ANÁLISE E ESTUDO DE CONTROLADORES NO FORMATO RST PARA APLICAÇÃO NO ESTUDO DIDÁTICO DO CONTROLE DE PROCESSOS

Luiz D. S. Bezerra

IFCE – Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Ceará, Campus Maracanáu
danielbezerra@ifce.edu.br

Abstract— Este trabalho apresenta os resultados teórico e experimentais da realização de controladores discretos sob o formato RST. Este formato é de fácil compreensão, que leva a soluções de forma rápida e obtenção dos parâmetros desejados para a planta em malha fechada, sem que ocorra a introdução dos zeros dominantes do controlador no modelo de malha fechada. Neste trabalho é apresentado o procedimento de discretização teórica e identificação de uma filtro Sallen Key de segunda ordem como planta-objeto a ser controlado.

***Index Terms*—PID, RST, Sallen-Key.**

I. INTRODUÇÃO

Dentre os numerosos métodos de projeto de controladores discretos para sistemas lineares SISO, a RST é uma metodologia de alocação de pólos de considerável elegância empregando a solução da equação Diophantina. Em trabalhos inicias para o emprego da forma RST, os autores lidam com rejeição dos distúrbios de baixa freqüência, através do emprego de filtros polinomiais, e, também, garantem o rastreamento em malha fechada com ganho unitário, para referências constantes [1], [2]. Este artigo lida com alguns objetivos principais, os quais dividem o mesmo:

- Determinação de um modelo discreto para o filtro Sallen-Key de 2ª ordem através da discretização da função de transferência;
- Determinação de um modelo discreto para o filtro Sallen-Key de 2ª ordem através de processo de identificação (ferramenta *Ident* do Matlab);
- Adoção de um modelo (passos 1 e 2) para ser utilizado no projeto de controladores de acordo com:
- PID discreto com os resultados de testes de controle em malha-fechada, e resultados da resposta ao degrau;
- Método por posicionamento de pólos, empregando o termo $T(q^{-1}) = R(1)$, com resultados dos testes do controle em malha fechada, com resposta ao degrau e resposta em freqüência;
- Método por posicionamento de pólos com rastreamento e regulação independentes, com resultados dos testes do controle em malha fechada, com resposta ao degrau e resposta em freqüência.

Assim, a metodologia por alocação de pólos e com o PID clássico serão comparadas.

II. FILTRO SALLEN-KEY DE SEGUNDA ORDEM

O filtro Sallen-Key é visualizado na Fig. 1.

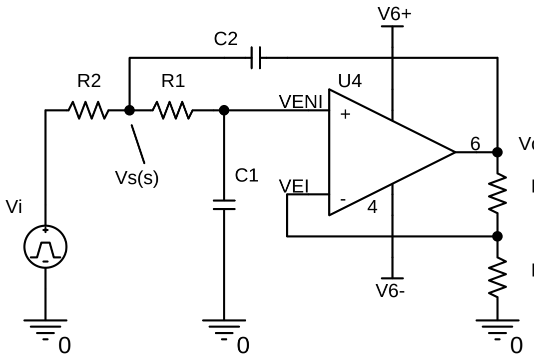

Fig. 1 – Diagrama esquemático de um filtro Sallen-Key de segunda ordem com os principais componentes envolvidos.

A função de transferência entre a entrada (Vi) pela saída (Vo) é expressa através da expressão:

$$G_P(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = K_G \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n \cdot s + s^2} \qquad (1)$$

Na qual os termos ω_n, ζ e K_G, são dados pelas expressões abaixo:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}} \qquad (2)$$

$$\zeta = \frac{\frac{1}{C_2 R_2} + \frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1-K_G}{C_1 R_1}}{2\omega_n} \qquad (3)$$

$$K_G = 1 + \frac{R_4}{R_3} \qquad (4)$$

Empregando os valores: $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 1{,}5k\Omega$, $R_3 = 1k\Omega$, $R_4 = 1{,}45k\Omega$, $C_1 = 0{,}5\mu F$ e $C_2 = 0{,}5\mu F$, a resposta em freqüência da planta é obtida na Fig. 1. A freqüência natural do sistema é de

$$\omega_n = 1633 \, rad/s \triangleq 259{,}89 Hz \qquad (5)$$

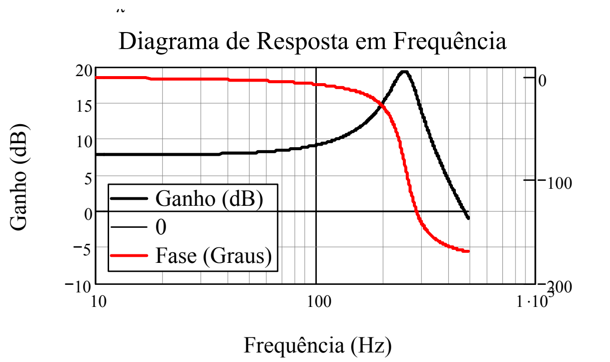

Fig. 2 – Diagrama da resposta em freqüência para o filtro Sallen-Key de segunda ordem com os principais componentes envolvidos.

Para a discretização deste modelo é adotada uma freqüência de amostragem de :

$$f_s = 20kSPS \triangleq T_s = 50\mu s \qquad (6)$$

Observar que esta ordem de grandeza é maior que seis vezes a freqüência natural do sistema.

III. Filtro Sallen-Key de Segunda Ordem Discretizado

Empregando a taxa de amostragem na equação (6), e, o amostrador de ordem zero (ZOH), o modelo discretizado da planta é visualizado na equação (8):

$$G_{Pd}(z) = \left(1 - z^{-1}\right)\mathbf{Z}\left\{\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{G_p(s)}{s}\right]\right\} \qquad (7)$$

$$G_{Pd}(z) = \frac{0{,}008104z^{-1} + 0{,}008045z^{-2}}{1 - 1{,}972z^{-1} + 0{,}9786z^{-2}} \qquad (8)$$

Logo, a resposta em freqüência do sistema discretizado é visualizado na Fig. 3.

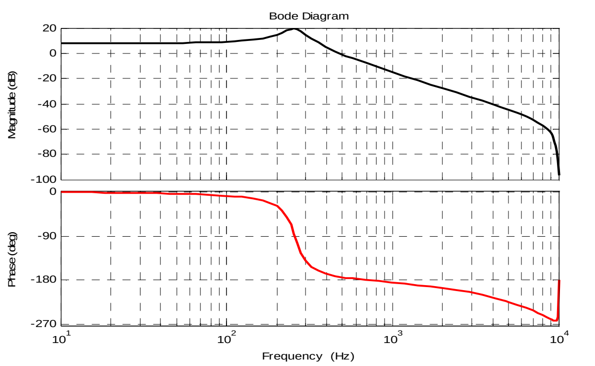

Fig. 3 – Diagrama da resposta em freqüência para o filtro Sallen-Key de segunda ordem, discretizado, através do segurador de ordem zero.

A próxima secção exibe o sistema obtido experimentalmente e identificado através da resposta ao degrau e com a ferramenta *Ident*.

IV. Filtro Sallen-Key de Segunda Ordem Obtido Através de Identificação

O circuito empregado experimentalmente é visualizado na Fig. 4.

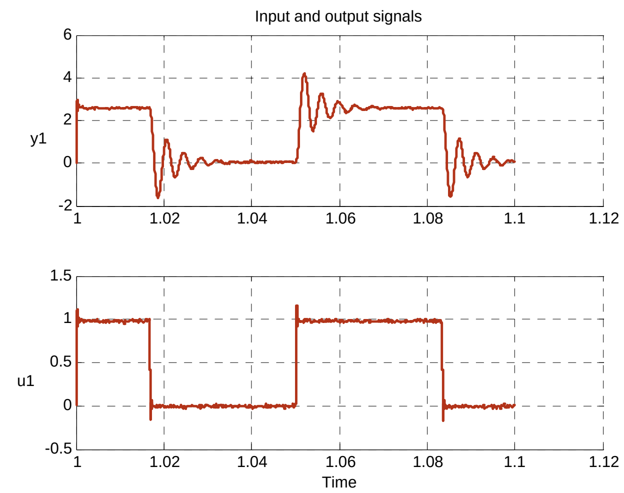

Fig. 4 – Circuito concebido experimentalmente para obtenção da identificação através da ferramenta *ident* do software Matlab®, e sinais de saída (y1) e entrada (u1) obtidos através do osciloscópio.

Com o emprego da ferramenta *ident*, é adotado dois modelos de identificação iterativos, de ordem 2 para os polinômios $A(q^{-1})$ e $B(q^{-1})$, com um atraso e sem atraso, concebendo os modelos iv221 e iv220, cujas saídas são comparadas ao sinal original, visualizados na Fig. 5.

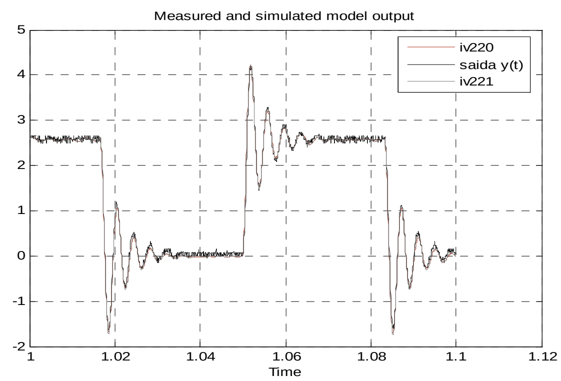

Fig. 5 – Resultados dos modelos identificados pela ferramenta *ident* do software Matlab®, a saída original da planta experimental está em escuro, e dois modelos foram identificados por iv220 e iv221.

As funções de transferência para os modelos iv220, e iv221, são apresentadas a seguir:

$$G_{iv220}(z) = \frac{0{,}03028z^{-1} - 0{,}0135z^{-2}}{1 - 1{,}971z^{-1} + 0{,}9774z^{-2}} \qquad (9)$$

$$G_{iv221}(z) = \frac{0{,}03943z^{-1} - 0{,}02246z^{-2}}{1 - 1{,}972z^{-1} + 0{,}9783z^{-2}} \qquad (10)$$

Com os modelos obtidos, é possível determinar o controlador PID discreto para o controle das plantas, que é visualizado na próxima secção.

V. ESPECIFICAÇÕES DAS DINÂMICAS DESEJADAS PARA O FILTRO SALLEN-KEY DE SEGUNDA ORDEM EM MALHA FECHADA

As especificações de tempo de subida, e máximo de sobre-sinal, para a resposta ao degrau da planta + controlador, são visualizadas abaixo:

$$t_{rise} = 5ms \tag{11}$$

$$Max_{over} = 5\% \tag{12}$$

Estas especificações levam a uma função de transferência característica de segunda ordem, desejados, e sob o formato contínuo, e sob o formato discreto:

$$G_{desejado}(s) = \frac{186 \cdot 10^3}{s^2 + 596,3s + 186 \cdot 10^3} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} G_{desejado}(z) &= \frac{0,0002302z + 0,0002279}{z^2 - 1,97z + 0,9706} \\ &\triangleq \frac{0,0002302z^{-1} + 0,0002279z^{-2}}{1 - 1,97z^{-1} + 0,9706z^{-2}} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} G_{desejado}(z) &= 10^{-3} \frac{0,2302 \cdot z + 0,2279}{(z - p_1) \cdot (z - p_2)} \\ p_{1,2} &= 0,9851 \pm j0,0153 \end{aligned} \tag{15}$$

Assim, o controlador deverá posicionar os pólos dominantes de malha fechada expressos na equação (15).

VI. CONTROLADOR PID PARA O FILTRO SALLEN-KEY DE SEGUNDA ORDEM

A estrutura do controlador PID é apresentada na Fig. 6:

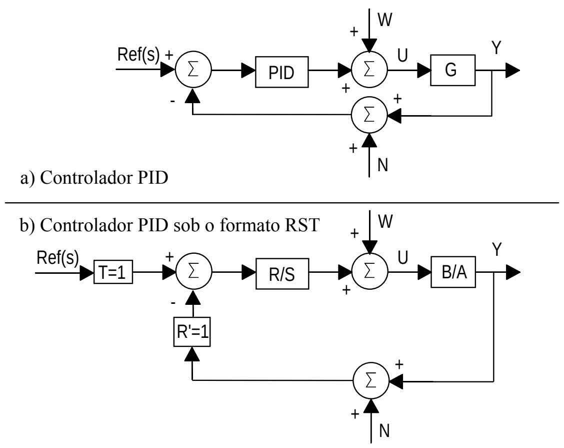

Fig. 6 – Estrutura do controlador por PID, com os zeros do controlador (polinômio R) distribuídos nos ramos da referência e da re-alimentação, com introdução aos ruídos de amostragem - $N(z^{-1})$, e ruído de sinal de controle – $W(z^{-1})$.

O controlador PID contínuo é apresentado na expressão (16):

$$PID(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{T_d}{1 + sT_d N^{-1}}\right) \tag{16}$$

O termo K representa o ganho proporcional, Ti é a constante de tempo integral, Td é a constante de tempo do termo derivativo e Td/N é uma ação de filtragem.

A função de transferência do controlador PID discreto, considerando um período de amostragem T_s, é expressa por:

$$\begin{aligned} PID(z^{-1}) &= \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} = \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{(1 - z^{-1})(1 + s'_1 z^{-1})} \\ &= \frac{r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2}}{1 + s_1 z^{-1} + s_2 z^{-2}} \end{aligned} \tag{17}$$

Os termos, r_0, r_1, r_2, s_1, s_2 e s_1', relacionados ao formato do controlador PID contínuo, são expressos nas equações (18)-(21):

$$s'_1 = -\frac{T_d}{T_d + NT_s} \tag{18}$$

$$r_0 = K\left(1 + \frac{T_s}{T_i} - N\frac{T_s}{T_d}s'_1\right) \tag{19}$$

$$r_1 = K\left[s_1\left(1 + \frac{T_s}{T_i} + 2N\frac{T_s}{T_d}\right) - 1\right] \tag{20}$$

$$r_2 = -Ks_1\left(1 + N\frac{T_s}{T_d}\right) \tag{21}$$

Analisando a função de transferência em malha fechada para a planta descrita na Fig. 6:

$$\begin{aligned} H_{Malha.\,fechada}(z^{-1}) &= \frac{B(z^{-1})R(z^{-1})}{A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1})} \\ &= \frac{B(z^{-1})R(z^{-1})}{P(z^{-1})} = \frac{B(z^{-1})(r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2})}{P(z^{-1})} \end{aligned} \tag{22}$$

O equacionamento para obtenção do posicionamento dos pólos envolve a solução da equação *Diofantina*:

$$A(z^{-1})S(z^{-1}) + B(z^{-1})R(z^{-1}) = P(z^{-1}) \tag{23}$$

De forma que exista a rejeição ao distúrbio do tipo degrau (ou erro estático nulo) é necessário que exista um integrador no ramo direto (1/S), logo a igualdade deverá ser mantida:

$$\begin{aligned} P(z^{-1}) &= \overbrace{(1 + a_1 z^{-1} + a_1 z^{-2})}^{A(z^{-1})}\overbrace{(1 - z^{-1})(1 + s'_1 z^{-1})}^{S(z^{-1})} + \\ &+ \overbrace{(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})}^{B(z^{-1})}\overbrace{(r_0 + r_1 z^{-1} + r_2 z^{-2})}^{R(z^{-1})} = \\ &= 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + p_3 z^{-3} + p_4 z^{-4} \end{aligned} \tag{24}$$

Que, leva ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a'_1 & 1 & b_1 & 0 & 0 \\ a'_2 & a'_1 & b_2 & b_1 & 0 \\ a'_3 & a'_2 & 0 & b_2 & b_1 \\ 0 & a'_3 & 0 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ s'_1 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Para o sistema apresentado, com as características desejadas, e, introduzindo dois pólos p_3 e p_4, alocados na origem, a solução produz os termos do controlador PID, com os filtros R, S e T, respectivamente:

$$S\left(z^{-1}\right)=1-0,5503z^{-1}-0,4497z^{-2}$$
$$R\left(z^{-1}\right)=55,79-110,5z^{-1}+54,7z^{-2} \qquad (26)$$
$$T\left(z^{-1}\right)=R\left(z^{-1}\right)$$

No caso do modelo identificado:

$$S\left(z^{-1}\right)=1-2,169z^{-1}+1,169z^{-2}$$
$$R\left(z^{-1}\right)=52,51-103,4z^{-1}+50,89z^{-2} \qquad (27)$$
$$T\left(z^{-1}\right)=R\left(z^{-1}\right)$$

A resposta do controlador associado à planta (8), em malha fechada, com referência do tipo degrau, é visualizado na Fig. 7.

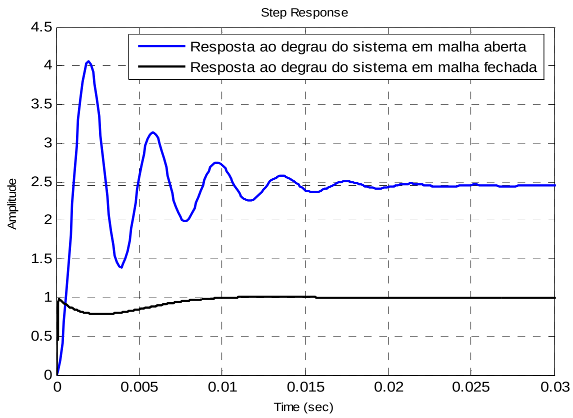

Fig. 7 – Resultados de simulação para o controlador PID discreto. A Forma de onda de azul representa a resposta do sistema em malha aberta e de preto a saída do sistema em malha fechada para entrada do tipo degrau.

Empregando o modelo identificado:

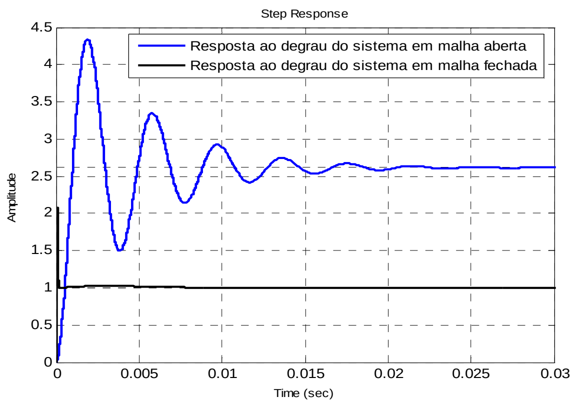

Fig. 8 – Resultados de simulação para o controlador PID discreto com planta identificada. A Forma de onda de azul representa a resposta do sistema em malha aberta e de preto a saída do sistema em malha fechada para entrada do tipo degrau.

Cabe nesta secção, analisar a característica de ruído (N) pelo sinal de saída do controlador U. Esta análise é fundamental para verificar como este controlador irá amplificar erros de re-alimentação, ruídos externos a planta sob controle, e principalmente, a amplificação da quantização numérica e arredondamento que os conversores A/D possuem.

A função de transferência do sinal de ruído N para a saída do controlador – U, é obtida através da expressão:

$$\frac{U}{N}=\frac{-PID\left(z^{-1}\right)}{1+G\left(z^{-1}\right)}=-\frac{R\left(z^{-1}\right)A\left(z^{-1}\right)}{S\left(z^{-1}\right)A\left(z^{-1}\right)+R\left(z^{-1}\right)B\left(z^{-1}\right)} \qquad (28)$$

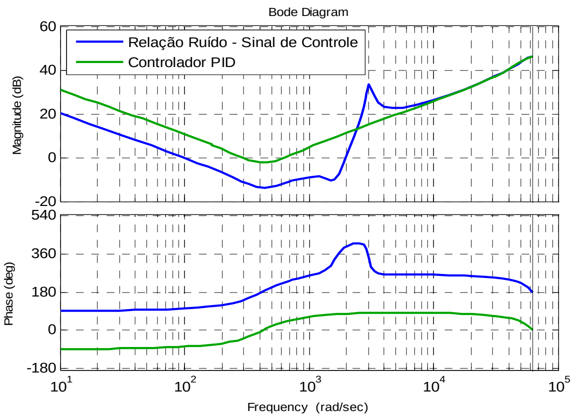

Fig. 9 – Diagrama de resposta em freqüência para a relação U/N (ruído – saída do controlador) para o projeto do PID discreto desta seção, e para o controlador PID (verde).

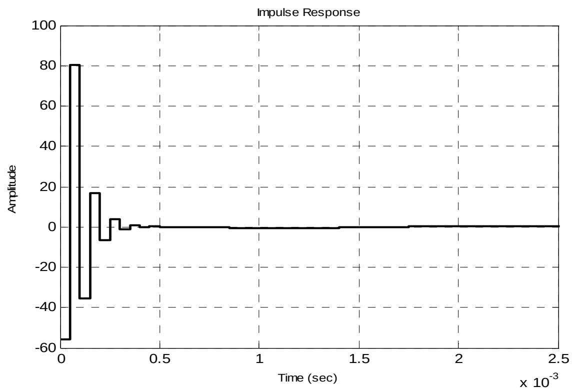

Fig. 10 – Diagrama de resposta no tempo para um impulso (delta de Dirac) de ruído para a saída do controlador no projeto do PID discreto desta seção.

É observado que:

- O tempo de subida não está de acordo com o projetado;
- O máximo de sobre sinal também não está de acordo com o projetado;
- O controlador também é um amplificador de ruídos. Existe uma amplificação da ordem de 30dB (aprox. 31 vezes o sinal de ruído na entrada da re-alimentação, para a freqüência de 3000rad/s ~ 477,465Hz)
- Os zeros do controlador influenciam na resposta desejada, causando divergência no resultado esperado equação (22);

VII. Método de Posicionamento de Pólos para o Filtro Sallen-Key de Segunda Ordem – Cancelamento do Efeito dos Zeros do Controlador

No controlador por posicionamento de pólos, na forma RST, é desejado que o polinômio de malha fechada possua os pólos dominantes especificados no projeto. No exemplo anterior, os zeros do controlador afetam a dinâmica de malha fechada, causando a redução no resultado desejado de malha fechada.

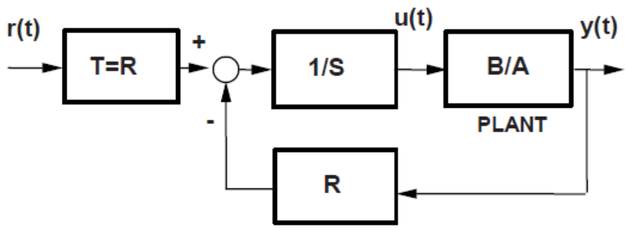

Fig. 11 – Estrutura do controlador por posicionamento de pólos RST.

A Função de transferência $G_{desejado}(z)$, apresenta os pólos de malha fechada (15) que devem ser posicionados pela estrutura do controlador RST, e estes devem ser dominantes com relação aos pólos adicionais.

Para que o sistema em malha fechada apresente ganho unitário em regime permanente, é necessário que:

$$H_{Malha.fechada}\left(z^{-1}\right)=\frac{B\left(z^{-1}\right)T\left(z^{-1}\right)}{P\left(z^{-1}\right)}= \\ =\frac{B\left(z^{-1}\right)}{P\left(z^{-1}\right)}\cdot\frac{P(1)}{B(1)}=\frac{B\left(z^{-1}\right)}{P\left(z^{-1}\right)}\cdot\frac{B(1)R(1)}{B(1)} \tag{29}$$

$$T\left(z^{-1}\right)=R(1) \tag{30}$$

Logo, para o cálculo do filtro T, é necessário que este seja igual à soma dos termos do filtro R. Os zeros da planta são mantidos, sem a adição dos zeros do controlador.

É empregado o uso de dois pólos auxiliares para compor o polinômio $P(z^{-1})$, de forma que eles não sejam dominantes ao sistema, e que minimizem o efeito de amplificação de ruído causado pelo ramo R, como apresentado na Fig. 12.

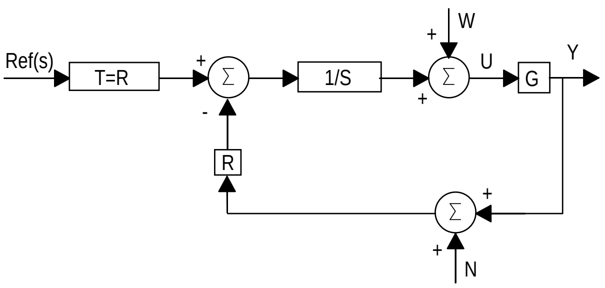

Fig. 12 – Estrutura do controlador por posicionamento de pólos RST, com introdução aos ruídos de amostragem - $N(z^{-1})$, e ruído de sinal de controle – $W(z^{-1})$.

A função de transferência do sinal de controle $U(z^{-1})$ pelo Ruído – $N(z^{-1})$, é apresentada na equação (31).

$$\frac{U}{N}\left(z^{-1}\right)=\frac{-R\left(z^{-1}\right)}{S\left(z^{-1}\right)+R\left(z^{-1}\right)G\left(z^{-1}\right)} \tag{31}$$

É observado que o filtro R impacta diretamente no ruído da amostragem, e, depende diretamente da alocação dos pólos adicionais.

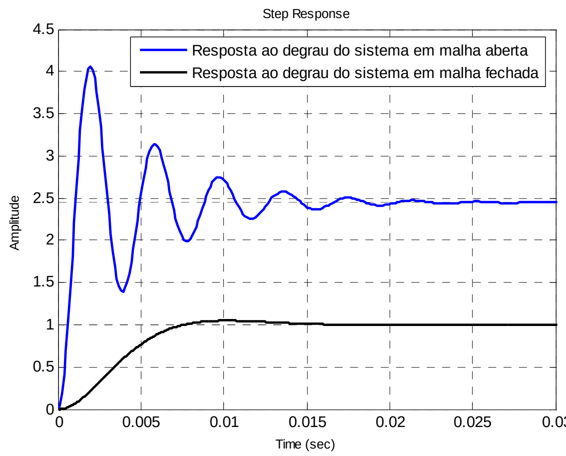

Fig. 13 – Resultados de simulação para o controlador PID discreto. A Forma de onda de azul representa a resposta do sistema em malha aberta e de preto a saída do sistema em malha fechada para entrada do tipo degrau.

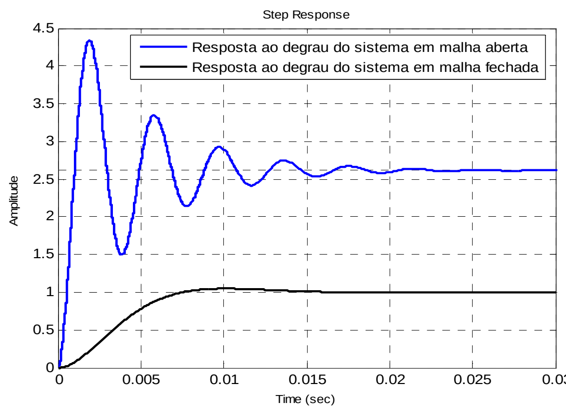

Fig. 14 – Resultados de simulação para o controlador PID discreto, para o modelo da planta obtido através da ferramenta *ident*. A Forma de onda de azul representa a resposta do sistema em malha aberta e de preto a saída do sistema em malha fechada para entrada do tipo degrau.

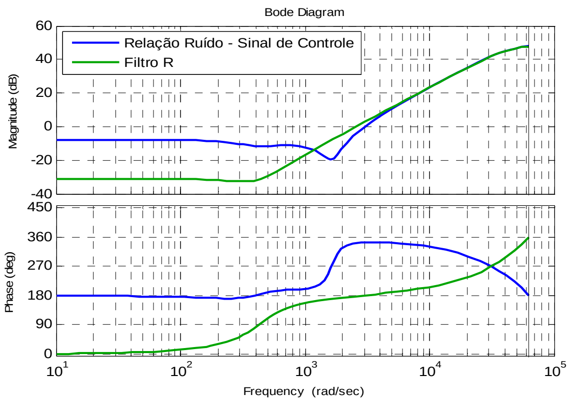

Fig. 15 – Diagrama de resposta em freqüência para a relação U/N (ruído – saída do controlador), e resposta em freqüência do filtro digital $R(z^{-1})$ para o projeto do PID discreto desta seção.

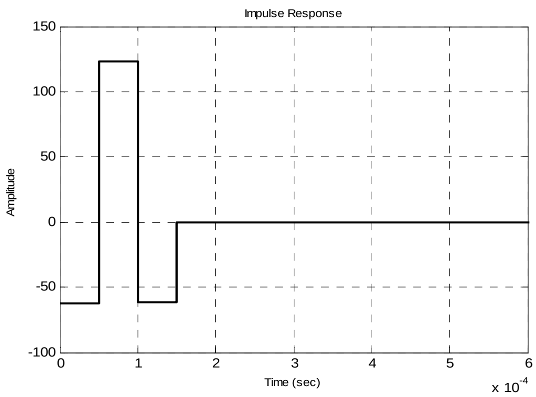

Fig. 16 – Diagrama de resposta no tempo para um impulso de ruído para a saída do controlador no projeto do controlador por posicionamento de pólos com cancelamento dos zeros do controlador desta seção.

A investigação do efeito do controlador RST é necessária, pois na realização do controlador em processadores com ponto fixo, irá ocorrer amplificação dos sinais quantizados, e dos erros de aproximação numérica realizados nas operações de multiplicação, soma e divisão do algoritmo que possibilita a construção do controlador.

É observado que, para a resposta ao degrau, o primeiro controlador PID tente amplificar na ordem de 20 vezes o degrau, enquanto que o posicionador de pólos RST, amplifica 60 vezes a transição de sinal.

Isto significa que em um processador, com resolução de 10bits (considerando 1bit de sinal, e os outros 9bits a magnitude do sinal), *signed fractional*, em formato Q0.15, cuja resolução de 1bit possui o peso de uma fração $1/(2^{15})$, e que o bit menos significativo do AD represente a fração $(2^6)/(2^{15})$ = 0,001953p.u = 0,1953%, com o efeito do filtro, a transição de apenas um bit no AD, irá impactar na amplificação em até 0,1953% x 60 = 11,71% no sinal introduzido na entrada da planta.

Para o PID convencional, o valor da transição de um bit reflete em até 0,1953% x 20 = 3,9% de ruído introduzido no sinal de controle da planta.

O efeito que este controlador ocasiona é percebido através da simulação apresentada nas próximas secções.

VIII. Método de Posicionamento de Pólos com Rastreamento e Regulação Independentes para o Filtro Sallen-Key de Segunda Ordem

Uma vez que o filtro R apresenta características indesejadas que devam ser suprimidas, então uma forma mais geral do controlador sob o formato RST deve ser analisada, para possibilitar modificar os polinômios R, S e T, de forma independente, mantendo as características desejadas de rastreamento e rejeições de perturbação.

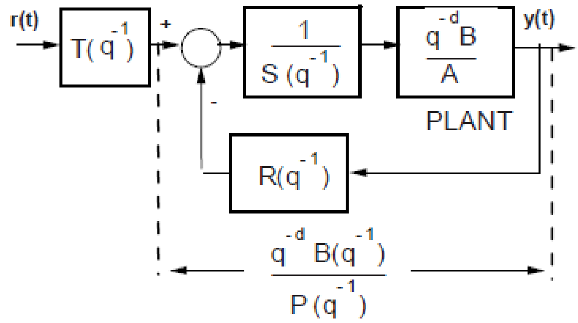

Fig. 17 – Diagrama de malha fechada para o posicionamento de pólos com o controlador RST [1].

Considere a relação de malha fechada, com a introdução do atraso característico da planta (termo z^{-d}):

$$H_{MF}\left(z^{-1}\right)=\frac{z^{-d}T\left(z^{-1}\right)B\left(z^{-1}\right)}{A\left(z^{-1}\right)S\left(z^{-1}\right)+z^{-d}B\left(z^{-1}\right)R\left(z^{-1}\right)} =\frac{z^{-d}B\left(z^{-1}\right)T\left(z^{-1}\right)}{P\left(z^{-1}\right)} \tag{32}$$

Os polinômios $R(z^{-1})$ e $S(z^{-1})$ e devem ser computados de acordo com a identidade de *Bezout,* uma vez que o polinômio $P(z^{-1})$ é conhecido e determinado com base nas características desejadas de malha fechada, e, sendo o produto de dois polinômios:

$$P\left(z^{-1}\right)=P_D\left(z^{-1}\right)P_F\left(z^{-1}\right) \tag{33}$$

Onde $P_D(z^{-1})$ e $P_F(z^{-1})$ definem os polinômios com os pólos desejados de malha fechada e de filtragem, respectivamente.

Os termos pré-fixados, $R(z^{-1})$ e $S(z^{-1})$ devem ser fatorados sob o formato:

$$R\left(z^{-1}\right)=R'\left(z^{-1}\right)H_R\left(z^{-1}\right) \tag{34}$$

$$S\left(z^{-1}\right)=S'\left(z^{-1}\right)H_S\left(z^{-1}\right) \tag{35}$$

Onde, $H_R(z^{-1})$ e $H_S(z^{-1})$ são polinômios pré-especificados com as características de filtragem desejados. Realizando a expansão da expressão (32):

$$H_{CL}\left(z^{-1}\right)=\frac{z^{-d}T\left(z^{-1}\right)B\left(z^{-1}\right)}{A\left(z^{-1}\right)S'\left(z^{-1}\right)H_S\left(z^{-1}\right)+z^{-d}B\left(z^{-1}\right)R'\left(z^{-1}\right)H_R\left(z^{-1}\right)} =\frac{z^{-d}B\left(z^{-1}\right)T\left(z^{-1}\right)}{P\left(z^{-1}\right)} \tag{36}$$

Assim, a equação a ser resolvida é dada pela identidade de

Bezout (37):

$$A\left(z^{-1}\right)S'\left(z^{-1}\right)H_S\left(z^{-1}\right)+z^{-d}B\left(z^{-1}\right)R'\left(z^{-1}\right)H_R\left(z^{-1}\right)=P\left(z^{-1}\right) \qquad (37)$$

Para que seja resolvida é necessário que seja feita a solução da expressão (23), com a substituição de $A(z^{-1})$ por $A'(z^{-1})= A(z^{-1})H_S(z^{-1})$, e $B(z^{-1})$ por $B'(z^{-1})= z^{-d}B(z^{-1})H_R(z^{-1})$:

$$A'\left(z^{-1}\right)S'\left(z^{-1}\right)+B'\left(z^{-1}\right)R'\left(z^{-1}\right)=P\left(z^{-1}\right) \qquad (38)$$

No caso de aplicações que exijam erro estático nulo em regime, $S(z^{-1})$ deve conter um termo $(1-z^{-1})$, logo $H_S(z^{-1})$ deve ser igual a $(1-z^{-1})$.

Para o bloqueio de sinais de ruído na medição, o controlador deve atenuar certas freqüências, o que implica $H_R(z^{-1})$ nulo para estas faixas. Adotando um filtro, com $0<\beta<1$:

$$H_R\left(z^{-1}\right)=\left(1+\beta z^{-1}\right)^n, n=1,2 \qquad (39)$$

$$\beta=e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi} \qquad (40)$$

Considerando β=1, segue que ζ = 0, e o sistema opera em malha aberta em $0{,}5f_s$, mesmo para n=1 em (39).

Através da a extensão da expressão (38):

$$\begin{aligned}P\left(z^{-1}\right)&=\overbrace{\left(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}\right)\left(1-z^{-1}\right)}^{A'\left(z^{-1}\right)=A\left(z^{-1}\right)H_S\left(z^{-1}\right)}\overbrace{\left(1+s'_1\,z^{-1}\right)}^{S'\left(z^{-1}\right)}+\\&+\overbrace{\left(b_1z^{-1}+b_2z^{-2}\right)\left(1+\beta z^{-1}\right)}^{B'\left(z^{-1}\right)=B\left(z^{-1}\right)H_R\left(z^{-1}\right)}\overbrace{\left(r'_0+r'_1\,z^{-1}\right)}^{R'\left(z^{-1}\right)}=\\&=1+p_1z^{-1}+p_2z^{-2}+p_3z^{-3}+p_4z^{-4}\end{aligned} \qquad (41)$$

Considere o caso genérico, onde o polinômio $A(z^{-1})$ apresenta grau n_A, o polinômio $B(z^{-1})$ apresenta grau n_B, a solução da identidade de *Bezout* irá apresentar uma solução única com grau mínimo para as condições (42) e (43):

$$\begin{aligned}&n_P=\deg P\left(z^{-1}\right)\le n_A+n_B+d-1;\\&n_S=\deg S\left(z^{-1}\right)\le n_B+d-1; n_R=\deg R\left(z^{-1}\right)\le n_A-1;\end{aligned} \qquad (42)$$

$$S\left(z^{-1}\right)=1+s_1z^{-1}+...+s_{n_S}z^{-n_S}=1+z^{-1}S^*\left(z^{-1}\right) \qquad (43)$$

$$R\left(z^{-1}\right)=r_0+r_1z^{-1}+...+r_{n_R}z^{-n_R} \qquad (44)$$

O sistema de equações a ser resolvido torna-se (para um caso genérico com P(z) apresentando n_P +1 termos:

$$p=M\cdot x \qquad (45)$$

$$x^T=\left[1,\quad s_1,...,s_{n_S},\quad r_0,...,r_{n_R},\right] \qquad (46)$$

$$p^T=\left[1,\quad p_1,...,p_i,...,p_{n_p},\quad 0,...,0,\right] \qquad (47)$$

$$M=\left[\begin{array}{cccc|cccc}\multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{n_B+d}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\qquad\qquad}^{n_A}}\\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0\\ a_1 & 1 & & . & b'_1 & 1 & & .\\ a_2 & & & 0 & b'_2 & & & b'_1\\ ... & & & 1 & ... & & & b'_2\\ a_{n_A} & & & ... & b'_{n_B} & & & .\\ 0 & & & a_{n_A-1} & 0 & . & . & .\\ 0 & ... & 0 & a_{n_A} & 0 & 0 & 0 & b'_{n_B}\\ \multicolumn{8}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{n_A+n_B+d}}\end{array}\right]\Bigg\}n_A+n_B+d \qquad (48)$$

É possível obter os coeficientes da matriz x empregando a inversa da equação (45). E, este sistema possui solução se a matriz M for invertível. Para que este o seja, os polinômios $A(z^{-1})$ e $B(z^{-1})$ devem ser coprimos.

IX. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO E DISCUSSÕES

As simulações apresentadas nesta secção visam aprimorar a compreensão e os cuidados que devem ser tomados ao empregar o controlador por posicionamento de pólos no formato RST. Na Fig. 18 é visualizada a simulação concebida em ambiente PSIM® com os filtros R, S e T, e a introdução de um elemento quantizador que emula o efeito do armazenador de ordem zero e a quantização numérica do conversor analógico digital. Nas simulações apresentadas nas Fig. 19 e Fig. 20, estão, respectivamente, a saída da planta, e a saída do controlador para os valores de resolução 10bits, 12bits e 16 bits.

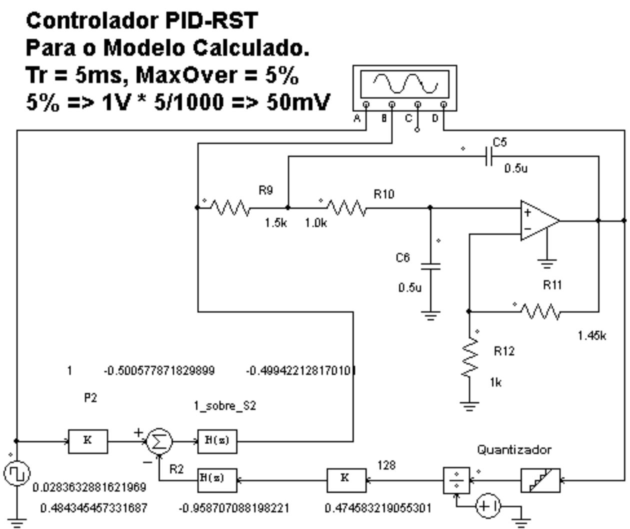

Fig. 18 – Diagrama do controlador RST realizado em ambiente PSIM para inspeção dos efeitos do ruído de quantização e operação com ponto flutuante.

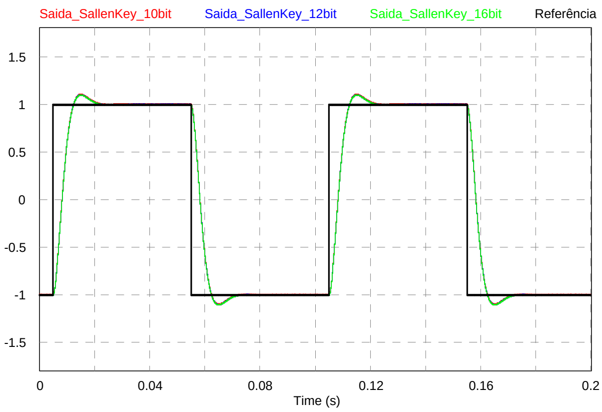

Fig. 19 – Resultado de saída da planta empregando o controlador RST para diferentes resoluções do conversor A/D realizado na simulação apresentada na Fig. 18, de vermelho é apresentada a saída do filtro SallenKey para um AD de 10bits, de azul, 12 bits, e de verde, 16bits, em escuro está a referência que a planta deverá seguir.

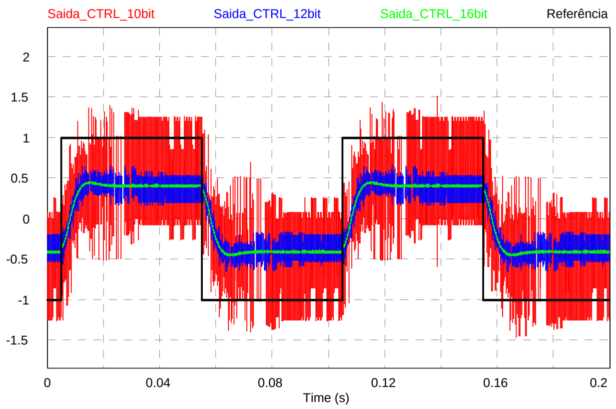

Fig. 20 – Resultado de saída do controlador RST para diferentes resoluções do conversor A/D realizado na simulação apresentada na Fig. 18, de vermelho é apresentada a saída do controlador para um AD de 10bits, de azul o conversor apresenta 12 bits, e de verde, 16bits, em escuro está a referência que a planta deverá seguir.

Através da Fig. 19, é possível observar que a planta segue a referência de acordo com o projetado e não há a inclusão dos zeros do controlador. Mesmo com valores distintos de resolução do conversor analógico-digital, o sistema aparenta operar de forma coerente em malha fechada. Entretanto, na Fig. 20, é evidenciado o efeito da alocação dos pólos adicionais na origem e sem o filtro adicional $H_R(z^{-1})$.

Alocando os pólos adicionais de projeto, ambos em 0,5, aprimora a rejeição ao ruído de aquisição e de quantização, e, com a inclusão do filtro:

$$H_R\left(z^{-1}\right)=1+z^{-1} \tag{49}$$

A versão com os filtros R, S e T já calculados através da expressão (48), é visualizada na Fig. 21.

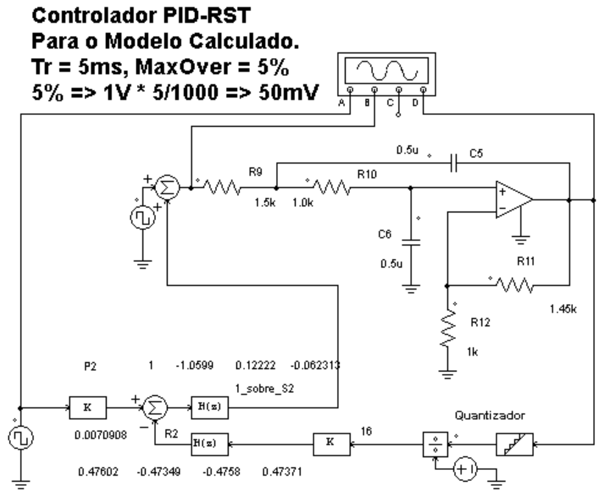

Fig. 21 – Diagrama do controlador RST realizado em ambiente PSIM para inspeção dos efeitos do ruído de quantização e operação com ponto flutuante, com a introdução do filtro $H_R(z^{-1})$. Observar o incremento da ordem dos filtros R e S em comparação com o caso anterior, e a inclusão de uma perturbação na entrada da planta.

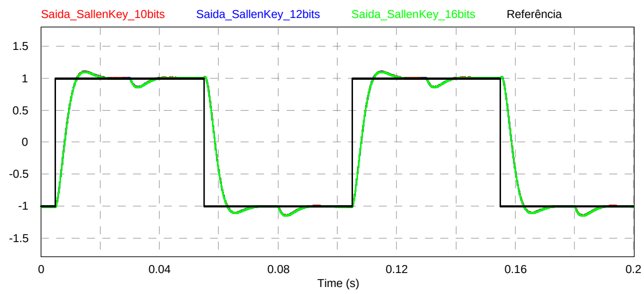

Fig. 22 – Resultado de saída da planta empregando o controlador RST para diferentes resoluções do conversor A/D realizado na simulação apresentada na Fig. 21, de vermelho é apresentada a saída do filtro *SallenKey* para um AD de 10bits, de azul, 12 bits, e de verde, 16bits, em escuro está a referência que a planta deverá seguir.

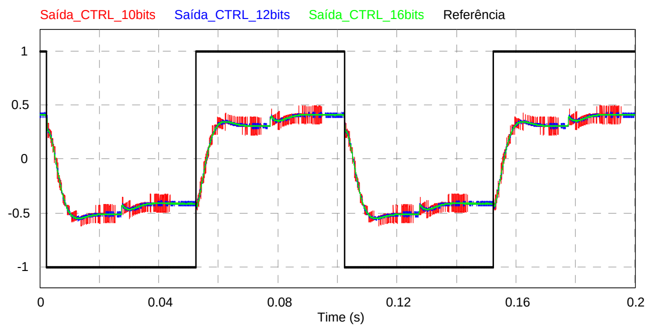

Fig. 23 – Resultado de saída do controlador RST para diferentes resoluções do conversor A/D realizado na simulação apresentada na Fig. 21, de vermelho é apresentada a saída do controlador para um AD de 10bits, de azul o conversor apresenta 12 bits, e de verde, 16bits, em escuro está a referência que a planta deverá seguir.

Como é observado, o posicionamento adequado dos pólos adicionais, e da especificação do filtro H_R, possibilitam minimizar os efeitos da quantização do conversor AD sem a perda das características dos pólos projetados para as características desejadas da resposta no tempo.

X. CONCLUSÃO

Este trabalho apresenta uma visão do controlador por posicionamento de pólos RST, comparando-o com o controlador PID clássico. É verificado que este formato de controlador possibilita o cancelamento de alguns efeitos indesejados que a estrutura convencional apresenta, a saber: Adição dos zeros do controlador a função de transferência em malha fechada, interdependência das características de regulação e rastreamento. Também é discutida uma metodologia que aprimora e extende o efeito do controlador RST para sistemas de qualquer ordem, incluindo filtros adicionais H_R e H_S objetivando aprimorar ou suprimir algumas características indesejadas do sistema em malha fehcada. Os resultados foram obtidos em ambiente PSIM® e o equacionamento do posicionamento de pólos foi elaborado em ambiente MATLAB®.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao IFCE – Instituto Federal do Ceará – Campus Maracanaú por disponibilizar tempo para que o autor possa realizar esta disciplina.

APÊNDICE A – CÓDIGO FONTE DE UM CONTROLADOR RST ELABORADO EM MATLAB.

```
clear;
clc;
close all;

Ts = 5e-05;        % Valor obtido da planta (neste caso com auxilio
do osciloscópio

% Discretiza o modelo da planta
R1 = 1e3;
R2 = 1.5e3;
R3 = 1e3
R4 = 1.45e3;
C1 = 0.5e-6;
C2 = 0.5e-6;

Wn = sqrt(1/(C1*C2*R1*R2));
Kg = 1+(R4/R3);
ksi = ((1/(C2*R2))+(1/(C2*R1))+((1-Kg)/(C1*R1)))/(2*Wn);

G = tf([Kg*(Wn^2)], [1 2*Wn*ksi Wn^2]);

Gd = c2d(G,Ts,'zoh');

[B,A] = tfdata(Gd, 'v');

% Especificações de projeto
Rise_time = 5e-3;
Max_over = 5;      % 5 porcento de sobre-sinal

% Introduzir as caraceterísticas de Wo e de amortecimento

[Wo, dmp]=omega_dmp(Rise_time,Max_over);
D = tf([Wo^2], [1 2*Wo*dmp Wo^2]);
Dd = c2d(D, Ts, 'zoh');
[Num,P]=tfdata(Dd, 'v');
aux = roots(P);
% extrai os polos de P e inclui os 2 polos adicionais
% 0.5 e 0.5
Pd = poly([aux(1) aux(2) 0.5 0.5]);

% Construão da matriz M
b1 = B(2);
b2 = B(3);
a1 = A(2);
a2 = A(3);

a11 = (a1-1);
a21 = (a2-a1);
a31 = (-a2);

M =    [1 0 0 0 0;
     a11 1 b1 0 0;
     a21 a11 b2 b1 0;
     a31 a21 0 b2 b1;
     0 a31 0 0 b2];
x = inv(M) * Pd';
R = [x(3) x(4) x(5)]
S = [1 (x(2)-1) -x(2) ]
T = R;
%T = sum(R)

%Hnoise = tf([conv(B,S)], [conv(conv(A,S)+conv(B,R),A)],Ts)
Gcontrolador = tf(R,S,Ts)
Hnoise2 = tf(-1*[conv(A,R)], [conv(A,S)+conv(B,S)], Ts);

figure, bode(Hnoise2, Gcontrolador);
legend('Relação Ruído - Sinal de Controle', 'Controlador PID');
grid;
h = findobj(gcf,'type','line');
set(h,'linewidth',2);
h = findobj(gcf,'type','axes');
set(h,'FontSize',10, 'XColor', [0,0,0], 'YColor', [0,0,0]);

% Resposta ao degrau no ruído da planta
figure, step(Hnoise2,'k');
grid;
h = findobj(gcf,'type','line');
set(h,'linewidth',2);
h = findobj(gcf,'type','axes');
set(h,'FontSize',10, 'XColor', [0,0,0], 'YColor', [0,0,0]);

% Resposta ao impulse no ruído da planta
figure, impulse(Hnoise2,'k');
grid;
h = findobj(gcf,'type','line');
set(h,'linewidth',2);
h = findobj(gcf,'type','axes');
set(h,'FontSize',10, 'XColor', [0,0,0], 'YColor', [0,0,0]);

% Resposta ao degrau em malha fechada
Hcl = tf([conv(B,T)], [conv(A,S)+conv(B,R)], Ts);
figure, step(G,Hcl, 'k');
legend('Resposta ao degrau do sistema em malha aberta', 'Respos
ta ao degrau do sistema em malha fechada');
grid;
h = findobj(gcf,'type','line');
set(h,'linewidth',2);
h = findobj(gcf,'type','axes');
set(h,'FontSize',10, 'XColor', [0,0,0], 'YColor', [0,0,0]);
```

REFERÊNCIAS

[1] Landau, Ioan D., Zito, Gianluca, "*Digital Control Systems – Design, Identification and Implementation*". Springer Verlag, 1st Edition, London, UK, 2006.

[2] Ostertag, Eric, Godoy, Emmanuel, "RST-Controller Design for Sinewave References by Means of an Auxiliary Diophantine Equation". Proc., 44th IEEE Conference on Decision and Control, and The European Control Conference, 2005.