

2019 级《可计算性与计算复杂性》期末考试试题 (B 卷)

考试时间: 2020 年 01 月

班级 _____ 学号 _____ 姓名 _____

- ◇ 请将答案写在答题纸上, 写清题号, 不必抄题, 字迹工整、清晰。
- ◇ 请在试题纸、答题纸和草稿纸上都写上班级、学号和姓名, 交卷时一并提交。
- ◇ 必须添加必要的注释和算法设计思路, 命名和书写要规范。
- ◇ 务必使用蓝色、蓝黑色、黑色的中性笔答题, 不允许使用铅笔答题或画图, 不允许出现两种及以上颜色或笔迹, 不允许使用涂改液或修正带等。

一、[10 分] 利用元语言程序证明: $f(x,y)$ 是可计算函数, 仅允许使用 5 条基本指令。

$$f(x,y) = xy$$

二、[10 分] 谓词 $N_{01}(x)$ 表示 x 对应的哥德尔数中所有幂次均为 0 或 1, 证明: $N_{01}(x)$ 是原始递归谓词。

三、[10 分] 假设 $K(x)$ 为原始递归函数, 且 $K(x) > 0$, 证明: $M(x,y)$ 是原始递归函数。

$$M(x,y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ or } y = 0 \\ \max_{l < y} \{x \mid K(l)\}, & \text{otherwise} \end{cases}$$

四、[15 分] 根据如下带宏指令的 Post-Turing 程序段, 写出其对应的函数 $y=f(x)$; 将其改写成等价的不带宏指令的 Post-Turing 程序段; 计算其对应的哥德尔数编码。

```
[A]  WRITE B
      RIGHT TO NEXT B[2]
      WRITE 11
      LEFT TO NEXT B[2]
      RIGHT
      TO A IF 1
      RIGHT
      WRITE B
```

五、[10 分] 证明：函数 $g(x)$ 是广义 Post-Turing 可计算的，仅允许使用基本指令。

$$g(x) = \lfloor x/3 \rfloor$$

六、[10 分] 构造四元组 Turing 机，计算函数 $g(x)$ 。

$$g(x) = \lfloor x/3 \rfloor$$

七、[10 分] 证明范式定理：谓词 $H(X)$ 是半可判定的，当且仅当存在可判定谓词 $C(X,Y)$ ，使得 $H(X) \Leftrightarrow (\exists Y)C(X,Y)$ 。

八、[10 分] 构造半图厄系统 Π ，使得其定理集为 $T(\Pi)$ 。

$$T(\Pi) = \{x \mid (\exists n)(x = n + \lfloor \log_2 n \rfloor)\}$$

九、[15 分] 构造多带图灵机，计算 $sub(x,y)$ 。

$$sub(x,y) = x \dot{-} y = \begin{cases} x - y, & x > y \\ 0, & otherwise \end{cases}$$



计算机学院考试用草纸

[A] TO B IF $X_2 \neq 0$
TO E

[B] $X_2 = X_2 - 1$
 $Z = X_1$

[C] TO D IF $Z \neq 0$
TO A

[D] ~~$Y = Y + 1$~~ $Z = Z - 1$
 ~~$Z = Z - 1$~~ $Y = Y + 1$
TO C

TO A IF $X_1 \neq 0$
TO Z

[A] TO B IF $X_2 \neq 0$
TO Z

[B] $Z = X_1$

[C] $Z = Z - 1$

$Y = Y + 1$

TO C IF $Z \neq 0$

$X_2 = X_2 - 1$

TO A

计算机学院考试用草纸

$$No_1(x) \Leftrightarrow (\forall i)_{i \leq L(x)} (i=0 \vee (x_i \leq 1))$$

$$\checkmark No_1(x) \Leftrightarrow \underline{x > 0} \wedge (\forall i)_{i \leq L(x)} (i=0 \vee (x_i \leq 1))$$

$$No_1(x) \Leftrightarrow \#(0, x) + \#(1, x) = L(x)$$

$$\checkmark No_1(x) \Leftrightarrow t(x) = \#(1, x)$$

③ 证明题

④

计算机学院考试用草纸

源

1 3 13

2 1 7

0 8 44

3 1 11

0 10 65

4 4 40

0 1 2

0 4 14

5 2 20

0 14 119

6 2 28

0 16 152

7 1 37

0 6 27

0 1 2

0 3 9

1 3 13

2 1 7

0 8 44

3 1 11

0 10 65

0 4 14

0 1 2

0 4 14

4 2 23

0 12 90

5 2 20

0 14 119

0 1 2

0 6 27

0 1 2

0 3 9

(165)

165

2

1. 第

计算机学院考试用草纸

| | |
|--|--|
| <p>WRITE B RIGHT TO 3 IF B [A₁] WRITE B RIGHT TO 3 IF B WRITE B RIGHT TO 3 IF B WRITE B [A₂] RIGHT TO A₂ IF 1 [A₃] RIGHT TO A₃ IF 1 WRITE 1 [A₄] LEFT TO A₄ IF 1 [A₅] LEFT TO A₅ IF 1 RIGHT TO A₁ IF 1 [E] WRITE 1</p> | <p>WRITE B [A₁] RIGHT TO A₁ IF 1 WRITE a [A₂] LEFT TO A₂ IF 1 RIGHT [C] TO E IF a WRITE B RIGHT TO E IF a WRITE B RIGHT TO E IF a WRITE B RIGHT [D] RIGHT TO D₁ IF 1 TO D₁ IF a WRITE a [D₂] LEFT TO D₂ IF 1 TO D₂ IF a RIGHT TO C IF 1 [F] WRITE 1 RIGHT TO F IF a</p> |
|--|--|

11-1a

192 第四组

计算机学院考试用草纸

 $z_0 \mid B \ z_0$ $z_0 \mid B \ R \ z_1$ $z_1 \mid B \ B \ z_1'$

无1

 $z_1 \mid B \ z_2$

} 1T1 处理

 $z_2 \mid B \ R \ z_3$ $z_3 \mid B \ B \ z_1'$

仅IT1

 $z_3 \mid B \ z_4$

} 2T1 处理

 $z_4 \mid B \ R \ z_5$ $z_5 \mid B \ B \ z_1'$

仅2T1

 $z_5 \mid B \ z_6$

} 3T1 处理

 $z_6 \mid B \ R \ z_7$ $z_7 \mid B \ R \ z_7$

} 右端

 $z_7 \mid B \ R \ z_8$ $z_8 \mid B \ R \ z_8$ $z_8 \mid B \ z_9$

} 外1

 $z_9 \mid B \ L \ z_9$ $z_9 \mid B \ L \ z_{10}$ $z_{10} \mid B \ L \ z_{10}$ $z_{10} \mid B \ R \ z_2$ $z_1' \mid B \ 1 \ z_1$

} 右端

计算机学院考试用草纸

① 字

$hA \rightarrow h$ ($m=0$)

$A \rightarrow abc$ } $h \underbrace{abb \dots b}_{m \uparrow (m \geq 1)} ch$

$ab \rightarrow abb$

$bc \rightarrow ccb$

$h \underbrace{acc \dots c}_{2^m \uparrow} \underbrace{bb \dots b}_{m \uparrow} h$

$acc \rightarrow cac / ccac$

$acb \rightarrow cb$

$h \underbrace{cc \dots c}_{(2^{m-1}+1) \sim (2^m-1) \times 2+1 \uparrow} \underbrace{bb \dots b}_{m \uparrow} h$
 $2^m \sim 2^{m+1}-1 \uparrow$

$hc \rightarrow ch$

$hb \rightarrow ch$

$hh \rightarrow h$

$m + \underbrace{2^m}_{2^{m+1}-1} + 1 \uparrow 1$

$h a B ch$

$B \rightarrow bB / b$

$n = \cancel{0} \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8$

$x = \quad 1 \ 3 \ 4 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 11$

带1的数 $2 \ 4 \ 5 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 12$

$$\text{sub}(x, y) = \begin{cases} x - y, & x > y \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

例. 构造一个多带图灵机, 包含两个带子, 输入为 x_1, x_2 , 即 $\text{sub}(x_1, x_2)$

1带存储初值, 格式为 $\overline{x_1 B x_2}$, 算法思想为:

将 x_1 复制到 2 带, 即

$$\textcircled{1} \quad \overline{x_1 B x_2}$$

$$\textcircled{2} \quad \overline{x_1 B}$$

使复制完之后, 指针停留在如图所示位置, ①带指针右移,

②带指针左移, 同时执行 $x_1 - 1, x_2 - 1$, 指针在运行过程中, 会出现如下

3 种情况:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}: x_1 > x_2, x_2 \text{ 减到 } 0 \text{ 时, ②带为 } x_1 - x_2 \text{ 的结果, (补 1)} \\ \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}: x_1 = x_2, \text{ 结果为 } 0, \text{ 在 ②带补一个 1 并输出} \\ \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}: x_1 < x_2, \text{ 将 } x_1 \text{ 清空, 在 ②带补一个 1, 结果为 } 0 \end{cases}$$

$$\delta(q_0, \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}) = (q_0, \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ L \end{bmatrix}) \quad // \text{复制 } x_1$$

$$\delta(q_0, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}) = (q_1, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ L \end{bmatrix}) \quad // \text{复制完后, ①带指向 } x_2 \text{ 首位} \\ // \text{②带指向 } x_1 \text{ 末位}$$

$$// q_1: \text{开始执行 } x_1 = x_1 - 1 \\ x_2 = x_2 - 1$$

$$\delta(q_1, \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}) = (q_1, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ L \end{bmatrix}) \quad // \text{指针继续移动}$$

$$\delta(q_1, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}) = (q_1, \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P \\ D \end{bmatrix}) \quad // \text{补 1, 为最终结果}$$

$$\delta(q_1, \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}) = (q_1, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ D \end{bmatrix}) \quad // x_1 < x_2, \text{ 清空 } x_1, \text{ 直到为 } \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \text{ 时, 在 ②带补 1}$$

$$\delta(q_1, \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}) = (q_1, \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} P \\ L \end{bmatrix}) \quad // x_1 > x_2, \text{ 要在 ②带补 1, 所以 ①带指} \\ // \text{左移, } q_1 \text{ 遇到 } \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \text{ 会在 ②带补 1}$$

思路：使用双带图灵机。先将 x 从上带复制到下带。

随后上带右移，下带左移。可能出现四种情况。

- ① $[1]$ 。即上下带都为 1。删去 1。即与 B。继续上右下左。
- ② $[B]$ 。二者相等。下带多 1。停机。
- ③ $[B]$ $x > y$ 。此时下带再添一个 1。恰为 $x - y$ 的绝对值。停机。
- ④ $[1]$ $x < y$ 。下带多 1。表示 0。停机。

停机后下带的值即为 $\text{sub}(x, y)$ 的值。

$\delta(q_0, [1]) = (q_0, [1], [R])$ // x 复制到下带

$\delta(q_0, [B]) = (q_1, [B], [L])$ // 复制结束。上右下左开始比较。

$\delta(q_1, [1]) = (q_1, [B], [L])$ // ① 把 1 删去，继续上右下左。

$\delta(q_1, [B]) = (q_1, [1], [B])$ // ② $x = y$ 下带多 1 表示 0。停机。

$\delta(q_1, [1]) = (q_2, [1], [R])$
 $\delta(q_2, [B]) = (q_1, [1], [R])$ // ③ $x > y$ 。到前下带中 1 的个数恰为 $x - y$ 。再添 1 即正好。停机。

$\delta(q_1, [1]) = (q_1, [1], [B])$ // ④ $x < y$ 。下带多 1。表示 0。停机。

$$\delta(q_0, \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}) = (q_0, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ R \end{bmatrix})$$

$$\delta(q_0, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}) = (q_1, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ L \end{bmatrix}) \quad // \text{ 已复制到下带}$$

$$\delta(q_1, \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}) = (q_1, \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ L \end{bmatrix}) \quad // \text{ 将下带指针左移移至最左端}$$

$$\delta(q_1, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}) = (q_2, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ R \end{bmatrix}) \quad // \text{ 上下带指针都在最左端}$$

$$\delta(q_2, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) = (q_2, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} R \\ R \end{bmatrix}) \quad // \text{ 上下带同时减1操作}$$

$$\delta(q_2, \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}) = (q_2, \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} D \\ R \end{bmatrix}) \quad // \text{ 上带减没了, 下带还有}$$

$$\delta(q_2, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}) = (q_2, \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}) \quad // \text{ 结果即下带上的1再右移加1}$$

$$\delta(q_2, \begin{bmatrix} 1 \\ B \end{bmatrix}) = (q, \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}) \quad // \text{ 上带还有, 下带} \quad // \text{ 上带还有, 减没了, 结果为1 (即0)}$$

$$\delta(q_2, \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix}) = (q, \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}) \quad // \text{ 上下带同时减完, 结果为1 (即0)}$$