Нехай є деяке електростатичне поле і невідома функція $u(x, y, z)$, що задає величину електростатичного потенціалу в кожній точці області простору.

Задача пошуку невідомої функції $u(x, y, z)$ описується рівнянням Лапласа: (Чому?)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

або

$$\Delta u = 0.$$

При цьому сумарний потенціал на поверхні тіла в початковий момент буде дорівнювати деякій константі

$$u|_S = 1.$$

(з огляду на те, що поверхня тіла є добре провідною, можна вважати, що потенціал на поверхні в кожний момент постійний)

(ця крайова задача є задачею Діріхле)

Фундаментальний розв'язок тривимірного рівняння Лапласа: $F_{mp} = \frac{1}{4\pi r_{mp}}$, де

$$r_{mp} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

(посилання на Тіхнова, Самарського - рівняння мат. фізики)

Для довільної точки M області, що розглядається, буде справедливо:

// **TODO** Розписати, як ми це отримали

$$u_M = \int\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}(P) F_{MP} \, \mathrm{d}S_P - \int\limits_S u_P \frac{\partial F_{MP}}{\partial n} \, \mathrm{d}S_P$$

Оскільки поверхня нашого тіла апроксимується трикутними полігонами, можна інтеграли по площі поверхні тіла переписати як суму інтегралів по площі кожного з полігонів (постійна на кожному полігоні):

$$u_M = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial n}(j) \int\limits_{S_j} F_{MP} \, \mathrm{d}S_j - \sum_{j=1}^{N} u_j \int\limits_{S_j} \frac{\partial F_{MP}}{\partial n} \, \mathrm{d}S_j \tag{1}$$

(u та її похідна можуть бути винесені з-під інтегралу, оскільки на кожному полігоні вони приймають постійне значення).

В останній формулі замість M послідовно підставивши N точок (N – кількість полігонів, які апроксимують поверхню тіла), кожна з яких є центром одного з полігонів, отримаємо N рівнянь:

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial n}(j) \int\limits_{S_j} F_{iP} \, \mathrm{d}S_j - \sum_{j=1}^{N} u_j \int\limits_{S_j} \frac{\partial F_{iP}}{\partial n} \, \mathrm{d}S_j, i = 1..N$$

Позначимо

$$A_{ij} = \int\limits_{S_j} F_{iP} \, \mathrm{d}S_j$$

$$B_{ij} = \int\limits_{S_j} \frac{\partial F_{iP}}{\partial n} \, \mathrm{d}S_j.$$

Ці коефіцієнти є постійними для задачі, що розглядається, тому можуть бути обчислені лише раз для кожного тіла і використовуватись в подальшому без змін. Можна побачити, що при $i = j$ в вищезазначених формулах з'являться невласні інтеграли, які належить обчислити окремо.

Отримаємо систему з N алгребраїчних рівнянь відносно $\frac{\partial u}{\partial n}(j)$

$$u_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial n}(j) A_{ij} - \sum_{j=1}^{N} u_j B_{ij}, i = 1..N$$

або

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial n}(j) A_{ij} = u_i + \sum_{j=1}^{N} u_j B_{ij}, i = 1..N$$

Розв'язавши дану систему лінійних алгебраїчних рівнянь, отримаємо значення $\frac{\partial u}{\partial n}(j)$. Таким чином, підставивши ці значення 1, можна знайти значення u_M для будь-якої точки області.

//задача дирихле, u, u_i на границе известно

//интеграл B_{ij} - телесный угол, под которым полигон виден из точки М

// интегральное уравнение Фернгольда 1-2 рода (1 рода - некорректно - но для случая гладки ядер. если i=j, то расстояние между ядрами 0)