2018-2019 学年 第 1 学期

2018 级《可计算性与计算复杂性》期末考试试题

（B 卷）

考试时间：2019 年 01 月

班级 ________________ 学号________________ 姓名________________

- ✧ 请将答案写在答题纸上，写清题号，不必抄题，字迹工整、清晰。
- ✧ 请在试题纸、答题纸和草稿纸上都写上班级、学号和姓名，交卷时一并提交。
- ✧ 必须添加必要的注释和算法设计思路，命名和书写要规范。
- ✧ 务必使用蓝色、蓝黑色、黑色的中性笔答题，不允许使用铅笔答题或画图，不允许出现两种及以上颜色或笔迹，不允许使用涂改液或修正带等。

一、[15 分，每题 3 分] 判断对错，并简要说明原因。

1）元语言程序中的基本指令“**x=x-1**”是冗余的。

2）**Cantor** 配对函数能将一个数对映射为一个自然数，该自然数等于该数对对应的哥德尔数。

3）$S_0S_1S_2S_1 \leftrightarrow [0,1,2,1]=2^0 3^1 5^2 7^1=525$。

4）$\Phi^{(n)}(Z,x_1,\ldots,x_n)$是可计算函数。

5）$K(X)$是可判定谓词。

二、[10 分] 利用元语言程序证明：$g(x)$是可计算函数，仅允许使用 **5** 条基本指令。

$$g(x)=\lfloor 2x/3 \rfloor$$

三、[10 分] 定义函数 $\mathrm{OWN}(x,y)$为 x 和 y 的共同因数的乘积，证明：$\mathrm{OWN}(x,y)$是原始递归函数。注：x 和 y 的共同因数为能够同时整除 x 和 y 的自然数。

四、[10 分] 假设 $K(x,y)$为原始递归函数，证明：$M(x,y)$是原始递归函数。

$$M(x,y)=\begin{cases} x+y+1, & x=0 \ \ or \ \ y=0 \\ \max\limits_{t<x}\{t \mid K(t,y-1)\}, & otherwise \end{cases}$$

五、[10 分] 判断[7, 20, 44, 19, 2, 14]是否为有效 **Post-Turing** 程序片段对应的哥德尔数编码。如对应请给出该程序片段，否则需要说明原因。

小分: B

六、[10 分] 证明：谓词 $P(x,y)$是广义 **Post-Turing** 可计算的，仅允许使用基本指令。

$$P(x,y) = y \mid x = \begin{cases} 0, & x\%y = 0 \\ 1, & otherwise \end{cases}$$

七、**[10 分] 构造四元组 Turing 机，计算函数 $f(x,y)$。**

$$f(x,y) = \max\{x,y\} = \begin{cases} x, & x \geq y \\ y, & otherwise \end{cases}$$

八、**[10 分] 构造半图厄系统Π，使得其定理集为 T(Π)。**

$$\mathbf{T}(\Pi) = \{x \mid (\exists n)(x = n2^{\lfloor n/3 \rfloor}\}$$

九、**[15 分] 构造离线图灵机，计算 $y = \lfloor \log_3(x-1) \rfloor$。**

2018-2019 学年 第 1 学期

2018 级《可计算性与计算复杂性》期末考试试题

参考答案（B 卷）

考试时间：2019 年 01 月

一、[15 分，每题 3 分]判断对错 1 分，说明原因 2 分。

1）错。五条基本指令中冗余的是“y=x”和“TO A”。例如：“y=x-1”的元语言实现必需“x=x-1”型基本指令。

2）错。$<x,y>=(x+y)(x+y+1)/2+y$，$[x,y]=2^x3^y$。令 x=1，y=1，则$<x,y>=4$，$[x,y]=6$，显然不相等。

3）错。$S_0S_1S_2S_1 \leftrightarrow [1,2,3,2]=2^1 3^2 5^3 7^2=110250$。

4）错。$\Phi^{(n)}(Z,x_1,\ldots,x_n)$是部分可计算函数。

5）错。$K(X)$是半可判定谓词。

二、[10 分]设计思路：先计算 2x，再计算[2x/3]。

```
    z=x
    TO A IF x≠0
    TO E            //特殊情况：当 x=0 时
[A] x=x-1           //计算 z=2x
    z=z+1
    TO A IF x≠0
[B] z=z-1           //计算 y=[z/3]
    z=z-1
    TO C IF z≠0
    TO E
[C] z=z-1
    y=y+1
    TO B
```

三、[10 分]

令函数 $f(t,x,y)=\begin{cases} t, & t \mid x \wedge t \mid y \\ 1, & otherwise \end{cases}$，则 $OWN(x,y)=\prod_{t=0}^{x} f(t,x,y)$。

四、[10 分]

1）当 x=0 或 y=0 时，M(x,y)=x+y+1=S(add(x,y))。

2）当 x≠0 且 y≠0 时，令 $M(x,y)=t_0$，t|K(t,y-1)的特征函数为 φ(t,y)，则当 $t>t_0$ 时，t|K(t,y-1)不成立，φ(t,y)=1。

$$\prod_{t=k}^{x-1}\varphi(t,y)=\begin{cases}1, & k>t_0\\ 0, & otherwise\end{cases}，\quad \sum_{k=0}^{x-1}\prod_{t=k}^{x-1}\varphi(t,y)=x-1-t_0。$$

故 $M(x,y)=x-1-\sum_{k=0}^{x-1}\prod_{t=k}^{x-1}\varphi(t,y)$。

五、[10 分]

7=<2,1>， 20=<0,5>， 44=<0,8>， 19=<1,4>， 2=<0,1>， 14=<0,4>，**PROG([7,20,44,19,2,14])=0**，因此 **[7,20,44,19,2,14]** 是有效 **Post-Turing** 程序片段对应的哥德尔数编码。

程序片段为：

```
[A2] RIGHT
     TO A1 IF B
     TO A2 IF 1
[A1] WRITE 1
     RIGHT
     WRITE 1
```

$$p(x,y)=y|x=\begin{cases}0, & x\%y=0\\ 1, & otherwise\end{cases}$$

六、[10 分]

```
     WRITE B         } 删除x的多余1
     RIGHT
     TO E IF B       //当 x=0 时   返回真值0，带上为1
[A1] RIGHT           } 略过x个1
     TO A1 IF 1
     RIGHT
     RIGHT
[Q]  TO Q IF B       //当 y=0 时   不停机，无返回
[A2] RIGHT
     TO A2 IF 1
     LEFT            } 删除y的多余的1
     WRITE B
```

$\overbrace{11\cdots1}^{x}$ B $\overbrace{11\cdots1}^{y}$ x%y

```
     LEFT              //初始化带
[B]  WRITE S2
[B1] LEFT
     TO B1 IF 1
     LEFT
     TO D IF B         //x 中无 1
[B2] LEFT
     TO B2 IF 1
     RIGHT
     WRITE B           //x 中删除 1
[C1] RIGHT
     TO C1 IF 1
     RIGHT
     TO C3 IF S2       //y 中无 1   ⟷ 删除1个y
[C2] RIGHT
     TO C2 IF 1
     LEFT
     TO B              //找到 y 最右的 1
[C3] WRITE 1                        还原y, S2→1
     RIGHT
     TO C3 IF S2
     LEFT
     TO B              //将 y 还原，指向最右的 1
[D]  RIGHT                          x中无1.
[D1] RIGHT
     TO D1 IF 1
     RIGHT
     TO E1 IF B        //整除
     TO E2             //不整除      IF Sj
[E]  RIGHT
     TO E IF 1
[E1] LEFT              //整除，返回 1
[E11] WRITE B
     LEFT
     TO E11 IF 1
     WRITE 1
     TO F
```

[E_2] RIGHT　　　//不整除，返回 11

TO E_2 IF S_2

LEFT

[E_{21}] WRITE B

LEFT

TO E_{21} IF S_2

TO E_{21} IF 1

WRITE 1

LEFT

WRITE 1

七、[10 分]

$q_0 1 a q_0$　//x 的第一个 1 置 a

$q_0 a R q_1$　　$1 \to a$

左边向右移

$q_1 1 R q_1$

$q_1 B R q_2$

$q_2 b R q_2$　//指针右移

$q_2 B L q_6$　//若 x>y

$q_2 1 b q_3$

右端向左移

$q_3 b L q_3$

$q_3 B L q_4$

$q_4 a L q_8$　//若 x<=y

左端向左移

$q_4 1 L q_5$

$q_5 1 L q_5$　//指针左移

$q_5 a R q_0$　//找到 x 第一个 1　循环

$q_6 b B q_6$

$q_6 B L q_6$　//清除 b

$q_6 a 1 q_7$

$q_6 1 L q_7$

$q_7 1 L q_7$

$q_7 a 1 q_7$　//a 置 1

$q_8 a L q_8$

$q_8 B R q_9$

$q_9 a B q_9$

$q_9 B R q_9$　//清除 a

$q_9 b 1 q_{10}$

$q_{10} b 1 q_{10}$

$q_{10} 1 R q_{10}$ //b 置 1

$f(x, y) = \max\{x, y\}$

a111…1 B b111b

aa…a1…1 B b…bB

26

aa…a B bb…b1/1…1

28

$n\cdot 2^{\lfloor n/3 \rfloor}$

八、[10分]

令$\lfloor n/3 \rfloor=m$，则 $3m\leqslant n<3(m+1)$，即 $3m\leqslant n\leqslant 3m+2$，设公理为 hAch，半图厄处理

P 为:

hAch→1 | 11 | 111 //m=0

A→aAb | ab //haa…abb…bch（m 个 a，m 个 b，m≥1）

ha→ah

hb→111h //aa…a11…1hch（m 个 a，3m 个 1）

hc→h | 1h | 11h //aa…a11…1hh（m 个 a，n 个 1）

a1→11a //11…1aa…ahh（$n*2^m$ 个 1，m 个 a）

ahh→hh | 1

$\lfloor \log_3(x-1) \rfloor$

$x\geq 2$

九、[15分]设计思路：读入输入带上一个“1”，带 2 上做一次三进制加 1（a=0，b=1，c=2）。

$\delta(q_0,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix})=(q_1,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\R\end{bmatrix})$ //2 带保留最左一个 B，确定界限

$\delta(q_1,\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix})=(q_1,\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$ //当 x=0 时

$\delta(q_1,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix})=(q_2,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\D\end{bmatrix})$

$\delta(q_2,\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix})=(q_2,\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$ //当 x=1 时

$\delta(q_2,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix})=(q_3,\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}L\\D\end{bmatrix})$

$\delta(q_3,\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix})=(q_3,\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$

$\delta(q_3,\begin{bmatrix}1\\b\end{bmatrix})=(q_3,\begin{bmatrix}1\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$

$\delta(q_3,\begin{bmatrix}1\\c\end{bmatrix})=(q_3,\begin{bmatrix}1\\c\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$

$\delta(q_3,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix})=(q_4,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}R\\L\end{bmatrix})$ //输入带减 1

上标右移

下标右移到最右

$\delta(q_4,\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix})=(q_4,\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\L\end{bmatrix})$

$\delta(q_4,\begin{bmatrix}1\\b\end{bmatrix})=(q_4,\begin{bmatrix}1\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\L\end{bmatrix})$

$\delta(q_4,\begin{bmatrix}1\\c\end{bmatrix})=(q_4,\begin{bmatrix}1\\c\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\L\end{bmatrix})$

x=2 111 (3)
x=3 1111 (4)
x=4 11111 (5)
x=5 111111 (6)
x=6 1111111 (7)
x=7 11111111 (8)

x=2 111 1
x=3 1111 1
x=4 11111 11
x=5 111111 11
x=6 1111111 11
x=7 11111111 11
⋮
x=10 111 111

$m=\lfloor \log_K(x) \rfloor$ 表示 ~~$x=K^m$~~

$K^m \leq x < K^{(m+1)}$

m+1位 ≤ x < m+2位

（x=m+1位的K进制数）

$\delta\ (q_4,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix})=(q_5,\ \begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$ //2 带移至最左，进行下次加法

$\delta\ (q_5,\begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix})=(q_3,\ \begin{bmatrix}1\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$

$\delta\ (q_5,\begin{bmatrix}1\\b\end{bmatrix})=(q_3,\ \begin{bmatrix}1\\c\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$

$\delta\ (q_5,\begin{bmatrix}1\\c\end{bmatrix})=(q_5,\ \begin{bmatrix}1\\a\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$

$\delta\ (q_5,\begin{bmatrix}1\\B\end{bmatrix})=(q_3,\ \begin{bmatrix}1\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$ //进位

$\delta\ (q_4,\begin{bmatrix}\$\\b\end{bmatrix})=(q_6,\ \begin{bmatrix}\$\\b\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$

$\delta\ (q_4,\begin{bmatrix}\$\\c\end{bmatrix})=(q_6,\ \begin{bmatrix}\$\\c\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\D\end{bmatrix})$

$\delta\ (q_6,\begin{bmatrix}\$\\a\end{bmatrix})=(q_6,\ \begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\L\end{bmatrix})$

$\delta\ (q_6,\begin{bmatrix}\$\\b\end{bmatrix})=(q_6,\ \begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\L\end{bmatrix})$

$\delta\ (q_6,\begin{bmatrix}\$\\c\end{bmatrix})=(q_6,\ \begin{bmatrix}\$\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\L\end{bmatrix})$

$\delta\ (q_6,\begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix})=(q_6,\ \begin{bmatrix}\$\\B\end{bmatrix},\begin{bmatrix}D\\R\end{bmatrix})$ //**a，b，c 改为 1**