DCC008 - Cálculo Numérico

Interpolação

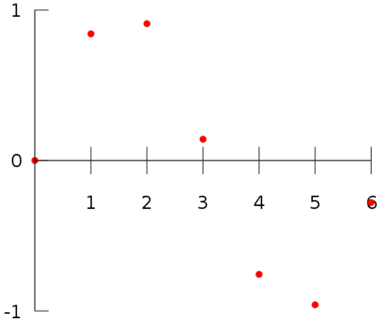
Bernardo Martins Rocha

Departamento de Ciência da Computação
Universidade Federal de Juiz de Fora
bernardomartinsrocha@ice.ufjf.br

Conteúdo

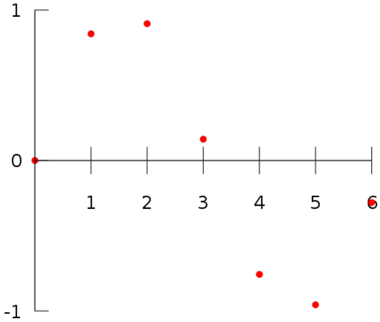
Introdução

Suponha que temos um conjunto de pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e os valores de uma funçãos $f(x)$ nestes pontos $y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n)$.



Introdução

Suponha que temos um conjunto de pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ e os valores de uma funções $f(x)$ nestes pontos $y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n)$.

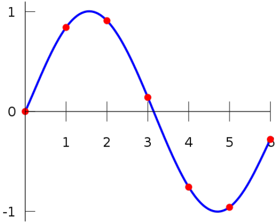


Interpolar a função $f(x)$ nos pontos $x_1, \ldots, x_n$ consiste em aproximá-la por uma função $g(x)$ tal que:

$$g(x_0) = y_0$$

$$\ldots$$

$$g(x_2) = y_2$$



Introdução

Iremos supor que a função interpolante $g(x)$ é um **polinômio.**

Introdução

Iremos supor que a função interpolante $g(x)$ é um **polinômio.**

Porque polinômios? Polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são também polinômios, e etc.

Introdução

Iremos supor que a função interpolante $g(x)$ é um **polinômio.**

Porque polinômios? Polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são também polinômios, e etc.

A interpolação polinomial é usada para aproximar uma função $f(x)$, principalmente, nas seguintes situações:

- Não conhecemos a expressão analítica de $f(x)$. Isto é, somente conhecemos o valor da função em um conjunto de pontos (isso ocorre frequentemente quando se trabalha com dados experimentais).

Introdução

Iremos supor que a função interpolante $g(x)$ é um **polinômio**.

Porque polinômios? Polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são também polinômios, e etc.

A interpolação polinomial é usada para aproximar uma função $f(x)$, principalmente, nas seguintes situações:

- Não conhecemos a expressão analítica de $f(x)$. Isto é, somente conhecemos o valor da função em um conjunto de pontos (isso ocorre frequentemente quando se trabalha com dados experimentais).
- $f(x)$ é complicada e de difícil manejo.
  - Interpolação será usada também para calcular a integral numérica de $f(x)$.
  - Veremos mais sobre isso em **Integração Numérica**.

Interpolação polinomial

Definição do problema

O problema geral da interpolação por meio de polinômios consiste em, **dados** $n+1$ pontos distintos

$$x_0,\ x_1,\ \ldots\ ,\ x_n$$

e $n+1$ números $y_0,\ y_1,\ \ldots\ ,\ y_n$, valores de uma função $y = f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, isto é

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \ldots \quad y_n = f(x_n)$$

O problema geral da interpolação por meio de polinômios consiste em, **dados** $n+1$ pontos distintos

$$x_0,\ x_1,\ \ldots\ ,\ x_n$$

e $n+1$ números $y_0,\ y_1,\ \ldots\ ,\ y_n$, valores de uma função $y = f(x)$ em $x_0, x_1, \ldots, x_n$, isto é

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \ldots \quad y_n = f(x_n)$$

determinar um polinômio $P_n(x)$ de grau no máximo n tal que:

$$\boxed{P_n(x_0) = y_0, \quad P_n(x_1) = y_1, \quad \ldots \quad P_n(x_n) = y_n} \tag{1}$$

Veremos que tal polinômio existe e é único, desde que os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sejam distintos.

Interpolação polinomial

Sendo assim, procuramos um polinômio na forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Interpolação polinomial

Sendo assim, procuramos um polinômio na forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Para isso é preciso encontrar os coeficientes $a_0, a_1, \ldots a_n$ de tal forma que (1) é satisfeito.

Interpolação polinomial

Sendo assim, procuramos um polinômio na forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Para isso é preciso encontrar os coeficientes $a_0, a_1, \ldots a_n$ de tal forma que (1) é satisfeito. Isto é

$$\begin{aligned}
P_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\
P_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\
&\vdots \\
P_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_0
\end{aligned}$$

Interpolação polinomial

Sendo assim, procuramos um polinômio na forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Para isso é preciso encontrar os coeficientes $a_0, a_1, \ldots a_n$ de tal forma que (1) é satisfeito. Isto é

$$\begin{aligned}
P_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\
P_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\
&\vdots \\
P_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_0
\end{aligned}$$

que pode ser visto como um sistema de equações lineares $(n+1) \times (n+1)$ onde as incógnitas são $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Interpolação polinomial

Escrevendo de forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Interpolação polinomial

Escrevendo de forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

A matriz de coeficientes é chamada de
Matriz de Vandermonde. Sabe-se que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ desde que os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ sejam **distintos**.

Interpolação polinomial

Escrevendo de forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

A matriz de coeficientes é chamada de Matriz de Vandermonde. Sabe-se que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ desde que os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ sejam **distintos**.

Teorema

Dados $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \dots, x_n$ e seus valores $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$, existe um único polinômio $P_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Interpolação linear

Vamos começar com um exemplo simples. Interpolação linear. É a forma mais simples de interpolação, pois consiste em encontrar a reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1). Existe uma única reta que passa por esses pontos. Então procuramos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

Interpolação linear

Vamos começar com um exemplo simples. Interpolação linear. É a forma mais simples de interpolação, pois consiste em encontrar a reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1). Existe uma única reta que passa por esses pontos. Então procuramos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

tal que

$$\begin{aligned} (i) \quad & P_1(x_0) = a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ (ii) \quad & P_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{aligned}$$

Interpolação linear

Vamos começar com um exemplo simples. Interpolação linear. É a forma mais simples de interpolação, pois consiste em encontrar a reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1). Existe uma única reta que passa por esses pontos. Então procuramos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

tal que

$$\begin{array}{rl} (i) & P_1(x_0) = a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ (ii) & P_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{array}$$

De (i) temos que $a_0 = y_0 - a_1 x_0$.

Interpolação linear

Vamos começar com um exemplo simples. Interpolação linear. É a forma mais simples de interpolação, pois consiste em encontrar a reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1). Existe uma única reta que passa por esses pontos. Então procuramos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

tal que

$$\begin{aligned} (i) \quad P_1(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ (ii) \quad P_1(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{aligned}$$

De (i) temos que $a_0 = y_0 - a_1 x_0$. Substituindo em (ii) temos que

$$y_0 - a_1 x_0 + a_1 x_1 = y_1$$

Interpolação linear

Vamos começar com um exemplo simples. Interpolação linear. É a forma mais simples de interpolação, pois consiste em encontrar a reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1). Existe uma única reta que passa por esses pontos. Então procuramos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

tal que

$$\begin{aligned} (i) \quad & P_1(x_0) = a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ (ii) \quad & P_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{aligned}$$

De (i) temos que $a_0 = y_0 - a_1 x_0$. Substituindo em (ii) temos que

$$\begin{aligned} y_0 - a_1 x_0 + a_1 x_1 &= y_1 \\ a_1(x_1 - x_0) &= y_1 - y_0 \end{aligned}$$

Interpolação linear

Vamos começar com um exemplo simples. Interpolação linear. É a forma mais simples de interpolação, pois consiste em encontrar a reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1). Existe uma única reta que passa por esses pontos. Então procuramos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

tal que

$$\begin{aligned} (i) \quad & P_1(x_0) = a_0 + a_1 x_0 = y_0 \\ (ii) \quad & P_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = y_1 \end{aligned}$$

De (i) temos que $a_0 = y_0 - a_1 x_0$. Substituindo em (ii) temos que

$$\begin{aligned} y_0 - a_1 x_0 + a_1 x_1 &= y_1 \\ a_1(x_1 - x_0) &= y_1 - y_0 \\ a_1 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \end{aligned}$$

Interpolação linear

Como

$$a_0 = y_0 - a_1 x_0$$
$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

temos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$
$$P_1(x) = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x$$
$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)$$

Interpolação linear

Como

$$
\begin{aligned}
a_0 &= y_0 - a_1 x_0 \\
a_1 &= \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}
\end{aligned}
$$

temos

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= a_0 + a_1 x \\
P_1(x) &= y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x \\
P_1(x) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)
\end{aligned}
$$

Basta avaliar $P_1(x)$ em $x = x_0$ e $x = x_1$ para verificar que de fato este é o polinômio interpolador de (x_0, y_0) e (x_1, y_1). $\square$

Interpolação linear

Exemplo

Dada a seguinte tabela

x	1	1.1	1.2	1.3
$\tan(x)$	1.5574	1.9648	2.5722	3.6021

use interpolação linear para estimar o valor de $\tan(1.15)$.

Interpolação linear

Exemplo

Dada a seguinte tabela

x	1	1.1	1.2	1.3
$\tan(x)$	1.5574	1.9648	2.5722	3.6021

use interpolação linear para estimar o valor de $\tan(1.15)$.

Assim

$$(x_0, y_0) = (1.1, 1.9648), \quad (x_1, y_1) = (1.2, 2.5722)$$

Interpolação linear

Exemplo

Dada a seguinte tabela

x	1	1.1	1.2	1.3
$\tan(x)$	1.5574	1.9648	2.5722	3.6021

use interpolação linear para estimar o valor de $\tan(1.15)$.

Assim

$$(x_0, y_0) = (1.1, 1.9648), \quad (x_1, y_1) = (1.2, 2.5722)$$

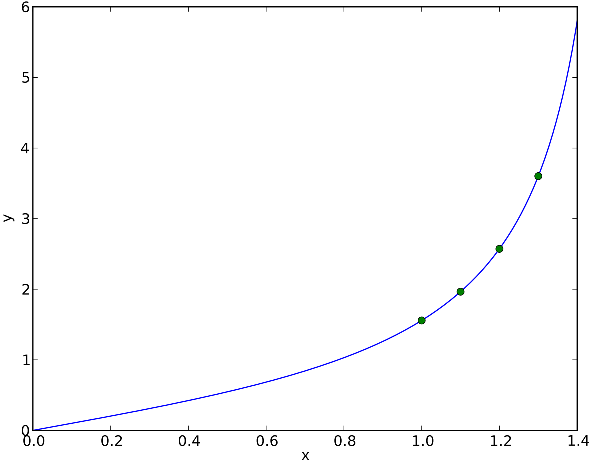
e portanto

$$\tan(1.15) \approx 1.9648 + \frac{(2.5722 - 1.9648)}{(1.2 - 1.1)}(1.15 - 1.1) = 2.2685$$

Valor exato: $\tan(1.15) = 2.2345$. $\square$

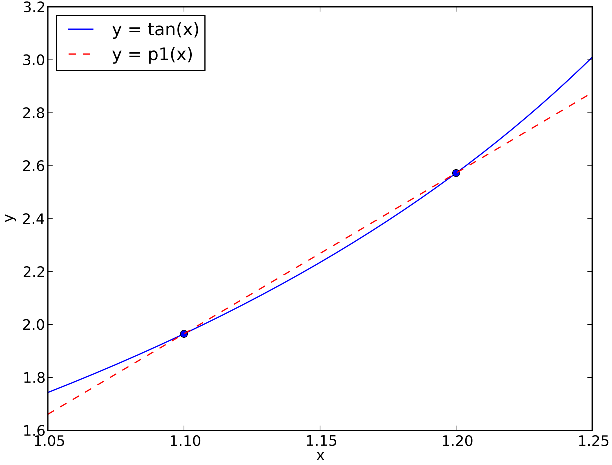
Interpolação linear

Exemplo



Interpolação linear

Exemplo



Interpolação polinomial

De forma geral, dados (x_i, y_i) para $i = 0, 1, \ldots, n$, para encontrar o polinômio $P_n(x)$, precisamos resolver o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

usando algum método que já estudamos (Eliminação de Gauss, decomposição LU, etc).

Interpolação polinomial

De forma geral, dados (x_i, y_i) para $i = 0, 1, \ldots, n$, para encontrar o polinômio $P_n(x)$, precisamos resolver o sistema de equações lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

usando algum método que já estudamos (Eliminação de Gauss, decomposição LU, etc).

Exemplo

x	-1	0	1
$f(x)$	0.54	1	0.54

Vamos encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola estes pontos.

Interpolação polinomial

Exemplo

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 &= 0.54 \\
a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 &= 1.00 \\
a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 &= 0.54
\end{aligned}
$$

Interpolação polinomial

Exemplo

$$
\begin{aligned}
a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 &= 0.54 \\
a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 &= 1.00 \\
a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 &= 0.54
\end{aligned}
$$

isto é

$$
\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0.54 \\ 1 \\ 0.54 \end{bmatrix}
$$

Interpolação polinomial

Exemplo

$$\begin{aligned} a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 &= 0.54 \\ a_0 + a_1(0) + a_2(0)^2 &= 1.00 \\ a_0 + a_1(1) + a_2(1)^2 &= 0.54 \end{aligned}$$

isto é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.54 \\ 1 \\ 0.54 \end{bmatrix}$$

Resolvendo este sistema encontramos que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_2 = -0.46$ e portanto

$$P_2(x) = 1 - 0.46x^2$$

Interpolação polinomial

Observações:

- Veremos formas mais simples de se obter o polinômio interpolante, sem a necessidade de resolver um sistema de equações lineares.
- Além disso, a matriz de Vandermonde costuma ser malcondicionada, o que leva a perda de precisão na solução quando temos que resolver o sistema.

Forma de Lagrange

Para ilustrar a idéia vamos começar com um exemplo onde temos três pontos distintos (x_0, y_0),(x_1, y_1) e (x_2, y_2). Queremos encontrar o polinômio

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

que satisfaz

$$P_2(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, 2$$

para os dados fornecidos.

Forma de Lagrange

Uma fórmula para encontrar tal polinômio é a seguinte:

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \tag{2}$$

onde

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$
$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$
$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

As funções $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$ são chamadas de *funções de base de Lagrange* para interpolação quadrática.

Forma de Lagrange

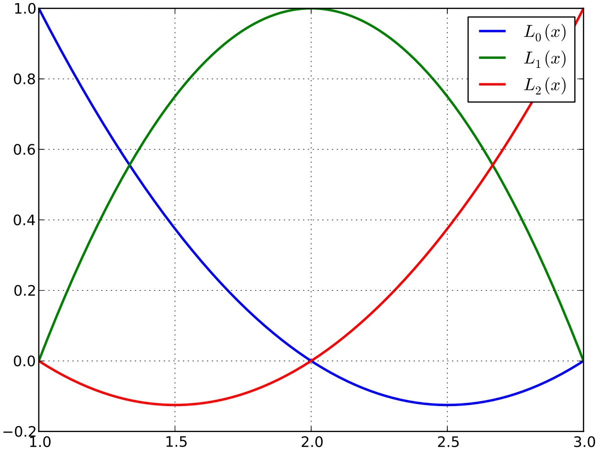


Figura: Exemplo das funções de base de Lagrange quadráticas.

Forma de Lagrange

Essas funções possuem a seguinte propriedade

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

para $i, j = 0, 1, 2$. E ainda, cada uma possui grau 2.

Forma de Lagrange

Essas funções possuem a seguinte propriedade

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

para $i, j = 0, 1, 2$. E ainda, cada uma possui grau 2.
Consequentemente $P_2(x)$ tem grau ≤ 2 e assim fica claro que este polinômio interpola os dados, pois

$$P_2(x_0) = y_0 \underbrace{L_0(x_0)}_{=1} + y_1 \underbrace{L_1(x_0)}_{=0} + y_2 \underbrace{L_2(x_0)}_{=0} = y_0$$

Forma de Lagrange

Essas funções possuem a seguinte propriedade

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

para $i, j = 0, 1, 2$. E ainda, cada uma possui grau 2.
Consequentemente $P_2(x)$ tem grau ≤ 2 e assim fica claro que este polinômio interpola os dados, pois

$$P_2(x_0) = y_0 \underbrace{L_0(x_0)}_{=1} + y_1 \underbrace{L_1(x_0)}_{=0} + y_2 \underbrace{L_2(x_0)}_{=0} = y_0$$

Forma de Lagrange

Essas funções possuem a seguinte propriedade

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \tag{3}$$

para $i, j = 0, 1, 2$. E ainda, cada uma possui grau 2. Consequentemente $P_2(x)$ tem grau ≤ 2 e assim fica claro que este polinômio interpola os dados, pois

$$P_2(x_0) = y_0 \underbrace{L_0(x_0)}_{=1} + y_1 \underbrace{L_1(x_0)}_{=0} + y_2 \underbrace{L_2(x_0)}_{=0} = y_0$$

$$P_2(x_1) = y_0 L_0(x_1) + y_1 L_1(x_1) + y_2 L_2(x_0) = y_1$$

$$P_2(x_0) = y_0 L_0(x_2) + y_1 L_1(x_2) + y_2 L_2(x_2) = y_2$$

Exemplo

Voltando ao exemplo anterior

x	-1	0	1
$f(x)$	0.54	1	0.54

Assim

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

Exemplo

Voltando ao exemplo anterior

x	-1	0	1
$f(x)$	0.54	1	0.54

Assim

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = \frac{x^2-1}{-1} = 1-x^2$$

Exemplo

Voltando ao exemplo anterior

x	-1	0	1
$f(x)$	0.54	1	0.54

Assim

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = \frac{x^2-1}{-1} = 1-x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x(x+1)}{2}$$

Exemplo

Obtemos então

$$\begin{aligned} P_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \\ &= (0.54)\frac{x(x-1)}{2} + (1)(1-x^2) + (0.54)\frac{x(x+1)}{2} \end{aligned}$$

Exemplo

Obtemos então

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) \\
&= (0.54)\frac{x(x-1)}{2} + (1)(1-x^2) + (0.54)\frac{x(x+1)}{2} \\
&= \frac{0.54}{2}x(x-1+x+1) + 1 - x^2
\end{aligned}$$

Forma de Lagrange

Interpolação Quadrática

Exemplo

Obtemos então

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) \\
&= (0.54)\frac{x(x-1)}{2} + (1)(1-x^2) + (0.54)\frac{x(x+1)}{2} \\
&= \frac{0.54}{2} x(x-1+x+1) + 1 - x^2 \\
&= 0.54x^2 + 1 - x^2
\end{aligned}
$$

Forma de Lagrange

Exemplo

Obtemos então

$$
\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) \\
&= (0.54)\frac{x(x-1)}{2} + (1)(1-x^2) + (0.54)\frac{x(x+1)}{2} \\
&= \frac{0.54}{2}x(x-1+x+1) + 1 - x^2 \\
&= 0.54x^2 + 1 - x^2 \\
&= 1 - 0.46x^2
\end{aligned}
$$

Exemplo

Obtemos então

$$\begin{aligned}
P_2(x) &= y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x) \\
&= (0.54)\frac{x(x-1)}{2} + (1)(1-x^2) + (0.54)\frac{x(x+1)}{2} \\
&= \frac{0.54}{2}x(x-1+x+1) + 1 - x^2 \\
&= 0.54x^2 + 1 - x^2 \\
&= 1 - 0.46x^2
\end{aligned}$$

* Observe que este é o mesmo polinômio obtido anteriormente, pois como vimos este polinômio é único. □

Forma de Lagrange

Casos especiais

Considere o seguinte conjunto de pontos

$$(x_0, 1), \quad (x_1, 1), \quad (x_2, 1)$$

Qual é o polinômio $P_2(x)$ neste caso?

Forma de Lagrange

Casos especiais

Considere o seguinte conjunto de pontos

$$(x_0, 1), \quad (x_1, 1), \quad (x_2, 1)$$

Qual é o polinômio $P_2(x)$ neste caso?

O polinômio interpolante tem que ser

$$P_2(x) = 1$$

o que significa que $P_2(x)$ é a função constante.

- A função constante satisfaz a propriade que $P_2(x)$ tem que ter grau ≤ 2.
- Claramente essa função interpola os dados fornecidos.
- Pela unicidade da interpolação, $P_2(x)$ tem que ser a função constante 1.

Forma de Lagrange

Casos especiais

Considere o seguinte conjunto de pontos

$$(x_0, mx_0), \quad (x_1, mx_1), \quad (x_2, mx_2)$$

para uma constante m qualquer. Qual é o polinômio $P_2(x)$ nesse caso? De forma similar ao caso anterior, concluimos que

$$P_2(x) = mx, \quad \forall x$$

Observe que, o grau de $P_2(x)$ pode ser menor do que 2.

Forma de Lagrange
Caso Geral

Vamos considerar que agora temos $n+1$ pontos:

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$$

e queremos encontrar um polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola os pontos acima.

Forma de Lagrange

Caso Geral

Vamos considerar que agora temos $n+1$ pontos:

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$$

e queremos encontrar um polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola os pontos acima.

Definindo os polinômios de Lagrange:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

Forma de Lagrange

Caso Geral

Vamos considerar que agora temos $n+1$ pontos:

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$$

e queremos encontrar um polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola os pontos acima.

Definindo os polinômios de Lagrange:

$$\begin{aligned} L_i(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \\ &= \prod_{j=0,\ j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \end{aligned}$$

Forma de Lagrange

Caso Geral

Vamos considerar que agora temos $n + 1$ pontos:

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$$

e queremos encontrar um polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola os pontos acima.

Definindo os polinômios de Lagrange:

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}$$

$$= \prod_{j=0,\ j \neq i}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

logo o polinômio interpolador (na forma de Lagrange!) é dado por:

$$\boxed{P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \ldots + y_n L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)}$$

Forma de Lagrange

Exemplo

Dada a seguinte tabela

x	1	1.1	1.2	1.3
$\tan(x)$	1.5574	1.9648	2.5722	3.6021

podemos construir polinômios interpoladores de grau $n = 1, 2, 3$, com os seguintes nós:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.1, \quad x_2 = 1.2, \quad x_3 = 1.3$$

Forma de Lagrange

Exemplo

Dada a seguinte tabela

x	1	1.1	1.2	1.3
$\tan(x)$	1.5574	1.9648	2.5722	3.6021

podemos construir polinômios interpoladores de grau $n = 1, 2, 3$, com os seguintes nós:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.1, \quad x_2 = 1.2, \quad x_3 = 1.3$$

Sem descrever a construção temos os seguintes resultados

n	1	2	3
$P_n(x)$	2.2685	2.2435	2.2296
erro	-0.0340	-0.0090	0.0049

considerando que o valor exato é $\tan(1.15) = 2.2345$.

Forma de Lagrange

Exemplo

Vemos que:

- A aproximação melhora a medida que aumentamos o grau n, entretanto a uma taxa não muito rápida.
- Veremos mais adiante que o erro piora quando aumentamos n ainda mais.
- Em geral interpolação polinomial de alta ordem, digamos $n \geq 10$, pode causar problemas.
- Veremos também outras formas de interpolação (por partes, splines).
  - Dividir o intervalo em subintervalos e usar interpolação de grau menor em cada um dos subintervalos.

Forma de Lagrange

Algoritmo

entrada: n : numero de pontos
$\mathbf{x}, \mathbf{y}$: vetores dos dados
z : valor a interpolar
saída: r : valor interpolado

$r = 0$;
para $i = 1$ *até* n **faça**
    $c = 1$;
    $d = 1$;
    para $j = 1$ *até* n **faça**
        se $i \neq j$ **então**
            $c = c * (z - x_j)$;
            $d = d * (x_i - x_j)$;
        fim-se
    fim-para
    $r = r + y_i * (c/d)$;
fim-para

Forma de Lagrange

Observações

- O número de operações desse algoritmo é:
  - Adições: $2n^2 + 3n + 1$
  - Multiplicações $2n^2 + 3n + 1$
  - Divisões: $n + 1$
- Ou seja, o algoritmo executa um total de operações aritméticas da ordem de n^2.
- Realiza menos operações do que encontrar os coeficientes do polinômios resolvendo o sistema de equações lineares, que executa um total de operações que é da ordem de n^3.
- Embora seja fácil de determinar o polinômio interpolador pela forma de Lagrange, ela é mais custosa para avaliar o polinômio em um certo ponto.
- Outra desvantagem é a necessidade de se recomputar todos os polinômios $L_i(x)$ se desejarmos aumentar o grau de $P_n(x)$.

Antes de estudarmos a forma de Newton para se obter o polinômio interpolador, iremos apresentar o conceito de **operador de diferença dividida**.

Considere a função $f(x)$. A diferença dividida de *ordem zero* é simplesmente o valor de f no ponto x_i

$$f[x_i] = f(x_i)$$

Considere agora dois pontos distintos x_0 e x_1, definimos

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

que é chamada de *diferença dividida de primeira ordem* de $f(x)$.

Forma de Newton

Diferenças divididas

Podemos definir os operadores de diferença divida de ordem mais alta de forma **recursiva**:

Forma de Newton

Diferenças divididas

Podemos definir os operadores de diferença divida de ordem mais alta de forma **recursiva**:

- segunda ordem

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Forma de Newton

Diferenças divididas

Podemos definir os operadores de diferença divida de ordem mais alta de forma **recursiva**:

- segunda ordem

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

- terceira ordem

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

Forma de Newton

Diferenças divididas

Podemos definir os operadores de diferença divida de ordem mais alta de forma **recursiva**:

- segunda ordem

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

- terceira ordem

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$$

- n-ésima ordem

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

* Lembrando que a definição é válida para $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distintos.

Forma de Newton

Diferenças divididas

Observe que, do lado direito de cada uma das expressões de diferença dividida de ordem > 1, precisamos aplicar sucessivamente a definição de diferença dividida até que os cálculos envolvam apenas o valor da função nos pontos.

Exemplo:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}$$
$$= \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0}$$

Forma de Newton

Diferenças divididas

Observe que, do lado direito de cada uma das expressões de diferença dividida de ordem > 1, precisamos aplicar sucessivamente a definição de diferença dividida até que os cálculos envolvam apenas o valor da função nos pontos.

Exemplo:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2 - x_0}$$

Entretanto, como veremos a seguir, podemos calcular as diferenças divididas de uma função, de uma forma mais simples e sistemática.

Forma de Newton
Diferenças divididas

Pelo Teorema do Valor Médio (TVM),

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0)$$

para algum c entre x_0 e x_1. Então

$$f[x_0, x_1] = f'(c)$$

e podemos ver que a diferença dividida é muito parecida com a derivada, especialmente se x_0 e x_1 são muito próximos.

Forma de Newton

Diferenças divididas

Exemplo

Seja $f(x) = \cos(x)$ e $x_0 = 0.2$ e $x_1 = 0.3$. Então

$$f[x_0, x_1] = \frac{\cos(x_1) - \cos(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\cos(0.3) - \cos(0.2)}{0.3 - 0.2} = -0.2473\ldots$$

Exemplo

Seja $f(x) = \cos(x)$ e $x_0 = 0.2$ e $x_1 = 0.3$. Então

$$f[x_0, x_1] = \frac{\cos(x_1) - \cos(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\cos(0.3) - \cos(0.2)}{0.3 - 0.2} = -0.2473\ldots$$

Note que

$$f'\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = -\sin\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = -0.2474\ldots$$

isto é

$$f[x_0, x_1] \approx f'\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)$$

$\square$

Forma de Newton

Diferenças divididas

A relação entre estes operadores com as derivadas de alta ordem da função $f(x)$ é dada pelo teorema abaixo:

Teorema

Seja $n \geq 1$*, e assuma que* $f(x)$ *é* n *vezes continuamente diferenciável no intervalo* $[a, b]$*. Seja* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *pontos distintos em* $[a, b]$*. Então existe um ponto* c *entre* $x_0, x_1, \ldots, x_n$*, tal que*

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(c) = f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$$

Forma de Newton

Diferenças divididas

Dada uma função $f(x)$ e um conjunto de pontos $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ podemos usar o seguinte esquema para calcular as suas diferenças divididas.

x_i	$f(x_i)$	$[x_i, x_j]$	$[x_i, x_j, x_k]$
x_0	$f[x_0] = f(x_0)$	$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
x_1	$f[x_1] = f(x_1)$	$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$
x_2	$f[x_2] = f(x_2)$	$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$
x_3	$f[x_3] = f(x_3)$	$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$	
x_4	$f[x_4] = f(x_4)$		

Forma de Newton

Diferenças divididas

Exemplo

Seja $f(x) = \cos(x)$, encontre $f[x_0, x_1, x_2]$ onde $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.4$.

x	$f(x)$	ordem 1	ordem 2
0.2	0.980	$f[x_0, x_1] = (0.955 - 0.98)/0.1 = -0.247$	-0.475
0.3	0.955	$f[x_1, x_2] = (0.921 - 0.955)/0.1 = -0.342$	
0.4	0.921		

Exemplo

Seja $f(x) = \cos(x)$, encontre $f[x_0, x_1, x_2]$ onde $x_0 = 0.2$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.4$.

x	$f(x)$	ordem 1	ordem 2
0.2	0.980	$f[x_0, x_1] = (0.955 - 0.98)/0.1 = -0.247$	-0.475
0.3	0.955	$f[x_1, x_2] = (0.921 - 0.955)/0.1 = -0.342$	
0.4	0.921		

Observe que

$$\frac{1}{2}f''\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = \frac{1}{2}f''(0.3) = -\frac{1}{2}\cos(0.3) = -0.4777$$
$$f[0.2, 0.3, 0.4] \approx \frac{1}{2}f''(0.3)$$

□

Forma de Newton

Diferenças divididas - Ordem dos nós

Analisando $f[x_0, x_1]$ vemos que

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0]$$

Forma de Newton

Diferenças divididas - Ordem dos nós

Analisando $f[x_0, x_1]$ vemos que

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0]$$

Ou seja, a ordem de x_0 e x_1 não importa.

Forma de Newton

Diferenças divididas - Ordem dos nós

Analisando $f[x_0, x_1]$ vemos que

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0]$$

Ou seja, a ordem de x_0 e x_1 não importa. Podemos mostrar que de forma geral

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

é independente da ordem dos argumentos $\{x_0, \ldots, x_n\}$, isto é

$$f[x_0, \ldots, x_n] = f[x_{i_0}, \ldots, x_{i_n}]$$

para qualquer permutação $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$ de $(0, 1, \ldots, n)$.

Forma de Newton

Considere que os dados sejam gerados de uma função $f(x)$

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Usando as diferenças divididas

$$f[x_0, x_1], \quad f[x_0, x_1, x_2], \quad \dots \quad f[x_0, \dots, x_n]$$

podemos escrever polinômios interpoladores

$$P_1(x), \quad P_2(x), \quad \dots \quad , P_n(x)$$

de forma simples de calcular

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\
P_2(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&= P_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)
\end{aligned}$$

Forma de Newton

Para o caso geral, temos

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) &+ f[x_0,x_1](x-x_0) \\ &+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots \\ &+ f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

que podemos escrever de forma recursiva como

$$\boxed{P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1})}$$

Forma de Newton

Para o caso geral, temos

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &+ f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

que podemos escrever de forma recursiva como

$$\boxed{P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)\dots(x - x_{n-1})}$$

Observações:

- Desta forma, tendo em mãos um polinômio de grau $\leq n - 1$, sobre n pontos, podemos obter $P_n(x)$ apenas somando o último termo associado ao operador de diferença dividida de ordem n.
- Note a semelhança com a série de Taylor

Forma de Newton

Teorema

O polinômio:

$$
\begin{aligned}
P_n(x) = f(x_0) &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\
&+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\
&+ f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

é o polinômio de interpolação da função $y = f(x)$ *sobre os pontos* $x_0, x_1, \dots, x_n$*, isto é,*

$$P_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Forma de Newton

Teorema

O polinômio:

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &+ f[x_0, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

é o polinômio de interpolação da função $y = f(x)$ *sobre os pontos* $x_0, x_1, \dots, x_n$*, isto é,*

$$P_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Prova

Prova por indução, livro da Neide, página 308.

Forma de Newton

Exemplo

Encontre o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os dados:

x	-1	0	1
$f(x)$	0.54	1	0.54

Forma de Newton

Exemplo

Encontre o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os dados:

x	-1	0	1
$f(x)$	0.54	1	0.54

Pela forma de Newton temos

x	$f(x)$	ordem 1	ordem 2
-1	0.54	0.46	-0.46
0	1	-0.46	
1	0.54		

Forma de Newton

Exemplo

Encontre o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os dados:

x	-1	0	1
$f(x)$	0.54	1	0.54

Pela forma de Newton temos

x	$f(x)$	ordem 1	ordem 2
-1	0.54	0.46	-0.46
0	1	-0.46	
1	0.54		

Logo o polinômio $P_2(x)$ na forma de Newton é dado por

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= 0.54 + 0.46(x + 1) - 0.46(x + 1)(x - 0) = 1 - 0.46x^2 \end{aligned}$$

$\square$

Forma de Newton

Exemplo

Encontre o polinômio que interpola os dados

x	0.1	0.3	0.4	0.6
$f(x)$	0.3162	0.5477	0.6325	0.7746

usando a forma de Newton.

Forma de Newton

Exemplo

Encontre o polinômio que interpola os dados

x	0.1	0.3	0.4	0.6
$f(x)$	0.3162	0.5477	0.6325	0.7746

usando a forma de Newton.

Solução do Exemplo

x	$f(x)$	ordem 1	ordem 2	ordem 3
0.1	0.3162	1.158	-1.0333	1.1494
0.3	0.5477	0.848	-0.4583	
0.4	0.6325	0.710		
0.6	0.7746			

Forma de Newton

Exemplo

Encontre o polinômio que interpola os dados

x	0.1	0.3	0.4	0.6
$f(x)$	0.3162	0.5477	0.6325	0.7746

usando a forma de Newton.

Solução do Exemplo

x	$f(x)$	ordem 1	ordem 2	ordem 3
0.1	0.3162	1.158	-1.0333	1.1494
0.3	0.5477	0.848	-0.4583	
0.4	0.6325	0.710		
0.6	0.7746			

$$P_3(x) = f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Forma de Newton

Exemplo

Encontre o polinômio que interpola os dados

x	0.1	0.3	0.4	0.6
$f(x)$	0.3162	0.5477	0.6325	0.7746

usando a forma de Newton.

Solução do Exemplo

x	$f(x)$	ordem 1	ordem 2	ordem 3
0.1	0.3162	1.158	-1.0333	1.1494
0.3	0.5477	0.848	-0.4583	
0.4	0.6325	0.710		
0.6	0.7746			

$$P_3(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Forma de Newton

Solução do Exemplo

Logo,

$$\begin{aligned} P_3(x) = & f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

Forma de Newton

Solução do Exemplo

Logo,

$$\begin{aligned}P_3(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)\\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\\ &= 0.3162 + (1.158)(x - 0.1) + (-1.033)(x - 0.1)(x - 0.3)\\ &\quad + (1.1494)(x - 0.1)(x - 0.3)(x - 0.4)\end{aligned}$$

Forma de Newton

Solução do Exemplo

Logo,

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 0.3162 + (1.158)(x - 0.1) + (-1.033)(x - 0.1)(x - 0.3) \\
&\quad + (1.1494)(x - 0.1)(x - 0.3)(x - 0.4) \\
&= 1.1494x^3 - 1.95252x^2 + 1.789586x + 0.1556172
\end{aligned}$$

Forma de Newton

Solução do Exemplo

Logo,

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&\quad + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 0.3162 + (1.158)(x - 0.1) + (-1.033)(x - 0.1)(x - 0.3) \\
&\quad + (1.1494)(x - 0.1)(x - 0.3)(x - 0.4) \\
&= 1.1494x^3 - 1.95252x^2 + 1.789586x + 0.1556172
\end{aligned}
$$

Vamos avaliar o polinômio em $x = 0.2$

$$
\begin{aligned}
P_3(0.2) &= 0.3162 + (1.158)(0.2 - 0.1) + (-1.033)(0.2 - 0.1)(0.2 - 0.3) \\
&\quad + (1.1494)(0.2 - 0.1)(0.2 - 0.3)(0.2 - 0.4)
\end{aligned}
$$

Forma de Newton

Solução do Exemplo

Logo,

$$
\begin{aligned}
P_3(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
&\quad + f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&= 0.3162 + (1.158)(x-0.1) + (-1.033)(x-0.1)(x-0.3) \\
&\quad + (1.1494)(x-0.1)(x-0.3)(x-0.4) \\
&= 1.1494x^3 - 1.95252x^2 + 1.789586x + 0.1556172
\end{aligned}
$$

Vamos avaliar o polinômio em $x = 0.2$

$$
\begin{aligned}
P_3(0.2) &= 0.3162 + (1.158)(0.2-0.1) + (-1.033)(0.2-0.1)(0.2-0.3) \\
&\quad + (1.1494)(0.2-0.1)(0.2-0.3)(0.2-0.4) \\
&= 0.3162 + (1.158)(0.2-0.1) + (-1.033)(0.1)(-0.1) \\
&\quad + (1.1494)(0.1)(-0.1)(-0.2)
\end{aligned}
$$

Forma de Newton

Solução do Exemplo

Logo,

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
&+ f[x_0,x_1,x_2,x_3](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\
&= 0.3162 + (1.158)(x-0.1) + (-1.033)(x-0.1)(x-0.3) \\
&+ (1.1494)(x-0.1)(x-0.3)(x-0.4) \\
&= 1.1494x^3 - 1.95252x^2 + 1.789586x + 0.1556172
\end{aligned}$$

Vamos avaliar o polinômio em $x = 0.2$

$$\begin{aligned}
P_3(0.2) &= 0.3162 + (1.158)(0.2-0.1) + (-1.033)(0.2-0.1)(0.2-0.3) \\
&+ (1.1494)(0.2-0.1)(0.2-0.3)(0.2-0.4) \\
&= 0.3162 + (1.158)(0.2-0.1) + (-1.033)(0.1)(-0.1) \\
&+ (1.1494)(0.1)(-0.1)(-0.2) \\
&= 0.4446288
\end{aligned}$$

Forma de Newton

Algoritmo para calcular os coeficientes do polinômio na forma de Newton

entrada: n : numero de pontos
$x_0, \ldots, x_n$: pontos
$y_0, \ldots, y_n$: valores
saída: $d_0, \ldots, d_n$: coeficientes

para *i=0 até n* **faça**
  $d_i = y_i$;
fim-para
para *k=1 até n* **faça**
  para *i=n até k* **faça**
    $d_i = (d_i - d_{i-1})/(x_i - x_{i-k})$;
  fim-para
fim-para
retorne d ;

Forma de Newton

Dado que temos os coeficientes do polinômio na forma de Newton, os quais são $f[x_0], f[x_0,x_1], \ldots, f[x_0,\ldots,x_n]$, podemos avaliar de forma fácil e eficiente o polinômio em um ponto z não tabelado ($z \neq x_i$) usando o algoritmo de Horner. Vejamos um exemplo.

Dado um polinômio de grau 3, escrito como

$$\begin{aligned} P_3(z) = & f[x_0] + f[x_0,x_1](z-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](z-x_0)(z-x_1) \\ & + f[x_0,x_1,x_2,x_3](z-x_0)(z-x_1)(z-x_2) \end{aligned}$$

podemos escreve-lo na forma

$$\begin{aligned} P_3(z) = & f[x_0] \\ & + (z-x_0)\left\{ f[x_0,x_1] + (z-x_1)\Big[f[x_0,x_1,x_2] + f[x_0,x_1,x_2,x_3](z-x_2) \Big] \right\} \end{aligned}$$

Forma de Newton

Algoritmo para avaliar o polinômio na forma de Newton

$$P_3(z) = \underbrace{f[x_0]}_{d_0}$$

$$+ (z - x_0)\left\{\underbrace{f[x_0, x_1]}_{d_1} + (z - x_1)\left[\underbrace{f[x_0, x_1, x_2]}_{d_2} + \underbrace{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}_{d_3}(z - x_2)\right]\right\}$$

Forma de Newton

Algoritmo para avaliar o polinômio na forma de Newton

$$P_3(z) = \underbrace{f[x_0]}_{d_0}$$

$$+ (z - x_0)\left\{\underbrace{f[x_0, x_1]}_{d_1} + (z - x_1)\left[\underbrace{f[x_0, x_1, x_2]}_{d_2} + \underbrace{f[x_0, x_1, x_2, x_3]}_{d_3}(z - x_2)\right]\right\}$$

então

$$P_3(z) = d_0 + (z - x_0)\left\{d_1 + (z - x_1)\left[d_2 + d_3(z - x_2)\right]\right\}$$

$r = d_n$;
para $i = n - 1$ *até* 0 **faça**
  $r = r * (z - x_i) + d_i$;
fim-para
retorne r ;

Forma de Newton

Algoritmo para avaliar o polinômio na forma de Newton

entrada: n : numero de pontos
z : valor a ser interpolado
$x_0, \ldots, x_n$: pontos
$d_0, \ldots, d_n$: coeficientes do polinômio
saída: $P(z)$: valor do polinômio no ponto z

$r = d_n$;
para $i = n - 1$ *até* 0 **faça**
  $r = r * (z - x_i) + d_i$;
fim-para
retorne r ;

Conteúdo

- Aula passada
  - Introdução
  - Forma de Lagrange
  - Forma de Newton
- Aula de hoje
  - Forma de Gregory-Newton
  - Erro na Interpolação

Forma de Newton

Na aula passada vimos que o polinômio interpolador de $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ na **forma de Newton** é dado por

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &+ f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Forma de Newton

Na aula passada vimos que o polinômio interpolador de $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$ na **forma de Newton** é dado por

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &+ f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

que pode ser escrito como

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})$$

onde

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

é o operador de **diferença dividida** de ordem n.

Forma de Newton-Gregory

Quando os valores dos pontos x_i forem igualmente espaçados (Exemplo: $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5$), a forma de Newton pode ser simplificada, resultando na forma de Newton-Gregory.

Antes de estudar a forma de Newton-Gregory, vamos estudar o operador de **diferença ordinária**.

Forma de Newton-Gregory

Quando os valores dos pontos x_i forem igualmente espaçados (Exemplo: $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5$), a forma de Newton pode ser simplificada, resultando na forma de Newton-Gregory.

Antes de estudar a forma de Newton-Gregory, vamos estudar o operador de **diferença ordinária.**

Definição (Operador de Diferença Ordinária)

Sejam $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *pontos igualmente espaçados com passo* h*:*

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_2 + h = x_0 + 3h$$

Forma de Newton-Gregory

Quando os valores dos pontos x_i forem igualmente espaçados (Exemplo: $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5$), a forma de Newton pode ser simplificada, resultando na forma de Newton-Gregory.

Antes de estudar a forma de Newton-Gregory, vamos estudar o operador de **diferença ordinária**.

Definição (Operador de Diferença Ordinária)

Sejam $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *pontos igualmente espaçados com passo* h*:*

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_2 + h = x_0 + 3h$$

o operador de diferença ordinária é dado por

ordem 1: $\quad \Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

Forma de Newton-Gregory

Quando os valores dos pontos x_i forem igualmente espaçados (Exemplo: $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5$), a forma de Newton pode ser simplificada, resultando na forma de Newton-Gregory.

Antes de estudar a forma de Newton-Gregory, vamos estudar o operador de **diferença ordinária.**

Definição (Operador de Diferença Ordinária)

Sejam $x_0, x_1, x_2, \ldots$ *pontos igualmente espaçados com passo* h*:*

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_2 + h = x_0 + 3h$$

o operador de diferença ordinária é dado por

ordem 1: $\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$

ordem 2: $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$

Forma de Newton-Gregory

Quando os valores dos pontos x_i forem igualmente espaçados (Exemplo: $x_0 = 1, x_1 = 1.5, x_2 = 2, x_3 = 2.5$), a forma de Newton pode ser simplificada, resultando na forma de Newton-Gregory.

Antes de estudar a forma de Newton-Gregory, vamos estudar o operador de **diferença ordinária.**

Definição (Operador de Diferença Ordinária)

Sejam $x_0, x_1, x_2, \ldots$ pontos igualmente espaçados com passo h:

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_2 + h = x_0 + 3h$$

o operador de diferença ordinária é dado por

$$\begin{aligned}
&\text{ordem 1:} \quad && \Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \\
&\text{ordem 2:} \quad && \Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \\
&\ldots && \\
&\text{ordem n:} \quad && \Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x)
\end{aligned}$$

Forma de Newton-Gregory

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

Forma de Newton-Gregory

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\
\Delta^2 f(x) &= \Delta\{\Delta f(x)\} \\
&= \Delta\{f(x+h) - f(x)\} \\
&= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \\
&= [f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)] \\
&= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)
\end{aligned}
$$

Forma de Newton-Gregory

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\
\Delta^2 f(x) &= \Delta\{\Delta f(x)\} \\
&= \Delta\{f(x+h) - f(x)\} \\
&= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \\
&= [f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)] \\
&= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \\
\Delta^3 f(x) &= f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Forma de Newton-Gregory

$$
\begin{aligned}
\Delta f(x) &= f(x+h) - f(x) \\
\Delta^2 f(x) &= \Delta\{\Delta f(x)\} \\
&= \Delta\{f(x+h) - f(x)\} \\
&= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \\
&= [f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)] \\
&= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x) \\
\Delta^3 f(x) &= f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x) \\
&\vdots \\
\Delta^n f(x) &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} f(x+nh) - \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} f(x+(n-1)h) \\
&+ \ldots + (-1)^n \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} f(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}
$$

Forma de Newton-Gregory

As diferenças ordinárias podem ser calculadas de forma prática através do seguinte esquema:

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f(x_0) & \Delta f(x_0) & \Delta^2 f(x_0) & \Delta^3 f(x_0) & \Delta^4 f(x_0) \\
x_1 & f(x_1) & \Delta f(x_1) & \Delta^2 f(x_1) & \Delta^3 f(x_1) & \\
x_2 & f(x_2) & \Delta f(x_2) & \Delta^2 f(x_2) & & \\
x_3 & f(x_3) & \Delta f(x_3) & & & \\
x_4 & f(x_4) & & & &
\end{array}
$$

Forma de Newton-Gregory

Exemplo

Calcule $\Delta^3 f(x_0)$ onde:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
3.5	9.820	1.090	0.050	-0.100
4.0	10.91	1.140	-0.050	
4.5	12.05	1.090		
5.0	13.14			

Forma de Newton-Gregory

Exemplo

Calcule $\Delta^3 f(x_0)$ onde:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
3.5	9.820	1.090	0.050	-0.100
4.0	10.91	1.140	-0.050	
4.5	12.05	1.090		
5.0	13.14			

Logo, temos que $\Delta^3 f(x_0) = -0.1$. □

Forma de Newton-Gregory

A relação entre os operadores de diferenças ordinária e dividida é dada pela expressão (prova completa, livro da Neide, página 316)

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\, h^n}$$

Forma de Newton-Gregory

A relação entre os operadores de diferenças ordinária e dividida é dada pela expressão (prova completa, livro da Neide, página 316)

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\, h^n}$$

Vejamos:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

Forma de Newton-Gregory

A relação entre os operadores de diferenças ordinária e dividida é dada pela expressão (prova completa, livro da Neide, página 316)

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\, h^n}$$

Vejamos:

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{2\,h} \end{aligned}$$

Forma de Newton-Gregory

A relação entre os operadores de diferenças ordinária e dividida é dada pela expressão (prova completa, livro da Neide, página 316)

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\; h^n}$$

Vejamos:

$$\begin{aligned} f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{2\; h} \\ &= \frac{\frac{1}{h}[f(x_2) - 2f(x_1) - f(x_0)]}{2\; h} \end{aligned}$$

Forma de Newton-Gregory

A relação entre os operadores de diferenças ordinária e dividida é dada pela expressão (prova completa, livro da Neide, página 316)

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\, h^n}$$

Vejamos:

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\
&= \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{2\, h} \\
&= \frac{\frac{1}{h}[f(x_2) - 2f(x_1) - f(x_0)]}{2\, h} \\
&= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) - f(x_0)}{2\, h^2}
\end{aligned}$$

Forma de Newton-Gregory

A relação entre os operadores de diferenças ordinária e dividida é dada pela expressão (prova completa, livro da Neide, página 316)

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\ h^n}$$

Vejamos:

$$\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} \\
&= \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} - \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{2\ h} \\
&= \frac{\frac{1}{h}[f(x_2) - 2f(x_1) - f(x_0)]}{2\ h} \\
&= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) - f(x_0)}{2\ h^2} \\
&= \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2\ h^2}
\end{aligned}$$

Forma de Newton-Gregory

O polinômio interpolador na forma de Newton é dado por

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &+ f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Forma de Newton-Gregory

O polinômio interpolador na forma de Newton é dado por

$$\begin{aligned}P_n(x) = f(x_0) &+ f[x_0, x_1](x - x_0)\\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots\\ &+ f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})\end{aligned}$$

Defina

$$u = \frac{(x - x_0)}{h}$$

Forma de Newton-Gregory

O polinômio interpolador na forma de Newton é dado por

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &+ f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Defina

$$u = \frac{(x - x_0)}{h}$$

Note que

$$x - x_0 = hu$$

Forma de Newton-Gregory

O polinômio interpolador na forma de Newton é dado por

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &+ f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Defina

$$u = \frac{(x - x_0)}{h}$$

Note que

$$\begin{aligned} x - x_0 &= hu \\ x - x_1 &= x - x_0 - h = hu - h = h(u - 1) \end{aligned}$$

Forma de Newton-Gregory

O polinômio interpolador na forma de Newton é dado por

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) &+ f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ &+ f[x_0, \dots, x_n](x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Defina

$$u = \frac{(x - x_0)}{h}$$

Note que

$$\begin{aligned} x - x_0 &= hu \\ x - x_1 &= x - x_0 - h = hu - h = h(u-1) \\ x - x_2 &= x - x_0 - 2h = hu - 2h = h(u-2) \\ &\dots \end{aligned}$$

Forma de Newton-Gregory

O polinômio interpolador na forma de Newton é dado por

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) &+ f[x_0,x_1](x-x_0) \\ &+ f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots \\ &+ f[x_0,\dots,x_n](x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) \end{aligned}$$

Defina

$$u = \frac{(x-x_0)}{h}$$

Note que

$$\begin{aligned} x - x_0 &= hu \\ x - x_1 &= x - x_0 - h = hu - h = h(u-1) \\ x - x_2 &= x - x_0 - 2h = hu - 2h = h(u-2) \\ &\dots \\ x - x_{n-1} &= x - x_0 - (n-1)h = hu - nh + h = h(u-n+1) \end{aligned}$$

Forma de Newton-Gregory

Substituindo na forma de Newton temos

$$P_n(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})$$

Forma de Newton-Gregory

Substituindo na forma de Newton temos

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= f(x_0) + f[x_0,x_1](x-x_0) + f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
&+ \ldots + f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) \\
&= f(x_0) + hu\frac{\Delta f(x_0)}{1!\,h} + (hu)[h(u-1)]\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\,h^2} \\
&+ \ldots + (hu)[h(u-1)][h(u-2)]\ldots[h(u-n+1)]\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\,h^n}
\end{aligned}$$

Forma de Newton-Gregory

Substituindo na forma de Newton temos

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&+ \ldots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \\
&= f(x_0) + hu\frac{\Delta f(x_0)}{1!\, h} + (hu)[h(u-1)]\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\, h^2} \\
&+ \ldots + (hu)[h(u-1)][h(u-2)] \ldots [h(u-n+1)]\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\, h^n}
\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}
P_n(u) = f(x_0) + u\Delta f(x_0) + u(u-1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \\
+ u(u-1)(u-2) \ldots (u-n+1)\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}
\end{aligned}$$

Forma de Newton-Gregory

Substituindo na forma de Newton temos

$$
\begin{aligned}
P_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\
&+ \ldots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \\
&= f(x_0) + hu \frac{\Delta f(x_0)}{1!\, h} + (hu)[h(u-1)] \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\, h^2} \\
&+ \ldots + (hu)[h(u-1)][h(u-2)] \ldots [h(u-n+1)] \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!\, h^n}
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
P_n(u) = f(x_0) + u\Delta f(x_0) + u(u-1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \\
+ u(u-1)(u-2) \ldots (u-n+1) \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!}
\end{aligned}
$$

ou

$$
\boxed{P_n(u) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta^i f(x_0)}{i!} \prod_{j=0}^{i-1} (u - j)}
$$

Forma de Newton-Gregory

Exemplo

Calcular $P_1(0.2)$ usando os dados da tabela abaixo:

x	0.1	0.6
$f(x)$	1.221	3.320

Forma de Newton-Gregory

Exemplo

Calcular $P_1(0.2)$ usando os dados da tabela abaixo:

x	0.1	0.6
$f(x)$	1.221	3.320

Solução do Exemplo

Calculamos a tabela de diferenças ordinárias:

x	$f(x)$	
0.1	1.221	
		2.099
0.6	3.320	

Forma de Newton-Gregory

Exemplo

Calcular $P_1(0.2)$ usando os dados da tabela abaixo:

x	0.1	0.6
$f(x)$	1.221	3.320

Solução do Exemplo

Calculamos a tabela de diferenças ordinárias:

x	$f(x)$	
0.1	1.221	
		2.099
0.6	3.320	

e a variável $u = \frac{x - x_0}{h} = \frac{0.2 - 0.1}{0.5} = 0.2$.

Forma de Newton-Gregory

Exemplo

Calcular $P_1(0.2)$ usando os dados da tabela abaixo:

x	0.1	0.6
$f(x)$	1.221	3.320

Solução do Exemplo

Calculamos a tabela de diferenças ordinárias:

x	$f(x)$	
0.1	1.221	
		2.099
0.6	3.320	

e a variável $u = \frac{x-x_0}{h} = \frac{0.2-0.1}{0.5} = 0.2$. Então

$$P_1(0.2) = f(x_0) + u\Delta f(x_0) = 1.221 + (0.2)2.099 = 1.641$$

$\square$

Forma de Newton-Gregory

Exemplo

Dada a função tabelada:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	3	1	-1	0

determinar o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton-Gregory e calcular o seu valor em $x = 0.5$.

Forma de Newton-Gregory

Exemplo

Dada a função tabelada:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	3	1	-1	0

determinar o polinômio de interpolação usando a fórmula de Newton-Gregory e calcular o seu valor em $x = 0.5$.

Solução do Exemplo

Temos:

$$x_0 = -1, \quad f(x_0) = 3,$$
$$x_1 = 0, \quad f(x_1) = 1,$$
$$x_2 = 1, \quad f(x_2) = -1,$$
$$x_3 = 2, \quad f(x_3) = 0$$

portanto $n = 3$.

Forma de Newton-Gregory

Solução do Exemplo

Logo devemos construir o seguinte polinômio

$$P_3(x) = f(x_0) + u\Delta f(x_0) + u(u-1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!} + u(u-1)(u-2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!}$$

Construimos então a tabela de diferenças ordinárias:

x	$f(x)$			
-1	**3**			
		-2		
0	1		**0**	
		-2		**3**
1	-1		3	
		1		
2	0			

Forma de Newton-Gregory

Solução do Exemplo

Assim temos

$$f(x_0) = 3, \quad \Delta f(x_0) = -2, \quad \Delta^2 f(x_0) = 0, \quad \Delta^3 f(x_0) = 3$$

Portanto

$$P_3(x) = 3 + u\frac{(-2)}{1!} + u(u-1)\frac{(0)}{2!} + u(u-1)(u-2)\frac{(3)}{3!}$$

onde $u = \frac{x - x_0}{h}$.

Forma de Newton-Gregory

Solução do Exemplo

Assim temos

$$f(x_0) = 3, \quad \Delta f(x_0) = -2, \quad \Delta^2 f(x_0) = 0, \quad \Delta^3 f(x_0) = 3$$

Portanto

$$P_3(x) = 3 + u\frac{(-2)}{1!} + u(u-1)\frac{(0)}{2!} + u(u-1)(u-2)\frac{(3)}{3!}$$

onde $u = \frac{x-x_0}{h}$. Para calcular $P_3(0.5)$ temos que $h = 1$, $x = 0.5$ e $x_0 = -1$, portanto

$$u = \frac{0.5-(-1)}{1} = 1.5$$

assim calculamos

$$P_3(1.5) = 3 - 2(1.5) + 0.5 * (1.5)(1.5-1)(1.5-2) = -0.1875$$

□

Erro na Interpolação

Estamos interessados em estimar o erro cometido quando aproximamos uma função $f(x)$ por $P_n(x)$ em um ponto $x = z$ entre $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Isto é, queremos encontrar uma expressão para o erro, denotado por $E_n(z)$ onde:

$$E_n(z) = f(z) - P_n(z)$$

para z entre $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Erro na Interpolação

Estamos interessados em estimar o erro cometido quando aproximamos uma função $f(x)$ por $P_n(x)$ em um ponto $x = z$ entre $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Isto é, queremos encontrar uma expressão para o erro, denotado por $E_n(z)$ onde:

$$E_n(z) = f(z) - P_n(z)$$

para z entre $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Para isso, considere que $P_{n+1}(x)$ é o polinômio de grau $\leq n+1$ que interpola os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n), (z, f(z))$, onde supomos que $z \neq x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Assim, pela forma de Newton temos que

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x - x_0) \ldots (x - x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_n, z]$$

Erro na Interpolação

Estamos interessados em estimar o erro cometido quando aproximamos uma função $f(x)$ por $P_n(x)$ em um ponto $x = z$ entre $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Isto é, queremos encontrar uma expressão para o erro, denotado por $E_n(z)$ onde:

$$E_n(z) = f(z) - P_n(z)$$

para z entre $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Para isso, considere que $P_{n+1}(x)$ é o polinômio de grau $\leq n+1$ que interpola os pontos $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n), (z, f(z))$, onde supomos que $z \neq x_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Assim, pela forma de Newton temos que

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + (x - x_0) \ldots (x - x_n) f[x_0, x_1, \ldots, x_n, z]$$

como $P_{n+1}(x)$ é o polinômio interpolador, no ponto $x = z$ temos

$$P_{n+1}(z) = f(z)$$

Erro na Interpolação

Note que, podemos escrever $P_n(x)$ como

$$P_n(x) = P_{n+1}(x) - (x - x_0)\dots(x - x_n)f[x_0, \dots, x_n, z]$$

$$\begin{aligned}
E_n(z) &= f(z) - P_n(z) \\
&= f(z) - \{P_{n+1}(z) - (z - x_0)\dots(z - x_n)f[x_0, \dots, x_n, z]\} \\
&= f(z) - \{f(z) - (z - x_0)\dots(z - x_n)f[x_0, \dots, x_n, z]\} \\
&= (z - x_0)\dots(z - x_n)f[x_0, \dots, x_n, z]
\end{aligned}$$

Erro na Interpolação

Note que, podemos escrever $P_n(x)$ como

$$P_n(x) = P_{n+1}(x) - (x - x_0)\dots(x - x_n)f[x_0, \dots, x_n, z]$$

$$\begin{aligned}
E_n(z) &= f(z) - P_n(z) \\
&= f(z) - \{P_{n+1}(z) - (z - x_0)\dots(z - x_n)f[x_0, \dots, x_n, z]\} \\
&= f(z) - \{f(z) - (z - x_0)\dots(z - x_n)f[x_0, \dots, x_n, z]\} \\
&= (z - x_0)\dots(z - x_n)f[x_0, \dots, x_n, z]
\end{aligned}$$

Através da relação entre o operador de diferenças divididas e derivada, dada por

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^n(\xi)}{n!}$$

Erro na Interpolação

Note que, podemos escrever $P_n(x)$ como

$$P_n(x) = P_{n+1}(x) - (x - x_0)\dots(x - x_n)f[x_0, \dots, x_n, z]$$

$$\begin{aligned}
E_n(z) &= f(z) - P_n(z) \\
&= f(z) - \{P_{n+1}(z) - (z - x_0)\dots(z - x_n)f[x_0, \dots, x_n, z]\} \\
&= f(z) - \{f(z) - (z - x_0)\dots(z - x_n)f[x_0, \dots, x_n, z]\} \\
&= (z - x_0)\dots(z - x_n)f[x_0, \dots, x_n, z]
\end{aligned}$$

Através da relação entre o operador de diferenças divididas e derivada, dada por

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f^n(\xi)}{n!}$$

obtemos que

$$E_n(z) = (z - x_0)\dots(z - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

onde ξ é algum ponto entre $x_0, \dots, x_n$.

Erro na Interpolação

Teorema (Erro na interpolação)

Sejam $x_0, \ldots, x_n$ um conjunto de $n+1$ pontos distintos. Seja $f(x)$ uma função $n+1$ continuamente diferenciável. Então, em qualquer ponto x entre $x_0, \ldots, x_n$ o erro é dado por:

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$

ou

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$

onde ξ está entre $x_0, \ldots, x_n$.

Erro na Interpolação

Teorema (Erro na interpolação)

Sejam $x_0, \ldots, x_n$ *um conjunto de* $n+1$ *pontos distintos. Seja* $f(x)$ *uma função* $n+1$ *continuamente diferenciável. Então, em qualquer ponto* x *entre* $x_0, \ldots, x_n$ *o erro é dado por:*

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$

ou

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - P_n(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$

onde ξ *está entre* $x_0, \ldots, x_n$*.*

A importância do teorema do erro é mais teórica do que prática, visto que não conhecemos o ponto ξ.

Erro na Interpolação

A seguir veremos algumas formas de estimar o erro na interpolação:

1. Para um ponto x qualquer em $[x_0, x_n]$
2. Dado um ponto x (caso geral) considerando um conjunto de pontos com espaçamento qualquer: $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$.
3. Dado um ponto x (caso mais específico) considerando um conjunto de pontos igualmente espaçados: $x_k = x_0 + kh, \quad \forall k = 0, 1, \ldots, n$.
4. Dado um ponto x e quando não se conhece a função $f(x)$ pela tabela de diferenças divididas.

Erro na Interpolação

Na prática para **estimar** o erro cometido ao aproximar o valor da função em um ponto por seu polinômio interpolador, usamos o seguinte resultado.

$$|E_n(x)| = \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|$$

pois $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M_{n+1}$, sendo que $M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)$.

Limitante para o erro na interpolação

Seja $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Se $f(x)$ e suas derivadas até ordem $n+1$ são contínuas em $[a, b]$, então:

$$\boxed{|E_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \prod_{k=0}^{n} (x - x_k) \right|}$$

Erro na Interpolação

Exemplo

Sejam $f(x) = e^x$ e o polinômio que interpola $P_1(x)$ nos pontos $x_0, x_1 \in [0, 1]$. Estimar o erro para um ponto x (qualquer).

Erro na Interpolação

Exemplo

Sejam $f(x) = e^x$ e o polinômio que interpola $P_1(x)$ nos pontos $x_0, x_1 \in [0, 1]$. Estimar o erro para um ponto x (qualquer).

Solução do Exemplo

Pela fórmula do erro $|E_1(x)| \leq |x - x_0||x - x_1| \max_{x \in [x_0, x_1]} \frac{f''(x)}{2}$, sendo preciso determinar

$$\max |x - x_0||x - x_1|, \quad \text{e} \quad \max_{x \in [x_0, x_1]} \frac{f''(x)}{2}$$

Considerando que $[x_0, x_1] = [0, 1]$ e que $f''(x) = e^x$, temos que

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} e^x = e^{x_1} \leq e^1$$

logo

$$|E_1(x)| \leq |x - x_0||x - x_1| \frac{e}{2}$$

Erro na Interpolação

Solução do Exemplo

Vamos calcular agora o maior valor que $|x-x_0||x-x_1|$ pode assumir no intervalo $[x_0,x_1]$.

$$w(x) = (x-x_0)(x-x_1)$$
$$w'(x) = (x-x_1)+(x-x_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_0+x_1}{2}$$

Considere que $x_1 - x_0 = h$, então $x = \frac{x_0+x_0+h}{2} = x_0 + \frac{h}{2}$.
Logo

$$w(x_0+\tfrac{h}{2}) = (x_0+\tfrac{h}{2}-x_0)(x_0+\tfrac{h}{2}-x_0-h) = \tfrac{h}{2}\left(-\tfrac{h}{2}\right) = -\tfrac{h^2}{4}$$

e assim

$$|E_1(x)| \leq \tfrac{h^2}{4}\tfrac{e}{2} = \tfrac{h^2 e}{8}$$

$\square$

Erro na Interpolação

Exemplo

Obtenha uma aproximação para $\ln 3.6$ conhecendo a seguinte tabela e apresente uma estimativa para o seu erro.

x	1	2	3	4
$\ln(x)$	0	0.6931	1.0986	1.3863

Erro na Interpolação

Exemplo

Obtenha uma aproximação para $\ln 3.6$ conhecendo a seguinte tabela e apresente uma estimativa para o seu erro.

x	1	2	3	4
$\ln(x)$	0	0.6931	1.0986	1.3863

Solução do Exemplo

Considerando $x_0 = 3$ e $x_1 = 4$, obtemos

$$P_1(x) = 1.0986 + 0.2877(x - 3).$$

Dessa forma, $P_1(3.6) = 1.27122$ e $\ln(3.6) = 1.28093$, e o erro é dado por $|E_1| = 0.00971$. A estimativa para o erro é dada por:

$$|E_1| \leq |3.6 - 3||3.6 - 4|\frac{1/9}{2!} = (0.6)(0.4)(1/18) = \frac{24}{1800} = 0.01333.\square$$

Erro na Interpolação

De forma geral, para $n+1$ pontos igualmente espaçados $x_0, x_1, \ldots, x_n$, e para $f(x)$ com derivada até ordem $n+1$ contínua, pode ser mostrado (Ruggiero, página 232) o seguinte resultado:

$$|E_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)}, \quad \forall x \in [x_0, x_n]$$

onde

$$M_{n+1} = \max_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Erro na Interpolação

Exemplo

Seja $f(x) = e^x + x - 1$. Encontre a interpolação linear $P_1(x)$ passando pelos pontos:

x	0.5	1.0
$f(x)$	1.1487	2.7183

Determine um limitante L para o erro: $|E_1(x)| \leq L$.

Erro na Interpolação

Exemplo

Seja $f(x) = e^x + x - 1$. Encontre a interpolação linear $P_1(x)$ passando pelos pontos:

x	0.5	1.0
$f(x)$	1.1487	2.7183

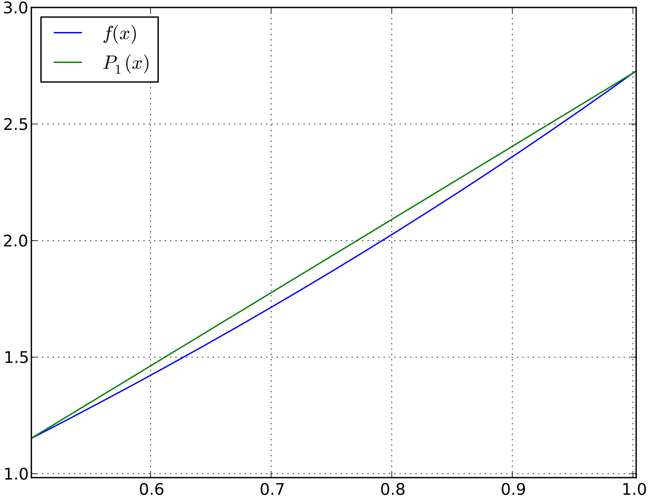
Determine um limitante L para o erro: $|E_1(x)| \leq L$.

Solução do Exemplo

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] \\
&= f(x_0) + (x - x_0)\tfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \\
&= 1.1487 + (x - 0.5)\tfrac{(2.7183-1.1487)}{1.0-0.5} \\
&= 1.1487 + (x - 0.5)3.1392 \\
&= 3.1392x - 0.4209
\end{aligned}$$

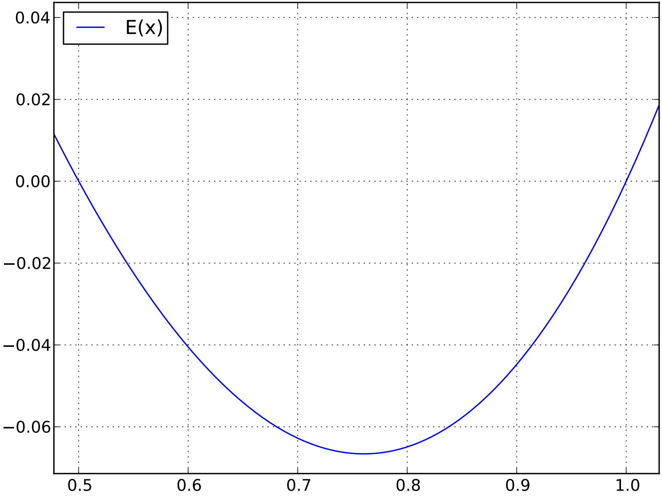
Erro na Interpolação

Solução do Exemplo



Erro na Interpolação

Solução do Exemplo



Erro na Interpolação

Solução do Exemplo

Estimando o erro, temos

$$|E_1(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{4(2)} \leq \frac{0.5^2\ e^1}{4(2)}$$
$$\leq 0.0849 = L$$

onde

$$M_2 = \max_{x\in[0.5,1.0]} f''(x) = \max_{x\in[0.5,1.0]} e^x = e^1$$

Erro na Interpolação

Solução do Exemplo

Estimando o erro, temos

$$
\begin{aligned}
|E_1(x)| \leq \frac{h^2 M_2}{4(2)} &\leq \frac{0.5^2\ e^1}{4(2)} \\
&\leq 0.0849 = L
\end{aligned}
$$

onde

$$M_2 = \max_{x \in [0.5, 1.0]} f''(x) = \max_{x \in [0.5, 1.0]} e^x = e^1$$

Para $x = 0.7$ temos

$$
\begin{aligned}
f(0.7) &= e^{0.7} + 0.7 - 1 = 1.71375 \\
P_1(0.7) &= 1.7765 \\
|E_1(0.7)| &= |1.71375 - 1.7765| = 0.0628 \leq L
\end{aligned}
$$

□

Erro na Interpolação

Exemplo

Dada a tabela

x	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0.13	0.19	0.27	0.38	0.51	0.67

determinar um polinômio de interpolação de grau ≤ 2, avaliar em $x = 4.5$ e calcular o erro cometido neste ponto.

Erro na Interpolação

Exemplo

Dada a tabela

x	2	3	4	5	6	7
$f(x)$	0.13	0.19	0.27	0.38	0.51	0.67

determinar um polinômio de interpolação de grau ≤ 2, avaliar em $x = 4.5$ e calcular o erro cometido neste ponto.

Solução do Exemplo

Para criar o $P_2(x)$ e avaliar em $x = 4.5$ vamos escolher os pontos $x_0 = 4$, $x_1 = 5$ e $x_2 = 6$. Vamos usar a forma de Newton e assim para encontrar

$$P_2(x) = f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2]$$

vamos calcular a tabela de diferenças divididas.

Erro na Interpolação

Solução do Exemplo

x_i	$f[x_i]$	ordem1	ordem 2	ordem 3
2	0.13	0.06	0.010	$\frac{0.005}{3}$
3	0.19	0.08	0.015	$-\frac{0.005}{3}$
4	**0.27**	**0.11**	**0.01**	$\frac{0.005}{3}$
5	0.38	0.13	0.015	
6	0.51	0.16		
7	0.67			

Assim

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f[x_0] + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] \\ &= 0.27 + 0.11(x - 4) + 0.01(x - 4)(x - 5) \\ &= 0.01x^2 + 0.02x + 0.03 \end{aligned}$$

Avaliando em $x = 4.5$ encontra-se $P_2(4.5) = 0.3225$.

Erro na Interpolação

Solução do Exemplo

Para obter uma estimativa do erro vamos usar a seguinte relação

$$|E_n(x)| \leq |x - x_0||x - x_1||x - x_2| \max f[x_0, x_1, x_2, x]$$

Sendo assim precisamos do **maior** valor das diferenças dividas de terceira ordem, o qual, em módulo, é dada por $0.005/3$. Logo

$$|E_2(4.5)| \leq |4.5 - 4||4.5 - 5||4.5 - 6|\left|\frac{0.005}{3}\right|$$

E assim:

$$|E_2(4.5)| \leq 0.000625 \approx 6 \times 10^{-4}.$$

□