2018-2019 学年 第 1 学期

2018 级《可计算性与计算复杂性》期末考试试题

（A 卷）

考试时间：2019 年 01 月

班级 ________________ 学号________________ 姓名________________

- ✧ 请将答案写在答题纸上，写清题号，不必抄题，字迹工整、清晰。
- ✧ 请在试题纸、答题纸和草稿纸上都写上班级、学号和姓名，交卷时一并提交。
- ✧ 必须添加必要的注释和算法设计思路，命名和书写要规范。
- ✧ 务必使用蓝色、蓝黑色、黑色的中性笔答题，不允许使用铅笔答题或画图，不允许出现两种及以上颜色或笔迹，不允许使用涂改液或修正带等。

一、[15 分，每题 3 分] 判断对错，并简要说明原因。

1）$[0,1]\circ[2,1,1]=2^0 3^1 2^2 3^1 5^1=3\times 60=180$。

2）原始递归函数和递归函数都是可计算函数。

3）可计算函数中的全函数，在原始递归函数中被称为正则函数。

4）$\mathrm{STP}^{(n)}(Z,x_1,\ldots,x_n,M)$是半可判定谓词。

5）若 $P(\mathrm{X})$和 $Q(\mathrm{X})$是半可判定谓词，则 $P(\mathrm{X})\vee Q(\mathrm{X})$是半可判定谓词。

二、[10 分] 利用元语言程序证明：$f(x,y)$是可计算函数，仅允许使用 5 条基本指令。

$$f(x,y)=\max\{x,y\}=\begin{cases} x, & x\ge y \\ y, & otherwise \end{cases}$$

三、[10 分] 定义函数 $NZ(x)$为 x 对应的哥德尔数的最简形式（最后一位不为 0）中 0 的个数，证明：$NZ(x)$是原始递归函数。

四、[10 分] 定义函数 $LK(x)$在 x=0,1,2,3,⋯的值依次为 0,1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4,5,⋯，证明：$LK(x)$是原始递归函数。

小组2

五、[10 分] 证明：函数 $g(x)$是广义 Post-Turing 可计算的，仅允许使用基本指令。

$$g(x)=\lfloor 2x/3 \rfloor$$

讲 2x

六、[10 分] 计算如下 Post-Turing 程序片段对应的哥德尔数编码。

```
[A₂]  RIGHT
      TO A₁ IF B
      TO A₂ IF 1
[A₁]  WRITE 1
      RIGHT
      WRITE 1
```

七、[10 分] 构造四元组 Turing 机，计算谓词 $P(x,y)$。

$$P(x,y) = y \mid x = \begin{cases} 0, & x\%y = 0 \\ 1, & otherwise \end{cases}$$

八、[10 分] 构造半图厄系统Π，使得其定理集为 **T**(Π)。

$$\mathbf{T}(\Pi) = \{x \mid (\exists n)(x = n\lfloor \log_2 n \rfloor\}$$

九、[15 分] 构造多带图灵机，计算 x_1 和 x_2 的最大公约数。

2018-2019 学年 第 1 学期

2018 级《可计算性与计算复杂性》期末考试试题

参考答案（A 卷）

考试时间：2019 年 01 月

一、[15 分，每题 3 分] 判断对错 1 分，说明原因 2 分。

1）错。$[0,1]\circ[2,1,1]=2^0 3^1 5^2 7^1 11^1=5775$。

2）对。原始递归函数和递归函数是可计算函数的子集。

3）错。函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$被称为全函数，若它对一切 $x_1,\cdots,x_n$ 的值都有定义；函数 $f(x_1,\cdots,x_{n+1})$被称为正则的，若对任何一组 $x_1,\cdots,x_n$ 都有 z 使 $f(x_1,\cdots,x_n,z)=0$。二者定义不一致。

4）对。$STP^{(n)}(Z,x_1,\ldots,x_n,M)$是可判定谓词，故也是半可判定谓词。

5）对。利用 PPT 定理 6.3 的证明，构造 $P(X)\vee Q(X)$对应的半可计算函数。

二、[10 分]

```
[A] TO B IF x1≠0
    TO B IF x2≠0
    TO E
[B] x1=x1-1
    x2=x2-1
    y=y+1
    TO A
```

三、[10 分] $NZ(x)=Lt(x)\dot{-}t(x)$

四、[10 分] $LK(x)=\begin{cases} l(x), & r(x)=0 \\ LK(x-1), & otherwise \end{cases}$

$Lk(x)=l(x)+r(x)$

$\lfloor 2x/3 \rfloor$

作业：A

五、[10 分]

去掉 11

```
WRITE B
RIGHT
TO A1 IF 1
WRITE 1          //当 x=0 时
```

```
     TO E
[A1] WRITE S2          //第一个 1 置 S2
[A2] RIGHT
     TO A2 IF 1
     TO A2 IF S3
     WRITE S3          //右侧第一个 B 置 S3
[A3] LEFT
     TO A3 IF S3
     TO A3 IF 1
     RIGHT             //最右侧 S2 后第一个符号
     TO A1 IF 1        //x 个 S2，x 个 S3
[B] WRITE S2
     RIGHT
     TO B IF S3        //2x 个 S2
     WRITE 1
[C1] LEFT
     TO C1 IF S2
[C2] RIGHT             //第一个 S2
     RIGHT
     RIGHT
     TO C3 IF S2       //若三个字符都是 S2
     TO D              //完成[2x/3]
[C3] WRITE S3          //置 S3
[C4] RIGHT
     TO C4 IF S2
     TO C4 IF 1
     WRITE 1           //带后加一个 1
[C5] LEFT
     TO C5 IF 1
     TO C5 IF S2
     TO C2             //最右一个 S3
[D] LEFT               //2x 个 S2、[2x/3]+1 个 1
     TO D IF 1
[D1] WRITE B
     LEFT
     TO D1 IF S2       //消 S2
```

$\underbrace{S_2 S_2 \cdots S_2}_{x个}\ \underbrace{S_3 S_3 \cdots S_3}_{x个}$

$S_3 \to S_2$

$\underbrace{S_2 S_2 \cdots S_2}_{2x个 S_2}\ 1$

WRITE B

WRITE B

WRITE B

α

六、[10 分]

<2,1>=7，<0,5>=20，<0,8>=44，<1,4>=19，<0,1>=2，<0,4>=14，哥德尔数编码为：[7,20,44,19,2,14]。

七、[10 分] 构造四元组 Turing 机，计算谓词 $P(x,y)$。

$P(x,y) = y \mid x = \begin{cases} 0, & x\%y == 0 \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$

如何

```
q01Bq0      //去掉 x 第一个 1
q0BRq1
q1Bbq17     //若 x=0
q11Rq2
q21Rq2
q2BRq3
q31Rq4
q4BRq'
q'BLq4      //y=0，不停机
q41Rq5
q51Rq5
q5BLq6
q61Bq6      //去掉 y 最后一个 1
q6BLq7
q71aq7      //y 最右 1 置 a
q7aLq8
q81Lq8
q8BLq9
q91Lq10     //若 x 有 1
q9BRq16     //若 x 无 1
q101Lq10
q10BRq11    //左移至 x 最左 1
q111Bq11    //x 的 1 置 B
q11BRq12
q121Rq12
q12BRq13
q131Rq14    //若 y 有 1
q13a1q15    //若 y 无 1
q141Rq14
q14aLq7     //右移至 y 最右 1
q151Rq15
q15a1q15
```

x有1. 即删掉1

$q_{15}BLq_7$ //y 所有 a 置 1，指向最右 1

$q_{16}Bbq_{17}$ //x、y 的分隔 B 置 b

$q_{17}bRq_{17}$

$q_{17}1Rq_{17}$

$q_{17}aRq_{18}$

$q_{17}BLq_{19}$ //x=0

$q_{18}BLq_{19}$ //若 y 段只有一个 a

$q_{18}aRq_{20}$ //若 y 段大于一个 a

$q_{19}aBq_{18}$ //整除

$q_{19}1Bq_{18}$

$q_{19}b1q$ //输出 1

$q_{20}aRq_{20}$ //不整除

$q_{20}BLq_{21}$

$q_{21}aBq_{20}$

$q_{21}1Bq_{20}$

$q_{21}b1q_{22}$

$q_{22}1Lq_{22}$

$q_{22}B1q$ //输出 11

b 1 1 1 a a

↑ q_{17}

$n\cdot\lfloor \log_2 n \rfloor$

八、[10 分] $2^m \le n \le 2^m+2^m-1$

令 $[\log_2 n]=m$，则 $2^m \leqslant n<2^{m+1}=2*2^m$，构造 c...cb...b（n 个 c，m 个 b）。设公理为 hAh，半图厄处理 P 为：

hAh→1 //m=0.

A→abc

ab→abb //hab…bch（m 个 b）

bc→ccb //hac…cb…bh（2^m 个 c，m 个 b）

$a\underbrace{c\cdots c}_{2^m}\underbrace{bb\cdots b}_{m}$

acc→cac | ccac

acb→cb //hc…cb…bh（n 个 c，m 个 b）

cb→b1c

1b→b1

c1→1c //hb…b1…1c…ch（m 个 b，nm 个 1，n 个 c）

hb→h

ch→h

h1→1h

hh→1

九、[15 分] 设计思路：使用辗转相除法。

$\delta(q_0, \begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}) = (q_1, \begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\D\end{bmatrix})$

$\delta(q_1, \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}) = (q_1', \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\D\end{bmatrix})$　　//$x_1=0$

$\delta(q_1', \begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}) = (q_1', \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\D\end{bmatrix})$　　//带 1 输出 1

$\delta(q_1, \begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}) = (q_1, \begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\D\end{bmatrix})$

$\delta(q_1, \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}) = (q_2, \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\D\end{bmatrix})$

$\delta(q_2, \begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}) = (q_3, \begin{bmatrix}B\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$

$\delta(q_3, \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}) = (q_2', \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}L\\D\end{bmatrix})$　　//$x_2=0$

$\delta(q_2', \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}) = (q_2', \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}L\\D\end{bmatrix})$

$\delta(q_2', \begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}) = (q_3', \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}L\\D\end{bmatrix})$

$\delta(q_3', \begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}) = (q_3', \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}L\\D\end{bmatrix})$　　//带 2 输出 1

$\delta(q_3, \begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}) = (q_3, \begin{bmatrix}B\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$

$\delta(q_3, \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}) = (q_4, \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}L\\L\end{bmatrix})$　　//x_2 剪切到带 2

$\delta(q_4, \begin{bmatrix}B\\1\end{bmatrix}) = (q_4, \begin{bmatrix}B\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}L\\D\end{bmatrix})$

$\delta(q_4, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}) = (q_5, \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}L\\L\end{bmatrix})$　　//x_1，x_2 同时减 1

$\delta(q_5, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}) = (q_5, \begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}L\\L\end{bmatrix})$

$\delta(q_5, \begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}) = (q_6, \begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$　　//当前 $x_1>x_2$

$\delta(q_5, \begin{bmatrix}B\\1\end{bmatrix}) = (q_7, \begin{bmatrix}B\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$　　//当前 $x_1<x_2$

$\delta(q_5, \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}) = (q_8, \begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$　　//当前 $x_1=x_2$

$\delta(q_6,\begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix})=(q_6,\begin{bmatrix}B\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$ //继续 $x_1\%x_2$

$\delta(q_6,\begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix})=(q_9,\begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}L\\L\end{bmatrix})$

$\delta(q_9,\begin{bmatrix}B\\1\end{bmatrix})=(q_9,\begin{bmatrix}B\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}L\\D\end{bmatrix})$

$\delta(q_9,\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix})=(q_5,\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$

$\delta(q_7,\begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix})=(q_7,\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$ //求 $x_2\%x_1$

$\delta(q_7,\begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix})=(q_{10},\begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}L\\L\end{bmatrix})$ //x_1 为余数，x_2 还原为除数

$\delta(q_8,\begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix})=(q_8,\begin{bmatrix}B\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$

$\delta(q_8,\begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix})=(q,\begin{bmatrix}B\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$ //带 2 输出结果

$\delta(q_{10},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix})=(q_{10},\begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}L\\L\end{bmatrix})$

$\delta(q_{10},\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix})=(q_{11},\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$ //当前 $x_1>x_2$

$\delta(q_{10},\begin{bmatrix}B\\1\end{bmatrix})=(q_{12},\begin{bmatrix}B\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$ //当前 $x_1<x_2$

$\delta(q_{10},\begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix})=(q_8,\begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$ //当前 $x_1=x_2$

$\delta(q_{11},\begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix})=(q_{11},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$ //求 $x_1\%x_2$

$\delta(q_{11},\begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix})=(q_5,\begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}L\\L\end{bmatrix})$ //x_2 为余数，x_1 还原为除数

$\delta(q_{12},\begin{bmatrix}a\\a\end{bmatrix})=(q_{12},\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$ //继续 $x_2\%x_1$

$\delta(q_{12},\begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix})=(q_{14},\begin{bmatrix}B\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}L\\L\end{bmatrix})$

$\delta(q_{14},\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix})=(q_{14},\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\L\end{bmatrix})$

$\delta(q_{14},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix})=(q_{10},\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$