

مبانی برنامه نویسی نمایش اعداد در کامپیوتر

Dr. Mehran Safayani safayani@iut.ac.ir safayani.iut.ac.ir



https://www.aparat.com/mehran.safayani



https://github.com/safayani/Programming_Basics_course



Department of Electrical and computer engineering, Isfahan university of technology, Isfahan, Iran

$$2586_{10} = (2 * 10^3) + (5 * 10^2) + (8 * 10^1) + (6 * 10^0)$$

سیستم اعداد دهدهی

سیستم اعداد دهدهی یکی از سیستمهای اعداد متداول است که همگان روزانه با آن سروکار دارند. در این سیستم هر عدد میتواند ترکیبی از ارقام ۰ تا ۹ باشد. هر عدد در سیستم دهدهی را بنابر آنچه قبلا نشان داده شد

می توان به صورت زیر نمایش داد:

$$A = a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} = \sum_{k=-m}^{m-1} a_k \dots (10)^k$$

مثال

$$123.45 = (1*10^2) + (2*10^1) + (3*10^0) + (4*10^{-1}) + (5*10^{-2})$$

سیستم اعداد دودویی

در این سیستم، مبنای اعداد، ۲ است. لذا هر عدد در این سیستم میتواند ترکیبی از ارقام ۰ و ۱ باشد. مانند ۱۰۱۱، ۱۰۱۱ و ۱۰۰۰۱۱.

شکل کلی اعداد این سیستم به صورت زیر میباشد.

$$\sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot (2)^k$$

مثالهایی از تبدیل اعداد دودویی به دهدهی

$$(11001)_2 = (1*2^4) + (1*2^3) + (0*2^2) + (0*2^1) + (1*2^0)$$

= $16 + 8 + 0 + 0 + 1 = (25)_{10}$

$$(1110.01)_2 = (1110.0)_2 + (0.01)_2$$

$$(1110.0)_2 = (1*2^3) + (1*2^2) + (1*2^1) + (0*2^0) = 8 + 4 + 2 + 0 = (14)_{10}$$

$$(0.01)_2 = (0 * 2^{-1}) + (1 * 2^{-2}) = 0 + \frac{1}{4} = (0.25)_{10}$$

$$(1110.01)_2 = (14)_{10} + (0.25)_{10} = (14.25)_{10}$$

سیستم اعداد هشتایی (octal)

در این سیستم، مبنای اعداد، ۸ است. لذا هر عدد در این سیستم میتواند ترکیبی از ارقام ۰ تا ۷ باشد. نمایش عدد در این سیستم به این صورت است.

$$\sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot (8)^k$$

مثال

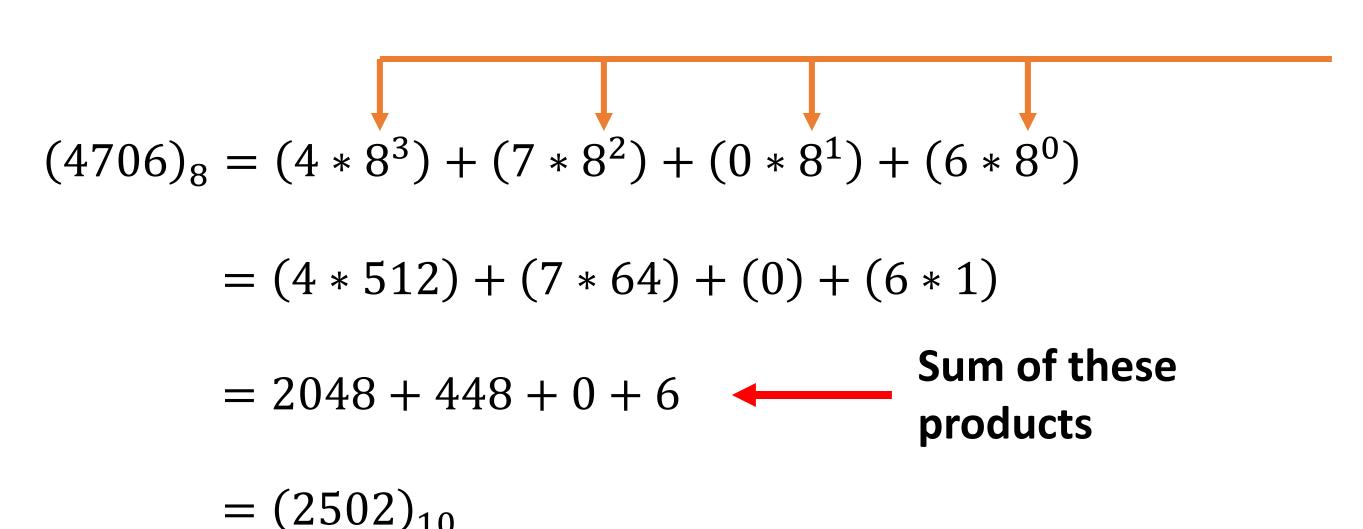
$$(2057)_8 = (2 * 8^3) + (0 * 8^3) + (5 * 8^1) + (7 * 8^0)$$

= $1024 + 0 + 40 + 7 = (1071)_{10}$

سیستم اعداد هشتایی (octal)

• مثال

$$(4706)_8 = (?)_{10}$$



Common values multiplied by the corresponding digits

سیستم اعداد شانزده تایی (هگزادسیمال)

در این سیستم، مبنای اعداد، ۱۶ است. لذا می توان از ۱۶ رقم در نوشتن اعداد این سیستم استفاده کرد. چون اعداد ۹ به بالا را به عنوان یک رقم نمی شناسیم، برای نمایش ۱۰ تا ۱۵ از علائم F تا F استفاده می کنیم. لذا ارقام مبنای ۱۶ شامل ۱ تا ۹ و حروف F تا F می شود. اعدادی مثل F شامل ۱ تا ۹ و حروف F تا F می شود. اعدادی مثل F شامل کلی نمایش این اعداد به صورت

$$\sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot (16)^k$$

• مثال

$$(1AF)_{16} = (1*16^2) + (A*16^1) + (F*16^0) = (1*256) + (10*16) + (15*1)$$

$$= 256 + 160 + 15 = (431)_{10}$$

سیستم اعداد شانزده تایی (هگزادسیمال)

Hexadecimal	Decimal	Binary
A	10	1010
В	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

سيستم اعداد

در سیستمهای عدد معمولی، موقعیت مکانی هر رقم دارای ارزش معینی است. در چنین سیستمهایی می توان هر عدد را به صورت زیر نمایش داد:

$$N = (a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m})_B$$

$$N = a_{n-1}B^{n-1} + \dots + a_0B^0 + a_{-1}B^{-1} + a_{-2}B^{-2} + \dots + a_{-m}B^{-m}$$

$$N = \sum_{k=-m}^{n-1} a_k B^k$$

در نمایش فوق داریم:

m: تعداد ارقام اعشاری

ضرایب: a_0, a_1, a_2, \dots

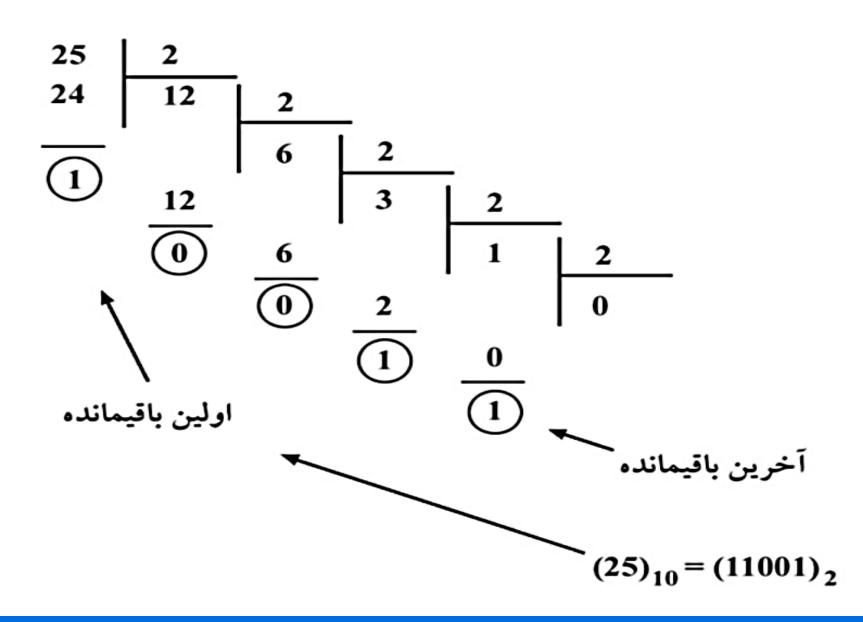
$$0 \le a_k \le B-1$$
 مبنای سیستم است و B

n : تعداد ارقام صحيح

کمترین مقداری که B می تواند اختیار کند، برابر ۲ است.

• مبنای ۱۰ به ۲

$$(25)_{10} = (?)_2$$



• مبنای ۱۰ به ۸

$$(952)_{10} = (?)_{8}$$

• مبنای ۶ به ۴

$$(545)_6 = (?)_4$$

1.
$$4 \times 6 \times 10$$
 6×10
 6×10

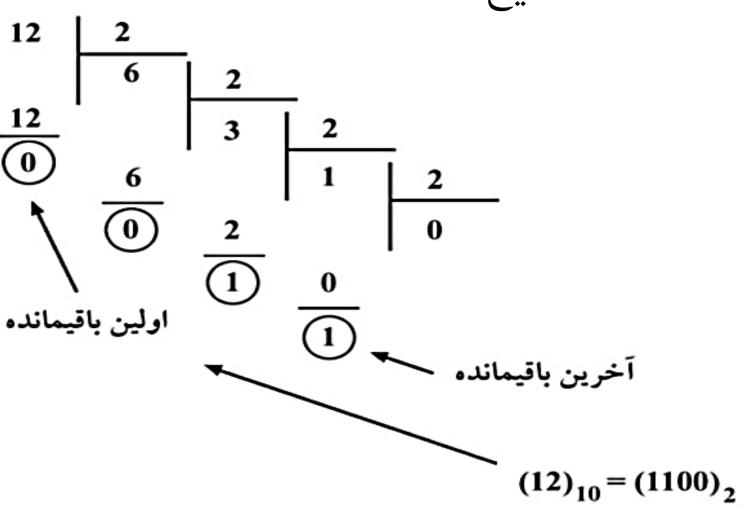
*
$$4 \times 100$$
 $\times 100$ $\times 100$

• مبنای ۱۰ به ۲ اعداد اعشاری

$$(12.25)_{10} = (?)_2$$

جواب

مرحله اول بدست آوردن مبنا ۲ قسمت صحیح عدد



مرحله دوم بدست آوردن مبنا ۲ قسمت اعشار عدد: با استفاده از ضربهای متوالی قمست اعشار عدد را به عدد صحیح تبدیل می کنیم

1)
$$0.25 * 2 = 0.50 \rightarrow 0.50 * 2 = 1.00 \rightarrow (0.01)_2$$

با جمع دو مقادیر بدست آمده از دو مرحله انجام شده، مبنای ۲ عدد ۱۲.۲۵ برابر با ۱۱۰۰.۰۱ میشود.

2)
$$0.75 * 2 = 1.50 \rightarrow 0.50 * 2 = 1.00 \rightarrow (0.11)_2$$

3)
$$0.3 * 2 = 0.60 \rightarrow 0.60 * 2 = 1.20 \rightarrow 0.2 * 2 = 0.4 \rightarrow 0.4 * 2 = 0.8 \rightarrow 0.8 * 2 = 1.6$$

$$\rightarrow 0.6 * 2 = 1.2 \dots \rightarrow (0.0\overline{1001})_2$$

نکته: اگر با ضربهای متوالی، قسمت اعشار به صفر نرسد، باید عمل ضرب را تا پر شدن کلمهی حافظه ادامه داد. **اگر عدد**

اعشار دارای تناوب شد از یک خط تیره بالای عدد برای نشان دادن تناوب استفاده می کنیم.

برای تبدیل اعداد اعشاری مبنای ۲ به مبنای ۱۰ از بسط عدد استفاده می کنیم.

• مبنای ۲ به ۸

$$(11001)_2 = (?)_8$$

جواب:

$$001 \\ 001)_2 = (31)_8$$

$$1$$

$$3$$

$$(10011.1101)_2 = (?)_8$$

جواب:

صفر اضافه شده
$$(010 \ 011. \ 110 \ 100)_2 = (23.64)_8$$

صفرای اضافه شده به قسمت اعشار

مبنای ۸ به ۲

$$(25.34)_8 = (?)_2$$

جواب

$$(25.34)_8 = (010101.011100)_2 = (10101.0111)_2$$

• مبنای ۲ به ۱۶

$$(01111101.0110)_2 = (?)_{16} \xrightarrow{\text{coly}} (01111101.0110)_2 = (7D.6)_{16}$$

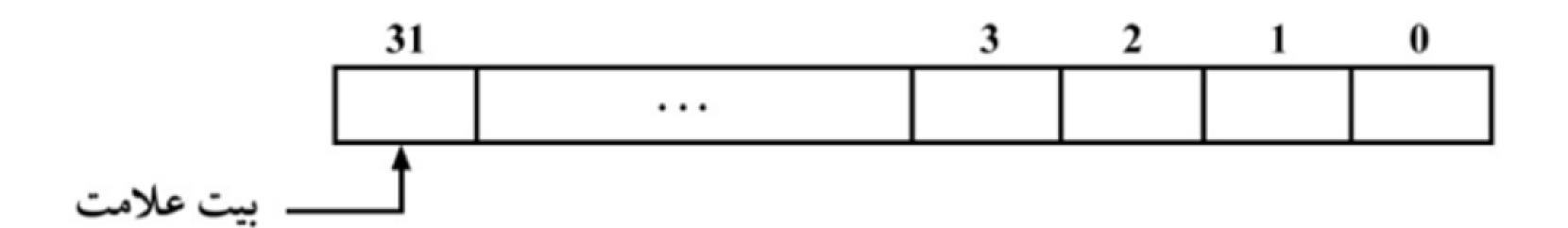
مبنای ۱۶ به ۲

$$(F25.03)_{16} = (?)_2$$
 \xrightarrow{eqly} $(F25.03)_{16} = (111100100101.00000011)_2$

انجام چند عمل جمع در مبنای و ۱۶

$$1001111+\\111010\\\hline1100001$$

نگهداری اعداد علامتدار در کامپیوتر



نمایش عدد صحیح

نگهداری اعداد صحیح منفی

برای نمایش اعداد صحیح منفی می توان به سه روش عمل کرد:

- 1. روش علامت و مقدار
 - ۲. روش متمم ۱
 - ۳. روش متمم ۲

در این روش، اعداد منفی مانند اعداد مثبت ذخیره میشوند؛ با این تفاوت که در بیت علامت مقدار یک قرار می گیرد. در زیر مثالی از نمایش عدد ۲۱- به طول کلمات ده بیت آمده است:

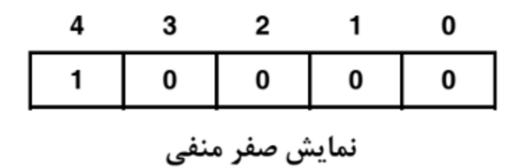
9										_
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	

روش علامت مقدار

این روش دارای دو اشکال عمده است:

1. برای صفر منفی و صفر مثبت دو نمایش جداگانه وجود دارد.





۲. برای عمل تفریق باید مدار جداگانهای طراحی شود.

نکته: اگر طول هر کلمه ماشین M فرض شود، بزرگترین و کوچکترین اعداد قابل نمایش به روش علامت و مقدار به صورت زیر است:

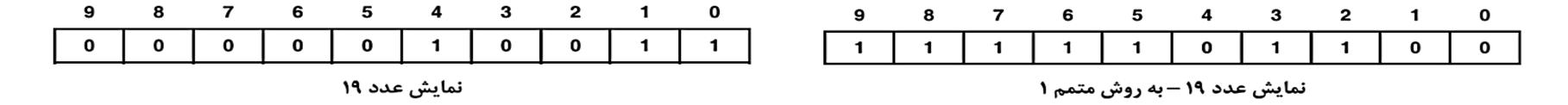
بزرگترین:
$$2^{M-1}-1$$
 کوچکترین: $-(2^{M-1}-1)$

پس بازه اعداد قابل نمایش را می توان $[-(2^{M-1}-1),2^{M-1}-1]$ در نظر گرفت

روش متمم ١

برای نمایش اعداد منفی به روش متمم ۱، عدد را به مبنای ۲ تبدیل کرده، نمایش مثبت عدد را مشخص می کنیم و در نمایش حاصل، تمام ۰ ها را ۱ و تمام ۱ ها را به ۰ تبدیل می کنیم و یا به عبارت دیگر تمام ارقام را از ۱ کم می کنیم (۲ مبنای عدد است). به عنوان مثال نمایش عدد ۱۹- بصورت زیر است:

$$-19 = (-10011)_2$$



در این حالت نیز برای نمایش صفر مثبت و صفر منفی دو نمایش مختلف وجود دارد ولی برای انجام عمل تفریق نیاز به مدار جداگانهای نیست، یعنی روش متمم ۱، اشکال دوم روش علامت و مقدار را برطرف می کند

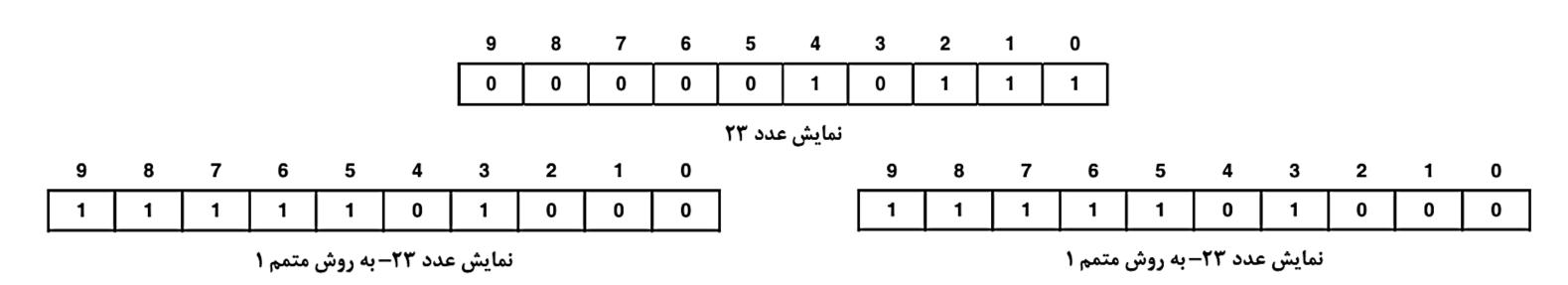
پس بازه اعداد قابل نمایش را می توان $[-(2^{M-1}-1),2^{M-1}-1]$ در نظر گرفت



این روش، هر دو اشکال روش علامت و مقدار را حل می کند. در این روش باید به صورت عمل کرد:

- ١. نمايش مثبت عدد
- ۲. پیدا کردن متمم ۱ عدد
- ۳. افزودن یک واحد به عدد حاصل

$$-23 = (-10111)_2$$
 به عنوان مثل نمایش اعداد ۲۳ در ماشینی به طول کلمات ده بیت بدین صورت است:



نکته: بازه اعداد قابل نمایش را می توان $[-2^{M-1},(2^{M-1}-1)]$ در نظر گرفت

جمع و تفریق در مکمل ۲

$$5 + (-3) = 2$$
 0000 0101 = +5 7 - 12 = (-5) 0000 0111 = +7
+ 1111 1101 = -3 $\frac{+ 1111 \ 0100}{0000 \ 0010} = -12$
1111 1011 = -5

اشباع (overflow)

اگر جمع دو عدد مثبت (منفی) یک عدد منفی (مثبت) شود **اشباع** رخ داده است. همچنین جمع یک عدد مثبت و منفی هیچگاه **اشباع** ندارد.

•
$$127 + 1 = 128$$
:

1 1 1 1 1 1 1 1

0 1 1 1 1 1 1 1

+ 0 0 0 0 0 0 0 1

1 0 0 0 0 0 0 0

Overflow, no carryout. Sum is not correct.

نمایش اعداد: فرمت 1EEE 754

single: 8 bits single: 23 bits double: 11 bits double: 52 bits

S Exponent Fraction

 $X = (-1)^{s} \times (1 + Fraction) \times 2^{(Exponent-Bias)}$

Single: Bias = 127; Double: Bias = 1023

FLOATING POINT FORMAT IEEE-754, 32 BITS

MSB LSB 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 **MANTISSA EXPONENT** 8 BITS **23 BITS SIGN BIT EXAMPLE: -248.75** 1= NEGATIVE **HEXADECIMAL: C3 78 C0 00**



0=POSITIVE

Exponent

Fraction

 $X = (-1)^{s} \times (1 + Fraction) \times 2^{(Exponent-Bias)}$

نمایش اعداد: فرمت 1EEE 754

• مثال: نمایش عدد با شش رقم اعشار

$$(45.45)_{10} = (?)_2$$

$$(45)_{10} = (101101)_2$$

$$(0.45)_{10} = (011100)_2$$

$$(45.45)_{10} = (101101.011100)_2$$

0.45 * 2	0	0.9
0.90 * 2	1	0.8
0.80 * 2	1	0.6
0.60 * 2	1	0.2
0.20 * 2	0	0.4
0.40 * 2	0	0.8

single: 23 bits double: 52 bits

نمایش ممیز شناور ۳۲ بیتی به فرمت IEEE

S Exponent

Fraction

$$X = (-1)^{S} \times (1 + Fraction) \times 2^{(Exponent-Bias)}$$

$$(45.45)_{10} = (101101.011100)_2$$

مرحله ۱: عدد را نرمال می کنیم.

مرحله ۲: نما و مانتیس را بدست می آوریم

مرحله ۳: نمای بایاس شده را با اضافه کردن ۱۲۷ پیدا می کنیم

مرحله ۴: بیت علامت را در صورت مثبت بودن ۰ و در غیر این صورت ۱ قرار می دهیم.

single: 23 bits

double: 52 bits

S Exponent

Fraction

نمایش ممیز شناور ۳۲ بیتی به فرمت IEEE

• مثال

$$X = (-1)^{s} \times (1 + Fraction) \times 2^{(Exponent-Bias)}$$

$$(45.45)_{10} = (101101.011100)_2$$

$$(101101.011100)_2 = 1.011010111100 * 2^5$$

- \rightarrow bias exponent = 5+127 = 132
- $\rightarrow mantissa = 01101011100$

0	10000100	0100101110000000000000	4225C000
Sign Bit	Biased Exponent	Trialing Significand bit or Mantissa	
1-bit	8-bit	23-bit	

• تبدیل ۱۰٬۸۱۲۵ به باینری بصورت single و double

Single

Precision

Double

Precision

0.8125 * 2	1 .625
0.625 * 2	1.25
0.25 * 2	0.5
0.5 * 2	1.0

$$0.825 = (0.1101)_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{13}{16}$$

Fraction =
$$(0.1101)_2 = (0.1101)_2 * 2^{(-1)}$$
 (Normalized)

Exponent = (-1) + Bias = 126 (single precision) and 1022 (double)

1	(0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	(0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C) (0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

• نمایش زیر بصورت Single Precision است، این عدد در مبنای ۱۰ (decimal) چقدر است؟

101111100010000000000000000000000

جواب:

Sign = 1 is negative

 $Exponent = (011111100)_2 = 124, E - bias = 124 - 127 = -3$

Significand = $(1.0100 ... 0)_2 = 1 + 2^2 = 1.25$ (1. is implicit)

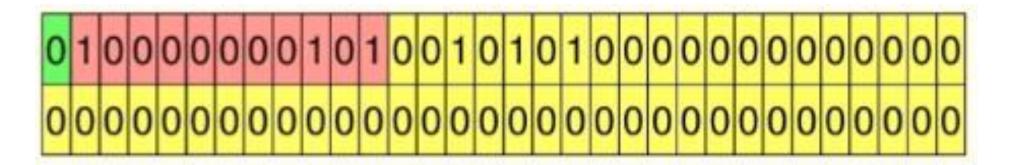
Value in decimal = $-1.25 * 2^{-3} = -0.15625$

• این عدد در مبنای ۱۰ (decimal) چقدر است؟

0100001001001100000000000000000

```
Value in decimal = +(1.01001100 ... 0)_2 * 2^{130-127} = (1.01001100 ... 0)_2 * 2^3
= (1010.01100 ... 0)_2 = 10.375
```

• نمایش زیر بصورت Double Precision است، این عدد در مبنای ۱۰ (decimal) چقدر است؟



```
Value of exponent = +(10000000101)_2 - Bias = 1029 - 1023 = 6

Value of double flote = +(1.0010101 ... 0)_2 * 2^6 (1. is implicit)

= (1001010.10 ... 0)_2 = 74.5
```

• این عدد در مبنای ۱۰ (decimal) چقدر است؟ (سوال کلاسی)

1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

 $-1.5 * 2^{-7} = -0.01171875$

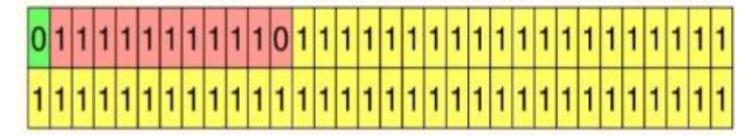
- صفر
- و کسر E=0 و کسر Θ
- \circ +0 و 0- طبق بیت علامت S امکان پذیر است.
 - بىنھايت
- داده می شود. F=0 بینهایت یک مقدار ویژه است که با حداکثر E و E نمایش داده می شود.
- o برای Single Precision با توان ۸ بیتی حداکثر E برابر با ۲۵۵ و برای Double Precision برابر ۲۰۴۷ است.
- می نهایت می تواند از S overflow یا تقسیم بر صفر حاصل شود. همچنین $+\infty$ و $+\infty$ طبق بیت علامت $+\infty$ امکان پذیر است.
 - NaN (عدد نیست)
 - یک مقدار ویژه است که با حداکثر $E \neq 0$ و $F \neq 0$ نمایش داده می شود.
- o از موقعیتهایی استثنایی، مانند 0/0 یا sqrt (منفی) بدست می آید. همچنین هر عملیاتی بر روی NaN برابر با Nan است

• بزرگترین عدد اعشاری نرمال شده چیست؟

: Single Precision جواب برای

 $Signifcand = +(1.111 ... 1)_2 = almost 2$; $Value in decimal \approx 2 * 2^{127} \approx 2^{128} \approx 3.4028 ... * 10^{38}$

: Double Precision جواب برای



Value in decimal $\approx 2 * 2^{1023} \approx 2^{1024} \approx 1.79769 ... * 10^{308}$

Overflow: توان، برای قرار گرفتن در فیلد توان بسیار بزرگ است.

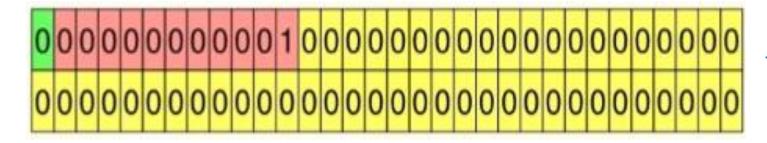
• کوچکترین عدد اعشاری نرمال شده (بصورت قدرمطلق) چیست؟

: Single Precision جواب برای

Exponent - **bias** = 1 - 127 = -126 (smallest exponent for SP)

$$Signifcand = +(1.000 ... 0)_2 = 1$$
; $Value in decimal \approx 1 * 2^{-126} \approx 1.17549 ... * 10^{-38}$

: Double Precision جواب برای



Value in decimal $\approx 1 * 2^{-1022} \approx 2.22507 ... * 10^{-308}$

Underflow: توان، برای قرار گرفتن در فیلد توان بسیار کوچک است.