



مبانی برنامه نویسی

نمایش اعداد در کامپیوتر

Dr. Mehran Safayani

safayani@iut.ac.ir

safayani.iut.ac.ir



<https://www.aparat.com/mehran.safayani>



https://github.com/safayani/Programming_Basics_course



$$2586_{10} = (2 * 10^3) + (5 * 10^2) + (8 * 10^1) + (6 * 10^0)$$

سیستم اعداد دهدهی یکی از سیستم‌های اعداد متداول است که همگان روزانه با آن سروکار دارند. در این سیستم هر عدد می‌تواند ترکیبی از ارقام ۰ تا ۹ باشد. هر عدد در سیستم دهدهی را بنابر آنچه قبلاً نشان داده شد می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$A = a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m} = \sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot (10)^k$$

• مثال

$$123.45 = (1 * 10^2) + (2 * 10^1) + (3 * 10^0) + (4 * 10^{-1}) + (5 * 10^{-2})$$

در این سیستم، مبنای اعداد، ۲ است. لذا هر عدد در این سیستم می‌تواند ترکیبی از ارقام ۰ و ۱ باشد. مانند ۱۱۱، ۱۰۱۱ و ۱۰۰۰۱۱۱.

شکل کلی اعداد این سیستم به صورت زیر می‌باشد.

$$\sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot (2)^k$$

مثال‌هایی از تبدیل اعداد دودویی به دهدهی

$$(11001)_2 = (1 * 2^4) + (1 * 2^3) + (0 * 2^2) + (0 * 2^1) + (1 * 2^0) \\ = 16 + 8 + 0 + 0 + 1 = (25)_{10}$$

$$(1110.01)_2 = (1110.0)_2 + (0.01)_2$$

$$(1110.0)_2 = (1 * 2^3) + (1 * 2^2) + (1 * 2^1) + (0 * 2^0) = 8 + 4 + 2 + 0 = (14)_{10}$$

$$(0.01)_2 = (0 * 2^{-1}) + (1 * 2^{-2}) = 0 + \frac{1}{4} = (0.25)_{10}$$

سیستم اعداد هشتایی (octal)

در این سیستم، مبنای اعداد، ۸ است. لذا هر عدد در این سیستم می‌تواند ترکیبی از ارقام ۰ تا ۷ باشد. نمایش عدد در این سیستم به این صورت است.

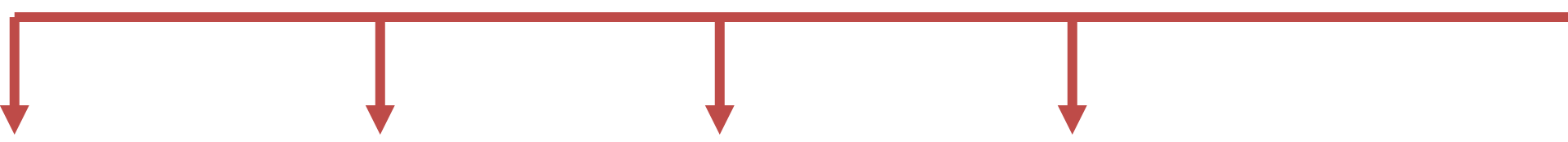
$$\sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot (8)^k$$

• مثال

$$\begin{aligned}(2057)_8 &= (2 * 8^3) + (0 * 8^3) + (5 * 8^1) + (7 * 8^0) \\ &= 1024 + 0 + 40 + 7 = (1071)_{10}\end{aligned}$$

• مثال

$$(4706)_8 = (?)_{10}$$


$$(4706)_8 = (4 * 8^3) + (7 * 8^2) + (0 * 8^1) + (6 * 8^0)$$

Common
values
multiplied
by the
corresponding
digits

$$= (4 * 512) + (7 * 64) + (0) + (6 * 1)$$

$$= 2048 + 448 + 0 + 6$$

Sum of these products ←

$$= (2502)_{10}$$

سیستم اعداد شانزده ۲ تایی (هگزادسیمال)

در این سیستم، مبنای اعداد، ۱۶ است. لذا می توان از ۱۶ رقم در نوشتن اعداد این سیستم استفاده کرد. چون اعداد ۹ به بالا را به عنوان یک رقم نمی شناسیم، برای نمایش ۱۰ تا ۱۵ از علائم A تا F استفاده می کنیم. لذا ارقام مبنای ۱۶ شامل ۱ تا ۹ و حروف A تا F می شود. اعدادی مثل ACE، 1CD و B1A اعدادی در مبنای ۱۶ هستند. شکل کلی نمایش این اعداد به صورت

$$\sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot (16)^k$$

• مثال

$$\begin{aligned}(1AF)_{16} &= (1 * 16^2) + (A * 16^1) + (F * 16^0) = (1 * 256) + (10 * 16) + (15 * 1) \\ &= 256 + 160 + 15 = (431)_{10}\end{aligned}$$

در سیستم‌های عدد معمولی، موقعیت مکانی هر رقم دارای ارزش معینی است. در چنین سیستم‌هایی می‌توان هر عدد را به صورت زیر نمایش داد:

$$N = (a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m})_B$$

$$N = a_{n-1}B^{n-1} + \dots + a_0B^0 + a_{-1}B^{-1} + a_{-2}B^{-2} + \dots + a_{-m}B^{-m}$$

$$N = \sum_{k=-m}^{n-1} a_k B^k$$

در نمایش فوق داریم:

B : مبنای سیستم است و $0 \leq a_k \leq B - 1$

n : تعداد ارقام صحیح

کمترین مقداری که **B** می‌تواند اختیار کند، برابر ۲ است.

m : تعداد ارقام اعشاری

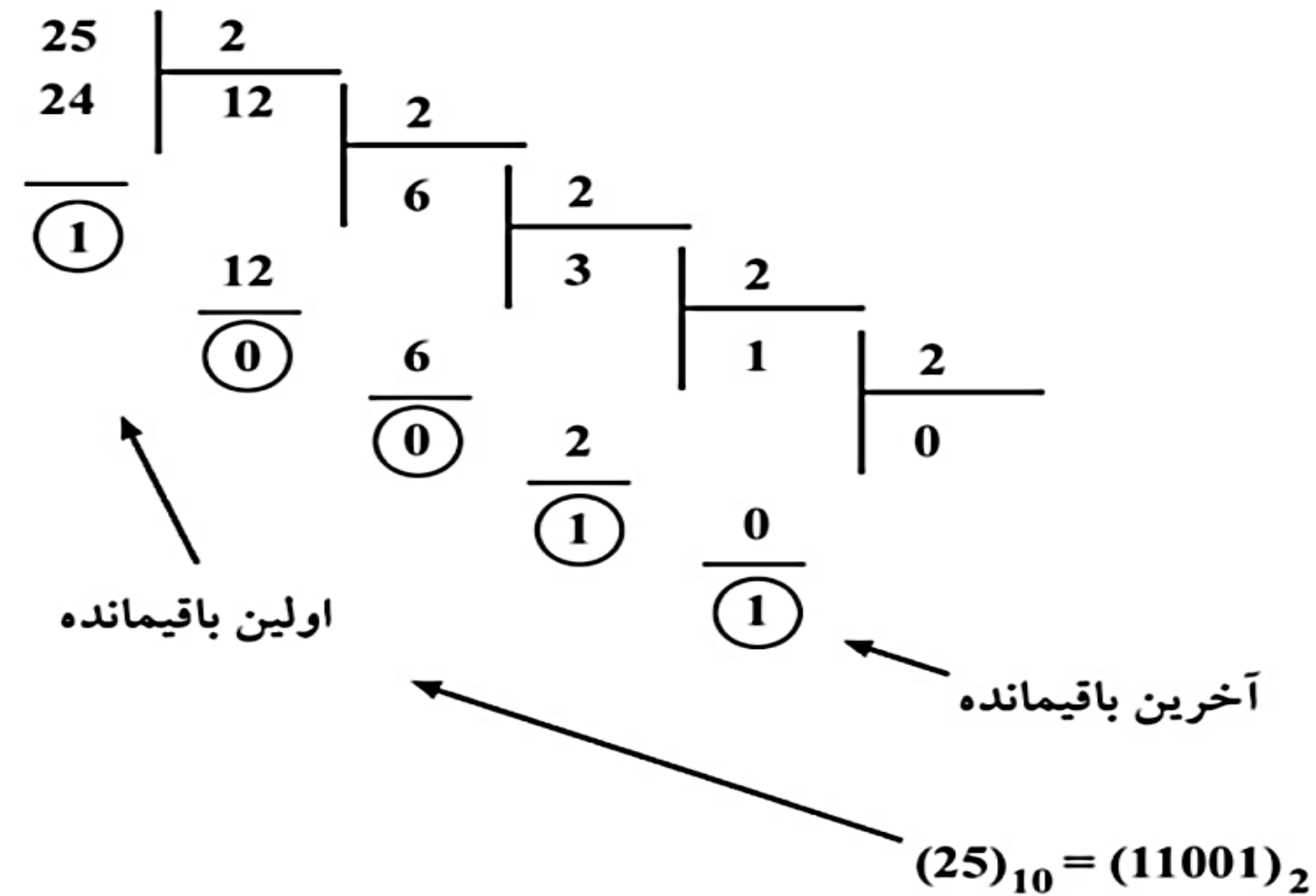
a_0, a_1, a_2, \dots : ضرایب

مثال‌هایی از سیستم اعداد

• مبنای ۱۰ به ۲

$$(25)_{10} = (?)_2$$

جواب:



مثال‌هایی از سیستم اعداد

- مبنای ۱۰ به ۸

$$(952)_{10} = (?)_8$$

جواب:

8	952	باقی مانده
	119	0
	14	7
	1	6
	0	1



$$(952)_{10} = (1670)_8$$

مثال‌هایی از سیستم اعداد

• مبنای ۶ به ۴

$$(545)_6 = (?)_4$$

جواب:

مرحله اول تبدیل از مبنای ۶ به ۱۰

$$\begin{aligned}(545)_6 &= (5 * 6^2) + (4 * 6^1) + (5 * 6^0) \\ &= (5 * 36) + (4 * 6) + (5 * 1) \\ &= 180 + 24 + 5 \\ &= (209)_{10}\end{aligned}$$

مرحله دوم تبدیل از مبنای ۱۰ به ۴

4	209	باقی مانده
	52	1
	13	0
	3	1
	0	3

→ $(209)_{10} = (3101)_4$

↓
 $(545)_6 = (3101)_4$

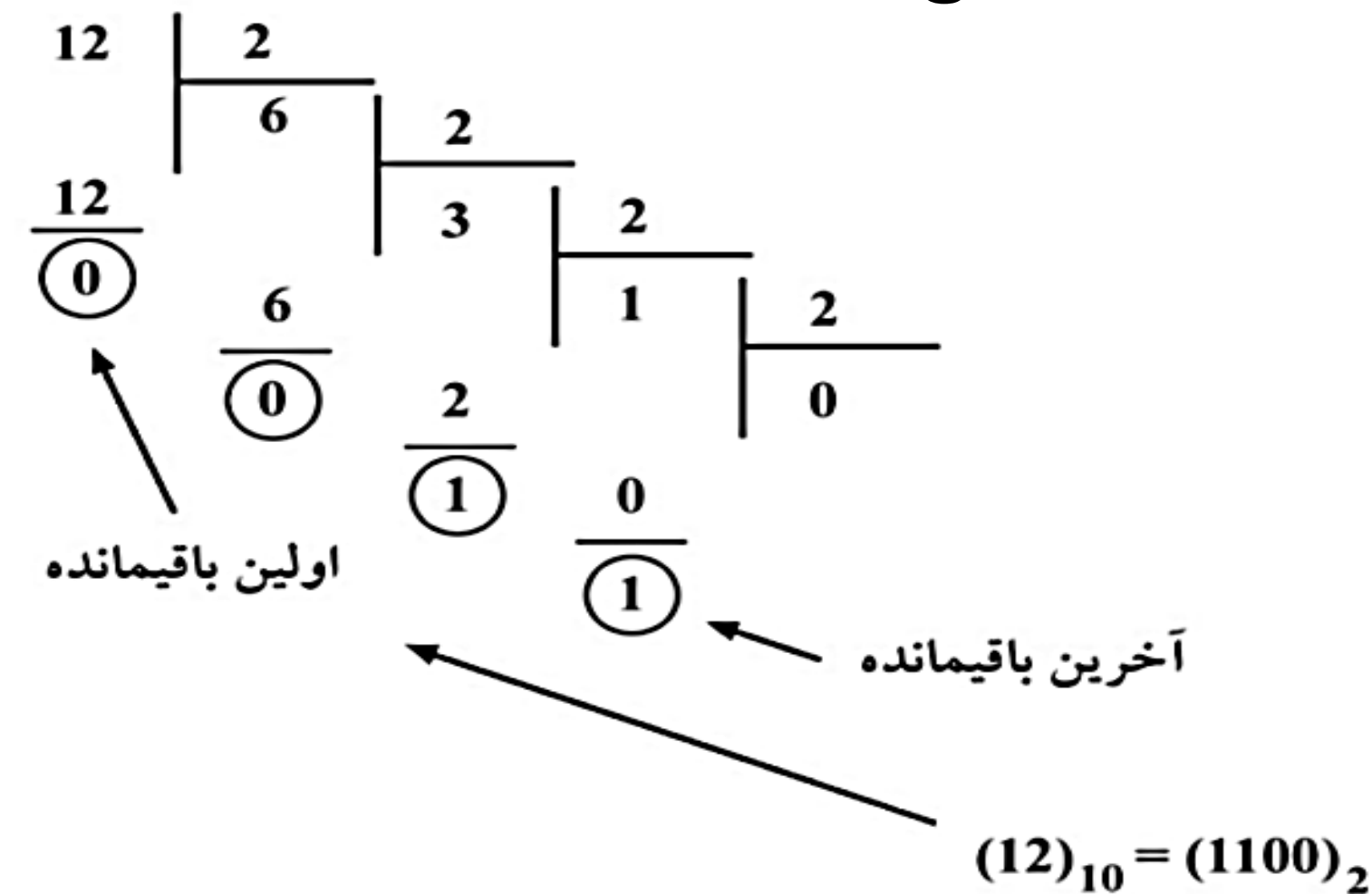
مثال‌هایی از سیستم اعداد

- مبنای ۱۰ به ۲ اعداد اعشاری

$$(12.25)_{10} = (?)_2$$

جواب:

مرحله اول بدست آوردن مبنا ۲ قسمت صحیح عدد



مثال‌هایی از سیستم اعداد

مرحله دوم بدست آوردن مبنا ۲ قسمت اعشار عدد

با استفاده از ضرب‌های متوالی قسمت اعشار عدد را به عدد صحیح تبدیل می‌کنیم

$$1) 0.25 * 2 = 0.50 \rightarrow 2) 0.50 * 2 = 1.00$$

حال عدد ۱۰ را به توان تعداد ضرب متوالی رسانده و عدد بدست آمده از حاصل ضرب‌ها را، بر آن تقسیم می‌کنیم تا به مبنای ۲ برود:

$$10^2 = 100 \rightarrow \frac{1.00}{100} = (0.01)_2$$

با جمع دو مقادیر بدست آمده از دو مرحله انجام شده، مبنای ۲ عدد ۱۲.۲۵ برابر با ۱۱۰۰.۰۱ می‌شود.

نکته: اگر با ضرب‌های متوالی، قسمت اعشار به صفر نرسد، باید عمل ضرب را تا پر شدن کلمه‌ی حافظه ادامه داد. برای تبدیل اعداد اعشاری مبنای ۲ به مبنای ۱۰ از بسط عدد استفاده می‌کنیم.

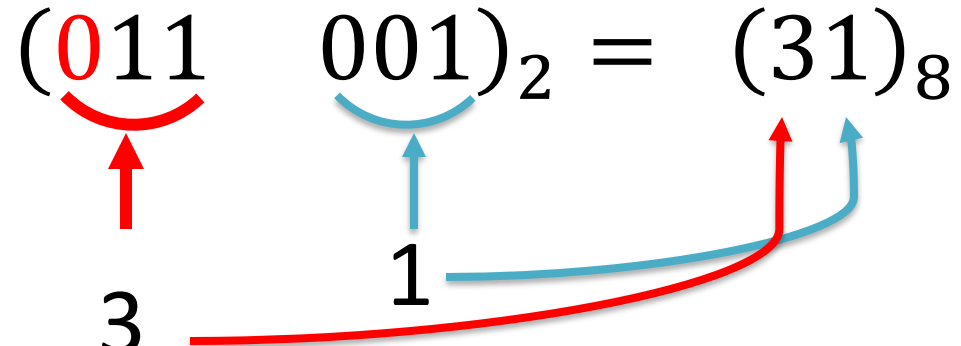
مثال‌هایی از سیستم اعداد

• مبنای ۲ به ۸

$$(11001)_2 = (?)_8$$

جواب:

صفر اضافه شده

$$\rightarrow (011 \ 001)_2 = (31)_8$$


$$(10011.1101)_2 = (?)_8$$

جواب:

صفر اضافه شده

$$\rightarrow (010 \ 011. \ 110 \ 100)_2 = (23.64)_8$$


صفرای اضافه شده به قسمت اعشار

مثال‌هایی از سیستم اعداد

- مبنای ۸ به ۲

$$(25.34)_8 = (?)_2$$

جواب:

$$(25.34)_8 = (010101.011100)_2 = (10101.0111)_2$$

- مبنای ۲ به ۱۶

$$(01111101.0110)_2 = (?)_{16} \xrightarrow{\text{جواب}} (01111101.0110)_2 = (7D.6)_{16}$$

- مبنای ۱۶ به ۲

$$(F25.03)_{16} = (?)_2 \xrightarrow{\text{جواب}} (F25.03)_{16} = (111100100101.00000011)_2$$

$$\begin{array}{r} 100111+ \\ 111010 \\ \hline 1100001 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1111011+ \\ 1010000 \\ \hline 11001011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11111+ \\ 11110 \\ \hline 111101 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1A53+ \\ 371 \\ \hline 1DC4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} AB E12+ \\ 354 \\ \hline AC166 \end{array}$$

نگهداری اعداد علامت‌دار در کامپیوتر



برای نمایش اعداد صحیح منفی می‌توان به سه روش عمل کرد:

۱. روش علامت و مقدار

۲. روش متمم ۱

۳. روش متمم ۲

در این روش، اعداد منفی مانند اعداد مثبت ذخیره می‌شوند؛ با این تفاوت که در بیت علامت مقدار یک قرار می‌گیرد. در زیر مثالی از نمایش عدد ۲۱- به طول کلمات ده بیت آمده است:

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1

روش علامت مقدار

این روش دارای دو اشکال عمده است:

1. برای صفر منفی و صفر مثبت دو نمایش جداگانه وجود دارد.

4	3	2	1	0
0	0	0	0	0

نمایش صفر مثبت

4	3	2	1	0
1	0	0	0	0

نمایش صفر منفی

2. برای عمل تفریق باید مدار جداگانه‌ای طراحی شود.

نکته: اگر طول هر کلمه ماشین M فرض شود، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین اعداد قابل نمایش به روش علامت و مقدار به صورت زیر است:

$$\text{کوچک‌ترین: } -(2^{M-1} - 1) \quad \text{بزرگ‌ترین: } 2^{M-1} - 1$$

پس بازه اعداد قابل نمایش را می‌توان $[-(2^{M-1} - 1), 2^{M-1} - 1]$ در نظر گرفت

برای نمایش اعداد منفی به روش متمم ۱، عدد را به مبنای ۲ تبدیل کرده، نمایش مثبت عدد را مشخص می‌کنیم و در نمایش حاصل، تمام ۰ ها را ۱ و تمام ۱ ها را به ۰ تبدیل می‌کنیم و یا به عبارت دیگر تمام ارقام را از ۱ کم می‌کنیم (۲ مبنای عدد است). به عنوان مثال نمایش عدد ۱۹- بصورت زیر است:

$$-19 = (-10011)_2$$

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1

نمایش عدد ۱۹

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	1	1	1	1	0	1	1	0	0

نمایش عدد ۱۹- به روش متمم ۱

در این حالت نیز برای نمایش صفر مثبت و صفر منفی دو نمایش مختلف وجود دارد ولی برای انجام عمل تفریق نیاز به مدار جداگانه‌ای نیست، یعنی روش متمم ۱، اشکال دوم روش علامت و مقدار را برطرف می‌کند

این روش، هر دو اشکال روش علامت و مقدار را حل می‌کند. در این روش باید به صورت عمل کرد:

۱. نمایش مثبت عدد

۲. پیدا کردن متمم ۱ عدد

۳. افزودن یک واحد به عدد حاصل

به عنوان مثل نمایش اعداد -23 در ماشینی به طول کلمات ده بیت بدین صورت است: $-23 = (-10111)_2$

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	0	1	0	1	1	1

نمایش عدد ۲۳

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0	0

نمایش عدد -23 به روش متمم ۱

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
1	1	1	1	1	0	1	0	0	0

نمایش عدد -23 به روش متمم ۲

نکته: بازه اعداد قابل نمایش را می‌توان $[-2^{M-1}, -(2^{M-1} - 1)]$ در نظر گرفت

جمع و تفریق در مکمل ۲

$$\begin{array}{rcl} 5 + (-3) = 2 & 0000 \ 0101 = +5 & \\ + 1111 \ 1101 = -3 & & \\ \hline & 0000 \ 0010 = +2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 7 - 12 = (-5) & 0000 \ 0111 = +7 & \\ + 1111 \ 0100 = -12 & & \\ \hline & 1111 \ 1011 = -5 & \end{array}$$

اگر جمع دو عدد مثبت (منفی) یک عدد منفی (مثبت) شود اشباع رخ داده است. همچنین جمع یک عدد مثبت و منفی هیچ گاه اشباع ندارد.

• $-39 + 92 = 53$:

1	1	1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1
+	0	1	0	1	1	1	0	0
	0	0	1	1	0	1	0	1

Carryout without overflow. Sum is correct.

• $104 + 45 = 149$:

1	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
+	0	0	1	0	1	1	0
	1	0	0	1	0	1	0

Overflow, no carryout. Sum is not correct.

• $10 + -3 = 7$:

1	1	1	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0
+	1	1	1	1	1	1	0	1
	0	0	0	0	0	1	1	1

Carryout without overflow Sum is correct.

• $-19 + -7 = -26$:

1	1	1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	1	1	0	1	1
+	1	1	1	1	1	0	0	1
	1	1	1	0	0	1	1	0

Carryout without overflow. Sum is correct.

• $-75 + 59 = -16$:

1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1
+	0	0	1	1	1	0	1
	1	0	0	0	0	0	0

No overflow nor carryout.

• $127 + 1 = 128$:

1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
+	0	0	0	0	0	0	0	1
	1	0	0	0	0	0	0	0

Overflow, no carryout. Sum is not correct.

• $44 + 45 = 89$:

1	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	0	0
+	0	0	1	0	1	1	0
	0	1	0	1	1	0	1

No overflow nor carryout.

• $-103 + -69 = -172$:

1	1	1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1
+	1	0	1	1	1	0	1
	0	1	0	1	0	1	0

Overflow, with incidental carryout. Sum is not correct

• $-1 + 1 = 0$:

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
+	1	1	1	1	1	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Carryout without overflow. Sum is correct.

single: 8 bits
double: 11 bits

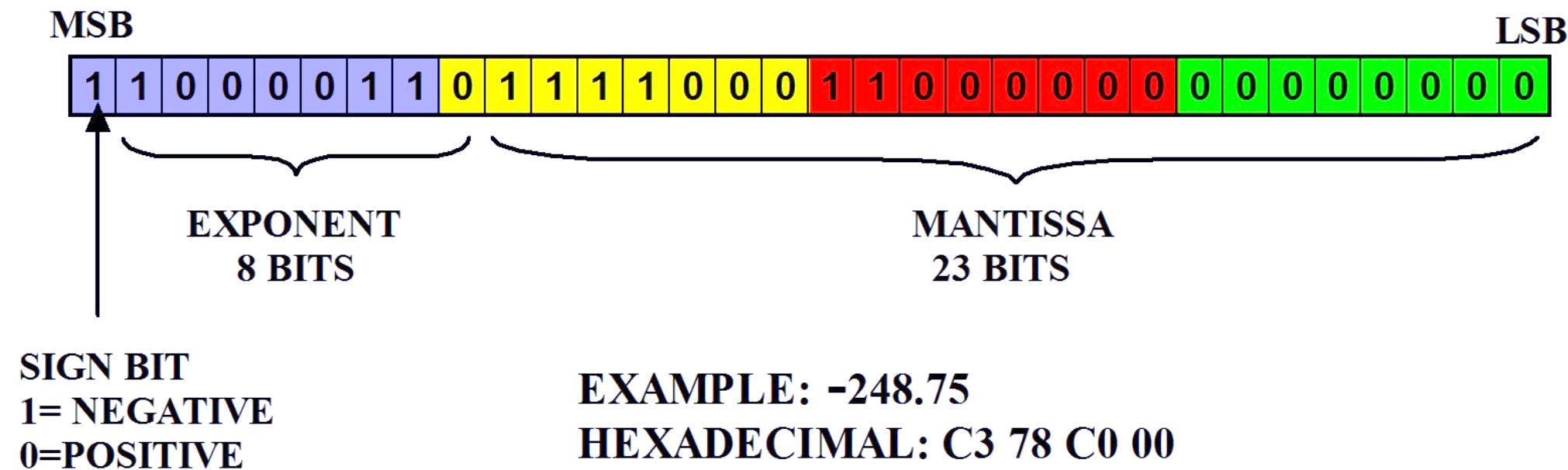
single: 23 bits
double: 52 bits



$$X = (-1)^S \times (1 + \text{Fraction}) \times 2^{(\text{Exponent} - \text{Bias})}$$

Single: Bias = 127; Double: Bias = 1023

FLOATING POINT FORMAT IEEE-754, 32 BITS



• مثال

$$(55.35)_{10} = (?)_2$$

جواب:

$$(55)_{10} = (110111)_2$$

$$(0.35)_{10} = (010110)_2$$

$$(45.45)_{10} = (110111.010110)_2$$

$0.35 * 2$	0	0.7
$0.70 * 2$	1	0.4
$0.40 * 2$	0.8	0.8
$0.80 * 2$	1	0.6
$0.60 * 2$	1	0.2
$0.20 * 2$	0	0.4

$$(45.45)_{10} = (101101.011100)_2$$

مرحله ۱: عدد را نرمال می‌کنیم.

مرحله ۲: توان و مانتیس را می‌گیریم.

مرحله ۳: توان بایاس را با اضافه کردن ۱۲۷ پیدا می‌کنیم و مانتیس را با اضافه کردن ۱ نرمال می‌کنیم.

مرحله ۴: بیت علامت را در صورت مثبت بودن ۰ و در غیر این صورت ۱ قرار می‌دهیم.

نکته: برای n بیت، بایاس توان برابر با $2^{n-1} - 1$ است.

نمایش ممیز شناور ۳۲ بیتی به فرمت IEEE

• مثال

$$(45.45)_{10} = (101101.011100)_2$$

$$(101101.011100)_2 = 1.01101011100 * 2^5$$

$$\rightarrow \text{bias exponent} = 5 + 127 = 132$$

$$\rightarrow \text{mantissa} = 01101011100$$

Sign Bit	Biased Exponent	Trialing Significand bit or Mantissa
----------	-----------------	--------------------------------------

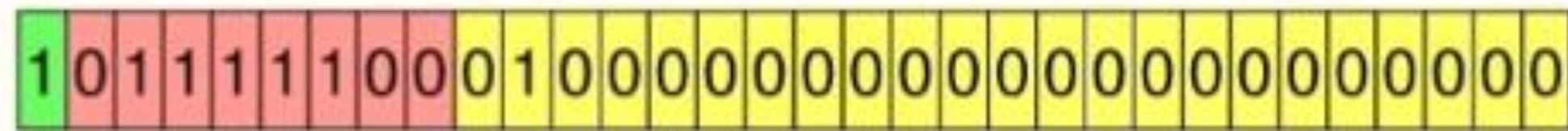
1-bit

8-bit

23-bit

نمایش ممیز شناور ۳۲ بیتی به فرمت IEEE

- نمایش زیر بصورت Single Precision است، این عدد در مبنای ۱۰ (decimal) چقدر است؟



جواب:

Sign = 1 is negative

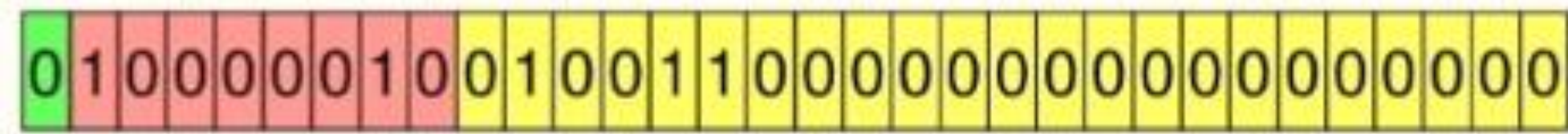
Exponent = $(01111100)_2 = 124$, *E - bias* = $124 - 127 = -3$

Significand = $(1.0100 \dots 0)_2 = 1 + 2^2 = 1.25$ (**1. is implicit**)

Value in decimal = $-1.25 * 2^{-3} = -0.15625$

نمایش ممیز شناور ۳۲ بیتی به فرمت IEEE

- این عدد در مبنای ۱۰ (decimal) چقدر است؟



جواب:

$$\begin{aligned} \text{Value in decimal} &= +(\overset{\text{implicit}}{1}.01001100 \dots 0)_2 * 2^{130-127} = (1.01001100 \dots 0)_2 * 2^3 \\ &= (1010.01100 \dots 0)_2 = -0.15625 \end{aligned}$$

نمایش ممیز شناور ۳۲ بیتی به فرمت IEEE

- این عدد در مبنای ۱۰ (decimal) چقدر است؟ (سوال کلاسی)

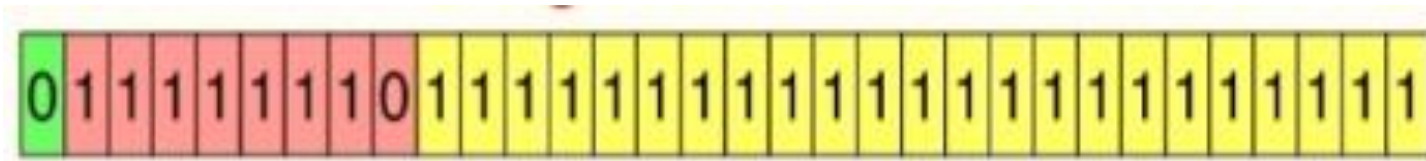
[illegible]

جواب: $-1.5 * 2^7 = -0.01171875$

نمایش ممیز شناور ۳۲ بیتی به فرمت IEEE

- بزرگترین عدد اعشاری نرمال شده چیست؟

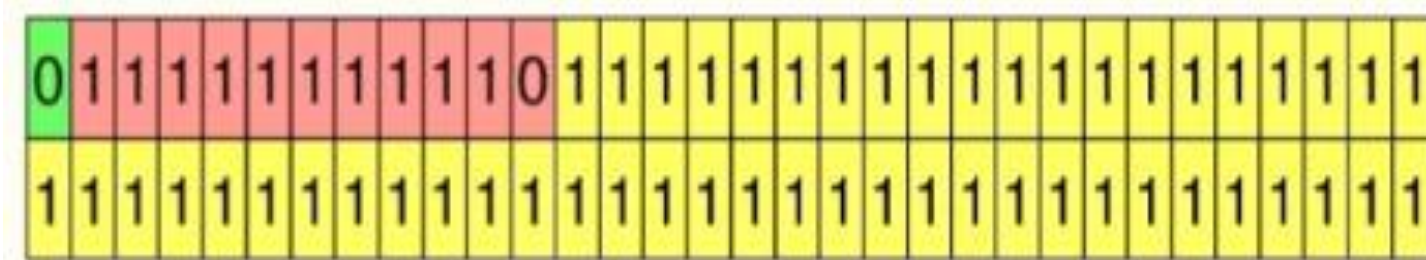
جواب برای Single Precision :



Exponent – **bias** = $254 - 127 = 127$ (*largest exponent for SP*)

Signifcand = $+(1.111 \dots 1)_2 = \text{almost } 2$; *Value in decimal* $\approx 2 * 2^{127} \approx 2^{128} \approx 3.4028 \dots * 10^{38}$

جواب برای Double Precision:



Value in decimal $\approx 2 * 2^{1023} \approx 2^{1024} \approx \mathbf{1.79769 \dots * 10^{308}}$

Overflow: توان، برای قرار گرفتن در فیلد توان بسیار بزرگ است.

نمایش ممیز شناور ۳۲ بیتی به فرمت IEEE

• صفر

- فیلد توان $E=0$ و کسر $F=0$
- $+0$ و -0 طبق بیت علامت S امکان پذیر است.

• بی‌نهایت

- بی‌نهایت یک مقدار ویژه است که با حداکثر E و $F=0$ نمایش داده می‌شود.
- برای Single Precision با توان ۸ بیتی حداکثر E برابر با ۲۵۵ و برای Double Precision برابر ۲۰۴۷ است.
- بی‌نهایت می‌تواند از overflow یا تقسیم بر صفر حاصل شود. همچنین $+\infty$ و $-\infty$ طبق بیت علامت S امکان پذیر است.

• NaN (عدد نیست)

- NaN یک مقدار ویژه است که با حداکثر E و $F \neq 0$ نمایش داده می‌شود.
- از موقعیت‌هایی استثنایی، مانند $0/0$ یا sqrt (منفی) بدست می‌آید. همچنین هر عملیاتی بر روی NaN برابر با Nan است