E,$$

де q – заряд частинки. Звідси, а також із другого закону Ньютона

$$F = m \cdot a,$$

знаходимо прискорення частинки:

$$a = \frac{E \cdot q}{2m}.$$

Знаючи прискорення, знаходимо відстань, що пройде частинка, та її нову швидкість:

$$S = V \cdot t + G \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{t^2}{2}$$

$$V = V_0 + a \cdot t,$$

де t – крок часу, з яким проводиться моделювання.

Оскільки знайдена відстань є векторною величиною, можемо знайти координати нового положення частинки, виконавши зсув попереднього її положення на цей вектор:

$$P = P_0 + S.$$

0.3 Режими роботи програми

Програма має три режими роботи (бажаний режим задається аргументом командного рядка):

1. 1

Література

[1] А.М. Макаров, Л.А. Луньова *Основи електромагнетизму* МДТУ ім. Н.Е. Баумана

[2] Ільїн А. М. *Рівняння математичної фізики* Челябінськ, Челябінський державний университет, 2005