



Universidade de Lisboa
Instituto Superior Técnico
Mestrado Integrado em Engenharia Aeroespacial
4º Ano 1º Semestre - Ano Lectivo 2014/2015

Controlo por Computador

Primeiro Relatório do Projecto

Identificação e Controlo por Computador de uma Barra Flexível

Miguel Freitas da Silva Mendes, nº 72740
João Lucas dos Santos Munhão, nº 72842
João Paulo da Rocha Silva, nº 73411

Professor João Pedro Gomes

Lisboa, 6 de Novembro de 2014

Conteúdo

1	Objectivos	2
2	Introdução (P2)	2
3	Funcionamento do Motor e Calibração dos Sensores (P3)	4
3.1	Funcionamento do Motor	4
3.2	Calibração dos Sensores	4
4	Identificação do Modelo (P4)	10
4.1	Sinal de Excitação	10
4.2	Obtenção de Dados	11
4.3	Tratamento de dados	14
4.4	Modelos ARMAX obtidos	19
4.5	Validação	21
5	Análise do Modelo obtido	24
5.1	Modelo em Função de Transferência Discreta	24
5.2	Modelo em Espaço de Estados Discreto	24
5.3	Mapa dos Pólos e Zeros do Modelo	25
5.4	Análise da Resposta em Frequência	26
5.5	Análise da Resposta no Tempo	26
6	Conclusão	27
7	Bibliografia	27

1 Objectivos

Este projecto tem como objectivo desenvolver o controlo de um braço (barra) flexível, utilizando ferramentas de controlo por computador.

Este projecto, que serve de introdução à temática de controlo de sistemas reais, embora seja aparentemente simples, apresenta algum grau de complexidade devido à não-linearidade do braço a controlar.

Para atingir o objectivo final de controlar o braço, começou-se por efectuar uma abordagem experimental ao sistema, elaborando um modelo que o represente através de um processo de identificação deste.

Neste relatório, descrever-se-á este processo de identificação do modelo dinâmico da barra, bem como o processo de calibração dos sensores utilizados na medição da velocidade angular da barra, do ângulo do motor e do ângulo de deflexão da barra.

Numa segunda parte do projecto, efectuar-se-á o projecto de controlo da barra em si, utilizando técnicas de controlo por computador exploradas nas aulas teóricas da disciplina.

2 Introdução (P2)

O sistema a controlar é uma articulação de um braço flexível de um robot, e consiste num motor DC, alimentado por um amplificador de potência, cujo veio está ligado à extremidade de uma barra flexível.

O objectivo de controlar a posição angular da ponta do motor utilizando a tensão eléctrica fornecida a um motor DC não é trivial devido à complexidade da dinâmica do sistema.

A posição da ponta da barra não pode ser directamente relacionada com a tensão aplicada ao motor, já que a posição da ponta da barra depende do estado do sistema. Desta forma, o controlo em malha aberta está desde já excluído: não há uma correspondência proporcional entre a tensão fornecida ao motor e a posição angular da ponta da barra. Uma solução em malha fechada deverá ser utilizada para que assim se tenha em consideração o estado do sistema.

A própria dinâmica do sistema a controlar faz com que o controlo não seja trivial. Pode considerar-se o sistema a controlar como a sobreposição de três, o motor, a barra enquanto corpo rígido, e a barra enquanto corpo flexível. Com o que se sabe conceptualmente destes três corpos, é possível fazer uma análise qualitativa do tipo de dinâmica que esperamos encontrar no sistema.

• Motor

- Verificou-se, logo na primeira sessão laboratorial, que uma tensão constante no motor provoca uma rotação a velocidade angular constante do veio do motor. A transição de repouso para o movimento é bastante rápida, pelo que o motor tem dois pólos (um mecânico e outro eléctrico) bastante rápidos;
- Quando o veio do motor roda com velocidade constante, a posição angular do eixo varia linearmente com o tempo. Desta forma, se se considerar como variável de saída a posição angular da barra, o motor terá na sua dinâmica um integrador, o que, na dinâmica do sistema a controlar, se traduz num pólo na origem.

• Barra enquanto Corpo Rígido:

- Se a barra a controlar fosse um corpo cem por cento rígido, então o objectivo de controlo simplificar-se-ia pois desta forma a posição angular da ponta da barra seria simplesmente o integral da velocidade de rotação da barra, que por sua vez seria igual à da velocidade

de rotação do veio do motor, já que uma das extremidades da barra está ligada ao veio do motor. Assim, o sistema seria apenas um integrador e os dois pólos do motor anteriormente referidos. Um sistema assim poderia ser controlado com um esquema de controlo em servomecanismo usando um simples ganho.

- **Barra enquanto Corpo Flexível**

- Adicionando a flexibilidade da barra ao sistema, transitórios fortemente oscilatórios e pouco amortecidos aparecem no sistema. Por cada modo de oscilação da barra, um par de pólos complexos conjugados aparece no semi-plano complexo esquerdo. Os modos de oscilação da barra são, em teoria, infinitos. Contudo, neste caso, apenas os modos de frequências mais baixas são relevantes pois apenas estes são excitados pelos sinais de tensão eléctrica fornecidos ao motor.
- O problema destes modos oscilatórios é que são pouco amortecidos, pelo que torna-se necessário ao controlador aumentar o amortecimento do sistema, e daqui se conclui, novamente, que um simples ganho não permitiria controlar este sistema.
- Os efeitos oscilatórios da flexibilidade da barra são especialmente visíveis quando a barra muda de direcção de rotação, sendo perceptível (através do sinal do extensómetro) que há um efeito “chicotada” no ângulo da ponta da barra. Este efeito “chicotada” denota também um comportamento de fase não mínima do sistema.

3 Funcionamento do Motor e Calibração dos Sensores (P3)

3.1 Funcionamento do Motor

O motor utilizado nesta actividade é um motor DC alimentado por uma tensão eléctrica que, em regime estacionário, será proporcional à velocidade angular de rotação do seu veio. Daqui se entende que, para um sinal de entrada constante, a posição angular da barra não estabilize mas sim que a barra rode com velocidade angular constante.

3.2 Calibração dos Sensores

Para cumprir os objectivos deste projecto, estão disponíveis três sensores: um potenciómetro, um tacómetro e um extensómetro, que deitam sinais eléctricos proporcionais às grandezas que medem. Para se ter acesso às grandezas em si, tem de se começar por calibrar os sensores, obtendo os ganhos dos sensores.

Assim, construiu-se o seguinte modelo Simulink para a calibração dos sensores:

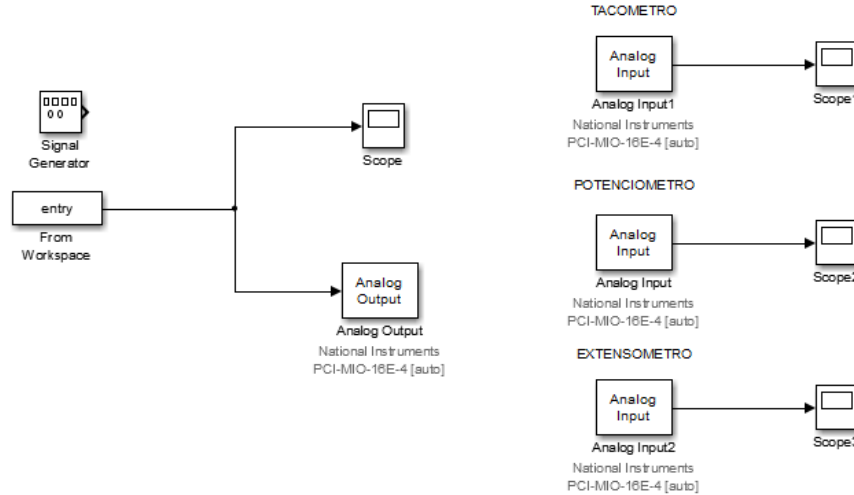


Figura 1: Diagrama de Simulink utilizado na calibração dos sensores e na identificação do modelo dinâmico da barra

A calibração de cada um dos sensores é descrita pormenorizadamente nas seguintes secções.

3.2.1 Calibração do Potenciómetro

O ângulo do veio do motor é medido com um potenciómetro de rotação cujo eixo está rigidamente ligado ao próprio motor. Assim, o ângulo do veio é dado por uma relação linear com o output do potenciómetro:

$$\theta = K_p \theta_e \quad (1)$$

Para obter o valor de \hat{K}_p adquiriu-se o valor da saída do potenciómetro para vários *steps* de tensão de input, obtendo-se assim gráficos da tensão em função do tempo, como o seguinte:

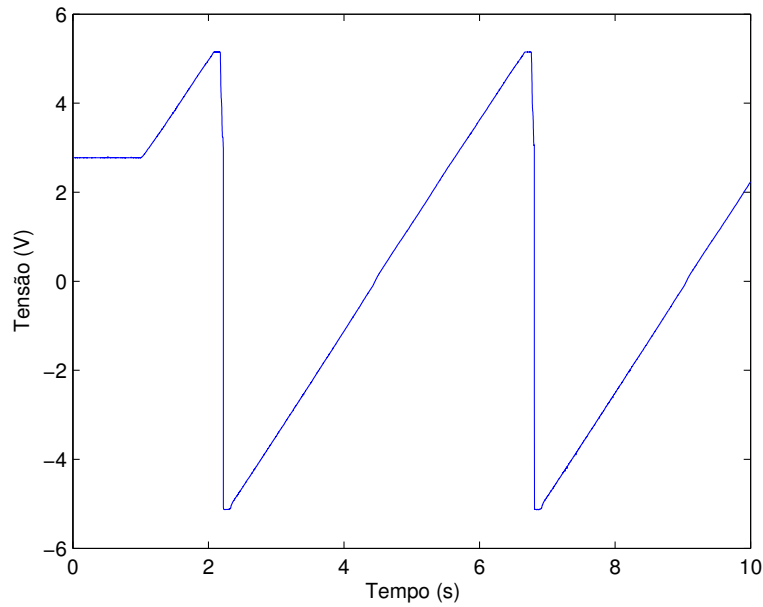


Figura 2: Tensão do potenciômetro em função do tempo.

O valor medido pelo potenciômetro é obtido a partir do deslizar de um cursor ligado ao eixo de rotação sobre um fio resistivo. A variação da resistência leva à variação da tensão entre -5 V e $+5\text{ V}$, por isso por cada volta completa a medição resulta no mesmo valor numérico.

Os dados obtidos com a variação da tensão de *Step* da entrada encontram-se na seguinte tabela:

Step (V)	$V_{max}(V)$	$V_{min}(V)$	$\Delta V(V)$	$K_p(^{\circ}/V)$	$\overline{K_p}(^{\circ}/V)$
1,0	5,1373	-5,1340	10,2713	35,0491	34,9401
1,5	5,1750	-5,1576	10,3326	34,8412	
2,0	5,1688	-5,1521	10,3209	34,8807	
2,5	5,1775	-5,1113	10,2888	34,9805	

Tabela 1: Tensões e cálculo de K_p e de $\overline{K_p}$.

Em que:

$$\Delta V = V_{max} - V_{min} \quad (2)$$

$$K_p = \frac{360}{\Delta V} \quad (3)$$

$$\hat{k}_p = \overline{K_p} = \sum_{i=1}^4 \frac{K_{p_i}}{4} \quad (4)$$

Assim e com os dados obtidos estimou-se \hat{K}_p de $34,9401\text{ }^{\circ}/V$.

3.2.2 Calibração do Tacómetro

O tacómetro é o sensor que permite determinar a velocidade angular do motor. O tacómetro debita uma tensão eléctrica que é proporcional à velocidade angular. Sabe-se que quando o sinal à entrada do motor é constante então este irá ter um movimento rotacional com velocidade constante, pelo que a relação de transformação será algo como:

$$\omega = K_t \cdot \omega_e + \varepsilon \quad [^\circ/s] \quad (5)$$

Em que ω é a velocidade angular, ω_e é a tensão do tacómetro e ε é um possível offset. O parâmetro K_t é o parâmetro que converte a tensão que o sensor debita para um valor físico de velocidade angular, tendo unidades de $[^\circ/(V \cdot s)]$.

Sendo assim, fazendo vários testes para vários sinais de entrada constantes (no nosso caso *steps*) pode calcular-se o valor de \hat{K}_t , que é o valor estimado para o parâmetro K_t .

A velocidade angular ω pode ser obtida com base nos valores lidos pelo potenciómetro retirando o declive da recta e passando esses valores para graus pois:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(K_p \cdot \theta_e)}{dt}$$

$$\omega = K_p \frac{d\theta_e}{dt}$$

Já a tensão do tacómetro facilmente se obtém calculando o valor médio dos valores lidos após a estabilização.

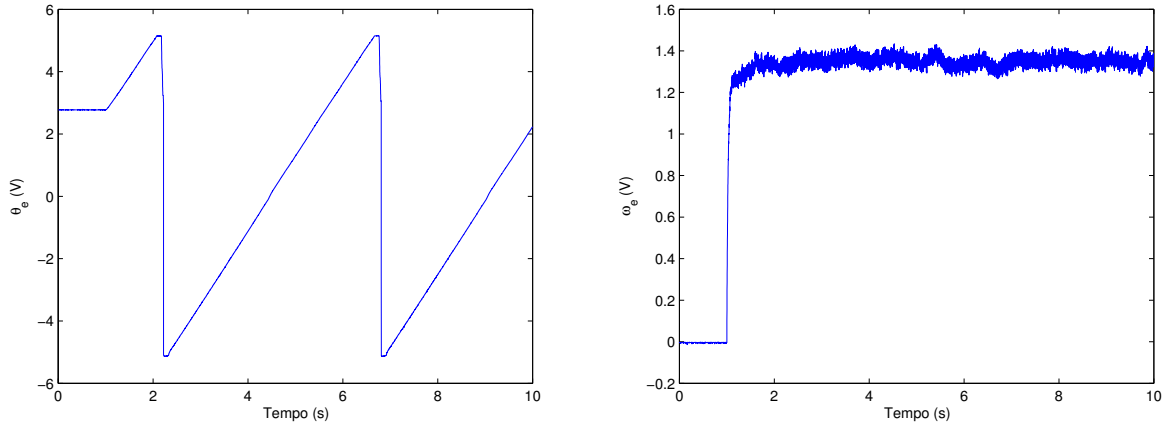


Figura 3: Evolução temporal de θ_e e ω_e para um *step* de 1V

Sendo assim e realizando 4 ensaios obtiveram-se os seguintes dados:

Step (V)	Potenciómetro			Tacómetro	
	Amostras	$\frac{d\theta_e}{dt}$ (V/s)	ω (°/s)	Amostras	ω_e (V/s)
1	2500-6000	2,3692	82,7801	2000-fim	1,3547
1.5	3500-5800	3,8020	132,8423	1500-fim	2,1774
2	1500-3200	5,2825	184,5711	1500-fim	3,0317
2.5	2100-3600	6,7703	236,5550	1500-fim	3,899

Tabela 2: Dados para determinação de \hat{K}_t

Dos dados conseguiu estimar-se os parâmetros, usando o método da regressão linear com mínimos quadrados:

$$\omega = 60.448 \cdot \omega_e + 1.073 \quad (6)$$

Logo obtém-se:

$$\hat{K}_t = 60.448 \quad [^\circ/(V \cdot s)]$$

$$\hat{\varepsilon} = 1.073 \quad [^\circ/s]$$

Estes valores foram obtidos para uma regressão com $R^2 = 0.9999$ pelo que com os dados obtidos confirma-se que a relação é linear. Os dados e a relação encontram-se na figura (4).

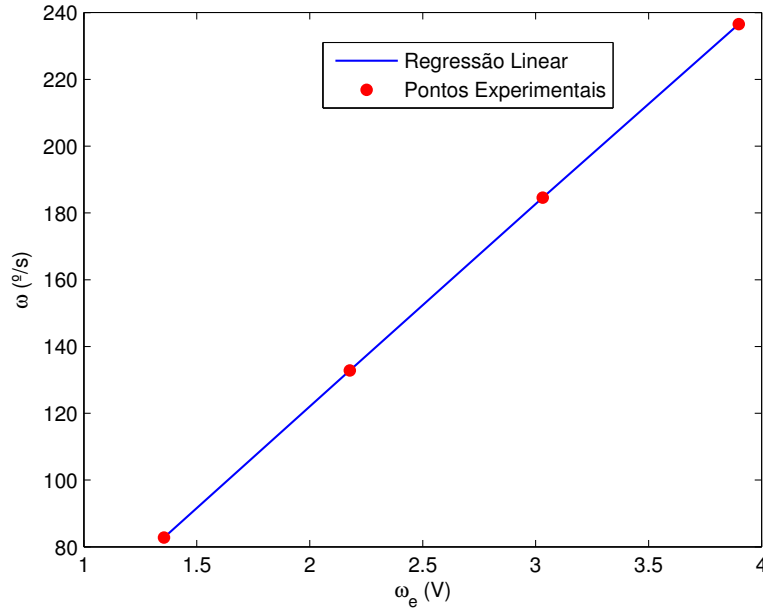


Figura 4: Resposta do Tacómetro a várias velocidades angulares

3.2.3 Calibração do Extensómetro

O extensómetro é o sensor utilizado para a determinação da deflexão da barra. O extensómetro produz uma tensão eléctrica α_e que se relaciona com o ângulo de deflexão verdadeira α através da expressão:

$$\alpha = K_b \cdot \alpha_e \quad (7)$$

Onde a constante K_b é a constante a estimar, que tem unidades $[^\circ/V]$.

Para a estimação deste parâmetro, começou-se por incluir no Simulink um bloco de *input* de dados, que recebia os dados pelo canal 2, ligado ao extensómetro.

De seguida, colocou-se o pente a 40 cm da extremidade fixa da barra, e foi-se colocando a barra nas várias posições do pente, tanto à esquerda como à direita da posição central. Tendo em conta que o motor roda no sentido dos ponteiros do relógio, considerou-se este sentido como o positivo, pelo que a deflexão da barra é também positiva para deslocamentos angulares no sentido de rotação dos ponteiros do relógio.

Conhecendo a distância do pente ao início da barra, bem como a distância de cada posição do pente à posição central deste, pode determinar-se os vários ângulos de deflexão através da fórmula trigonométrica:

$$\alpha_i = \arctan\left(\frac{d_i}{l}\right) \quad (8)$$

Onde d_i representa a distância da posição central do pente à posição do ensaio i , e $l = 40$ cm é a distância entre o pente e a extremidade fixa da barra (esta distância foi mantida constante durante todo o ensaio).

Para cada posição da barra, obteve-se um conjunto de valores dados pelo extensómetro. Na figura (5) pode ver-se os valores fornecidos pelo extensómetro quando a barra estava na segunda posição (no sentido positivo) do pente. Fazendo o valor médio deste conjunto de dados, chega-se ao valor de α_e .

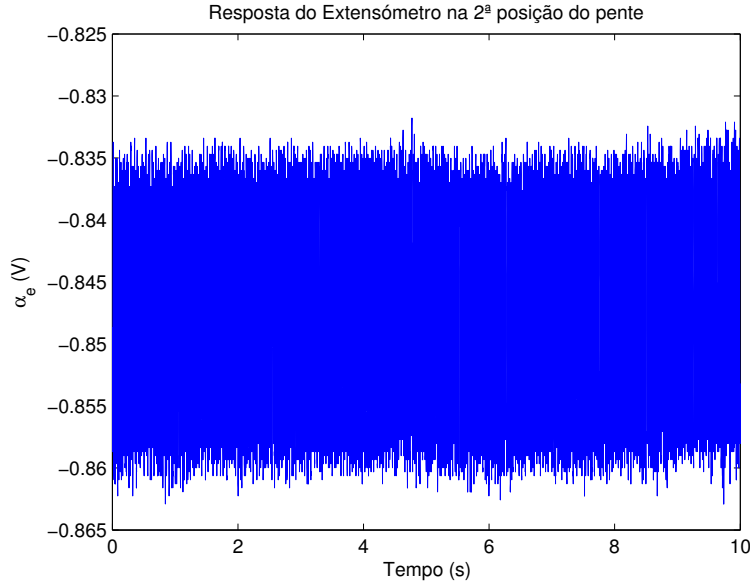


Figura 5: Exemplo dos dados fornecidos pelo extensómetro

Repetiu-se este procedimento para as posições do pente mais próximas da posição central, para que a deflexão da barra não fosse exagerada e assim não se correr o risco de cair na zona de não-linearidade da deflexão da barra. Chegou-se aos valores apresentados na tabela (3).

Ensaio	l (cm)	d_i (cm)	α (°)	α_e (V)
1	40	0	0	-0.2186
2	40	0.8	1.1458	-0.5744
3	40	1.4	2.0045	-0.8474
4	40	2	2.8624	-1.1109
5	40	2.6	3.7190	-1.3886
6	40	3.2	4.5739	-1.6602
7	40	3.8	5.4268	-1.9316
8	40	-0.4	-0.5729	0.0032
9	40	-1.0	-1.4321	0.2812
10	40	-1.6	-2.2906	0.5549
11	40	-2.2	-3.1481	0.8250

Tabela 3: Tabela com os resultados dos vários ensaios de calibração do extensómetro

Recorrendo então ao método dos mínimos quadrados, relaciona-se linearmente o ângulo de deflexão α com a grandeza eléctrica α_e , obtendo:

$$\hat{K}_b = -3.103 \text{ }^\circ/\text{V} \quad (9)$$

Para um valor de correlação linear de $R^2 = 0.9998$. Comprova-se que a relação é praticamente linear, conforme se observa no gráfico (6).

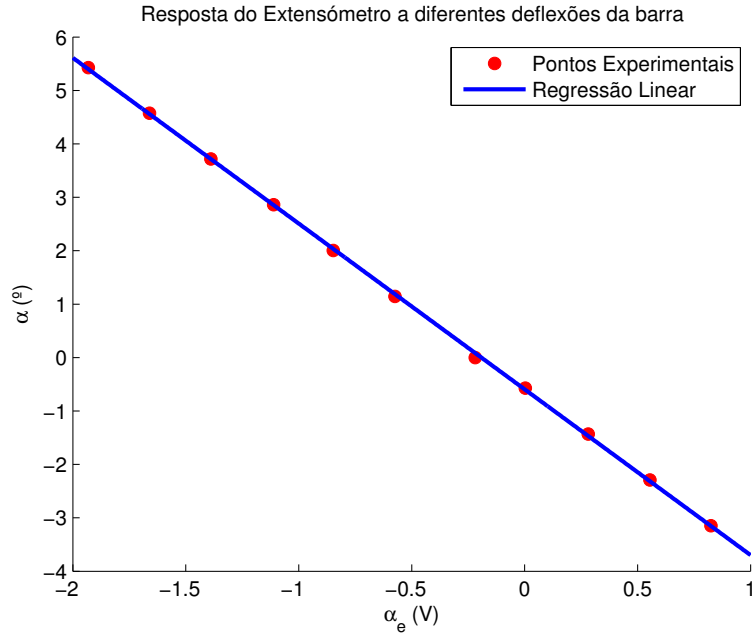


Figura 6: Resposta do extensómetro às diversas posições de deflexão da barra

Note-se que a ordenada na origem de $\alpha(\alpha_e)$ não é zero, conforme o esperado na equação (7), mas sim -0.5944. Isto deve-se ao facto de, quando a barra está colocada na posição central do pente (ângulo de deflexão nulo), o extensómetro mede uma tensão de -0,2186 V, quando deveria medir 0 V. Isto deve-se a um problema de calibração do extensómetro, bem como ao facto de a barra, mesmo não estando em qualquer apoio, apresentar por si só uma deflexão.

4 Identificação do Modelo (P4)

Para projectar o controlador da posição angular da barra, é necessário ter um modelo do sistema a controlar, isto é, é necessário conhecer a dinâmica do motor e da barra.

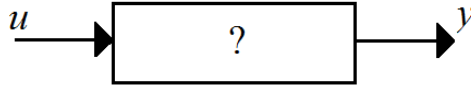


Figura 7: Representação do objectivo da Identificação: obtenção do modelo do sistema que traduz uma entrada do motor numa variação do ângulo total de deslocação da barra

Para tal, é necessário fornecer uma entrada ao sistema e registar como este reage. A partir dos dados obtidos, constrói-se um modelo, em espaço de estados, que represente a dinâmica da barra. Para tal, é necessário estimar a ordem do sistema e os respectivos parâmetros.

Por fim, submete-se a mesma entrada ao modelo obtido e comparam-se as duas respostas, a resposta real registada pelos sensores e a resposta obtida utilizando o modelo.

Pode então dizer-se que para identificar o modelo dinâmico temos cinco fases: o sinal de excitação, a obtenção dos dados, o tratamento dos dados, a análise do modelo obtido e a validação.

4.1 Sinal de Excitação

Na identificação do modelo utilizaram-se dois tipos de ondas para excitação do mesmo e posterior tratamento de dados, ondas quadradas e PRBS.

As aquisições efectuaram-se durante 20 segundos, pois os dados dos sensores referentes aos segundos iniciais exibem irregularidades que têm de ser descartadas para melhores resultados de identificação. Maiores períodos de tempo de aquisição de dados não foram realizados devido à precessão do motor, que levava a que o cabo de ligação da barra flexível à base do motor se enrolasse no mesmo.

O facto de o potenciómetro exibir valores de tensão entre -5 V e 5 V relativamente a um ponto 0 na base do motor faz com que haja uma descontinuidade na medição do ângulo quando a barra flexível cruza essa origem, conforme indicado pela seta na figura (8).

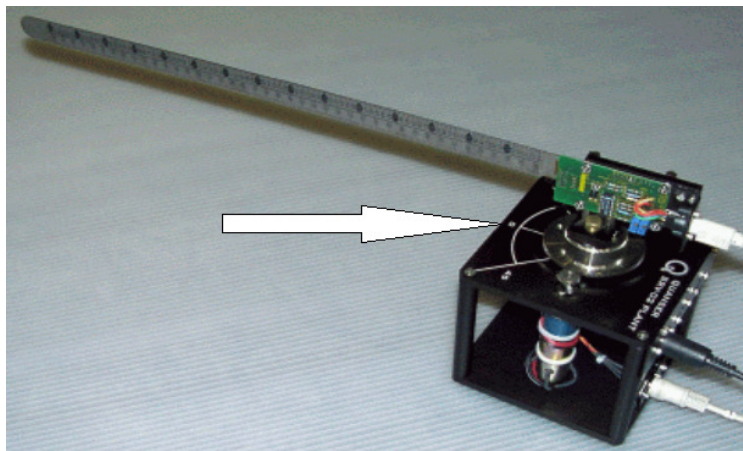


Figura 8: Origem da medida do ângulo do potenciómetro.

Isso, e o facto de que a equação linear que dá o ângulo da extremidade da barra flexível em relação à base só ser válida para pequenas deformações da mesma leva a que tensões elevadas não sejam ideais para estudar este sistema. Assim, os sinais aplicados tinham como amplitude máxima 1 V.

Escolheu-se o valor de 0.5 Hz como a frequência dos sinais de excitação da barra. Frequências mais baixas resultavam numa leitura do extensómetro onde não era visível o "efeito chicote" da barra quando o motor invertia o sentido da sua rotação, não havendo assim excitação dos transitórios; frequências mais altas faziam com que a barra não estabilizasse tempo suficiente (os patamares de velocidade angular constante não existiam), impedindo uma análise comportamental eficiente da barra, para além de o filtro filtrar os dados da dinâmica obtidos.

O sistema foi amostrado com intervalo de 20 ms, ou seja 50 Hz, uma frequência de amostragem 100 vezes maior à frequência de excitação imposta na montagem, o que permite estimar a posição da ponta da barra de uma maneira quase contínua.

4.2 Obtenção de Dados

Escreveu-se um script cujo objectivo era excitar a montagem da barra flexível e com os dados obtidos construir um modelo posteriormente usado no design de um sistema de controlo.

Transcreve-se de seguida a parte deste código responsável pela geração dos sinais que excitavam a montagem:

```
%Script de Determinação

Ts=0.02;
T=20;
freq=0.5; %frequência onda quadrada

t=(0:Ts:T)';

i= 0;

Amplitude=1;

if(i)
    entrada=idinput(T/Ts,'prbs',[0 0.075],[-1 1]*Amplitude);
    var = [t(1:1000) entrada];
else
    entrada= 1+2*((sin(freq*2*pi()*t)>0)-1)*Amplitude;
    var = [t entrada];
end
```

As excitações aplicadas estão de acordo com as razões explicitadas na secção anterior, em que o período de amostragem é de 20 ms (T_s), o tempo de aquisição de 20 s (T) e a frequência de sinal, para a onda quadrada, de 0.5 Hz ($freq$).

Por variação da variável i define-se qual a excitação que é passada ao sistema, uma onda quadrada ou um PRBS.

A função *idinput* é responsável pela criação de um sinal binário pseudo-aleatório. Os seus argumentos dizem à função quantos pontos deve esta criar, ' $\frac{T}{T_s}$ ', que tipo de sinal se quer obter,

‘prbs’, tempo mínimo e máximo em que a entrada poderá estar constante, ‘0 a $1/0.075 \approx 13.3$ s’ e qual a amplitude do sinal desejado, ‘ $[-1 \ 1] * Amplitude$ ’.

O sinal PRBS tem a seguinte aparência:

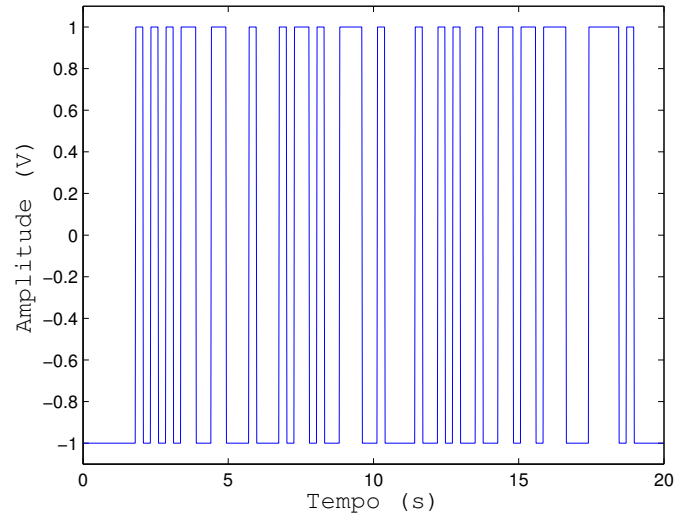


Figura 9: Input com PRBS.

O sinal de onda quadrada é feito a partir de uma condição, quando $\sin(2\pi \times freq)$ é maior que 0, a condição fica verdadeira e assume o valor de 1 fazendo com que a entrada fique igual a 1 V, caso contrário a condição assume o valor de 0 e a entrada fica -1 V:

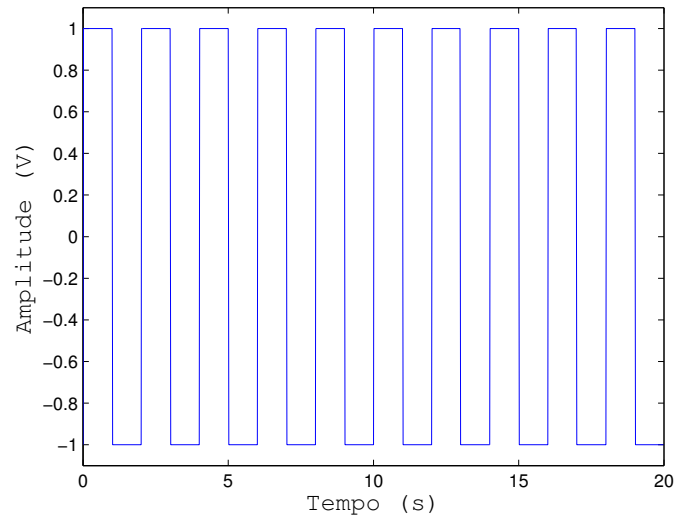
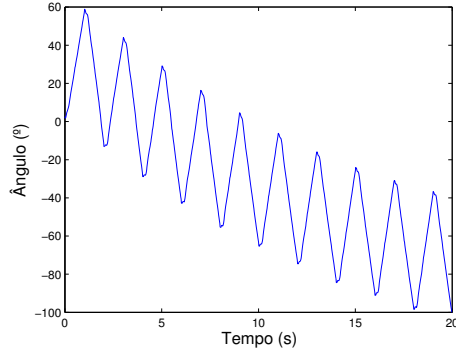
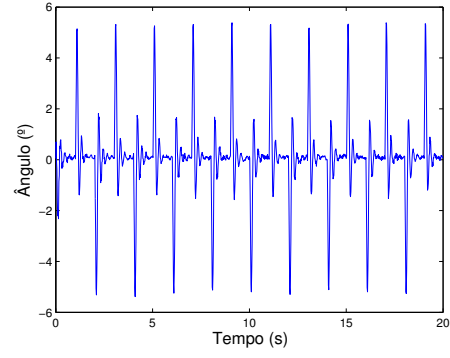


Figura 10: Input com onda quadrada.

As respostas do potenciômetro e do extensômetro, já convertidas em graus, para a onda quadrada e para o sinal PRBS, foram as seguintes:

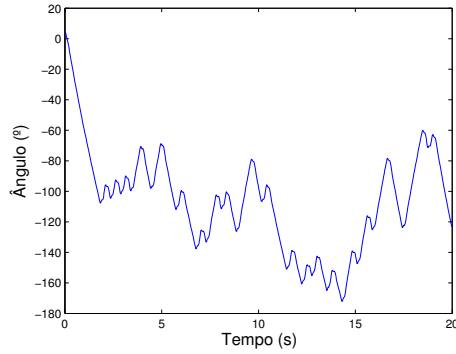


(a) Resposta do potenciômetro

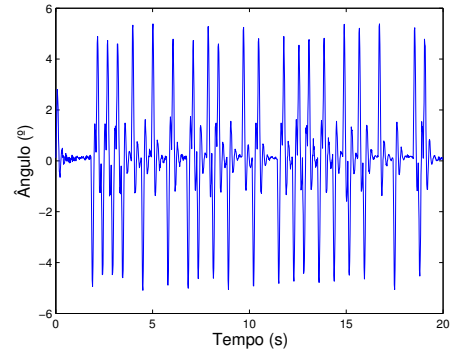


(b) Resposta do extensômetro

Figura 11: Sinais de saída do potenciômetro (deslocação angular do veio do motor) e do extensômetro (deflexão da barra) para uma entrada do tipo onda quadrada



(a) Resposta do potenciômetro



(b) Resposta do extensômetro

Figura 12: Sinais de saída do potenciômetro (deslocação angular do veio do motor) e do extensômetro (deflexão da barra) para uma entrada do tipo PRBs

Os valores debitados por estes sensores são combinados para obter o deslocamento angular total da barra. Este ângulo é a variável a controlar, sendo por tanto a variável de saída do sistema.

$$y = K_p \times \theta_e + K_e \times \alpha_e \quad (10)$$

Onde θ_e representa o sinal eléctrico saído do potenciômetro, e α_e o sinal eléctrico saído do extensômetro.

4.3 Tratamento de dados

Após a obtenção dos dados é necessário proceder ao tratamento dos mesmos. Para tal, efectua-se uma série de operações que a seguir se explicam detalhadamente.

4.3.1 Filtro e Derivação

Visto que a posição angular do eixo do motor é obtida da velocidade angular do motor através de uma integração pura, então tem-se um pólo na origem para o sistema global (entrada no motor com saída a posição angular da ponta da barra). Como tal, o sistema global é apenas marginalmente estável, e a determinação do modelo vai ser afectada pela posição inicial da barra. Isso pode explicar-se precisamente por causa do integrador.

O método usado para a resolução deste problema é identificar o modelo para um novo sistema (entrada no motor com saída a velocidade angular da ponta da barra). Este modelo será estável, e portanto a identificação do seu modelo é mais facilmente obtida. Sendo assim será necessário retirar o pólo na origem através de derivação. Este pólo pode ser virtualmente inserido no modelo final, bastando para isso inserir um integrador discreto.

A derivação será de valores amostrados, sendo portanto discreta. Sendo assim a derivação nunca será exacta, podendo interpretar-se essa não idealidade como uma componente de ruído. Essa componente de ruído poderá ser minimizada fazendo uso de um filtro.

- Derivação

No contínuo, o bloco de derivação é dado por:

$$G_{cd}(s) = s$$

Assim um método para a determinação da função de transferência deste sinal no discreto seria, conforme o normalmente utilizado, submeter um escalão invariante à entrada. No entanto neste caso tal não é possível, pois aplicar um sinal constante seguido de um bloco de derivação resultaria numa saída nula, ou seja, ia perder-se a informação para obter a função de transferência discreta. Assim sendo, em vez de o sinal de excitação ser um escalão invariante utilizamos por exemplo uma recta.

Pode então usar-se:

$$G_{dd}(z) = \frac{\mathcal{Z}\{y(kh)\}}{\mathcal{Z}\{u(kh)\}} = \frac{\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}G(s)\right]\right\}_{t=kh}}{h \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}}$$

Substituindo pelo bloco derivação obtém-se:

$$G_{dd}(z) = \frac{1}{h} \frac{(z-1)^2}{z} \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]\right\}_{t=kh}$$

Que resulta em:

$$G_{dd}(z) = \frac{1}{h} (z-1)$$

No entanto posteriormente será necessário voltar a integrar e fazer uso do factor de escala h , mas a multiplicar, pelo que não será necessário introduzir esse parâmetro agora se também não se introduzir no final. Assim sendo a função de transferência para a derivação é:

$$G_{d_d}(z) = (z - 1) \quad (11)$$

- **Filtro**

No contínuo, o bloco do filtro de 1ª ordem é dado por:

$$G_{c_f}(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

Em que $\omega_c = 2\pi f_c$, sendo f_c é a frequência de corte.

Sabendo que, neste caso, a relação entre a função de transferência do contínuo para discreto pode ser dada pelo método do escalão invariante:

$$G_{d_f}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} G(s) \right]_{t=kh} \right\}$$

Então pode obter-se que o bloco do filtro no discreto é dado por:

$$G_{d_f}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_c}{s + \omega_c} \right]_{t=kh} \right\}$$

Que resulta em:

$$G_{d_f}(z) = (1 - e^{-\omega_c h}) \cdot \frac{1}{z - e^{-\omega_c h}}$$

Pode fazer-se a mudança de variável:

$$\lambda = e^{-\omega_c h}$$

Visto que ω_c e h são valores positivos então λ será sempre menor que 1. Para valores de λ próximos de 1 então ω_c tende para 0, o que significa que o sinal foi muito filtrado. Para valores de λ próximos de 0 então ω_c tende para $+\infty$, o que significa que o sinal foi pouco filtrado.

Sendo assim pode exprimir-se a função de transferência discreta do filtro por:

$$G_{d_f}(z) = (1 - \lambda) \cdot \frac{1}{z - \lambda} \quad (12)$$

- **Derivação e Filtro**

Fazendo a multiplicação dos dois blocos, (11) e (12), obtém-se a função de transferência:

$$G_d(z) = (1 - \lambda) \frac{(z - 1)}{(z - \lambda)} \quad (13)$$

Que pode ser separada em numerador e denominador como:

$$N(z) = (1 - \lambda)(z - 1) \quad D(z) = (z - \lambda)$$

Em *Matlab* o discutido no item anterior corresponde a:

```
%Filtro + Derivação

lambda = 0.6; % Primeiro valor sugerido

a_f= [1 -lambda];
b_f = (1-lambda)*[1 -1];

y_diff = filter(b_f, a_f, y);
```

4.3.2 Corte e Tendência não linear

Existe um período após o instante inicial em que os dados não são fiáveis para a obtenção do modelo, pois ainda se está no transitório. Como tal é necessário efectuar um corte nos dados, removendo elementos dos vectores de amostragens e também do vector obtido na secção anterior.

Para além disso, como pode observar-se no gráfico da saída y nas figuras (13) e (14), existe uma espécie de “drift” no valor de y , ou seja a saída tem uma tendência não linear e com valor médio não nulo, o que, apesar de ser suposto acontecer no real, não é suposto acontecer num modelo a identificar que é linear. Assim sendo é necessário eliminar essa tendência e usar a função do *Matlab* “detrend”.

Em *Matlab* as duas operações correspondem a:

```
% Corte + Detrending

N=200;

u(1:N)=[];
y(1:N)=[];
y_diff(1:N)=[];

y_diff = detrend(y_diff);
```

Nas figuras (13) e (14) estão representados os efeitos dos vários passos do tratamento de dados nos valores da variável de saída, consoante a entrada seja uma onda quadrada ou o sinal PRBS.

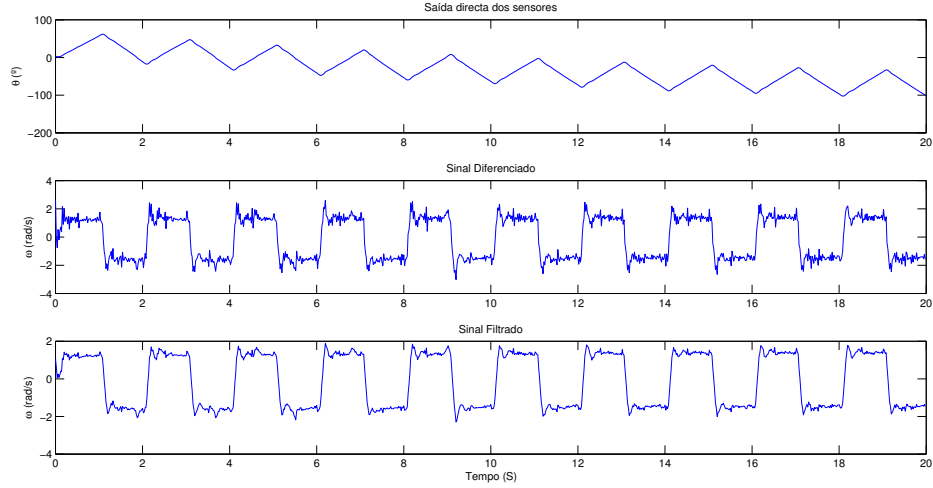


Figura 13: Evolução do sinal de saída após os vários passos do tratamento de dados, para o caso de onda quadrada

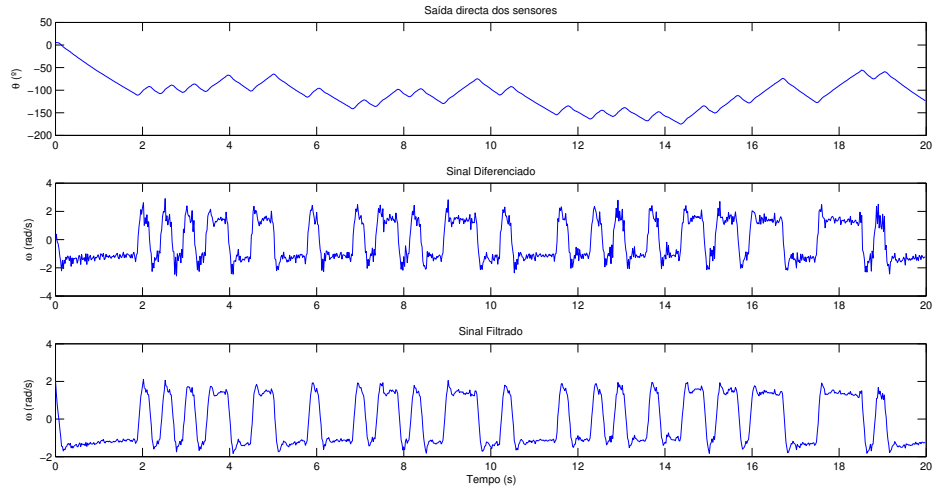


Figura 14: Evolução do sinal de saída após os vários passos do tratamento de dados, para o caso de sinal PRBS

4.3.3 Modelo ARMAX

É agora necessário definir qual a estrutura do modelo a identificar, nomeadamente a ordem do mesmo. O algoritmo a usar para a identificação do modelo é o ARMAX. O ARMAX trata-se de um algoritmo que estima os parâmetros do modelo auto-regressivo (a saída depende de estados anteriores da saída) exógeno (as entradas não dependem da saída) usando um método de predição de erro estendido com média móvel (Ruído Colorido). A forma do modelo é:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t - n_k) + C(q)e(t)$$

Em que:

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$B(q) = b_1 + b_2 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b+1}$$

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c}$$

Como tal é necessário definir as ordens para a saída (n_a), a entrada (n_b), o erro (n_c) e o atraso (n_k).

O polinómio $A(q)$ necessita de ordens elevadas, isto porque existem variados modos de oscilação para a barra e ainda é necessário incorporar a dinâmica do motor. Como já referido a barra não é rígida e vai oscilar. Uma primeira e segunda harmónica serão essenciais para a determinação de um bom modelo. Idealmente seriam incluídos todos os modos, teoricamente infinitos, mas isso seria demasiado exigente depois no projecto do controlador. Sendo assim, optou-se por condensar a dinâmica do motor com as duas primeiras harmónicas que requerem quatro pólos, sendo que a rapidez da dinâmica/oscilações vai definir quais vão ser incorporados no modelo, ficando assim a ordem do polinómio $A(q)$, $n_a = 4$, ou seja o sistema tem 4 pólos (falta ainda acrescentar o integrador portanto o sistema total terá 5).

O polinómio $B(q)$ será de ordem sempre menor ou igual que a $A(q)$, isto porque se trata de um sistema causal. Decidiu-se, por recomendação do professor, adoptar $n_b = n_a - 1$, e logo $n_b = 3$.

O polinómio $C(q)$ será também de ordem sempre menor ou igual que $A(q)$. Admitindo que há erro (ou se quisermos ruído colorido) em todos os instantes de amostragem devido ao modelo não ser exacto então obviamente a ordem deste polinómio deve ser a igual à de $A(q)$. Como tal $n_c = n_a = 4$.

Em relação ao parâmetro do atraso puro, é de esperar que a entrada imediatamente anterior influencie a entrada actual, ou seja, é de esperar um atraso puro de apenas uma ordem, pois a entrada é suficientemente rápida. Assim, $n_k = 1$, o que permite o grau de liberdade máximo na escolha dos parâmetros.

Em *Matlab* a implementação do modelo ARMAX corresponde a:

```
% ARMAX
```

```
n_a = 4;  
n_b = 3;  
n_c = n_a;  
n_k = 1;
```

```
MOD = armax([y_diff u], [n_a n_b n_c n_k]);
```

4.3.4 Convolução e obtenção do Modelo Completo

Tendo obtido o modelo é agora necessário inserir o integrador discreto que foi retirado na secção (4.3.1).

No contínuo, o bloco do integrador é dado por:

$$G_{c_i}(s) = \frac{1}{s}$$

Sabendo que, neste caso, a relação entre a função de transferência do contínuo para discreto pode ser dada pelo método do escalão invariante:

$$G_{d_i}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} G(s) \right]_{t=kh} \right\}$$

Então pode obter-se que o bloco do integrador no discreto é dado por:

$$G_{d_i}(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \right]_{t=kh} \right\}$$

Que resulta em:

$$G_{d_i}(z) = \frac{h}{z-1}$$

Como referido para a obtenção da equação (11) o factor de escala h foi retirado do denominador pois ia ser obtido nesta secção em numerador, logo é necessário retirar aqui também e portanto:

$$G_{d_i}(z) = \frac{1}{z-1} \quad (14)$$

Para acrescentar o integrador ao modelo obtido trata-se de uma simples convolução.

Para isso é preciso obter o modelo como numerador e denominador e neste caso apenas fazer a convolução do denominador (visto que o numerador é 1). Para obter o numerador e denominador usa-se a função “polydata”.

Visto que a identificação foi feita com a *System Identification Toolbox*, que assume que os polinómios estão escritos no operador atraso mas a conversão para o modelo de estado e o projecto do controlador são feitos com a *Control Systems Toolbox*, que assume que os polinómios estão escritos no operador avanço então é necessária uma correcção. Para contornar este problema, pode usar-se função “eqtflength” que faz a conversão automaticamente.

Após a convolução tem-se a identificação do Modelo completo em Função de Transferência. pode passar-se para Sistema em Espaços de estado fazendo uso da função “tf2ss”.

Assim em *Matlab* este bloco completo é:

```
% Convolução

[a, b] = polydata(MOD);

a_conv = conv(a, [1, -1]);

[bb,aa]=eqtflength(b,a_conv);

[A,B,C,D]=tf2ss(bb,aa);
```

4.4 Modelos ARMAX obtidos

Com os dois sinais de teste (onda quadrada e onda PRBS), obtiveram-se os seguintes modelos ARMAX, que aqui são apresentados sob a forma de função de transferência antes do passo de convolução, isto é, correspondem ao sistema cuja entrada é a tensão no motor e a saída é a velocidade angular de rotação da barra.

4.4.1 Onda Quadrada

$$G_d(z) = \frac{-0.01462 z^2 + 0.03236 z + 0.09416}{z^4 - 2.102z^3 + 1.579 z^2 - 0.3467 z - 0.05406}$$

Pólos (D(z)=0)			Zeros (N(z)=0)	Ganho Estático ($G_d(1)$)
z	Frequência Natural (ω_n [rad/s])	Coeficiente de Amortecimento (ζ)		
0.725	16.1	1	3.8763 -1.6620	1.4677
0.739+0.430j 0.739-0.430j	27.5	0.284		
-0.102	194	0.588		

4.4.2 Sinal PRBS

$$G_d(z) = \frac{-0.07721 z^2 + 0.1480 z + 0.0332}{z^4 - 2.007z^3 + 1.3230 z^2 - 0.09802 z - 0.1406}$$

Pólos (D(z)=0)			Zeros (N(z)=0)	Ganho Estático ($G_d(1)$)
z	Frequência Natural (ω_n [rad/s])	Coeficiente de Amortecimento (ζ)		
0.752	14.2	1	2.1197 -0.2029	1.3437
0.752+0.433j 0.752-0.433j	27.1	0.262		
-0.248	172	0.405		

4.5 Validação

Para se escolher qual dos dois modelos obtidos se utilizará na segunda parte do projecto, importa fazer a validação dos dois modelos, verificando quão bem o modelo representa o sistema real.

Para tal, o que se faz é submeter ao modelo obtido uma entrada diferente daquela com que foi obtida, e depois comparamos com os dados resultantes do sistema real. Isto é, ao modelo obtido com a onda quadrada submetemos a entrada PRBS; ao modelo obtido com o PRBS submeteu-se a onda quadrada.

4.5.1 Validação do modelo obtido com Onda Quadrada

Submete-se ao modelo obtido com a onda quadrada a entrada PRBS, e compara-se nos gráficos seguintes a saída do modelo com os dados obtidos em simulação.

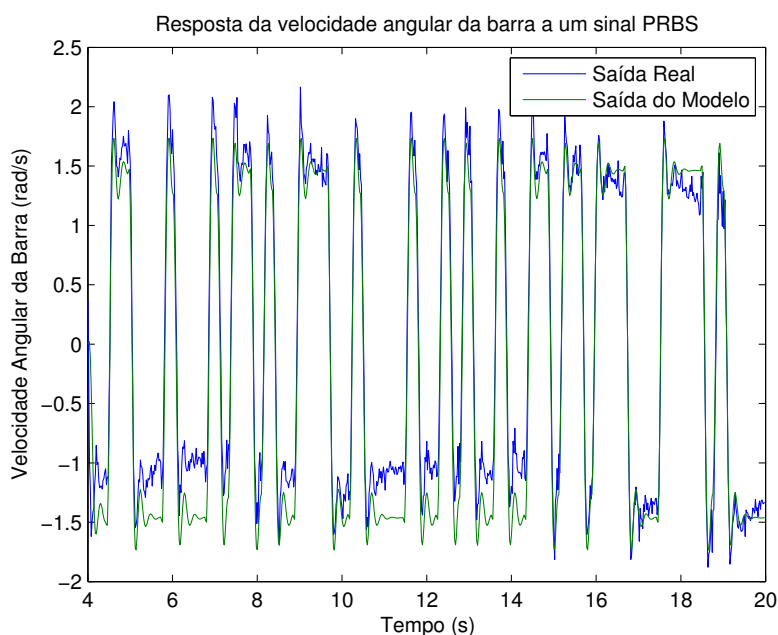


Figura 15: Variação temporal da velocidade angular da barra

De notar que o tempo, no gráfico da figura (15), se inicia nos 4 segundos pois os primeiros 4 segundos foram cortados na obtenção do modelo. Verifica-se uma boa concordância entre o modelo e o sistema, com o comportamento de fase não-mínima bem evidente, conforme seria de esperar. A resposta na gama de frequências do sinal PRBS poderia ser melhor, já que este modelo foi obtido com recurso a uma onda quadrada de frequência constante.

No gráfico da figura (16), ao integrar para obter o ângulo, nota-se a existência de um *offset* entre os dois sinais, que se deve à posição inicial do motor ser diferente da considerada no modelo (considera-se zero como posição inicial da simulação). Este *offset* aumenta com o tempo devido ao efeito de “drift” do motor. O importante neste gráfico é notar que a resposta do modelo é concordante com a do sistema.

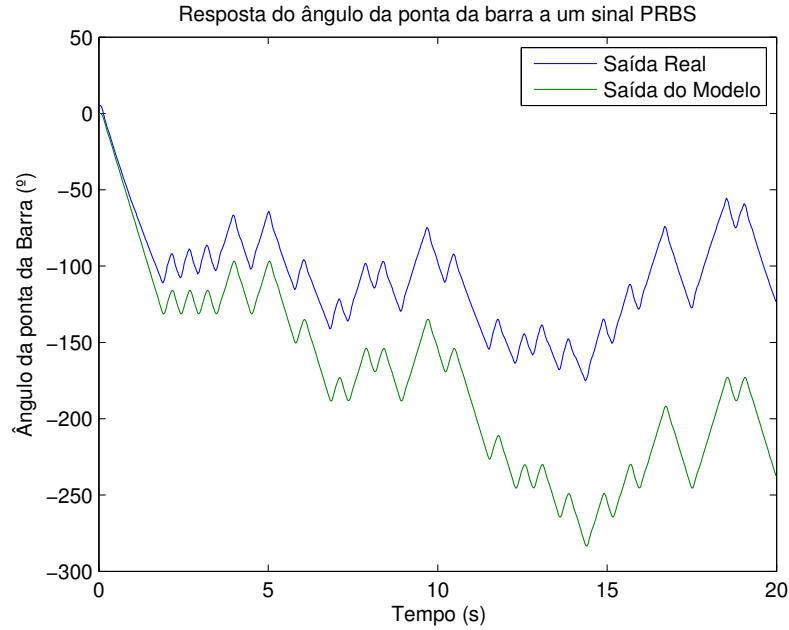
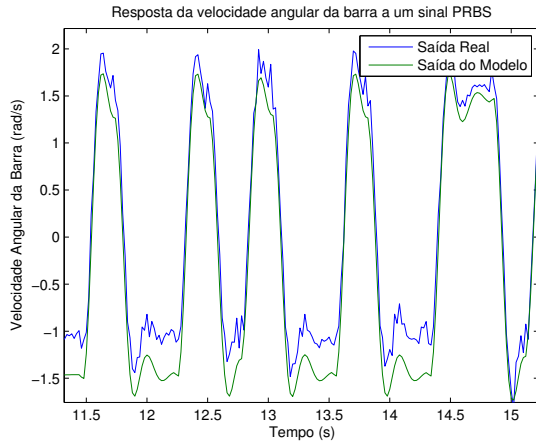
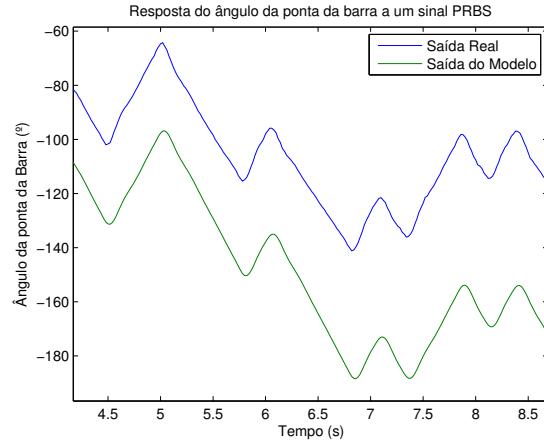


Figura 16: Variação temporal do ângulo da barra

Representando com mais detalhe os gráficos das figuras anteriores, tem-se os gráficos da figura (17)



(a) Velocidade Angular da Barra



(b) Ângulo da ponta da Barra

Figura 17: Evolução temporal em pormenor dos gráficos anteriores

4.5.2 Validação do modelo obtido com PRBS

Submete-se ao modelo obtido com a onda quadrada a entrada PRBS, e compara-se nos gráficos seguintes a saída do modelo com os dados obtidos em simulação.

No gráfico da figura (18) verifica-se uma muito boa concordância entre o modelo e o sistema, com o comportamento de fase não-mínima bem evidente. De notar também que se obtém uma boa

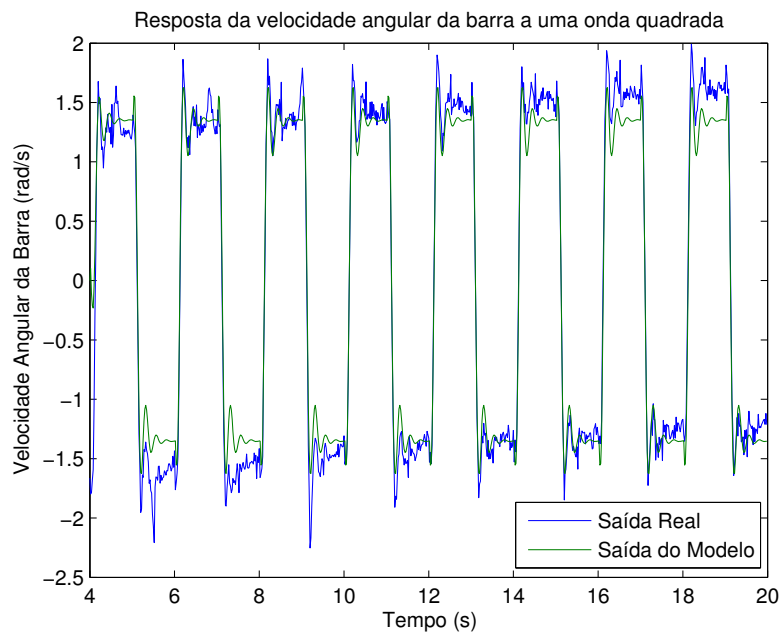


Figura 18: Variação temporal da velocidade angular da barra

resposta para a frequência desta onda quadrada, o que seria de esperar já que o modelo foi obtido com um sinal PRBS.

No gráfico da figura (19), na representação do ângulo, nota-se novamente a existência de um *offset* entre os dois sinais. Contudo, o importante neste gráfico é notar que a resposta do modelo é concordante com a do sistema.

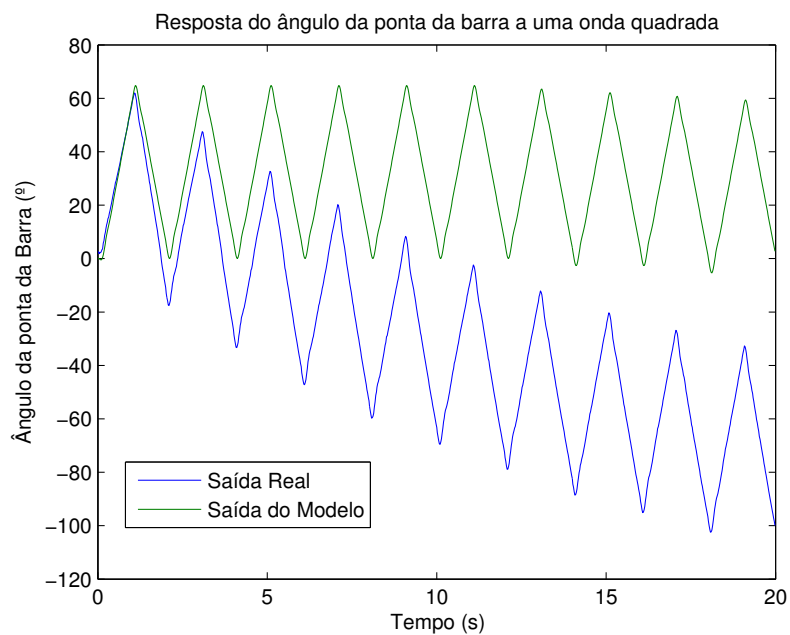


Figura 19: Variação temporal do ângulo da barra

Representando com mais detalhe os gráficos das figuras anteriores, tem-se os gráficos da figura (20)

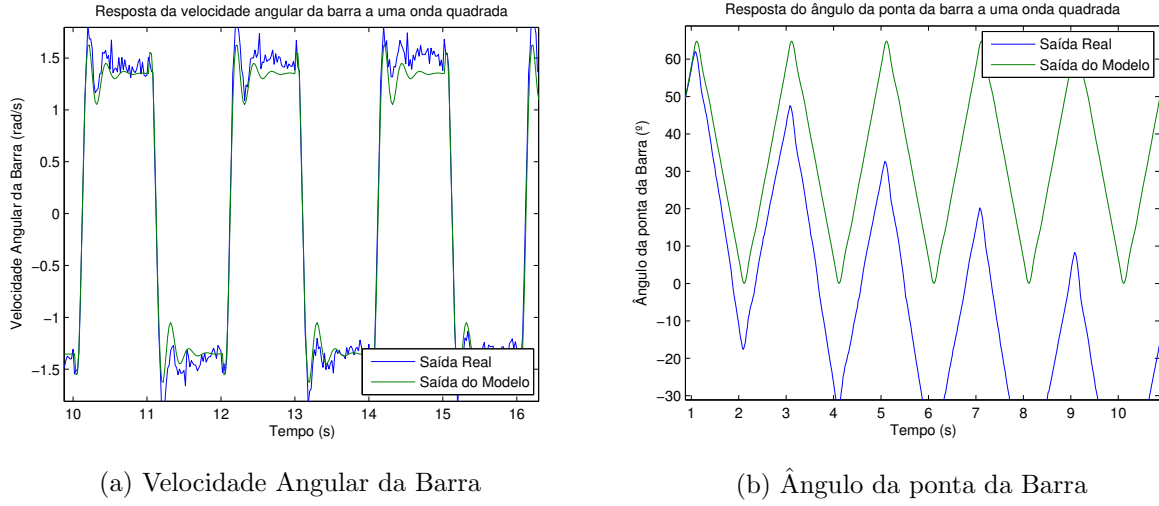


Figura 20: Evolução temporal em pormenor dos gráficos anteriores

5 Análise do Modelo obtido

Após a secção anterior, chegou-se à conclusão que o modelo obtido com a entrada PRBS representa melhor a dinâmica do sistema. Assim, obtido o modelo, chega a altura de analisá-lo, para se saber que características tem a dinâmica considerada para a barra e assim poder-se projectar um sistema de controlo adequado.

5.1 Modelo em Função de Transferência Discreta

A função de transferência discreta obtida, considerando como entrada a tensão eléctrica aplicada ao motor e como saída a posição da ponta da barra, foi a expressa na equação (15).

$$G_d(z) = \frac{-0.07721 z^4 + 0.1480 z^3 + 0.0332 z^2}{z^5 - 3.007z^4 + 3.3300 z^3 - 1.4210 z^2 - 0.04262 z + 0.1406} \quad (15)$$

5.2 Modelo em Espaço de Estados Discreto

A representação em espaço de estados obtida é:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{B} u(k) \quad (16)$$

$$y(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) + \mathbf{D} u(k) \quad (17)$$

Em que as matrizes obtidas foram as seguintes:

$$A = \begin{bmatrix} 3.0071 & -3.3299 & 1.4208 & 0.0426 & -0.1406 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$C = [-0.0772 \quad 0.1480 \quad 0.0332 \quad 0 \quad 0] \quad D = 0 \quad (19)$$

5.3 Mapa dos Pólos e Zeros do Modelo

Utilizando a função do MatLab *zplane* obteve-se o seguinte mapa de pólos e zeros do modelo.

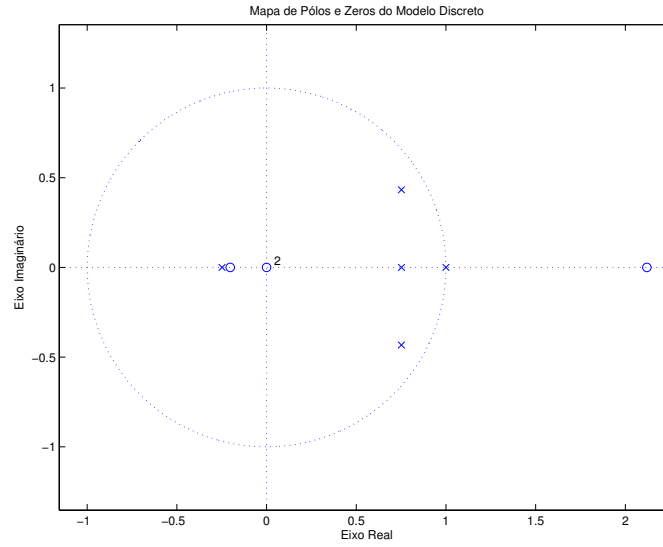


Figura 21: Mapa de pólos do modelo discreto obtido

Sobre a figura (21), importa referir alguns aspectos:

- O sistema tem 5 pólos, três dos quais reais e dois complexos conjugados. Todos os pólos estão no interior do círculo unitário, pelo que o sistema é estável, excepto o pólo $z = 1$, que se encontra precisamente sobre o círculo unitário e que se deve ao integrador do motor;
- O par de complexos conjugados explica a resposta oscilatória ligeiramente amortecida do sistema;
- O sistema possui um zero fora do círculo unitário, o que explica o comportamento de fase não-mínima registado anteriormente e que se deve à inércia e à flexibilidade da barra;
- A existência de pólos no semi-eixo real negativo faz com que seja possível concluir que o sistema não possa resultar da amostragem, a uma taxa constante, de um sistema contínuo. Isto explica-se pelo facto de o processo de identificação devolver o modelo que melhor se adequa aos dados, independentemente das características do sistema.

5.4 Análise da Resposta em Frequência

Utilizando a função do MatLab *dbode* obtiveram-se os seguintes diagramas de Bode em amplitude e fase.

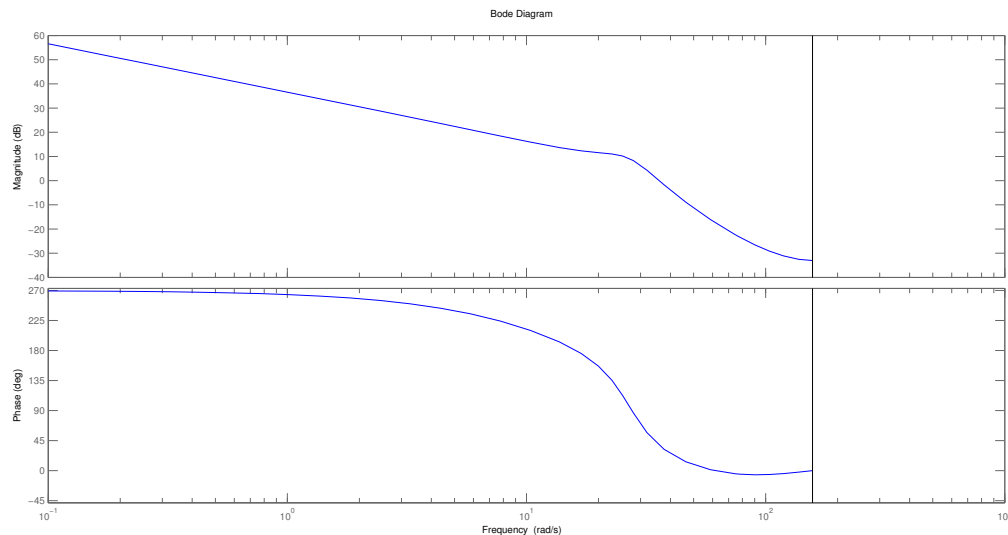


Figura 22: Resposta em Frequência do modelo discreto obtido

5.5 Análise da Resposta no Tempo

Para analisar a resposta no tempo do sistema, submeteu-se o modelo encontrado a um escalão unitário no motor, que volta a zero passado um segundo. De notar que o sistema responde rapidamente, com algum comportamento de fase não-mínima. Quando a entrada está a um, a velocidade angular do motor é constante e o ângulo varia linearmente. Quando a entrada volta a zero, a posição angular da barra estabiliza.

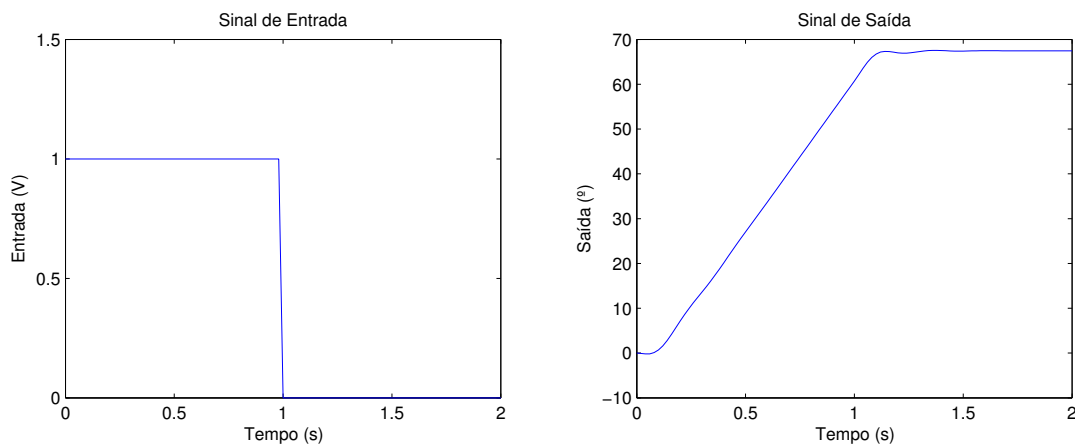


Figura 23: Resposta Temporal do sistema

6 Conclusão

Concluída a primeira parte do projecto, em que se realizou a identificação do modelo, consideramos ter cumprido todos os objectivos até esta fase.

Obteve-se um modelo para a dinâmica do sistema motor + barra, que traduz a dinâmica prevista nas secções iniciais deste relatório. Apesar de não representar totalmente todos os modos dinâmicos do sistema, reproduz as características necessárias para o seu controlo, e por tanto consideramos ter uma boa base de trabalho para a fase seguinte.

Para o processo de identificação de modelos, concluímos que é importante escolher adequadamente o sinal de entrada com que se vai construir o modelo, pois o sinal tem de explorar as características dinâmicas importantes do sistema, nomeadamente a sua resposta em frequência e em amplitude.

Outro passo essencial é perceber que o hardware utilizado no laboratório tem limitações: os sensores têm ruído, o motor DC apresenta um “drift”, e o potenciómetro cria um sinal descontínuo devido à passagem de 0 a 360°, entre outros.

Por último, o facto de estarmos a lidar com o processo de amostragem de um sistema contínuo requer atenção na escolha do intervalo de amostragem. Não podemos ser demasiado ambiciosos e escolher um intervalo de amostragem curto pois estaríamos a introduzir dinâmica de alta frequência e comportamentos de fase não mínima no sistema, mas um intervalo de amostragem grande deixaria de fora muita informação fundamental da dinâmica do sistema.

É de referir também que todo o procedimento para a identificação do modelo se encontra concentrado num único script, que pode ser corrido a qualquer momento para um novo conjunto de dados recolhidos. Isto é importante pois é provável que, nas próximas sessões, tenhamos que reconstruir o modelo consoante o conjunto barra e motor que estamos a usar na sessão.

7 Bibliografia

- *Guia Laboratorial*, por J. Miranda Lemos e A. Bernardino;
- *Ajudas para o Laboratório*, por J. Miranda Lemos, João P. Gomes e A. Bernardino;
- *Slides das Aulas Teóricas de Controlo por Computador*, por J. Miranda Lemos;

Todos os elementos anteriores foram disponibilizados na página Fénix da unidade curricular de Controlo por Computador.