Problem:

考虑如下线性规划问题

$$\begin{aligned} \min\ & -2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 - x_2 + x_3 = 15 \\ & x_2 + x_4 = 15 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

此问题中：

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}，\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 15 \\ 15 \end{bmatrix}，\boldsymbol{c}^T = [-2 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

从一个内点可行解 $\boldsymbol{x}^0 = [10 \quad 2 \quad 7 \quad 13]^T$ 开始，有

$$\boldsymbol{X}_0 = \operatorname{diag}(\boldsymbol{x}^0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}^0 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0^2\boldsymbol{A}^T)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_0^2\boldsymbol{c} = [-1.33353 \quad -0.00771]^T$$

并有

$$\boldsymbol{r}^0 = \boldsymbol{c} - \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{p}^0 = [-0.66647 \quad -0.32582 \quad 1.33535 \quad -0.00771]^T$$

由于 $\boldsymbol{r}^0$ 的某些分量是负的，且 $\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{X}_k\boldsymbol{r}^k = 2.1187$，可知现行解不是最优的。于是进行转移方向的计算得到

$$\boldsymbol{d}_{\mathrm{y}}^0 = -\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{r}^0 = [6.6647 \quad 0.6516 \quad -9.3475 \quad 0.1002]^T$$

假如选 $\alpha = 0.99$，那么步长为

$$\alpha_0 = \frac{0.99}{9.3475} = 0.1059$$

于是，得到的新解为

$$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{x}^0 + \alpha_0\boldsymbol{X}_0\boldsymbol{d}_{\mathrm{y}}^0 = [17.06822 \quad 2.13822 \quad 0.07000 \quad 12.86178]^T$$

注意：目标函数值已从 -18 改进为 -31.99822。继续迭代，可证实迭代过程将收敛到最优解$\boldsymbol{x}^* = [30 \quad 15 \quad 0 \quad 0]^T$，最优值为 -45。