

Piecewise linear functions - odhad chýb

Funkciu f si rozložíme na linearizáciu f^l a chybu f^ε .

$$f(x) = f^l(x) + f^\varepsilon(x)$$

1 Prvotná chyba

Nech $f \in C^2$, $\delta = \sup |f''|$

$$\sup |f^\varepsilon| \leq \eta^2 \sup |f''|$$

1.1 Silnejší odhad

(závislosť od vzdialenosti k uzlovému bodu, ktorý (predpokladáme) je presný. Pre f konkávne na oblasti.

$$|\chi(x)| \leq \left| (x-a) \left[f'(a) + \frac{1}{2}(x-a) \sup |f''| \right] \right|$$

2 Operácie

Nech $\sup |f^\varepsilon| \leq \varepsilon_1$, $\sup |f^\varepsilon| \leq \varepsilon_2$

2.1 Súčet

Nech $h = f + g$

$$\sup |h^\varepsilon| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

2.2 Súčin

Nech $h = f \cdot g$

$$\sup |h^\varepsilon| \leq \varepsilon_1 \sup |g| + \varepsilon_2 \sup |f| + \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

2.3 Podiel

Nech $h = \frac{1}{f}$, $f \geq 0$, $\alpha := \inf f$, $\gamma := \sup |f'|$, η je norma delenia.

Na úseku je $f^l(x) = A + (x-a)\frac{B-A}{b-a}$

$$\sup |h^\varepsilon| = \sup \left| \frac{1}{f} - \frac{1}{f^l} + \frac{1}{f^l} - h \right| = \left| -\frac{f^\varepsilon}{f^l(f^l + f^\varepsilon)} - \frac{(A-B)^2}{AB(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2} \right| \leq \frac{\varepsilon}{\alpha(\alpha - \varepsilon)} + \frac{\gamma^2 \eta^2}{4\alpha^3}$$

2.4 Integrál

Nech $h = \int_a^b f(x)dx$

$$h \leq \varepsilon |b-a| + \frac{1}{8} \gamma \eta^2$$