Solving Two Examples by Modified Simplex Method (MSM)

LU Honghao

Northeastern University (Shenyang, China)

Problem1:

非退化的线性规划问题。考虑下面的线性规划问题

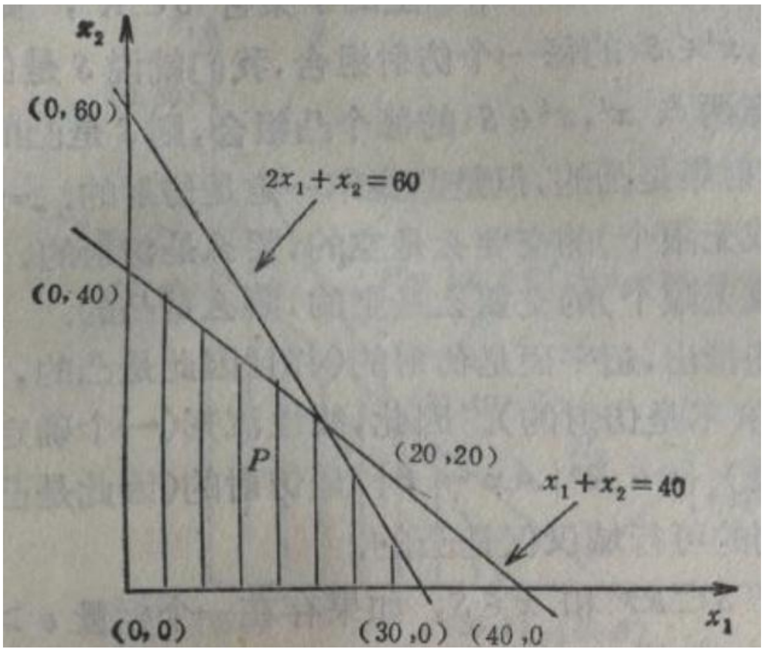
$$\min\ -3x_1 - 2x_2$$

$$\text{s.t.}\ x_1 + x_2 + x_3 = 40$$

$$2x_1 + x_2 + x_4 = 60$$

$$x_1，x_2，x_3，x_4 \geq 0$$

可行域如图所示：



初始基础可行解选为：$\boldsymbol{x}^0 = [0 \quad 0 \quad 40 \quad 60]^T$，基阵$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，下标集 $\boldsymbol{I_B} = \{3，4\}$，$\boldsymbol{c_B} = [0 \quad 0]^T$，基础可行解对应的目标函数值为 0。

修正单纯形算法步骤如下：

步骤 1： 求解线性系统 $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{w}=\boldsymbol{c_B}$ 来计算单纯形乘子 $\boldsymbol{w}$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}^T\boldsymbol{w}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}，得\ \boldsymbol{w}^T=[0\quad 0]$$

步骤 2： 计算既约费用 $r_j=c_j-\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{A}_j$，$\forall j\notin I_{\boldsymbol{B}}$，得

$$r_1=c_1-\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{A}_1=-3-[0\quad 0]\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=-3$$

$$r_2=c_2-\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{A}_2=-2-[0\quad 0]\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=-2$$

步骤 3： 检查最优性。因为 r_1，$r_2<0$，所以，现行解不是最优解。

步骤 4： 选择入基变量，$q=1$，对应 $r_1<0$。

步骤 5： 转移方向。求解线性系统 $\boldsymbol{Bd}=-\boldsymbol{A}_q$ 来计算转移方向 $\boldsymbol{d}^q$：

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{d}=-\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}，得\ \boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$$

因此，转移方向为 $\boldsymbol{d}^1=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}\\\boldsymbol{e}_q\end{bmatrix}=[1\quad 0\quad -1\quad -2]^T$。

步骤 6： 无界性检查。因为 $\boldsymbol{d}^1\ngeq\boldsymbol{0}$，没有检查出无界性，继续。

步骤 7： 转轴过程。寻找一个下标 $j_p\in I_{\boldsymbol{B}}$，计算步长 λ

$$\lambda=-\frac{x_{j_p}}{d_{j_p}}=\min_{i\in I_{\boldsymbol{B}}}\left\{-\frac{x_i}{d_i}\middle|d_i<0\right\}=\min_{i\in\{3,4\}}\left\{-\frac{40}{-1}，\ -\frac{60}{-2}\right\}=30$$

因此，x_4 将出基。

步骤 8： 更新（$\boldsymbol{d}^1=[1\quad 0\quad -1\quad -2]^T$）。设置

$$x_1\leftarrow\lambda=30（入基）$$

$$x_0\ 保持为\ 0$$

$$x_3\leftarrow 40+30\times(-1)=10$$

$$x_4\leftarrow 60+30\times(-2)=0（出基）$$

$$\boldsymbol{B}\leftarrow\boldsymbol{B}+[\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_4][0\quad 1]=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}+\left[\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right][0\quad 1]=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$$

$$I_{\boldsymbol{B}}\leftarrow I_{\boldsymbol{B}}\cup\{q\}\backslash\{j_p\}=\{3，4\}\cup\{1\}\backslash\{4\}=\{3，1\}$$

至此，完成了单纯形算法的一次送代。新的解代表了 P 的不同顶点 $(30，0)$，目标值从 0 减至-90。继续进行多次迭代，该修正单纯形算法将在解 $(20，20)$ 上达到最优的目标值-100。

Problem 2:

退化的线性规划问题。考虑下面的线性规划问题

$$\begin{aligned} \min\ & -3x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + x_3 = 40 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 60 \\ & x_1 + x_5 = 30 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0 \end{aligned}$$

本例中，有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 30 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{c}^T = [-3 \quad -2 \quad 0 \quad 0]$$

初始基础可行解选为: $\boldsymbol{x}^0 = [0 \quad 0 \quad 40 \quad 60 \quad 30]^T$，基阵$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，下标集 $\boldsymbol{I_B} = \{3，4，5\}$，$\boldsymbol{c_B} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$，基础可行解对应的目标函数值为 0。

在执行一次单纯形算法迭代之后，新的基础可行解变成 $\boldsymbol{x}^1 = [30 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0]^T$，它是一个退化的基本可行解，这个解是由负的既约费用系数和转移步长 $\lambda = 30$ 得到的。转移步长 $\lambda = 30$ 后，x_4、x_5 同时变为 0，说明 x_1 是进基变量，或者 x_4 或者 x_5 是离基变量。选择 x_5 离基，现行基成为

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

基变量下标集 $\boldsymbol{I_B} = \{3，4，1\}$。

继续下一循环迭代，很容易被验证 $\boldsymbol{w}^T = [0 \quad 0 \quad -3]$，$r_2 < 0$，$\boldsymbol{d}^T = [-1 \quad -1 \quad 0]$，以及 $\lambda = \min\limits_{i \in \{3,4,1\}} \left\{-\frac{10}{-1},\ -\frac{0}{-1}\right\} = 0$。因此，$x_2$ 进基、x_4 出基，步长为 0。修改相关信息得新的基础可行解 $\boldsymbol{x}^2 = [30 \quad 0 \quad 10 \quad 0 \quad 0]^T$，新基下标 $\boldsymbol{I_B} = \{3，2，1\}$。实际上，$\boldsymbol{x}^2 = \boldsymbol{x}^1$ 停在同一个极点$(30，0)$，如图所示。

再做迭代，x_5 能被检出是进基的，它代替 x_3，现行基本可行解$\boldsymbol{x}^3 = [20 \quad 20 \quad 0 \quad 0 \quad 10]^T$，是一个最优解。

Reference

1. 刘士新 著. 线性优化与最小二乘. 沈阳, 东北大学, 2019.
2. Fang S.-C., Puthenpura S., Linear Optimization and Extensions: Theory and Algorithms, Prentice-Hall Inc.: Englewood Cliffs, NJ USA 1993.
3. 方术诚, 普森普拉 著, 汪定伟, 王梦光 译. 线性优化及扩展. 北京：科学出版社, 1994.