

CINCO
INTEGRAÇÃO
DE
EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

ÍNDICE DO CAPÍTULO

5.0 O SIGNIFICADO DE UMA SOLUÇÃO: MÉTODO DE EULER.....	3
EXEMPLO 5.1.....	3
EXEMPLO 5.2.....	4
<i>Exercício 5.1</i>	5
EXEMPLO 5.3.....	5
EXEMPLO 5.4.....	6
EXEMPLO 5.5.....	7
EXEMPLO 5.6.....	8
EXEMPLO 5.7.....	8
<i>Exercício 5.2</i>	10
5.2. UM MELHORAMENTO DO MÉTODO DE EULER.....	10
<i>Exercício 5.3</i>	12
<i>Exercício 5.4</i>	12
5.3. MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA	13
<i>Exercício 5.5</i>	14
5.4 SISTEMAS DE EQUAÇÕES E EQUAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR	15
EXEMPLO 5.8.....	16

5.0 O SIGNIFICADO DE UMA SOLUÇÃO: MÉTODO DE EULER

As equações diferenciais são muito frequentes nos problemas de Ciência e Engenharia, desde que, com a invenção de Newton e Leibniz, nos habituámos a exprimir as propriedades dos objectos e sistemas, fenómenos e processos em termos de derivadas, sobretudo

- espaciais (que, dão, no caso geral, origem a equações em derivadas parciais),
- temporais (que dão origem a equações diferenciais ordinárias).

Destas últimas, as equações mais correntes são as *equações do movimento* de sistemas, habitualmente de 2ª ordem, isto é, contendo, além da função desconhecida, as suas derivadas de 1ª e 2ª ordem.

Nos cursos elementares de análise matemática aborda-se o problema genérico da resolução de equações diferenciais e aprendem-se as técnicas de resolução sob forma cerrada de certas classes particulares dessas equações; infelizmente, porém, a larga maioria das equações diferenciais que se encontram na prática não pode ser resolvida por meios analíticos, o que torna imprescindível o recurso aos métodos numéricos que, tendo embora o defeito de serem apenas aproximados, são implementáveis em computadores digitais, onde têm soluções-padrão relativamente rápidas e eficientes. Na realidade, boa parte da motivação dos técnicos e cientistas para construírem os primeiros computadores digitais automáticos proveio precisamente da necessidade de resolver rápida e precisamente problemas de cálculo balístico; hoje em dia, o cálculo automático é usado intensivamente para resolver as equações do movimento dos mísseis balísticos e dos satélites artificiais, da teoria dos circuitos eléctricos, da deformação de pilares, vigas e cascas, da estabilidade de aeronaves e embarcações, etc.

Dada uma equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

o que entendemos por uma solução?

Em termos genéricos e sem preocupações de precisão, entendemos por solução de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem uma curva $g(x,y)=0$ tal que, se calcularmos a derivada de $g(x,y)$ em ordem a x

$$g'_x(x, y) = \frac{dg(x, y)}{dx}$$

em um ponto (x,y) , o valor calculado coincide com o valor especificado pela equação diferencial para esse ponto.

Exemplo 5.1

O integral indefinido

$$y(x) = \int_a^x f(t).dt$$

é a solução da equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$y'(x) = f(x)$$

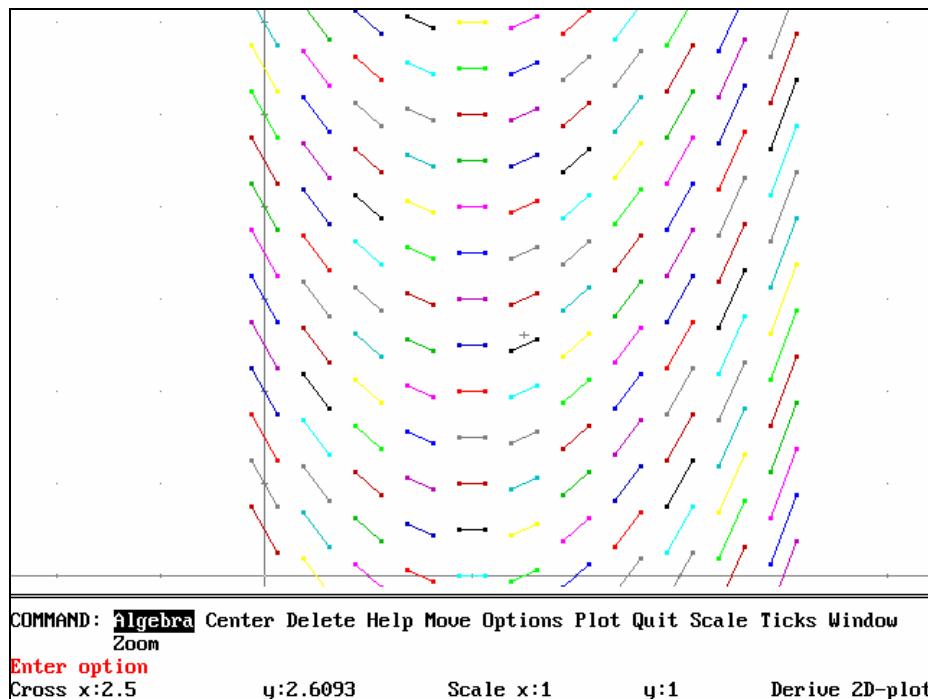
de um tipo particular em que $f(x,y)$ não depende de y .

Esta simples interpretação sugere desde logo um método tosco para resolver graficamente a equação diferencial: em cada ponto (x,y) de uma rede rectangular de pontos, calculamos a derivada tal como é

especificada pela equação e, em torno do ponto, traçamos um pequeno segmento cuja inclinação sobre o eixo dos xx é igual ao valor dessa derivada. Obtemos assim aquilo que chamamos um **campo de direcções**.

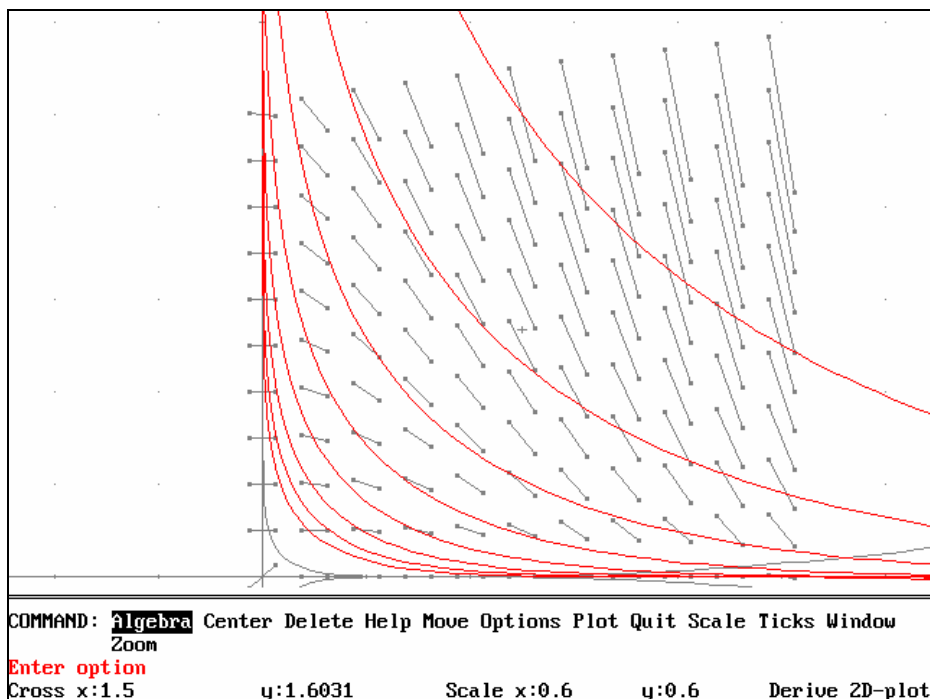
Exemplo 5.2

Seja a equação diferencial $y' = x - 2$ e calculemos o campo de direcções mediante o comando `DIRECTION_FIELD` de DERIVE:



Notaremos, antes de mais, que, pelo facto de se tratar de uma equação particular em que $f(x, y)$ não depende de y , todas as direcções são independentes de y .

O mesmo não acontece com a equação $y' = \left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)^3$ cujo campo de direcções é:



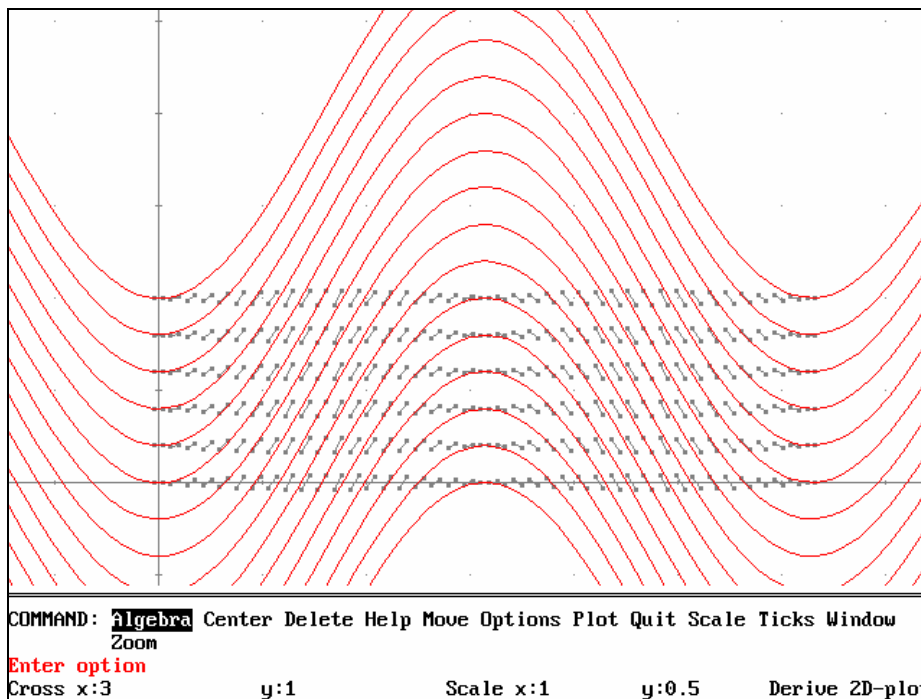
e sobre o qual marcámos as **isoclinas** (lugares geométricos dos pontos de igual inclinação) para $y' = 0, 0.03125, 0.0625, 0.125, 0.25, 0.5, 1, 2, 4$

cuja observação facilita a interpretação e o uso do campo de direcções (assim, por exemplo, os máximos e os mínimos de uma solução encontram-se necessariamente sobre a isoclina zero).

Exercício 5.1

Como se identificam, sobre um campo de direcções calibrado com isoclinas, os pontos de inflexão das soluções?

Para o ajudar, mostra-se em seguida o campo de direcções da equação diferencial $y' = \sin(x)$ ao qual sobrepossemos algumas soluções:

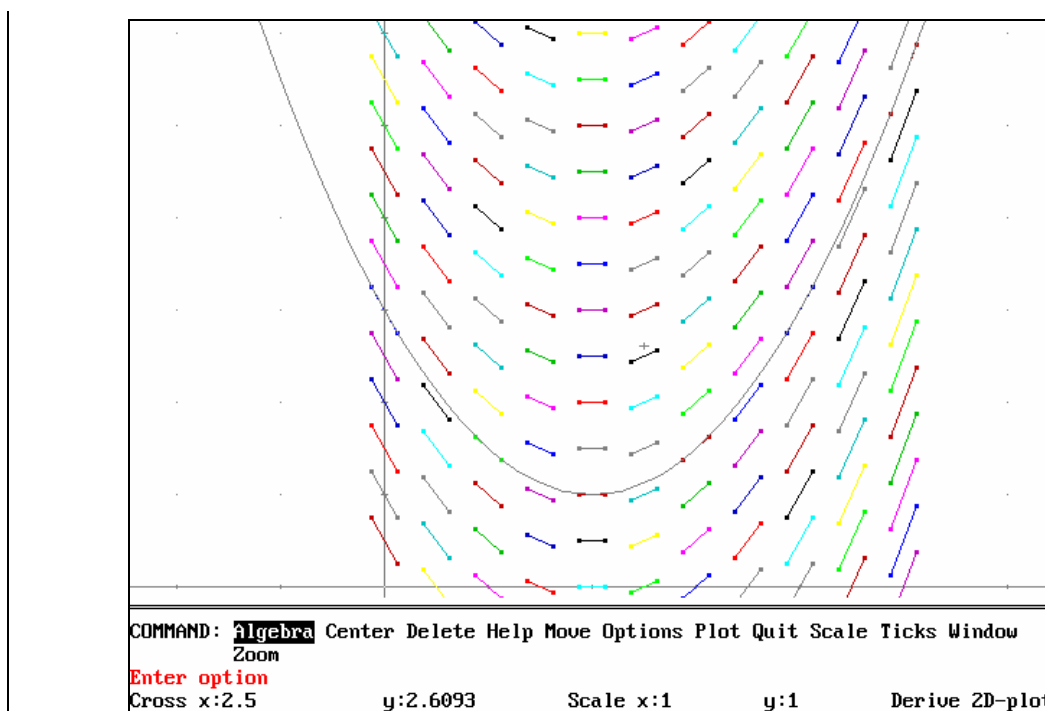


O problema está então reduzido a traçar uma curva contínua nesse campo, tal que, em cada ponto, seja tangente aos pequenos segmentos traçados. Resulta então evidente que por cada ponto passa apenas uma tal curva e que por diferentes pontos passam diferentes curvas. Assim, a solução da equação diferencial não é uma única curva (uma única função $y = g(x)$), mas toda uma família de curvas (o que equivale, em termos analíticos, a admitir a existência de uma constante de integração na solução geral). Para especificar uma das curvas da família basta especificar um ponto por onde ela passa.

Exemplo 5.3

Para a mesma equação, consideremos a solução $\frac{x^2}{2} - 2x + 2$ que corresponde à condição inicial

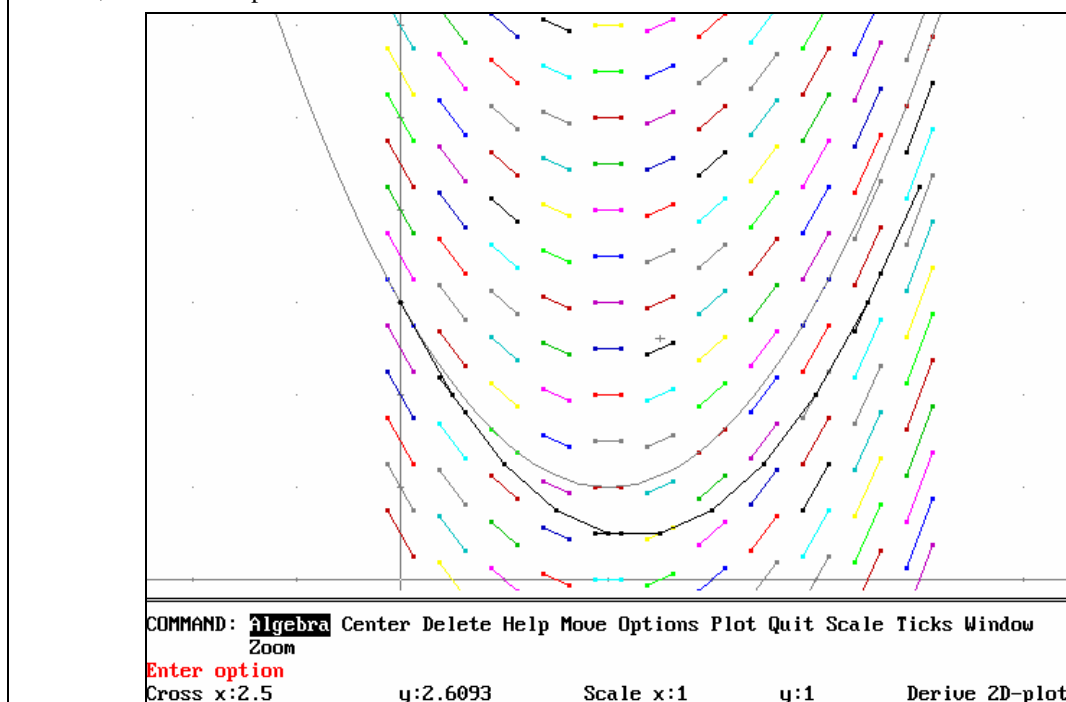
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \text{ e sobreponhamos o seu gráfico ao campo de direcções já determinado:}$$



Se, por qualquer razão (e como é frequente nas aplicações) estivermos apenas interessados em uma curva particular, é evidente que podemos limitar o traçado do campo de direcções às imediações dos locais por onde irá passar. Assim, começaremos em um *ponto inicial* (x_0, y_0) e nele calculamos a inclinação $y'_0 = f(x_0, y_0)$ e avançamos um pouco a partir desse ponto ao longo da direcção assim definida; podemos então considerar o novo ponto atingido como um novo ponto de partida e continuar a proceder deste modo. Após um número suficiente destes pequenos passos, teremos a solução no intervalo finito que nos interessa.

Exemplo 5.4

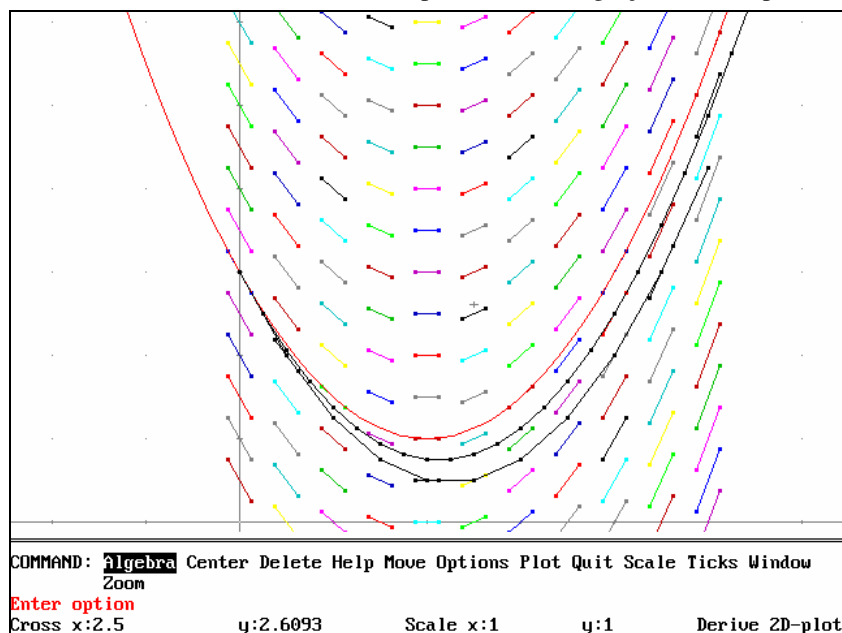
Continuemos com o mesmo exemplo e tracemos o resultado deste processo sobre o gráfico anterior, tomando um passo $h = \delta x = 0.5$:



Deve agora ser perfeitamente claro que, quanto menores forem os “pequenos passos”, tanto menor será o erro cometido por efeito da truncatura e tanto maior será o esforço despendido e o risco de acumulação de erros de arredondamento.

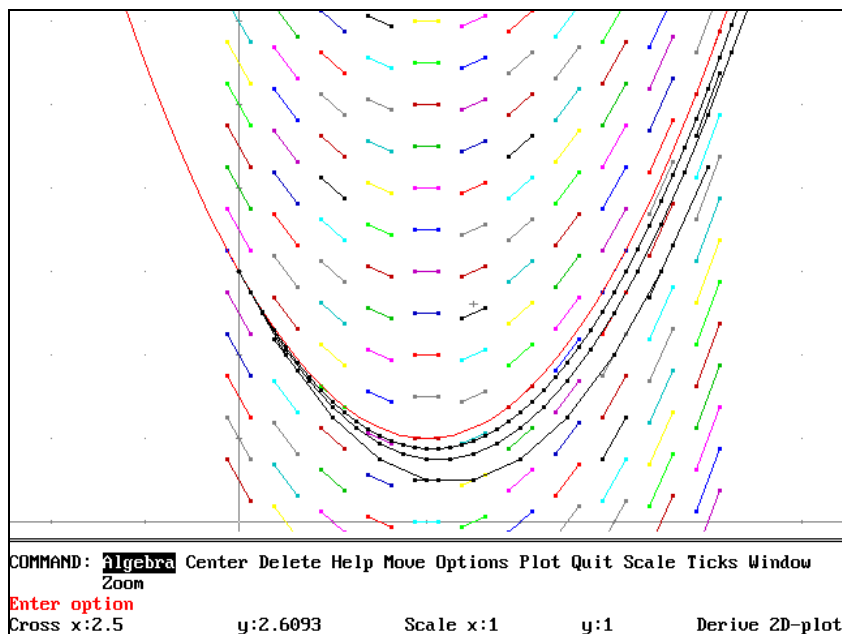
Exemplo 5.5

Tomemos ainda o caso anterior e executemos o processo de integração com um passo $h'=0.25$:



e verificaremos de imediato a melhor qualidade da aproximação.

Vejamos ainda o que se passa com $h''=0.125$:



É também óbvio que não precisamos de proceder por meios gráficos: poderemos, simplesmente, construir uma tabela numérica com as coordenadas dos pontos sucessivos, procedendo do seguinte modo:

1º - Calcular $y'_n = f(x_n, y_n)$, que é a inclinação da curva no ponto (x_n, y_n) ;

2º - Calcular o ponto seguinte:
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h \cdot y'_n \\ x_{n+1} = x_n + h \end{cases}$$

e repetir esses passos até cobrir por completo o intervalo que nos interessa.

Este método elementar de integração numérica de equações diferenciais é conhecido por *método de Euler* e corresponde, obviamente, em termos analíticos, a utilizar a fórmula dos acréscimos finitos, isto é, um desenvolvimento em série de Taylor limitado à primeira ordem. Trata-se, portanto, de um método de *primeira ordem*, no sentido de que o erro cometido no cálculo de y é proporcional a h , se este for suficientemente pequeno.

Exemplo 5.6

Consideremos ainda o exemplo da equação anterior e tabelamos os resultados da integração pelo método de Euler para $h = 1$, $h' = 0.5$, $h'' = 0.25$ e calculemos os cocientes de convergência e os erros respectivos:

x	y _{exact}	y 0.25	erro 0.25	y 0.5	y 1.0	(S'-S)/ /(S''-S')	erro 0.25 calc
0	3	3		3	3		
1	1.5	1.375	0.125	1.25	1	2	0.125
2	1	0.75	0.25	0.5	0	2	0.25
3	1.5	1.125	0.375	0.75	0	2	0.375
4	3	2.5	0.5	2	1	2	0.5
5	5.5	4.875	0.625	4.25	3	2	0.625

Verificamos que:

- o critério mínimo de convergência é satisfeito (cociente = 2) e os erros calculados coincidem com os observados;
- os erros são ainda muito grandes, pelo que há todo o interesse em diminuir o passo de integração.

Calculemos então o integral para $h=0.5$, $h'=0.25$, $h''=0.125$, juntamente com os cocientes de convergência e os erros respectivos:

x	y _{exact}	y 0.125	erro 0.125	y 0.25	y 0.5	(S'-S)/ /(S''-S')	erro 0.125 calc
0	3	3	0	3	3		
0.5	2.125	2.09375	0.03125	2.0625	2	2	0.03125
1	1.5	1.4375	0.0625	1.375	1.25	2	0.0625
1.5	1.125	1.03125	0.09375	0.9375	0.75	2	0.09375
2	1	0.875	0.125	0.75	0.5	2	0.125
2.5	1.125	0.96875	0.15625	0.8125	0.5	2	0.15625
3	1.5	1.3125	0.1875	1.125	0.75	2	0.1875
3.5	2.125	1.90625	0.21875	1.6875	1.25	2	0.21875
4	3	2.75	0.25	2.5	2	2	0.25
4.5	4.125	3.84375	0.28125	3.5625	3	2	0.28125
5	5.5	5.1895	0.3105	4.875	4.25	1.99	0.3145

Verificamos que:

- os erros se reduziram a metade, como seria de esperar dado que o método é de primeira ordem e o passo se reduziu a metade;
- o erro máximo = 0.3145 (que, neste caso, corresponde ao do último resultado) é ainda muito elevado;

Para termos um erro máximo da ordem de uma centésima teríamos que fazer $h'' = \frac{0.01}{0.3145} \times 0.125 \cong 0.003$ isto é, que dar cerca de 42 vezes mais passos.

Exemplo 5.7

Calculemos pelo método de Euler o integral indefinido $\int_0^x \sin(x).dx$ até $x = 2\pi$, planeando o trabalho de modo a poder comparar os resultados com os do cálculo do integral definido do capítulo anterior. Certifiquemo-nos de que nos encontramos dentro do critério mínimo de convergência, calculemos os

erros, identifiquemos os pontos em que o erro é máximo e escolhamos um passo que garanta uma precisão mínima de uma centésima. Comparemos os resultados com os do cálculo do integral definido do capítulo anterior.

Os quadros seguintes dão alguns resultados preliminares obtidos, como anteriormente, com o comando EULER de DERIVE e com precisão de 6 algarismos significativos. Começemos por $h=2\pi/5$, $h'=2\pi/10$, $h''=2\pi/20$:

x	y exacto	y $2\pi/20$	erro $2\pi/20$	y $2\pi/10$	y $2\pi/5$	S'-S	S''-S'	cociente	erro calc	delta(erro) %
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000					
1.25664	0.69098	0.53589	-0.15509	0.36932	0.00000	0.36932	0.16657	2.21713	0.16657	+7.40
2.51327	1.80902	1.70178	-0.10724	1.56444	1.19513	0.36931	0.13734	2.68902	0.13734	+28.07
3.76991	1.80902	1.88644	+0.07742	1.93376	1.93376	0.00000	-0.04732	0.00000	-0.04732	-38.88
5.02655	0.69098	0.83468	+0.14370	0.96688	1.19513	-0.22825	-0.13220	1.72654	-0.13220	-8.00
6.28319	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	

É perfeitamente claro que $h''=2\pi/20$ é um passo insuficiente, porque o cociente de convergência se afasta ainda muito do valor teórico (2); em consequência, o erro calculado tem muito pouca precisão. Reduzamos o passo a metade:

x	y exacto	y $2\pi/40$	erro $2\pi/40$	y $2\pi/20$	y $2\pi/10$	S'-S	S''-S'	cociente	erro calc	delta(erro) %
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000					
0.62832	0.19098	0.14443	-0.04656	0.09708	0.00000	0.09708	0.04734	2.05051	0.04734	+1.69
1.25664	0.69098	0.61487	-0.07612	0.53589	0.36932	0.16657	0.07898	2.10920	0.07898	+3.75
1.88496	1.30902	1.23162	-0.07740	1.14884	0.96688	0.18196	0.08278	2.19809	0.08278	+6.96
2.51327	1.80902	1.75913	-0.04989	1.70178	1.56444	0.13734	0.05735	2.39477	0.05735	+14.96
3.14159	2.00000	1.99588	-0.00412	1.98352	1.93376	0.04976	0.01236	4.02589	0.01236	+200.00
3.76991	1.80902	1.85146	+0.04244	1.88644	1.93376	-0.04732	-0.03498	1.35277	-0.03498	-17.58
4.39823	1.30902	1.38102	+0.07200	1.44762	1.56444	-0.11682	-0.06660	1.75405	-0.06660	-7.50
5.02655	0.69098	0.76426	+0.07327	0.83468	0.96688	-0.13220	-0.07043	1.87717	-0.07043	-3.89
5.65487	0.19098	0.23675	+0.04577	0.28174	0.36932	-0.08758	-0.04498	1.94687	-0.04498	-1.72
6.28319	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.31260	0.00000	

A situação melhorou claramente, mas a convergência é ainda defeituosa, sobretudo na região central; continuemos, portanto:

x	y exacto	y $2\pi/80$	erro $2\pi/80$	y $2\pi/40$	y $2\pi/20$	S'-S	S''-S'	cociente	erro calc	delta(erro) %
0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000					
0.31416	0.04894	0.03678	-0.01216	0.02457	0.00000	0.02457	0.01221	2.01240	0.01221	+0.41
0.62832	0.19098	0.16780	-0.02318	0.14443	0.09708	0.04734	0.02338	2.02526	0.02338	+0.85
0.94248	0.41221	0.38023	-0.03198	0.34783	0.28174	0.06609	0.03241	2.03938	0.03241	+1.32
1.25664	0.69098	0.65328	-0.03770	0.61487	0.53589	0.07898	0.03841	2.05589	0.03841	+1.88
1.57080	1.00000	0.96022	-0.03978	0.91940	0.83468	0.08472	0.04081	2.07583	0.04081	+2.59
1.88496	1.30902	1.27099	-0.03803	1.23162	1.14884	0.08278	0.03937	2.10262	0.03937	+3.53
2.19911	1.58779	1.55519	-0.03260	1.52097	1.44762	0.07335	0.03422	2.14348	0.03422	+4.98
2.51327	1.80902	1.78500	-0.02402	1.75913	1.70178	0.05735	0.02587	2.21685	0.02587	+7.72
2.82743	1.95106	1.93791	-0.01315	1.92277	1.88644	0.03633	0.01514	2.39960	0.01514	+15.16
3.14159	2.00000	1.99897	-0.00103	1.99588	1.98352	0.01236	0.00309	4.00000	0.00309	+200.00
3.45575	1.95106	1.96218	+0.01112	1.97131	1.98352	-0.01221	-0.00913	1.33735	-0.00913	-17.92
3.76991	1.80902	1.83116	+0.02214	1.85146	1.88644	-0.03498	-0.02030	1.72315	-0.02030	-8.32
4.08407	1.58779	1.61873	+0.03094	1.64805	1.70178	-0.05373	-0.02932	1.83254	-0.02932	-5.25
4.39823	1.30902	1.34569	+0.03667	1.38102	1.44762	-0.06660	-0.03533	1.88508	-0.03533	-3.66
4.71239	1.00000	1.03875	+0.03875	1.07648	1.14884	-0.07236	-0.03773	1.91784	-0.03773	-2.63
5.02655	0.69098	0.72795	+0.03697	0.76426	0.83468	-0.07043	-0.03631	1.93971	-0.03631	-1.79
5.34071	0.41221	0.44377	+0.03156	0.47491	0.53590	-0.06099	-0.03113	1.95902	-0.03113	-1.34
5.65487	0.19098	0.21397	+0.02298	0.23675	0.28174	-0.04498	-0.02279	1.97411	-0.02279	-0.86
5.96903	0.04894	0.06105	+0.01211	0.07311	0.09708	-0.02397	-0.01206	1.98743	-0.01206	-0.41
6.28319	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	-0.33891	0.00000	

Os resultados aproximam-se agora de uma precisão satisfatória (erro máximo de 4 centésimas) o que permite prever que com um passo quatro vezes mais pequeno estejamos nos valores pretendidos; porém, aparece um problema novo: o cociente de convergência afasta-se ainda muito do valor teórico na região central, nas vizinhanças de um ponto de inflexão da integranda. Aqui a truncatura é mais grave, ou são já problemas de arredondamento?

Procuraremos esclarecer este problema utilizando para a integração a folha de cálculo EXCEL, com a sua facilidade de impor precisão arbitrária de cálculo:

x	12 significativos			6 significativos			3 significativos		
	2 π /80	2 π /40	2 π /20	2 π /80	2 π /40	2 π /20	2 π /80	2 π /40	2 π /20
3.141592653589E-001	1.987			1.987			1.986		
6.283185307177E-001	1.974	1.956		1.974	1.947		1.974	1.944	
9.424777960765E-001	1.959			1.959			1.965		
1.256637061436E+000	1.941	1.886	1.727	1.941	1.877	1.727	1.942	1.877	1.731
1.570796326796E+000	1.918			1.918			1.973		
1.884955592156E+000	1.885	1.746		1.885	1.754		1.971	1.746	
2.199114857516E+000	1.832			1.832			1.929		
2.513274122876E+000	1.724	1.343	0.000	1.724	1.353	0.000	1.944	1.343	-0.064
2.827433388236E+000	1.338			1.338			1.500		
3.141592653596E+000	4.006	4.167		4.008	4.024		4.333	3.923	
3.455751918956E+000	2.399			2.399			2.118		
3.769911184316E+000	2.216	2.404	2.689	2.217	2.395	2.689	2.148	2.379	2.703
4.084070449676E+000	2.144			2.144			2.028		
4.398229715036E+000	2.103	2.193		2.103	2.198		2.075	2.184	
4.712388980396E+000	2.076			2.076			2.027		
5.026548245756E+000	2.056	2.114	2.217	2.056	2.109	2.217	1.997	2.107	2.227
5.340707511116E+000	2.039			2.040			1.969		
5.654866776476E+000	2.025	2.064		2.026	2.050		1.940	2.044	
5.969026041836E+000	2.012			2.013			1.852		
6.283185307196E+000	5.329	#DIV/0!	3.825	-0.685	-1.530	1.345	5.528	2.073	1.687

Torna-se, portanto, evidente que o problema não é de arredondamento, mas sim de truncatura.

Exercício 5.2

Visto que o passo não é ainda suficiente para o que se pretendia, o leitor prosseguirá o exercício, realizando a integração em EXCEL para $h'' = 2\pi/320$, certificando-se de que se encontra dentro do critério mínimo de convergência, calculando os erros, identificando os pontos em que o erro é máximo e escolhendo um passo que garanta uma precisão mínima de uma centésima.

Se os altos valores do cociente de convergência persistirem, encarará a hipótese de reduzir (ou aumentar?) o passo apenas nas vizinhanças dos pontos mais críticos, acedendo assim ao conceito de *método de integração de passo variável*. Este ponto é particularmente importante porque:

- pode suceder, porque estamos em um ponto em que a primeira derivada da função é muito pequena, que um passo pequeno resulte em um acréscimo tão pequeno face ao valor da função que haja perda significativa da precisão na adição;
- fica assim mostrado que, em termos de cálculo numérico, os passos pequenos nem sempre são desejáveis.

Comparará em seguida os resultados com os do cálculo do integral definido do capítulo anterior. Para efeitos de autoavaliação o leitor encontrará no fim do capítulo um conjunto de resultados calculados em EXCEL com 24 algarismos significativos .

5.2. UM MELHORAMENTO DO MÉTODO DE EULER

Resulta do que ficou dito que o método de Euler, embora extremamente simples de implementar e de controlar conceptualmente, tem muito pequena precisão (é de primeira ordem) e dá, portanto, origem a cálculos extremamente longos. Por outro lado, deve também ter ficado claro que a pequena precisão resulta da acumulação de atrasos nos intervalos em que o sinal da curvatura se mantém; a razão desta característica desfavorável prende-se claramente com o facto de usarmos, ao longo de cada passo, um valor da derivada que só vale para o seu extremo inicial.

Com base neste diagnóstico, é possível construir um *método de Euler modificado* que corresponde a uma estratégia de cálculo melhor e mais económica: suponhamos que temos o par de pontos (x_{n-1}, y_{n-1}) e

(x_n, y_n) ; como devemos calcular (x_{n+1}, y_{n+1}) ? Uma maneira simples consiste em calcular um *valor previsto*:

$$p_{n+1} = y_n + 2h \cdot y'_n$$

o que corresponde a usar a tangente no meio do duplo intervalo para o valor do integral no seu extremo, o que é mais preciso que usar a tangente no início. Usando este valor previsto, calculamos a derivada no ponto previsto

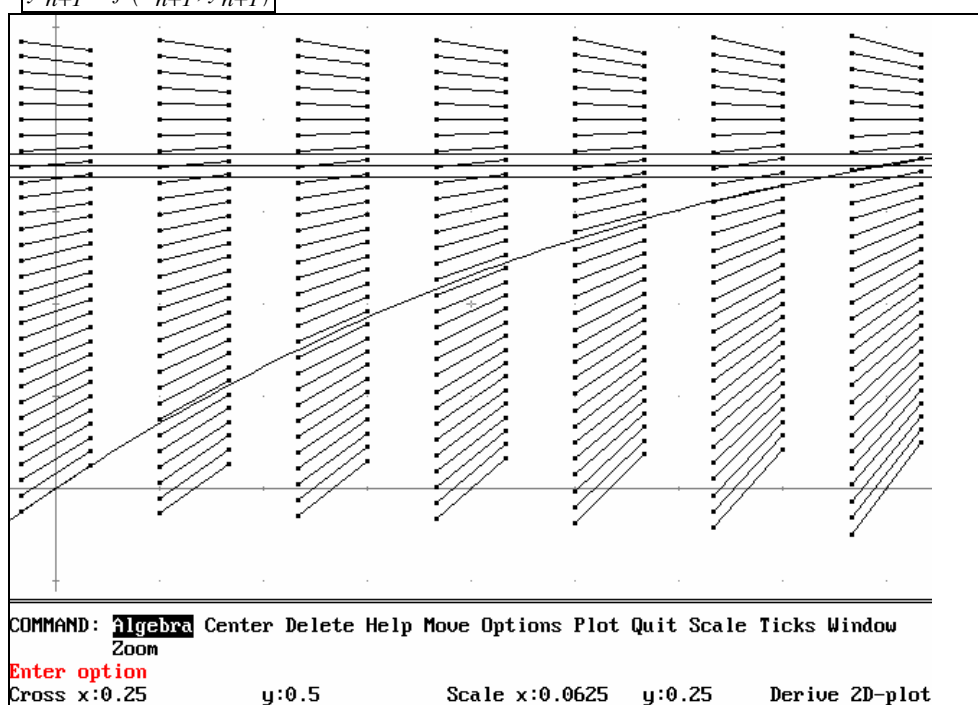
$$p'_{n+1} = f(x_{n+1}, p_{n+1})$$

calculando em seguida o *valor corrigido*

$$y_{n+1} = y_n + \frac{p'_{n+1} + y'_n}{2}$$

o que corresponde a usar a média das inclinações nos dois extremos do intervalo extrapolado como aproximação à inclinação média no intervalo. Em seguida, para preparar o passo seguinte, calculamos

$$y'_{n+1} = f(x_{n+1}, y_{n+1})$$



Écran DERIVE com a representação de um método de Euler melhorado (preditor-corrector)

O método tem, obviamente, o inconveniente de exigir dois pontos de partida e não um; o ponto extra, (x_{-1}, y_{-1}) no nosso caso, pode ser calculado por um processo qualquer, desde que suficientemente preciso; por exemplo,

- o método de Euler simples com um passo muito curto;
- um método um pouco mais preciso, baseado em um desenvolvimento em série de Taylor mais longo:

$$y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(x) + \frac{h^3}{6} \cdot y'''(x) + \dots$$

calculando as derivadas na forma (o que implica supor que dispomos de uma forma analítica de $f(x, y)$, o que nem sempre será o caso):

$$y' = f(x, y)$$

$$y'' = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot f(x, y) = f'_x + f \cdot f'_y$$

$$y''' = f''_x + f''_{xy} + f'_x + f \cdot f'_y$$

Exercício 5.3

Integrar $y' = y^2 + x^2$ a partir de $(0,0)$. Calculem-se as derivadas na forma

$$y' = x^2 + y^2 \quad y'(0,0) = 0$$

$$y'' = 2y \cdot y' + 2x \quad y''(0,0) = 0$$

$$y''' = 2y'^2 + 2y \cdot y'' + 2 \quad y'''(0) = 2$$

$$y'''' = 6 \cdot y' \cdot y'' + 2y \cdot y''' \quad y''''(0) = 0$$

de modo que

$$y(h) = 0 + 0h + \frac{0}{2} \cdot h^2 + \frac{2}{6} \cdot h^3 + \frac{0}{24} \cdot h^4 + \dots \cong \frac{h^3}{3}$$

• um método particularmente engenhoso que consiste em usar o próprio corrector, do seguinte modo: dado (x_0, y) , estimamos (x_{-1}, y_{-1}) na forma simples

$$x_{-1} = x_0 - h$$

$$y_{-1} = y_0 - h \cdot y'_0$$

$$y'_{-1} = f(x_{-1}, y_{-1})$$

e em seguida usamos o corrector

$$y_{-1} = y_0 - h \cdot \frac{y'_0 + y'_{-1}}{2}$$

$$y'_{-1} = f(x_{-1}, y_{-1})$$

sucessivamente até y_{-1} estabilizar dentro da precisão da máquina; se isso não acontecer dentro de meia dúzia de tentativas, teremos que diminuir h .

Exercício 5.4

Seja a mesma equação $y' = x^2 + y^2$ a integrar a partir de $(0,0)$:

Previsor de Euler

$$x_{-1} = 0 - h$$

$$y_{-1} = 0 - 0 \cdot h$$

$$y'_{-1} = h^2$$

Corrector:

$$y_{-1} = 0 - h \cdot \frac{0 + h^2}{2} = -\frac{h^3}{2}$$

$$y'_{-1} = h^2 + \frac{h^6}{4}$$

Nova iteração:

$$y_{-1} = 0 - h \cdot \left(0 - \frac{h^2 + \frac{h^6}{4}}{2} \right) = -\frac{h^3}{2} - \frac{h^7}{8}$$

$$y'_{-I} = h^2 + \left(\frac{h^3}{2} + \frac{h^7}{8} \right)^2$$

que, em geral, já não corresponderá a uma correcção significativa.

Pode demonstrar-se, raciocinando como no capítulo anterior, que o erro cometido pela aproximação do preditor é

$$\varepsilon_p = \frac{h^3}{3} \cdot y'''(\xi_p)$$

e o erro cometido pela aproximação do corrector é

$$\varepsilon_c = -\frac{h^3}{12} \cdot y'''(\xi)$$

ou, considerando que y''' conserva o sinal no interior do passo h (e, se assim não fosse, deveríamos reduzir o passo),

$$|\varepsilon| = |\varepsilon_p| + |\varepsilon_c| = h^3 \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot |y'''(\xi_p)| + \frac{1}{12} \cdot |y'''(\xi_c)| \right] = \frac{5h^3}{12} \cdot |y'''(\xi)|$$

de onde concluímos que o método é de **terceira ordem**.

Coerentemente com a abordagem anterior, não usaremos esta expressão para calcular o erro (embora disponhamos da facilidade de calcular um majorante de $y'''(\xi)$, não dispomos, à partida, de garantias de que h se comporta já como um infinitésimo de modo a que esta aproximação seja garantidamente válida) mas usaremos a técnica do cociente de convergência e a avaliação do erro que lhe está associada.

Certos autores convencionais recomendam que, a cada passo, se vá calculando ε para efeitos de controlo da precisão, usando

$$y''' = f''_x + f''_{xy} + f'_x + f \cdot f'_y.$$

Outros chegam mesmo ao ponto de sugerir que se adicionem os erros estimados aos valores calculados, a fim de os melhorar. Todas estas técnicas são ingénuas na medida em que estas estimativas dos erros avaliam apenas os efeitos da truncatura, ignorando os efeitos dos arredondamentos que, em muitos casos podem ser dominantes. Assim, por muito que pese aos matemáticos, pensamos que os métodos deste tipo valem o que valem e não são especialmente recomendáveis pelo facto de para eles ser possível uma estimativa do erro.

Por outro lado, não devemos ignorar a importância deste método: na realidade, ele constitui o embrião de uma família de métodos de integração de equações diferenciais ordinárias chamados *métodos preditores-correctores*, ideia muito fecunda que não podemos desenvolver aqui.

5.3. MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

Ao contrário dos métodos do tipo preditor-corrector, os métodos do tipo Runge-Kutta não dispõem do conforto um tanto duvidoso de uma “fórmula” para o erro, mas são mais expeditos ao nível da programação, nomeadamente porque não exigem técnicas separadas para o arranque (que, aliás, não ocorre apenas no início do intervalo, mas de todas as vezes que é necessário diminuir o passo).

No caso mais simples, um método de Runge-Kutta de segunda ordem pode visualizar-se do seguinte modo (o raciocínio formal que lhe está subjacente não cabe no escopo do nosso curso):

- começa-se por calcular y' no início do intervalo:

$$y' = f(x_n, y_n),$$

- a partir daí constrói-se uma estima de y' no meio do intervalo,

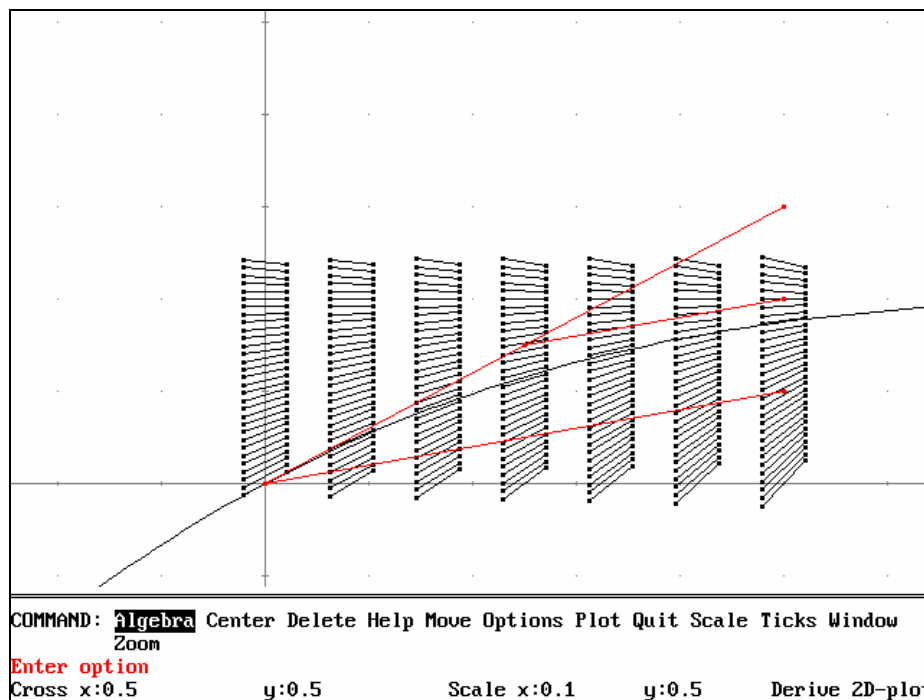
$$y' = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, y_n)\right);$$

- a partir dela, uma estima de y no fim do intervalo:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} \cdot f(x_n, y_n)\right)$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

Notar-se-á, antes de mais, que esta técnica não é, de modo nenhum, equivalente à aplicação da do método de Euler em duas etapas, uma a cada metade do passo de integração.



Écran DERIVE com os gráficos de um Euler directo, de um Euler de meio passo e um Runge-Kutta de segunda ordem.

Exercício 5.5

Como se disse, este método de Runge-Kutta, que, na realidade, é apenas um melhoramento óbvio do método de Euler, é de segunda ordem, enquanto o anterior método predictor-corrector é de terceira. Conseguirá o leitor descobrir de onde provém a diferença?

É possível construir, mediante um raciocínio semelhante, um método de Runge-Kutta de terceira ordem, mas o interesse é pequeno porque o trabalho de cálculo envolvido é pouco menor que o de um método de Runge-Kutta de *quarta ordem*, que pode ser estabelecido do seguinte modo:

- começa-se por calcular y' no início do passo de integração, o que constitui a primeira estima possível $y'_{n+1/2}^1$ de y' no meio do passo e, a partir deste valor, uma primeira estima $y_{n+1/2}^1$ de y no meio do passo;
- a partir desta estima, calcula-se uma segunda estima $y'_{n+1/2}^2$ de y' no meio do passo e, a partir deste valor, uma segunda estima $y_{n+1/2}^2$ de y no meio do passo;
- a partir desta estima, calcula-se uma terceira estima $y'_{n+1/2}^3$ de y' no meio do passo e, a partir deste valor, uma segunda estima $y_{n+1/2}^3$ de y no meio do passo;
- desta, obtém-se uma quarta estima $y'_{n+1/2}^4$ de y' no meio do passo;

- finalmente, constrói-se uma média ponderada das diversas estimas estabelecendo os pesos de modo a garantir um erro proporcional a h^4 e usa-se essa média para calcular o valor y_{n+1} em x_{n+1} .

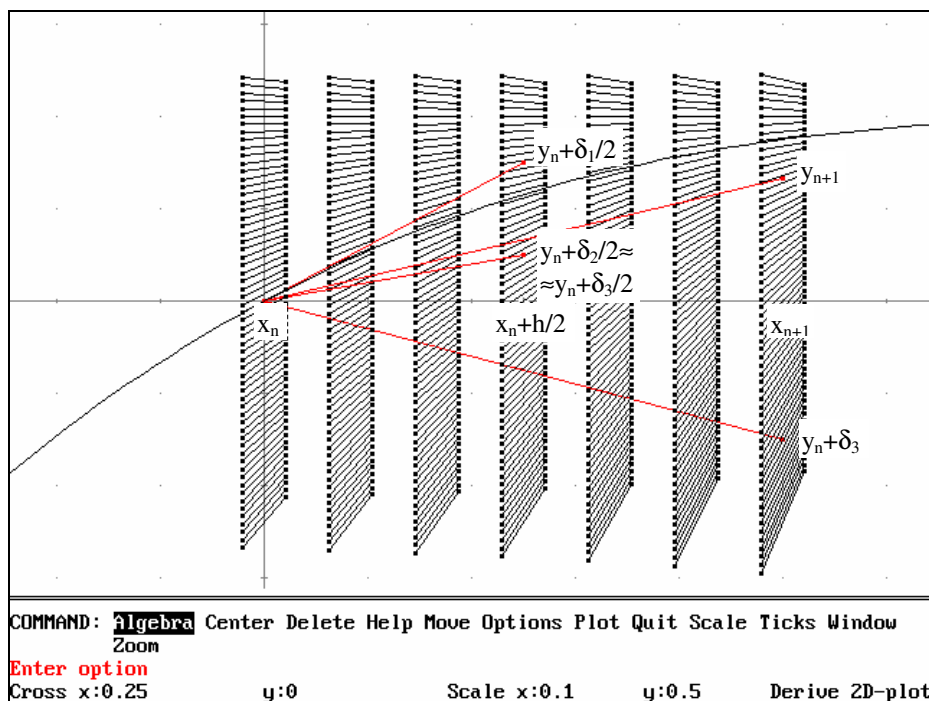


Gráfico DERIVE com a representação das sucessivas etapas de um Runge-Kutta de 4ª ordem

Em resumo, o cálculo desenvolve-se da seguinte forma:

$$\delta y_1 = h \cdot f(x_n, y_n)$$

$$\delta y_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\delta y_1}{2}\right)$$

$$\delta y_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{\delta y_2}{2}\right)$$

$$\delta y_4 = h \cdot f(x_n + h, y_n + \delta y_3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \delta y_1 + \frac{1}{3} \delta y_2 + \frac{1}{3} \delta y_3 + \frac{1}{6} \delta y_4$$

$$x_{n+1} = x_n + h$$

Para testar a validade do valor de h escolhido, deve utilizar-se uma técnica semelhante à esboçada para os métodos anteriores, usando três cálculos de y para h , $h/2$, $h/4$ e verificando se a razão das diferenças sucessivas é aproximadamente igual a 2 levantado à ordem do método.

Exercício 5.5

Integre as equações dos exemplos e exercícios anteriores pelos métodos de Runge-Kutta de segunda e quarta ordens e compare os resultados e os tempos de cálculo entre si e com os anteriores.

5.4 SISTEMAS DE EQUAÇÕES E EQUAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR

Embora a nossa discussão se tenha centrado no caso de uma equação única e de primeira ordem, os resultados que obtivemos estendem-se, sem necessidade de considerações especiais, ao caso de um sistema de n equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$y'_I = f_I(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

$$y'_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

.....

$$y'_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

fazendo, simplesmente, qualquer que seja o método de resolução adoptado, o mesmo encadeado de operações, realizando-as em paralelo sobre todas as equações.

Equações de ordem superior, por exemplo, de segunda ordem

$$y'' = f(x, y, y')$$

podem reduzir-se à primeira ordem mediante o expediente de fazer

$$y' = z$$

(que, por si, constitui uma equação diferencial de primeira ordem) e

$$z' = f(x, y, z)$$

que é uma outra equação diferencial de primeira ordem que forma sistema com a anterior.

Exemplo 5.8

Reduzamos o sistema de duas equações de segunda ordem

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y', z, z') \\ z'' = g(x, y, y', z, z') \end{cases}$$

a um sistema de quatro equações de primeira ordem:

$$\begin{cases} u' = f(x, y, u, z, v) \\ y' = u \\ v' = g(x, y, u, z, v) \\ z' = v \end{cases}$$

x	y 2pi/320	y 2pi/160	y 2pi/80	y 2pi/40	y 2pi/20	quo	quo	quo
0.00000000000000000000	0.00000000000000000000	0.00000000000000000000	0.00000000000000000000	0.00000000000000000000	0.00000000000000000000	0E+000	0E+000	0E+000
7.853981633974480000000000	3.852837598590800000000000	4.622810843948430000000000	6.162162968647400000000000			1.999		
1.570796326794890000000000	1.384705562720750000000000	1.538166072537650000000000	1.844849712211330000000000	2.457266830693180000000000		1.998	1.997	
2.356194490192330000000000	2.992103640828890000000000	3.221021775708440000000000	3.678325312472090000000000			1.998		
3.141592653589770000000000	5.197567850517860000000000	5.500472828890870000000000	6.105339110878900000000000	7.311294427506810000000000	9.708055193627260000000000	1.997	1.994	1.987
3.926990816987210000000000	7.987500771543670000000000	8.362465658347670000000000	9.110927760300610000000000			1.996		
4.712388980384650000000000	1.134470153970130000000000	1.178935512657600000000000	1.267656080725390000000000	1.444256052141330000000000		1.995	1.991	
5.497787143782090000000000	1.524847189587260000000000	1.576001332044790000000000	1.678025493831100000000000			1.994		
6.283185307179530000000000	1.967474379767630000000000	2.024995981182040000000000	2.139670951453710000000000	2.367546967386550000000000	2.817387349853170000000000	1.994	1.987	1.974
7.068583470576970000000000	2.459622780695310000000000	2.523151258751540000000000	2.649746255834290000000000			1.993		
7.853981633974410000000000	2.998258133822640000000000	3.067395871813630000000000	3.205106623104080000000000	3.478267701926130000000000		1.992	1.984	
8.639379797371850000000000	3.580059573083140000000000	3.654374371349080000000000	3.802328071922800000000000			1.991		
9.424777960769290000000000	4.201440099135160000000000	4.280467839718110000000000	4.437728533462200000000000	4.749068625004940000000000	5.358989196010780000000000	1.990	1.980	1.959
1.021017612416680000000000	4.858568694405610000000000	4.941816202491010000000000	5.107390552584800000000000			1.989		
1.099557428756440000000000	5.547393942587220000000000	5.634342027090650000000000	5.807185440257490000000000	6.148658400350320000000000		1.988	1.976	
1.178097245096200000000000	6.263669006967310000000000	6.353775661520160000000000	6.532798728292350000000000			1.987		
1.256637061435960000000000	7.002977813588320000000000	7.095681558187320000000000	7.279756769477750000000000	7.642574482721120000000000	8.346821360752380000000000	1.986	1.971	1.941
1.335176877775720000000000	7.760762277812340000000000	7.855485620530430000000000	8.043454319101020000000000			1.984		
1.413716694115480000000000	8.532350406428510000000000	8.628503403844660000000000	8.819182927813520000000000	9.194031700146130000000000		1.983	1.966	
1.492256510455240000000000	9.312985102044800000000000	9.409968996441370000000000	9.602159970786610000000000			1.982		

x	y 2pi/320	y 2pi/160	y 2pi/80	y 2pi/40	y 2pi/20			
1.5707963267950000000000	1.009785349217540000000000	1.019506440307850000000000	1.038755813418410000000000	1.076482802694100000000000	1.148841401434220000000000	1.980	1.960	1.918
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000			
1.649336143134760000000000	1.088211660219990000000000	1.097894924950340000000000	1.117053517715720000000000			1.979		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
1.727875959474520000000000	1.166093918925100000000000	1.175679062496980000000000	1.194626378586970000000000	1.231628524436600000000000		1.977	1.953	
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000				
1.806415775814280000000000	1.242951955309490000000000	1.252379287873940000000000	1.270996133549290000000000			1.975		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
1.884955592154040000000000	1.318311914020930000000000	1.327522718686360000000000	1.345691937667820000000000	1.381020132673670000000000	1.447624617908360000000000	1.973	1.944	1.885
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000			
1.963495408493800000000000	1.391709175854260000000000	1.400646070695540000000000	1.418253266471300000000000			1.970		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
2.042035224833560000000000	1.462691222283200000000000	1.471298514120370000000000	1.488232755238560000000000	1.520979110208190000000000		1.967	1.934	
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000				
2.120575041173320000000000	1.530820425387600000000000	1.539044453152830000000000	1.555198957150810000000000			1.964		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
2.199114857513080000000000	1.595676745975060000000000	1.603466211550960000000000	1.618739003304740000000000	1.648059202516050000000000	1.701784802524080000000000	1.961	1.920	1.832
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000			
2.277654673852840000000000	1.656860323262230000000000	1.664166607751820000000000	1.678461148186600000000000			1.956		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
2.356194490192600000000000	1.713993940149540000000000	1.720771403627900000000000	1.733997184913570000000000	1.759131275969980000000000		1.951	1.900	
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000				
2.434734306532360000000000	1.766725348890030000000000	1.772931611789630000000000	1.785004715351610000000000			1.945		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
2.513274122872120000000000	1.814729442813830000000000	1.820325647208660000000000	1.831169261113850000000000	1.851460367494470000000000	1.886442985573050000000000	1.938	1.871	1.724
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000			
2.591813939211880000000000	1.857710260718920000000000	1.862661309896520000000000	1.872206202424400000000000			1.928		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
2.670353755551640000000000	1.895402811570350000000000	1.899677586414700000000000	1.907862532893910000000000	1.922773028433490000000000		1.915	1.822	
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000				
2.748893571891400000000000	1.927574708258080000000000	1.931146259109310000000000	1.937918419388100000000000			1.896		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
2.827433388231160000000000	1.954027600340770000000000	1.956873313148780000000000	1.962188557372140000000000	1.971313304401570000000000	1.983523537509220000000000	1.868	1.717	1.338
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000			
2.905973204570920000000000	1.974598396942270000000000	1.976700132689850000000000	1.980523313374720000000000			1.819		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
2.984513020910680000000000	1.989160272261050000000000	1.990504478796960000000000	1.992809647528160000000000	1.995885972708440000000000		1.715	1.335	
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000				
3.063052837250440000000000	1.997623447493430000000000	1.998201243085950000000000	1.998971810496780000000000			1.334		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
3.141592653590200000000000	1.999935744349820000000000	1.999742972445540000000000	1.998971810496750000000000	1.995885972708380000000000	1.983523537509090000000000	4.000	4.002	4.006
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000			

x	y 2pi/320	y 2pi/160	y 2pi/80	y 2pi/40	y 2pi/20			
3.220132469929960000000000	1.996082906751200000000000	1.995120161601560000000000	1.992809647528070000000000			2.400		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
3.298672286269720000000000	1.986088688722550000000000	1.984361311720100000000000	1.980523313374570000000000	1.971313304401380000000000		2.222	2.400	
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000				
3.377212102609480000000000	1.970014707941440000000000	1.967532754688360000000000	1.962188557371930000000000			2.153		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
3.455751918949240000000000	1.947960065844520000000000	1.944738244156500000000000	1.937918419387830000000000	1.922773028433170000000000	1.886442985572680000000000	2.117	2.221	2.399
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000			
3.534291735289000000000000	1.920060736634230000000000	1.916118315861890000000000	1.907862532893580000000000			2.094		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
3.612831551628760000000000	1.886488728952620000000000	1.881849421179570000000000	1.872206202424010000000000	1.851460367494030000000000		2.079	2.151	
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000				
3.691371367968520000000000	1.847451025390870000000000	1.842142839240820000000000	1.831169261113400000000000			2.067		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
3.769911184308280000000000	1.803188306372790000000000	1.797243374327060000000000	1.785004715351110000000000	1.759131275969440000000000	1.701784802523500000000000	2.059	2.114	2.216
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000			
3.848451000648040000000000	1.753973466279990000000000	1.747427846570070000000000	1.733997184913020000000000			2.052		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
3.926990816987800000000000	1.700109930967230000000000	1.693003385263820000000000	1.678461148186010000000000	1.648059202515420000000000		2.046	2.091	
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000				
4.005530633275600000000000	1.641929787041150000000000	1.634305535310250000000000	1.618739003304110000000000			2.042		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
4.084070449667320000000000	1.579791734435920000000000	1.571696188473320000000000	1.555198957150140000000000	1.520979110207480000000000	1.447624617907630000000000	2.038	2.074	2.144
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000			
4.162610266007080000000000	1.514078874908840000000000	1.505561352196010000000000	1.488232755237850000000000			2.034		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
4.241150082346840000000000	1.445196350090660000000000	1.436308769736020000000000	1.418253266470560000000000	1.381020132672900000000000		2.032	2.062	
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000				
4.319689898686600000000000	1.373568843652630000000000	1.364365406293050000000000	1.345691937667060000000000			2.029		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
4.398229715026360000000000	1.299637962990510000000000	1.290174816626320000000000	1.270996133548510000000000	1.231628524435790000000000	1.148841401433410000000000	2.027	2.053	2.103
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000			
4.476769531366120000000000	1.223859516568100000000000	1.214194410392000000000000	1.194626378586170000000000			2.025		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
4.555309347705880000000000	1.146700703706480000000000	1.136892632060570000000000	1.117053517714910000000000	1.076482802693270000000000		2.023	2.045	
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000	0E+000				
4.633849164045640000000000	1.068637234144840000000000	1.058746072800890000000000	1.038755813417600000000000			2.021		
0E+000	0E+000	0E+000	0E+000					
4.712388980385400000000000	9.901503951317840000000000	9.802365321371780000000000	9.602159970778550000000000	9.194031700137800000000000	8.346821360744310000000000	2.019	2.039	2.076
0E+000	0E-001	0E-001	0E-001	0E-001	0E-001			

x	y 2pi/320	y 2pi/160	y 2pi/80	y 2pi/40	y 2pi/20	
4.790928796725160000000000	9.117240841293380000000000	9.018480474946840000000000	8.819182927805520000000000			2.018
0E+000	0E-001	0E-001	0E-001			
4.869468613064920000000000	8.338418254242310000000000	8.240639099480500000000000	8.043454319093120000000000	7.642574482712990000000000		2.017 2.033
0E+000	0E-001	0E-001	0E-001	0E-001		
4.948008429404680000000000	7.569837890398590000000000	7.473636845711020000000000	7.279756769470000000000000			2.015
0E+000	0E-001	0E-001	0E-001			
5.026548245744440000000000	6.816238303284220000000000	6.722202537587030000000000	6.532798728284800000000000	6.148658400342590000000000	5.358989196003500000000000	2.014 2.028 2.056
0E+000	0E-001	0E-001	0E-001	0E-001	0E-001	
5.105080620842000000000000	6.082265684951060000000000	5.990969017495370000000000	5.807185440250180000000000			2.013
0E+000	0E-001	0E-001	0E-001			
5.183627878423960000000000	5.372445220661800000000000	5.284444583247230000000000	5.107390552577780000000000	4.749068624997790000000000		2.012 2.024
0E+000	0E-001	0E-001	0E-001	0E-001		
5.262167694763720000000000	4.691153189618030000000000	4.606985192922960000000000	4.437728533455510000000000			2.011
0E+000	0E-001	0E-001	0E-001			
5.340707511103480000000000	4.042589983743730000000000	3.962767608942030000000000	3.802328071916490000000000	3.478267701919740000000000	2.817387349847410000000000	2.010 2.020 2.039
0E+000	0E-001	0E-001	0E-001	0E-001	0E-001	
5.419247327443240000000000	3.430754210872280000000000	3.355763646933750000000000	3.205106623098190000000000			2.009
0E+000	0E-001	0E-001	0E-001			
5.497787143783000000000000	2.859418041999480000000000	2.789715688173220000000000	2.649746255828870000000000	2.367546967381110000000000		2.008 2.016
0E+000	0E-001	0E-001	0E-001	0E-001		
5.576326960122760000000000	2.332103954594970000000000	2.268113606556250000000000	2.139670951448810000000000			2.007
0E+000	0E-001	0E-001	0E-001			
5.654866776462520000000000	1.852063015357320000000000	1.794173252366290000000000	1.678025493826760000000000	1.444256052137020000000000	9.708055193592220000000000	2.006 2.013 2.025
0E+000	0E-001	0E-001	0E-001	0E-001	0E-002	
5.733406592802280000000000	1.422254836306760000000000	1.370816625488090000000000	1.267656080721660000000000			2.006
0E+000	0E-001	0E-001	0E-001			
5.811946409142040000000000	1.045329327792850000000000	1.000653860306720000000000	9.110927760269760000000000	7.311294427476520000000000		2.005 2.009
0E+000	0E-001	0E-001	0E-002	0E-002		
5.890486225481800000000000	7.236103609160370000000000	6.859671333611290000000000	6.105339110854830000000000			2.004
0E+000	0E-002	0E-002	0E-002			
5.969026041821560000000000	4.590814400895270000000000	4.286965929668950000000000	3.678325312455110000000000	2.457266830677090000000000		- 2.003 2.006 2.012
0E+000	0E-002	0E-002	0E-002	0E-002	6.641909244820000000000000	
					0E-014	
6.047565858161320000000000	2.533734740750100000000000	2.304283975566860000000000	1.844849712201730000000000			2.002
0E+000	0E-002	0E-002	0E-002			
6.126105674501080000000000	1.077547208878040000000000	9.238493648607140000000000	6.162162968627590000000000	-		2.002 2.003
0E+000	0E-002	0E-003	0E-003	0E-003	8.520961713998080000000000	
					0E-015	
6.204645490840840000000000	2.312296856445820000000000	1.541729359666110000000000	5.837431232835750000000000			2.001
0E+000	0E-003	0E-003	0E-003	0E-014		

6.283185307180600000000000	9.595443521262960000000000	1.206320101432380000000000	1.379482268659870000000000	1.506268673612610000000000	2.518765657023180000000000	0.702	0.732	7.986
0E+000	0E-014	0E-013	0E-013	0E-013	0E-013			
