# DCC008 - Cálculo Numérico

## Polinômios de Taylor

Bernardo Martins Rocha

Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Juiz de Fora
bernardomartinsrocha@ice.ufjf.br

# Conteúdo

# Introdução

Algumas funções matemáticas ditas "elementares"não são tão elementares assim quando tentamos avalia-las.

Se $p$ é uma função polinomial,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

então $p$ pode ser avaliado facilmente para qualquer número $x$.

Entretanto o mesmo não é verdadeiro para funções como $e^x$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x)$. Tente calcular essas funções sem usar a calculadora para qualquer $x$.

Estamos interessados em reduzir a avaliação de funções $f(x)$ por funções que sejam mais fáceis de se avaliar.

# Introdução

Já vimos que polinômios são funções fáceis de se avaliar, pois precisamos apenas de realizar operações de adição e multiplicação.

Sendo assim estamos interessados em aproximar a função $f(x)$ por uma função polinomial $\hat{f}(x)$ que seja fácil de avaliar.

Uma das aproximações polinomiais mais usadas são os polinômios de Taylor.

Vamos estudar agora como encontrar estas funções polinomiais que aproximam $f(x)$.

# Polinômio de Taylor

A fim de encontrar um polinômio que aproxima uma função, vamos antes analisar algumas propriedades de polinômios.

Considere o polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

É interessante observar que os coeficientes $a_i$, $i = 0, \ldots, n$, podem ser escritos em termos de valores de $p$ e de suas várias derivadas ($p'$, $p''$, ...) em $x = 0$.

# Polinômio de Taylor

A fim de encontrar um polinômio que aproxima uma função, vamos antes analisar algumas propriedades de polinômios.

Considere o polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

É interessante observar que os coeficientes $a_i$, $i = 0, \ldots, n$, podem ser escritos em termos de valores de $p$ e de suas várias derivadas ($p'$, $p''$, ...) em $x = 0$.

Para começar observe que

$$p(0) = a_0$$

# Polinômio de Taylor

A fim de encontrar um polinômio que aproxima uma função, vamos antes analisar algumas propriedades de polinômios.

Considere o polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$.

É interessante observar que os coeficientes $a_i$, $i = 0, \ldots, n$, podem ser escritos em termos de valores de $p$ e de suas várias derivadas ($p'$, $p''$, ...) em $x = 0$.

Para começar observe que

$$p(0) = a_0$$

Derivando $p(x)$ temos

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$$

e portanto

$$p'(0) = a_1$$

# Polinômio de Taylor

Derivando novamente

$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

# Polinômio de Taylor

Derivando novamente

$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

e portanto

$$p''(0) = 2a_2$$

# Polinômio de Taylor

Derivando novamente

$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

e portanto

$$p''(0) = 2a_2$$

Denotando a k-ésima derivada de $p(x)$ por $p^{(k)}(x)$, de forma geral teremos a seguinte relação

$$p^{(k)}(0) = k!\, a_k$$

# Polinômio de Taylor

Derivando novamente

$$p''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2}$$

e portanto

$$p''(0) = 2a_2$$

Denotando a k-ésima derivada de $p(x)$ por $p^{(k)}(x)$, de forma geral teremos a seguinte relação

$$p^{(k)}(0) = k!\, a_k$$

Lembrando que $0! = 1$ e que $p^{(0)} = p$, temos

$$a_k = \frac{p^{(k)}(0)}{k!},\ 0 \leq k \leq n$$

# Polinômio de Taylor

Se tivéssemos começado com uma função $p$ como um polinômio em $(x-a)$,

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$$

# Polinômio de Taylor

Se tivéssemos começado com uma função $p$ como um polinômio em $(x-a)$,

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$$

procedendo da mesma forma como anteriormente, temos

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n \\ p(a) &= a_0 \end{aligned}$$

# Polinômio de Taylor

Se tivéssemos começado com uma função $p$ como um polinômio em $(x-a)$,

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$$

procedendo da mesma forma como anteriormente, temos

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n \\ p(a) &= a_0 \\ p'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} \\ p'(a) &= a_1 \end{aligned}$$

# Polinômio de Taylor

Se tivéssemos começado com uma função $p$ como um polinômio em $(x-a)$,

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$$

procedendo da mesma forma como anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n \\
p(a) &= a_0 \\
p'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} \\
p'(a) &= a_1 \\
p''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x-a) + \ldots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} \\
p''(a) &= 2a_2 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

# Polinômio de Taylor

Se tivéssemos começado com uma função $p$ como um polinômio em $(x-a)$,

$$p(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$$

procedendo da mesma forma como anteriormente, temos

$$\begin{aligned}
p(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n \\
p(a) &= a_0 \\
p'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} \\
p'(a) &= a_1 \\
p''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x-a) + \ldots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} \\
p''(a) &= 2a_2 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

de forma geral, temos

$$a_k = \frac{p^{(k)}(a)}{k!}$$

# Polinômio de Taylor

Suponha agora que $f(x)$ seja uma função (não necessariamente um polinômio) tal que $f^{(1)}(a)$, $f^{(2)}(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$, existam. Seja

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ 0 \leq k \leq n} \tag{1}$$

então o **polinômio de Taylor de grau $n$ para $f(x)$ em $a$** é definido como

$$\boxed{P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n} \tag{2}$$

# Polinômio de Taylor

Suponha agora que $f(x)$ seja uma função (não necessariamente um polinômio) tal que $f^{(1)}(a)$, $f^{(2)}(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$, existam. Seja

$$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!},\ 0 \leq k \leq n} \tag{1}$$

então o **polinômio de Taylor de grau** $n$ **para** $f(x)$ **em** $a$ é definido como

$$\boxed{P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n} \tag{2}$$

Obs: vamos simplificar a notação e escrever apenas $P_n(x)$

# Polinômio de Taylor

O polinômio de Taylor foi definido tal que

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad \text{para } 0 \leq k \leq n$$

# Polinômio de Taylor

O polinômio de Taylor foi definido tal que

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad \text{para } 0 \leq k \leq n$$

observe

$$
\begin{aligned}
P_n^{(0)}(x) &= a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n \\
P_n^{(1)}(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} \\
P_n^{(2)}(x) &= 2a_2 + 6a_3(x-a) + \ldots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} \\
P_n^{(3)}(x) &= 6a_3 + 24a_4(x-a) + \ldots + n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} \\
&\ldots \\
P_n^{(n)}(x) &= n!\, a_n
\end{aligned}
$$

# Polinômio de Taylor

Lembrando que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

# Polinômio de Taylor

Lembrando que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

substituindo os coeficientes $a_k$ e avaliando as expressões anteriores em $x = a$ temos

$$P_n^{(0)}(a) = a_0 = f^{(0)}(a)$$

$$P_n^{(1)}(a) = a_1 = f^{(1)}(a)$$

# Polinômio de Taylor

Lembrando que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

substituindo os coeficientes $a_k$ e avaliando as expressões anteriores em $x = a$ temos

$$P_n^{(0)}(a) = a_0 = f^{(0)}(a)$$
$$P_n^{(1)}(a) = a_1 = f^{(1)}(a)$$
$$P_n^{(2)}(a) = 2a_2 = 2\frac{f^{(2)}(a)}{2!} = f^{(2)}(a)$$

# Polinômio de Taylor

Lembrando que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

substituindo os coeficientes $a_k$ e avaliando as expressões anteriores em $x = a$ temos

$$P_n^{(0)}(a) = a_0 = f^{(0)}(a)$$
$$P_n^{(1)}(a) = a_1 = f^{(1)}(a)$$
$$P_n^{(2)}(a) = 2a_2 = 2\tfrac{f^{(2)}(a)}{2!} = f^{(2)}(a)$$
$$P_n^{(3)}(a) = 6a_3 = 6\tfrac{f^{(3)}(a)}{3!} = f^{(3)}(a)$$
$$\ldots$$

# Polinômio de Taylor

Lembrando que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

substituindo os coeficientes $a_k$ e avaliando as expressões anteriores em $x = a$ temos

$$\begin{aligned}
P_n^{(0)}(a) &= a_0 = f^{(0)}(a) \\
P_n^{(1)}(a) &= a_1 = f^{(1)}(a) \\
P_n^{(2)}(a) &= 2a_2 = 2\tfrac{f^{(2)}(a)}{2!} = f^{(2)}(a) \\
P_n^{(3)}(a) &= 6a_3 = 6\tfrac{f^{(3)}(a)}{3!} = f^{(3)}(a) \\
&\dots \\
P_n^{(n)}(a) &= n!\,a_n = n!\,\tfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = f^{(n)}(a)
\end{aligned}$$

# Polinômio de Taylor

Lembrando que

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

substituindo os coeficientes $a_k$ e avaliando as expressões anteriores em $x = a$ temos

$$\begin{aligned}
P_n^{(0)}(a) &= a_0 = f^{(0)}(a) \\
P_n^{(1)}(a) &= a_1 = f^{(1)}(a) \\
P_n^{(2)}(a) &= 2a_2 = 2\tfrac{f^{(2)}(a)}{2!} = f^{(2)}(a) \\
P_n^{(3)}(a) &= 6a_3 = 6\tfrac{f^{(3)}(a)}{3!} = f^{(3)}(a) \\
&\dots \\
P_n^{(n)}(a) &= n!\,a_n = n!\,\tfrac{f^{(n)}(a)}{n!} = f^{(n)}(a)
\end{aligned}$$

E assim confirmamos que

$$P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \quad \text{para } 0 \leq k \leq n$$

# Polinômio de Taylor

Usando a relação

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

vamos escrever o polinômio de Taylor de grau $n$ da seguinte forma

$$\boxed{P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}}$$

# Exemplos

## Exemplo 1

Encontrar o polinômio de Taylor de grau 1 (linear) que aproxima a função $f(x) = e^x$ em torno do ponto $0$.

# Exemplos

## Exemplo 1

Encontrar o polinômio de Taylor de grau 1 (linear) que aproxima a função $f(x) = e^x$ em torno do ponto $0$.

## Solução Exemplo 1

Temos

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$$

portanto o polinômio de Taylor linear é dado por

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ &= f(0) + f'(0)(x-0) \\ &= e^0 + e^0(x-0) \\ &= 1 + x \end{aligned}$$

# Exemplos

## Exemplo 1 - Observação Geométrica

Equação da reta

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ é $f'(x_0) = m$, temos a seguinte eq. para a reta tangente

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

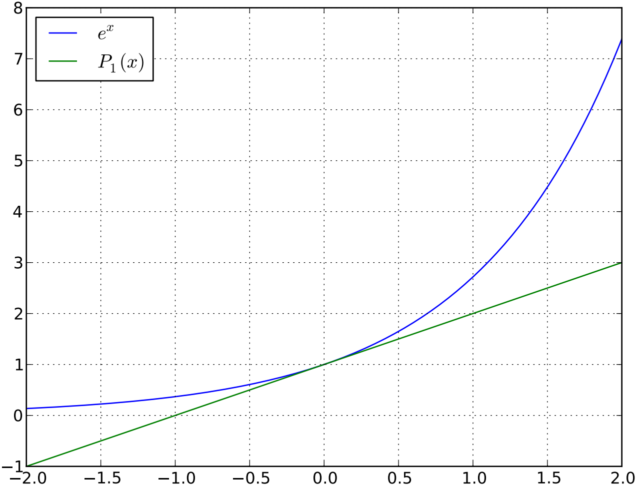
Comparando com nossa aproximação

$$P_1(x) - f(a) = f'(a)(x - a)$$

vemos que neste exemplo a função aproximadora é a reta tangente a curva $f(x)$ no ponto $x = a$.

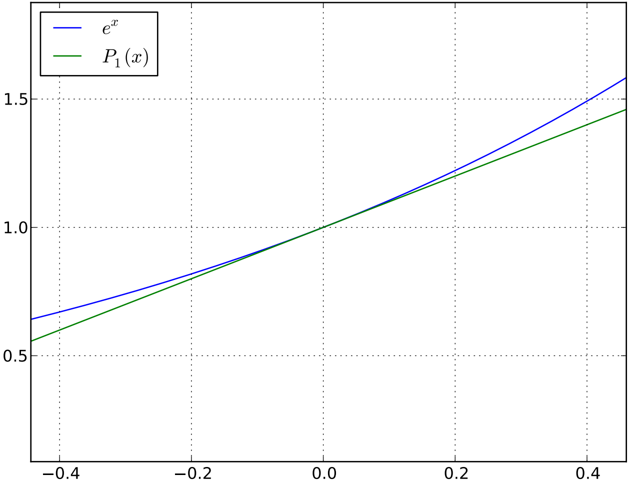
# Exemplos

## Solução Exemplo 1



# Exemplos

## Solução Exemplo 1 (Zoom)



# Exemplos

## Exemplo 2

Determinar o polinômio de Taylor de grau 2 (quadrático) para $f(x) = e^x$ em torno do ponto $a = 0$.

# Exemplos

## Exemplo 2

Determinar o polinômio de Taylor de grau 2 (quadrático) para $f(x) = e^x$ em torno do ponto $a = 0$.

## Solução Exemplo 2

Lembrando que

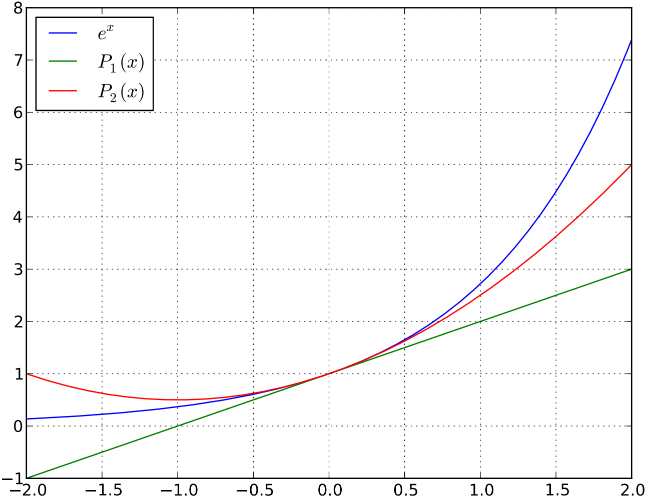
$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f''(x) = e^x$$

então

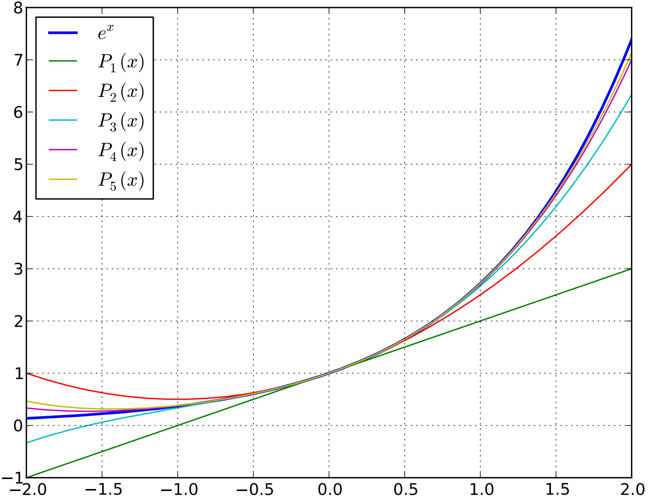
$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\tfrac{(x-a)^2}{2} \\ &= f(0) + f'(0)(x-0) + f''(0)\tfrac{(x-0)^2}{2} \\ &= e^0 + e^0(x-0) + e^0\tfrac{(x-0)^2}{2} \\ &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2} \end{aligned}$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 2



# Exemplos



# Exemplos

## Exemplo 3

Encontre a fórmula geral da aproximação usando polinômio de Taylor para a função $f(x) = \sin(x)$ em torno do ponto $a = 0$.

# Exemplos

## Exemplo 3

Encontre a fórmula geral da aproximação usando polinômio de Taylor para a função $f(x) = \sin(x)$ em torno do ponto $a = 0$.

## Solução Exemplo 3

Note que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x) & \Rightarrow \quad & f(a) &= 0\\
f'(x) &= \cos(x) & \Rightarrow \quad & f'(a) &= 1\\
f''(x) &= -\sin(x) & \Rightarrow \quad & f''(a) &= 0\\
f'''(x) &= -\cos(x) & \Rightarrow \quad & f'''(a) &= -1\\
f^{(4)}(x) &= \sin(x) & \Rightarrow \quad & f^{(4)}(a) &= 0
\end{aligned}$$

A partir desse ponto as derivadas repetem em ciclo de 4.

# Exemplos

## Solução Exemplo 3

Os coeficientes do polinômio de Taylor

$$a_k = \frac{\sin^{(k)}(0)}{k!}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$ são dados por $0, 1, 0, -\frac{1}{3!}, 0, \frac{1}{5!}, 0, -\frac{1}{7!}, \ldots$.
Portanto, tem-se que o polinômio de Taylor de grau $2n + 1$ é dado por

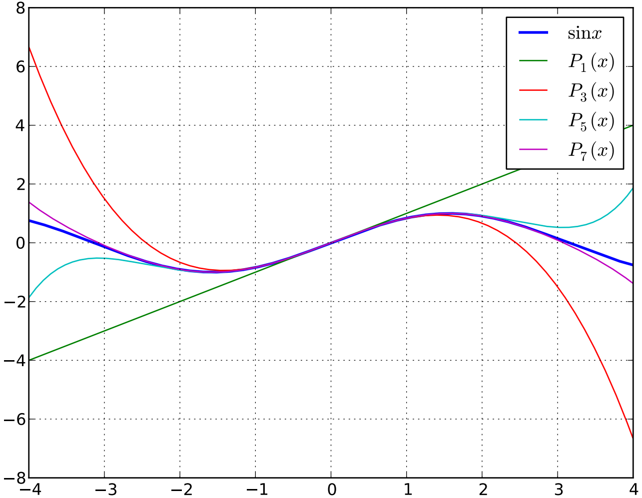
$$P_{2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Obs: $P_{2n+1} = P_{2n+2}$. $\square$

# Exemplos

## Solução Exemplo 3



# Exemplos

## Exercício

Verifique que o polinômio de Taylor de grau $2n$ para $f(x) = \cos(x)$ em $a = 0$ é dado por

$$P_{2n}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

## Exercício

Verifique que o polinômio de Taylor de grau $n$ para $f(x) = e^x$ em $a = 0$ é dado por

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{(n)!}$$

# Exemplo de Implementação em C

```
double exp_taylor(int n, double x)
{
    int i;
    double fat=1.0, term=1.0, sum=term;
    for(i=1; i<=n; i++)
    {
        fat  = fat * i;
        term = term * x;
        sum  = sum + term/fat;
    }
    return sum;
}
```

# Exemplo de Implementação em C

```
int main ()
{
    int n;
    double x;

    scanf("%d", &n);
    scanf("%lf", &x);

    printf("exp(x)  = %e\n", exp(x) );
    printf("taylor  = %e\n", exp_taylor(n, x) );

    return 0;
}
```

# Exemplo de Implementação em C

```
n = 5
x = 0.25
exp(x)   = 1.284025e+00
taylor   = 1.284025e+00

n = 25
x = 2.5
exp(x)   = 1.218249e+01
taylor   = 1.218249e+01

n = 25
x = 10
exp(x)   = 2.202647e+04
taylor   = 2.202608e+04

n = 25
x = 20
exp(x)   = 4.851652e+08
taylor   = 4.307370e+08
```

```
n = 5
x = -0.25
exp(x)   = 7.788008e-01
taylor   = 7.788005e-01

n = 25
x = -2.5
exp(x)   = 8.208500e-02
taylor   = 8.208500e-02

n = 25
x = -10
exp(x)   = 4.539993e-05
taylor   = -1.804113e-01        (***)

n = 25
x = -20
exp(x)   = 2.061154e-09
taylor   = -9.494844e+06        (***)
```

# Exemplo de Implementação em Python

```
def exp_taylor(n, x):
    fat = 1.0
    term = 1.0
    sum = term
    i = 1
    while i <= n:
        fat = fat * i
        term = term * x
        sum = sum + term/fat
        i = i + 1
    return sum

if __name__ == "__main__":
    n = int(raw_input("digite n"))
    x = float(raw_input("digite x"))

    print exp_taylor(n, x)
```

# Exemplos

## Exemplo 4

Encontre o valor de $f(6)$ sabendo que $f(4) = 125$, $f'(4) = 74$, $f''(4) = 30$, $f'''(4) = 6$, e que todas as outras derivadas de ordem alta são nulas.

# Exemplos

## Exemplo 4

Encontre o valor de $f(6)$ sabendo que $f(4) = 125$, $f'(4) = 74$, $f''(4) = 30$, $f'''(4) = 6$, e que todas as outras derivadas de ordem alta são nulas.

## Solução Exemplo 4

Vamos usar uma aproximação por polinômio de Taylor de grau 3

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}$$

# Exemplos

## Exemplo 4

Encontre o valor de $f(6)$ sabendo que $f(4) = 125$, $f'(4) = 74$, $f''(4) = 30$, $f'''(4) = 6$, e que todas as outras derivadas de ordem alta são nulas.

## Solução Exemplo 4

Vamos usar uma aproximação por polinômio de Taylor de grau 3

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f'''(a)\frac{(x-a)^3}{3!}$$

Como temos os valores da função e suas derivadas em $x = 4$ usaremos este ponto para aproximar $f(6)$, portanto

$$\begin{aligned} f(6) \approx P_3(6) &= f(4) + f'(4)(6-4) + f''(4)\frac{(6-4)^2}{2!} + f'''(4)\frac{(6-4)^3}{3!} \\ &= 125 + 74 \cdot 2 + 30 \cdot \tfrac{4}{2} + 6 \cdot \tfrac{8}{6} \\ &= 125 + 148 + 60 + 8 \\ &= 341 \end{aligned}$$

# Polinômio de Taylor

Algumas propriedades da aproximação por polinômio de Taylor:

- Quanto maior o grau do polinômio, melhor a aproximação.
- A medida que nos afastamos do ponto $x = a$, a aproximação piora.
- O polinômio de Taylor $P_n(x)$ só precisa do **valor da função e de suas derivadas** em um ponto $a$. Não é preciso conhecer a expressão analítica de suas derivadas.

# Exemplos

## Exemplo 5

Como calcular o valor de $\sqrt{13}$ numa ilha deserta, sem usar calculadora?

# Exemplos

### Exemplo 5

Como calcular o valor de $\sqrt{13}$ numa ilha deserta, sem usar calculadora?

### Solução Exemplo 5

Aproximar $f(x) = \sqrt{x}$ perto de $a$ usando polinômios de Taylor.

# Exemplos

## Exemplo 5

Como calcular o valor de $\sqrt{13}$ numa ilha deserta, sem usar calculadora?

## Solução Exemplo 5

Aproximar $f(x) = \sqrt{x}$ perto de $a$ usando polinômios de Taylor. Neste caso vamos usar um polinômio linear e vamos escolher o ponto $a = 9$ (poderia ser $a = 16$).

# Exemplos

## Exemplo 5

Como calcular o valor de $\sqrt{13}$ numa ilha deserta, sem usar calculadora?

## Solução Exemplo 5

Aproximar $f(x) = \sqrt{x}$ perto de $a$ usando polinômios de Taylor.
Neste caso vamos usar um polinômio linear e vamos escolher o ponto $a = 9$ (poderia ser $a = 16$).
Temos

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

# Exemplos

## Exemplo 5

Como calcular o valor de $\sqrt{13}$ numa ilha deserta, sem usar calculadora?

## Solução Exemplo 5

Aproximar $f(x) = \sqrt{x}$ perto de $a$ usando polinômios de Taylor. Neste caso vamos usar um polinômio linear e vamos escolher o ponto $a = 9$ (poderia ser $a = 16$).
Temos

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

logo

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 5

Substituindo $a = 9$ em $P_1(x)$ temos

$$P_1(x) = \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}}(x - 9)$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 5

Substituindo $a = 9$ em $P_1(x)$ temos

$$P_1(x) = \sqrt{9} + \tfrac{1}{2\sqrt{9}}(x - 9)$$

Sendo assim, avaliando em $x = 13$ para obter o valor de $\sqrt{13}$ obtemos

$$P_1(13) = \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}}(13 - 9) = 3 + \frac{4}{6} = 3.6666$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 5

Substituindo $a = 9$ em $P_1(x)$ temos

$$P_1(x) = \sqrt{9} + \tfrac{1}{2\sqrt{9}}(x - 9)$$

Sendo assim, avaliando em $x = 13$ para obter o valor de $\sqrt{13}$ obtemos

$$P_1(13) = \sqrt{9} + \frac{1}{2\sqrt{9}}(13 - 9) = 3 + \frac{4}{6} = 3.6666$$

O valor exato de $\sqrt{13}$ é 3.6055.

□

# Exemplos

## Exemplo 6

Calcular o valor de $\sqrt[7]{1.1}$ ($R: 1.013708856$).

# Exemplos

## Exemplo 6

Calcular o valor de $\sqrt[7]{1.1}$ ($R : 1.013708856$).

## Solução Exemplo 6

A função que queremos avaliar é $f(x) = \sqrt[7]{x}$. Vamos usar um polinômio de Taylor linear em torno de $a = 1$.

# Exemplos

## Exemplo 6

Calcular o valor de $\sqrt[7]{1.1}$ ($R: 1.013708856$).

## Solução Exemplo 6

A função que queremos avaliar é $f(x) = \sqrt[7]{x}$. Vamos usar um polinômio de Taylor linear em torno de $a = 1$. Derivando

$$f(x) = x^{1/7} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$$

# Exemplos

## Exemplo 6

Calcular o valor de $\sqrt[7]{1.1}$ ($R : 1.013708856$).

## Solução Exemplo 6

A função que queremos avaliar é $f(x) = \sqrt[7]{x}$. Vamos usar um polinômio de Taylor linear em torno de $a = 1$. Derivando

$$f(x) = x^{1/7} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$$

Assim temos a seguinte aproximação

$$\sqrt[7]{x} \approx f(a) + f'(a)(x-a) = \sqrt[7]{1} + \frac{1}{7\sqrt[7]{1^6}}(x-1)$$

# Exemplos

## Exemplo 6

Calcular o valor de $\sqrt[7]{1.1}$ $(R: 1.013708856)$.

## Solução Exemplo 6

A função que queremos avaliar é $f(x) = \sqrt[7]{x}$. Vamos usar um polinômio de Taylor linear em torno de $a = 1$. Derivando

$$f(x) = x^{1/7} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$$

Assim temos a seguinte aproximação

$$\sqrt[7]{x} \approx f(a) + f'(a)(x-a) = \sqrt[7]{1} + \frac{1}{7\sqrt[7]{1^6}}(x-1)$$

e para $x = 1.1$ temos

$$\sqrt[7]{1.1} \approx 1 + \frac{1.1-1}{7} = 1.01428$$

# Exemplos

## Exemplo 7

Calcular o valor de $\exp(0.2)$.

## Exemplos

### Exemplo 7

Calcular o valor de $\exp(0.2)$.

### Solução Exemplo 7

A função que queremos avaliar é $f(x) = e^x = \exp(x)$. Vamos usar um polinômio de Taylor (i) linear e (ii) quadrático em torno do ponto $a = 0$. Calculando as derivadas

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = f''(x) = e^x$$

assim temos as seguintes aproximações

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) \\ &= e^0 + e^0(x-0) \\ &= 1 + x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P_2(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\tfrac{(x-a)^2}{2} \\ &= e^0 + e^0(x-0) + e^0\tfrac{(x-0)}{2} \\ &= 1 + x + \tfrac{x^2}{2} \end{aligned}$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 7

Sabemos que o valor real da expressão $\exp(0.2)$ é 1.2214. Temos as seguintes funções aproximadoras

$$P_1(x) = 1 + x$$
$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

que quando avaliadas em $x = 0.2$ fornecem

$$\begin{aligned} P_1(0.2) &= 1 + 0.2 = 1.2 \\ P_2(0.2) &= 1 + 0.2 + \frac{0.2^2}{2} \\ &= 1 + 0.2 + \frac{0.04}{2} \\ &= 1 + 0.2 + 0.02 = 1.22 \end{aligned}$$

$\square$

# Exemplos

## Exemplo 8

Encontre uma aproximação para $\log(x)$.

# Exemplos

## Exemplo 8

Encontre uma aproximação para $\log(x)$.

## Solução Exemplo 8

O polinômio de Taylor para $\log(x)$ tem que ser calculado em algum ponto $a \neq 0$ já que a função não está definida neste ponto. Vamos usar então $a = 1$ para começar.

# Exemplos

## Exemplo 8

Encontre uma aproximação para $\log(x)$.

## Solução Exemplo 8

O polinômio de Taylor para $\log(x)$ tem que ser calculado em algum ponto $a \neq 0$ já que a função não está definida neste ponto. Vamos usar então $a = 1$ para começar. Calculando as derivadas temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} \\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} \\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4}
\end{aligned}$$

# Exemplos

## Exemplo 8

Encontre uma aproximação para $\log(x)$.

## Solução Exemplo 8

O polinômio de Taylor para $\log(x)$ tem que ser calculado em algum ponto $a \neq 0$ já que a função não está definida neste ponto. Vamos usar então $a = 1$ para começar. Calculando as derivadas temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} &\Rightarrow\quad f'(1) &= 1\\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} &\Rightarrow\quad f''(1) &= -1\\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3} &\Rightarrow\quad f'''(1) &= 2\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4} &\Rightarrow\quad f^{(4)}(1) &= -6
\end{aligned}$$

# Exemplos

## Exemplo 8

Encontre uma aproximação para $\log(x)$.

## Solução Exemplo 8

O polinômio de Taylor para $\log(x)$ tem que ser calculado em algum ponto $a \neq 0$ já que a função não está definida neste ponto. Vamos usar então $a = 1$ para começar. Calculando as derivadas temos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} && \Rightarrow \quad f'(1) = 1 \\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} && \Rightarrow \quad f''(1) = -1 \\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3} && \Rightarrow \quad f'''(1) = 2 \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4} && \Rightarrow \quad f^{(4)}(1) = -6
\end{aligned}$$

De forma geral, para $k = 1, \ldots, n$, temos

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$$

# Exemplos

## Exemplo 8

Encontre uma aproximação para $\log(x)$.

## Solução Exemplo 8

O polinômio de Taylor para $\log(x)$ tem que ser calculado em algum ponto $a \neq 0$ já que a função não está definida neste ponto. Vamos usar então $a = 1$ para começar. Calculando as derivadas temos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} &\Rightarrow\quad f'(1) &= 1\\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} &\Rightarrow\quad f''(1) &= -1\\
f'''(x) &= \frac{2}{x^3} &\Rightarrow\quad f'''(1) &= 2\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4} &\Rightarrow\quad f^{(4)}(1) &= -6
\end{aligned}
$$

De forma geral, para $k = 1, \ldots, n$, temos

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \quad \Rightarrow \quad f^{(k)}(1) = (-1)^{k-1}(k-1)!$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 8

Portanto temos

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(1) + \ldots + \frac{(x-1)^n}{n!}f^{(n)}(1) \\
&= 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6}2 + \ldots + \frac{(x-1)^n}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)!
\end{aligned}
$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 8

Portanto temos

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(1) + \ldots + \frac{(x-1)^n}{n!}f^{(n)}(1) \\
&= 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6}2 + \ldots + \frac{(x-1)^n}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)!
\end{aligned}
$$

assim

$$P_n(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 8

Portanto temos

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(1) + \ldots + \frac{(x-1)^n}{n!}f^{(n)}(1) \\
&= 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6}2 + \ldots + \frac{(x-1)^n}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)!
\end{aligned}
$$

assim

$$
P_n(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}
$$

É mais simples considerar $f(x) = \log(1+x)$ e criar o polinômio de Taylor em torno do ponto $a = 0$.

# Exemplos

## Solução Exemplo 8

Portanto temos

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}f''(1) + \ldots + \frac{(x-1)^n}{n!}f^{(n)}(1) \\ &= 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6}2 + \ldots + \frac{(x-1)^n}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)! \end{aligned}$$

assim

$$P_n(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$$

É mais simples considerar $f(x) = \log(1+x)$ e criar o polinômio de Taylor em torno do ponto $a = 0$. Neste caso teríamos

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

□

# Algoritmo de Horner

Uma tarefa computacional extremamente importante é a avaliação de polinômios, isto é: dado um ponto $x$ qualquer, calcular o valor de $p(x)$.
A forma mais direta de fazer isto é:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \tag{3}$$

Essa expressão pode ser reformulada como

$$p(x) = ((a_3 x + a_2)x + a_1)x + a_0 \tag{4}$$

Temos então o seguinte número de operações aritméticas:

- para n = 4, Eq. (3) faz 10 multiplicações e 4 adições
- para n = 4, Eq. (4) faz 4 multiplicações e 4 adições
- para n = 20, Eq. (3) faz 210 multiplicações e 20 adições
- para n = 20, Eq. (4) faz 20 multiplicações e 20 adições

# Algoritmo de Horner

Para

$$p(x) = ((a_3 x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

podemos usar o seguinte esquema prático

$$\begin{array}{ccccc} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ + & & x \cdot b_3 & x \cdot b_2 & x \cdot b_1 \\ \hline & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{array}$$

# Algoritmo de Horner

Para

$$p(x) = ((a_3 x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

podemos usar o seguinte esquema prático

$$\begin{array}{ccccc} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ + & & x \cdot b_3 & x \cdot b_2 & x \cdot b_1 \\ \hline & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{array}$$

portanto $p(x) = b_0$.

# Algoritmo de Horner

Para

$$p(x) = ((a_3 x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

podemos usar o seguinte esquema prático

$$\begin{array}{ccccc} & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ + & & x \cdot b_3 & x \cdot b_2 & x \cdot b_1 \\ \hline & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{array}$$

portanto $p(x) = b_0$. Para avaliar um polinômio de grau $n$

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

podemos usar a seguinte fórmula

$$\begin{aligned} b_n &= a_n \\ b_i &= a_i + x \cdot b_{i+1}, \qquad \text{para } i = n-1, \ldots, 2, 1, 0 \end{aligned}$$

# Algoritmo de Horner

Se os valores intermediários de $b_i$ não são de interesse, podemos usar apenas uma variável $b$ para implementar o algoritmo.

**entrada**: $a_0$, $a_1$, ..., $a_n$, $x$
**saída**: $p(x)$
$b = a_n$ ;
**para** $i = n - 1$ *até* $0$ **faça**
  $b = a_i + x \cdot b$ ;
**fim-para**
retorne $b$;

# Erro

Precisamos saber qual o erro cometido ao aproximar a função $f(x)$ pelo polinômio de Taylor $P_n(x)$.

Vamos representar o erro por $R_n(x)$.

Se $f(x)$ é uma função para a qual $P_n(x)$ existe, definimos o erro (ou resto) $R_n(x)$ por $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Ou seja

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n(x) + R_n(x) \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_n(x) \end{aligned}$$

Gostaríamos de ter uma expressão para $R_n(x)$ cujo tamanho seja fácil de se estimar.

Através do **Teorema de Taylor** iremos encontrar algumas expressões para o erro $R_n(x)$.

# Teorema de Taylor

## Teorema (Teorema de Taylor)

*Suponha que as derivadas $f^{(1)}$, ..., $f^{(n+1)}$ estejam definidas e sejam contínuas em um intervalo $[a, x]$, então temos que*

$$\boxed{R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!}\, dt}$$

*onde*

$$\boxed{P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}}$$

# Teorema de Taylor

Para a demonstração do teorema iremos utilizar:

Integração por partes:

$$\boxed{\int_a^b u\ dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\ du}$$

Teorema Fundamental do Cálculo (TFC), que diz que se $f(x)$ é definida em $[a,b]$ que admite uma anti-derivada $g(x)$ em $[a,b]$, isto é $f(x) = g'(x)$, então

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ dx = g(b) - g(a)}$$

# Teorema de Taylor

## Prova

*Para encontrar a expressão do erro na forma integral, vamos começar com o caso* $n = 0$*:*

$$f(x) = f(a) + R_0(x)$$

# Teorema de Taylor

## Prova

*Para encontrar a expressão do erro na forma integral, vamos começar com o caso* $n = 0$*:*

$$f(x) = f(a) + R_0(x)$$

*pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever*

$$R_0(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\, dt$$

# Teorema de Taylor

## Prova

*Para encontrar a expressão do erro na forma integral, vamos começar com o caso* $n = 0$*:*

$$f(x) = f(a) + R_0(x)$$

*pelo Teorema Fundamental do Cálculo, podemos escrever*

$$R_0(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\ dt$$

*portanto*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ dt$$

# Teorema de Taylor

## Prova (cont.)

*Vamos usar integração por partes no termo da integral*

$$\begin{aligned} u &= f'(t) \quad &\Rightarrow \quad du &= f''(t)\ dt \\ dv &= 1\ dt \quad &\Leftarrow \quad v\ &= t - x \end{aligned}$$

# Teorema de Taylor

## Prova (cont.)

*Vamos usar integração por partes no termo da integral*

$$\begin{aligned} u = f'(t) \quad &\Rightarrow \quad du = f''(t)\ dt \\ dv = 1\ dt \quad &\Leftarrow \quad v \ \ = t - x \end{aligned}$$

*assim temos*

$$\int_a^x f'(t)\ dt = f'(t)(t-x)\Big|_a^x - \int_a^x f''(t)(t-x)\ dt$$

# Teorema de Taylor

## Prova (cont.)

*Vamos usar integração por partes no termo da integral*

$$\begin{aligned} u = f'(t) \quad &\Rightarrow \quad du = f''(t)\ dt \\ dv = 1\ dt \quad &\Leftarrow \quad v \ = t - x \end{aligned}$$

*assim temos*

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t)\ dt &= f'(t)(t-x)\Big|_a^x - \int_a^x f''(t)(t-x)\ dt \\ &= \big[f'(x)(x-x) - f'(a)(a-x)\big] - \int_a^x f''(t)(t-x)\ dt \end{aligned}$$

# Teorema de Taylor

## Prova (cont.)

*Vamos usar integração por partes no termo da integral*

$$\begin{aligned} u = f'(t) \quad &\Rightarrow \quad du = f''(t)\ dt \\ dv = 1\ dt \quad &\Leftarrow \quad v \ = t - x \end{aligned}$$

*assim temos*

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t)\ dt &= f'(t)(t-x)\Big|_a^x - \int_a^x f''(t)(t-x)\ dt \\ &= \left[f'(x)(x-x) - f'(a)(a-x)\right] - \int_a^x f''(t)(t-x)\ dt \\ &= -f'(a)(a-x) - \int_a^x f''(t)(t-x)\ dt \end{aligned}$$

# Teorema de Taylor

## Prova (cont.)

*Vamos usar integração por partes no termo da integral*

$$\begin{aligned} u = f'(t) \quad &\Rightarrow \quad du = f''(t)\ dt \\ dv = 1\ dt \quad &\Leftarrow \quad v \ = t - x \end{aligned}$$

*assim temos*

$$\begin{aligned} \int_a^x f'(t)\ dt &= f'(t)(t-x)\Big|_a^x - \int_a^x f''(t)(t-x)\ dt \\ &= \big[f'(x)(x-x) - f'(a)(a-x)\big] - \int_a^x f''(t)(t-x)\ dt \\ &= -f'(a)(a-x) - \int_a^x f''(t)(t-x)\ dt \\ &= f'(a)(x-a) + \int_a^x f''(t)(x-t)\ dt \end{aligned}$$

# Teorema de Taylor

## Prova (cont.)

*Logo*

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{P_1(x)} + \int_a^x f''(t)(x-t)\ dt$$

# Teorema de Taylor

## Prova (cont.)

*Logo*

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{P_1(x)} + \int_a^x f''(t)(x-t)\ dt$$

*Portanto*

$$R_1(x) = \int_a^x f''(t)(x-t)\ dt$$

# Teorema de Taylor

## Prova (cont.)

*Logo*

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{P_1(x)} + \int_a^x f''(t)(x-t)\ dt$$

*Portanto*

$$R_1(x) = \int_a^x f''(t)(x-t)\ dt$$

*Para encontrar $R_2(x)$, usamos integração por partes novamente no termo com a integral. Para isso escolhemos*

$$\begin{aligned} u &= f''(t) & \Rightarrow \quad du &= f'''(t)\ dt \\ dv &= (x-t)\ dt & \Leftarrow \quad v \ &= -\frac{(x-t)^2}{2} \end{aligned}$$

# Teorema de Taylor

## Prova (cont.)

*Assim*

$$\int_a^x f''(t)(x-t)\ dt = -f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\Bigg|_a^x + \int_a^x f'''(t)\tfrac{(x-t)^2}{2}\ dt$$

# Teorema de Taylor

## Prova (cont.)

*Assim*

$$\int_a^x f''(t)(x-t)\ dt = -f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\Bigg|_a^x + \int_a^x f'''(t)\tfrac{(x-t)^2}{2}\ dt$$
$$= f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\ dt$$

# Teorema de Taylor

## Prova (cont.)

*Assim*

$$\int_a^x f''(t)(x-t)\ dt = -f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\Bigg|_a^x + \int_a^x f'''(t)\tfrac{(x-t)^2}{2}\ dt$$
$$= f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\ dt$$

*Desta forma*

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\tfrac{(x-a)^2}{2}}_{P_2(x)} + \underbrace{\int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\ dt}_{R_2(x)}$$

# Teorema de Taylor

## Prova (cont.)

*Assim*

$$\int_a^x f''(t)(x-t)\ dt = -f''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\Bigg|_a^x + \int_a^x f'''(t)\tfrac{(x-t)^2}{2}\ dt$$
$$= f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\ dt$$

*Desta forma*

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\tfrac{(x-a)^2}{2}}_{P_2(x)} + \underbrace{\int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\ dt}_{R_2(x)}$$

*ou seja*

$$R_2(x) = \int_a^x f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2}\ dt$$

# Teorema de Taylor

## Prova (cont.)

*Considerando que* $f^{(n+1)}$ *é contínua em* $[a, x]$ *por hipótese do teorema, podemos mostrar por indução que*

$$\boxed{R_n(x) = \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ dt} \tag{5}$$

□

# Teorema de Taylor

É possível ainda obter as seguintes expressões para o erro:

Forma de Cauchy

$$\boxed{R_n(x) = f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}(x-a), \quad t \in (a,x)} \tag{6}$$

# Teorema de Taylor

É possível ainda obter as seguintes expressões para o erro:

Forma de Cauchy

$$\boxed{R_n(x) = f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}(x-a), \quad t \in (a,x)} \tag{6}$$

**Forma de Lagrange**

$$\boxed{R_n(x) = f^{(n+1)}(t)\frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}, \quad t \in (a,x)} \tag{7}$$

Essas expressões são muito úteis para se obter estimativas para o erro de uma aproximação usando o polinômio de Taylor.

# Estimativa do erro

A forma do erro de Lagrange

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(t)\frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \tag{8}$$

é muito parecida com o próximo termo do polinômio de Taylor. A única diferença é o valor $t$ na fórmula. $t$ é **algum** valor entre $a$ e $x$, que **não conhecemos**.

Obs: $t$ é um valor que no desenvolvimento da forma do erro de Lagrange surge da aplicação do Teorema do Valor Médio.

# Estimativa do erro

A forma do erro de Lagrange

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(t)\frac{(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \tag{8}$$

é muito parecida com o próximo termo do polinômio de Taylor. A única diferença é o valor $t$ na fórmula. $t$ é **algum** valor entre $a$ e $x$, que **não conhecemos**.

Obs: $t$ é um valor que no desenvolvimento da forma do erro de Lagrange surge da aplicação do Teorema do Valor Médio.

Como podemos usar a fórmula do erro de Lagrange para obter um limitante superior para $|R_n(x)|$?

# Limitante para o erro na fórmula de Lagrange

Se for possível encontrar um número real positivo $M$ tal que

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M$$

*para todo* $t$ entre $a$ e o ponto de interesse $x$, então pela fórmula de Lagrange do erro temos o seguinte limitante:

$$\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}} \tag{9}$$

Observações:

- As vezes pode ser difícil de encontrar o máximo **exato** de $|f^{(n+1)}(t)|$ no intervalo entre $a$ e $x$.
- Pode-se utilizar um número $M$ que seja tão grande quanto o máximo (isto é, pode-se *sobrestimar* este valor)
- P. ex: se $f^{(n+1)}(t)$ é $\sin(t)$ ou $\cos(t)$ pode-se usar $M = 1$.

# Exemplos

## Exemplo 1

Obtenha o limitante superior do erro para $e^{0.5}$ quando esta expressão é aproximada por um polinômio de Taylor de grau 4 para $e^x$ em torno do ponto $0$.

# Exemplos

## Exemplo 1

Obtenha o limitante superior do erro para $e^{0.5}$ quando esta expressão é aproximada por um polinômio de Taylor de grau 4 para $e^x$ em torno do ponto $0$.

## Solução Exemplo 1

Pela fórmula de Lagrange do erro temos

$$R_4(x) = f^{(5)}(t)\frac{(x-0)^5}{5!} = e^t\frac{x^5}{120}, \quad \text{para } t \in [0, 0.5]$$

# Exemplos

## Exemplo 1

Obtenha o limitante superior do erro para $e^{0.5}$ quando esta expressão é aproximada por um polinômio de Taylor de grau 4 para $e^x$ em torno do ponto $0$.

## Solução Exemplo 1

Pela fórmula de Lagrange do erro temos

$$R_4(x) = f^{(5)}(t)\frac{(x-0)^5}{5!} = e^t\frac{x^5}{120}, \quad \text{para } t \in [0, 0.5]$$

assim quando aproximamos $e^{0.5}$ o erro está limitado por

$$|R_4(x)| \leq \max\left|\frac{e^t x^5}{120}\right| \leq \left|\frac{e^{0.5}0.5^5}{120}\right| \leq 2\frac{0.5^5}{120} = 0.00052$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 1

Neste caso a aproximação de Taylor é

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 1

Neste caso a aproximação de Taylor é

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

e portanto

$$e^{0.5} \approx 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{6} + \frac{0.5^4}{24} = 1.6484$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 1

Neste caso a aproximação de Taylor é

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$$

e portanto

$$e^{0.5} \approx 1 + 0.5 + \frac{0.5^2}{2} + \frac{0.5^3}{6} + \frac{0.5^4}{24} = 1.6484$$

O valor real é $e^{0.5} = 1.6487$, e vemos novamente que o erro é menor do que o estimado, pois $|1.6487 - 1.6484| = 0.0003$.
$\square$

# Exemplos

## Exemplo 2

Seja $f(x) = \sin(x)$. Encontre o polinômio de Taylor cúbico em torno do ponto $a = 0$, em seguida encontre um limitante superior para o erro no ponto $x = \frac{\pi}{4}$.

# Exemplos

## Exemplo 2

Seja $f(x) = \sin(x)$. Encontre o polinômio de Taylor cúbico em torno do ponto $a = 0$, em seguida encontre um limitante superior para o erro no ponto $x = \frac{\pi}{4}$.

## Solução Exemplo 2

O polinômio cúbico de Taylor é $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$.

# Exemplos

## Exemplo 2

Seja $f(x) = \sin(x)$. Encontre o polinômio de Taylor cúbico em torno do ponto $a = 0$, em seguida encontre um limitante superior para o erro no ponto $x = \frac{\pi}{4}$.

## Solução Exemplo 2

O polinômio cúbico de Taylor é $P_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$.
Pela fórmula do erro de Lagrange, sabemos que

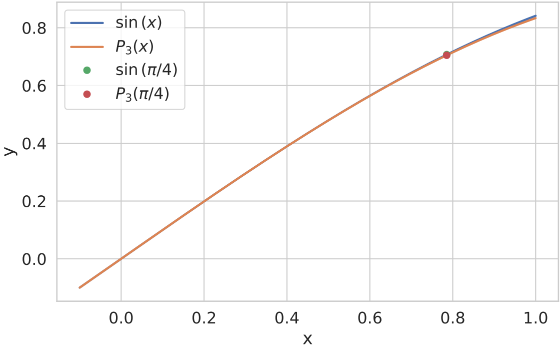
$$R_3(x) = f^{(4)}(t)\frac{(x-a)^4}{4!} = \sin(t)\frac{x^4}{24}$$

Portanto, para o limitante superior temos

$$\begin{aligned} |R_3(x)| &\leq \text{max}\left|\frac{\sin(t)x^4}{24}\right|, \qquad \text{para } t \in [0, \pi/4] \\ &\leq \left|\frac{\sin(\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{4})^4}{24}\right| \leq 0.0112 \end{aligned}$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 2

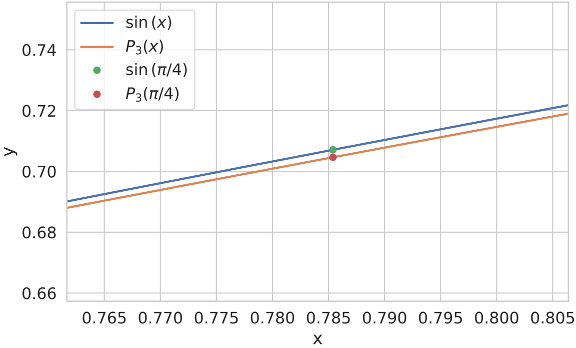



O valor real é $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.7071.$

Avaliando $P_3(x)$ em $\frac{\pi}{4}$ temos: $P_3(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} - \frac{\frac{\pi}{4}^3}{6} = 0.7046.$

# Exemplos

## Solução Exemplo 2




Logo, o erro cometido é $|0.7071 - 0.7046| = 0.0024$, que satisfaz o limitante para o erro obtido anteriormente. $\square$

# Exemplos

## Exemplo 3

Seja $f(x) = e^x$ e $a = 0$. Determine $n$ para que o erro ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de Taylor seja menor do que $10^{-5}$ para $-1 \leq x \leq 1$.

# Exemplos

## Exemplo 3

Seja $f(x) = e^x$ e $a = 0$. Determine $n$ para que o erro ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de Taylor seja menor do que $10^{-5}$ para $-1 \leq x \leq 1$.

## Solução Exemplo 3

Ou seja queremos saber, qual $n$ satisfaz

$$|R_n(x)| \leq 10^{-5}, \quad x \in [-1, 1]$$

# Exemplos

## Exemplo 3

Seja $f(x) = e^x$ e $a = 0$. Determine $n$ para que o erro ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de Taylor seja menor do que $10^{-5}$ para $-1 \leq x \leq 1$.

## Solução Exemplo 3

Ou seja queremos saber, qual $n$ satisfaz

$$|R_n(x)| \leq 10^{-5}, \quad x \in [-1, 1]$$

Neste caso temos que o erro é dado por

$$|R_n(x)| = \left| f^{(n+1)}(t) \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{e^t x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 3

Assim

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^t x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{e^1|x^{n+1}|}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 3

Assim

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^t x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{e^1|x^{n+1}|}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$$

ou seja

$$\begin{aligned} 3 < 10^{-5}(n+1)! \quad &\Rightarrow \quad (n+1)! > 3 \cdot 10^5 \\ &\Rightarrow \quad (n+1)! > 300000 \end{aligned}$$

## Solução Exemplo 3

Assim

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^t x^{n+1}}{(n+1)!}\right| \leq \frac{e^1|x^{n+1}|}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$$

ou seja

$$\begin{aligned} 3 < 10^{-5}(n+1)! \quad &\Rightarrow \quad (n+1)! > 3 \cdot 10^5 \\ &\Rightarrow \quad (n+1)! > 300000 \end{aligned}$$

Analisando

$$7! = 5040, \quad 8! = 40430, \quad 9! = 362880$$

concluímos que se $n \geq 8$, então $(n+1)! > 300000$ o que garante que o erro satisfaz $|R_n(x)| < 10^{-5}$. □

# Exemplos

## Exemplo 4

Seja $f(x) = \sin(x)$ e $a = 0$. Determine $n$ para que o erro ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de Taylor seja menor do que $10^{-7}$ para $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

# Exemplos

## Exemplo 4

Seja $f(x) = \sin(x)$ e $a = 0$. Determine $n$ para que o erro ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de Taylor seja menor do que $10^{-7}$ para $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

## Solução Exemplo 4

Pela fórmula do erro temos que

$$R_{2n+1}(x) = \sin(x) - P_{2n+1}(x) = f^{(2n+2)}(t)\frac{(x-0)^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

# Exemplos

## Exemplo 4

Seja $f(x) = \sin(x)$ e $a = 0$. Determine $n$ para que o erro ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de Taylor seja menor do que $10^{-7}$ para $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

## Solução Exemplo 4

Pela fórmula do erro temos que

$$\begin{aligned} R_{2n+1}(x) &= \sin(x) - P_{2n+1}(x) = f^{(2n+2)}(t)\frac{(x-0)^{2n+2}}{(2n+2)!} \\ &= (-1)^{n+1}\sin(t)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \end{aligned}$$

# Exemplos

## Exemplo 4

Seja $f(x) = \sin(x)$ e $a = 0$. Determine $n$ para que o erro ao se aproximar $f(x)$ por um polinômio de Taylor seja menor do que $10^{-7}$ para $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

## Solução Exemplo 4

Pela fórmula do erro temos que

$$
\begin{aligned}
R_{2n+1}(x) = \sin(x) - P_{2n+1}(x) &= f^{(2n+2)}(t)\frac{(x-0)^{2n+2}}{(2n+2)!} \\
&= (-1)^{n+1}\sin(t)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}
\end{aligned}
$$

Queremos saber qual o valor de $n$ garante que

$$
|R_{2n+1}(x)| \leq 10^{-7}, \quad \text{para } x \in [-\pi/4, \pi/4]
$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 4

Então

$$|R_{2n+1}(x)| = \left|(-1)^{n+1}\sin(t)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right| < \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-7}$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 4

Então

$$|R_{2n+1}(x)| = \left|(-1)^{n+1}\sin(t)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right| < \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-7}$$

analisando temos

$$\begin{aligned}
n = 1 \Rightarrow (2+2)! = 24 \qquad & \Rightarrow \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{4}}{4!} \approx 0.15 \times 10^{-1} \\
n = 2 \Rightarrow (4+2)! = 720 \qquad & \Rightarrow \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{6}}{6!} \approx 0.326 \times 10^{-3} \\
n = 3 \Rightarrow (6+2)! = 40320 \qquad & \Rightarrow \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{8}}{8!} \approx 3.590860 \times 10^{-6} \\
n = 4 \Rightarrow (8+2)! = 3628800 \qquad & \Rightarrow \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{10}}{10!} \approx 2.461137 \times 10^{-8}
\end{aligned}$$

# Exemplos

## Solução Exemplo 4

ou seja, para que

$$\frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+2}}{(2n+2)!} < 10^{-7}$$

temos que $n \geq 4$. Portanto, precisamos usar um polinômio de Taylor de grau maior ou igual a 9 para atingir a precisão desejada.

$\square$

# Aproximação de Derivada

Considere que uma função $f(x)$, cuja **expressão é desconhecida**, seja fornecida por meio de um conjunto de pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$.

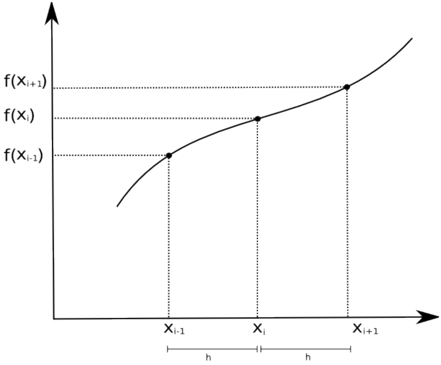
Como calcular $f'(x_i)$ ?

# Aproximação de Derivada

Considere que uma função $f(x)$, cuja **expressão é desconhecida**, seja fornecida por meio de um conjunto de pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, ..., $(x_n, f(x_n))$.

Como calcular $f'(x_i)$ ?

Podemos usar polinômio de Taylor para aproximar as derivadas da função.



# Aproximação de Derivada

Para calcular a derivada $f'(x_i)$ em cada ponto $x_i$, vamos usar um polinômio de Taylor linear em torno do ponto $x_i$.

- Diferença Progressiva: $x = x_{i+1}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)\overbrace{(x_{i+1} - x_i)}^{h}$$

$$\boxed{f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}}$$

- Diferença Regressiva: $x = x_{i-1}$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) + f'(x_i)\overbrace{(x_{i-1} - x_i)}^{-h}$$

$$\boxed{f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}}$$

# Aproximação de Derivada

- Diferença Central: $x = x_{i+1}$ e $x = x_{i-1}$

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h$$
$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h$$

subtraindo, temos

$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2hf'(x_i)$$

que resulta em

$$\boxed{f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}}$$

# Aproximação de Derivada

- A diferença central é mais precisa para aproximar a derivada.
- As derivadas de alta ordem são calculadas de forma similar.
- Quanto mais pontos em um intervalo $[a, b]$, ou seja, quanto menor o espaçamento $h$ entre eles, melhor a qualidade da aproximação.

# Aproximação de Derivada

## Exemplo 5

Calcule $f'(1.3)$ para $f(x) = \log(x)$ usando diferença progressiva e central para $h = 0.01$ e $h = 0.001$.

## Solução Exemplo 5

Usando $h = 0.01$, com diferença progressiva temos

$$f'(1.3) \approx \frac{\log(1.31) - \log(1.30)}{0.01} = 0.76628$$

# Aproximação de Derivada

## Exemplo 5

Calcule $f'(1.3)$ para $f(x) = \log(x)$ usando diferença progressiva e central para $h = 0.01$ e $h = 0.001$.

## Solução Exemplo 5

Usando $h = 0.01$, com diferença progressiva temos

$$f'(1.3) \approx \frac{\log(1.31) - \log(1.30)}{0.01} = 0.76628$$

Com diferença central temos

$$f'(1.3) \approx \frac{\log(1.31) - \log(1.29)}{2 \cdot 0.01} = 0.76924$$

## Solução Exemplo 5

Usando $h = 0.001$, com diferença progressiva temos

$$f'(1.3) \approx \frac{\log(1.301) - \log(1.300)}{0.001} = 0.76893$$

com diferença central temos

$$f'(1.3) \approx \frac{\log(1.301) - \log(1.299)}{2 \cdot 0.001} = 0.76923$$

Podemos calcular o valor real usando a derivada de $f(x)$, pois neste caso conhecemos a expressão da função. O resultado é

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad f'(1.3) = 0.76923$$

□

# Aproximação de Derivada

## Exemplo em Python

```
from pylab import *

def f(x):
    return exp(x)*sin(x)

def df(x):
    return exp(x)*sin(x) + exp(x)*cos(x)

def aprox(f,x,h):
    return (f(x+h)-f(x))/h

def aproxCentral(f,x,h):
    return (f(x+h)-f(x-h))/(2*h)
```

# Aproximação de Derivada

## Exemplo em Python

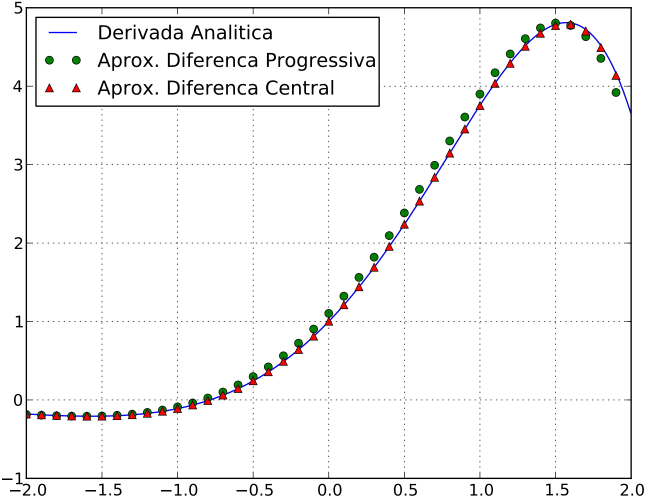
```
if __name__ == "__main__":
    hh = 0.001
    xx = arange(-2, 2, hh)
    yy = df(xx)

    # diferenca progressiva e central
    h  = 0.01
    x  = arange(-2,2, h)
    d1 = aprox(f,x,h)
    d2 = aproxCentral(f,x,h)

    # exibe grafico
    plot(xx, yy, label='Derivada Analitica')
    plot(x,  d1, 'o', label='Aprox. Diferenca Progressiva')
    plot(x,  d2, '^', label='Aprox. Diferenca Central')
    show()
```

# Aproximação de Derivada

## Exemplo em Python (h=0.1)



# Aproximação de Derivada

## Exemplo em Python (h=0.05)