В этом номере мы открываем новый раздел под названием «Физический факультатив». В том виде, как он задумывался (идею этого раздела предложили член редколлегии нашего журнала С.А.Гордюнин и группа учителей московского лицея «Вторая школа»), Факультатив предназначен для читателей, серьезно увлекающихся физикой, любящих ломать голову над хитрыми вопросами, задачами и парадоксами, получающих удовольствие от красивого рассуждения или неожиданной физической аналогии. Это большая армия учеников (и учителей!) физматшкол и спецклассов с углубленным изучением физики, активистов олимпиадного движения. До этого им предназначался в первую очередь Задачник «Кванта» (развернутые решения многих задач которого превращались зачастую в небольшие заметки). И вот — новый раздел. Напишите нам, что вы хотели бы обсудить на его страницах, и присылайте нам заметки для этого раздела.

Метод электростатических изображений

А.ЧЕРНОУЦАН

Определение поля в пространстве вокруг проводников представляет собой трудную задачу. Достаточно редко удается решить ее простыми методами, без привлечения сложной математики или мощного компьютера. Причина состоит в том, что заранее не известно распределение зарядов по поверхности проводника. Известно лишь, что они занимают такое (единственное!) положение, при котором напряженность поля внутри проводника равна нулю. Значит, нельзя сразу же применять привычный метод суперпозиции, что создает психологические трудности. Неудивительно, что в школе ограничиваются рассмотрением одной задачи — об уединенном проводящем шаре, — в которой распределение заряда является очевидным.

В этой заметке мы продемонстрируем, как соображения симметрии позволяют в некоторых случаях «угадать», или, точнее, «сконструировать» решение. Мы рассмотрим только один тип задач — проводник в поле точечного заряда $+q$. Заряды на проводнике перераспределяются так, чтобы скомпенсировать напряженность точечного заряда внутри проводника. Поле этих наведенных зарядов есть и вне проводника, в частности, оно действует на заряд $+q$ с силой $\vec{F} = q\vec{E}_{\text{нав}}$.

Чтобы задача была определена, необходимо, как говорят математики, задать граничные условия. Возможны следующие случаи:

1) Известен заряд проводника Q. Например, если $Q = 0$, то на ближайшей к заряду $+q$ поверхности проводника будут распределены отрицательные наведенные заряды, а на дальней — положительные (рис 1,*а*). Видно, что заряд и незаряженный проводник (на рисунке — шар) притягиваются друг к другу.

2) Известен потенциал проводника. Предполагается, что он соединен проволокой с удаленным большим проводником известного потенциала. Например, при соединении с землей (заземлении) принимается, что потенциал равен нулю (как на бесконечности). На заземленном проводнике появляется отрицательный наведенный заряд, и он притягивает заряд q сильнее, чем незаряженный (рис 1,*б*).

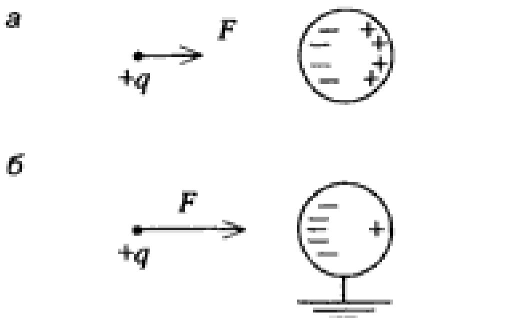

Рис. 1

Самая простая форма проводника — сферическая. Мы постараемся к концу заметки полностью решить задачу о проводящем шаре в поле точечного заряда. «Полностью решить» — значит научиться вычислять напряженность поля во всем пространстве, силу взаимодействия заряда и проводника, а также величину наведенного заряда и его распределение по поверхности проводника.

Интересно, что на некоторые вопросы можно ответить довольно легко. Определим, например, какой заряд появится на заземленном шаре, если точечный заряд q находится на расстоянии L от его центра. Для этого воспользуемся тем, что потенциал центра шара (как и всех его точек) равен нулю. Выразим его через заряды:

$$k\frac{q}{L} + \sum_i k\frac{\Delta Q_i}{R} = k\frac{q}{L} + k\frac{Q_{\text{нав}}}{R} = 0$$

(потенциал, создаваемый наведенными зарядами в центре шара, не зависит от их распределения, так как все они находятся на расстоянии R от центра). Получаем

$$Q_{\text{нав}} = -q\frac{R}{L}. \qquad (1)$$

Но как действовать дальше? Чтобы понять, какой вид может иметь решение, рассмотрим сначала совсем другой проводник — бесконечную плоскость (или, что то же самое, полупространство). Совершенно неожиданно соображения симметрии позволят нам полностью решить эту задачу и подскажут, как можно подойти к задаче о заряде и шаре.

Пусть проводник занимает все правое полупространство (рис. 2). Вычислить поле вне проводника (слева от OO') нам поможет тот очевидный факт, что поле наведенных зарядов симметрично относительно плоскости OO'. Раз это поле в проводнике компенсирует поле заряда $+q$, то оно совпадает с полем воображаемого заряда $-q$, помещенного в ту же точку, что и заряд $+q$. Теперь ясно, что

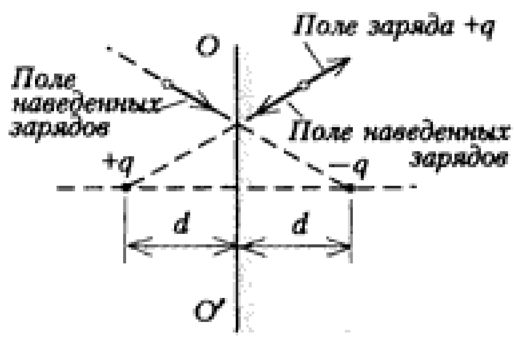

Рис. 2

поле, которое создают наведенные заряды слева от OO' (вне проводника), в точности равно полю воображаемого заряда $-q$, но помещенного по другую сторону от плоскости OO', симметрично по отношению к заряду $+q$. Этот воображаемый заряд $-q$ называют *изображением* заряда $+q$.

Итак, плоская поверхность проводника притягивает точечный заряд $+q$, удаленный от нее на расстояние d, с тако же силой, с какой его притягивал бы заряд $-q$, удаленный на расстояние $2d$:

$$F = k\frac{q^2}{(2d)^2}.$$

Мы получили удивительный результат: поле, создаваемое зарядом и проводником (рис.3,*а*), в пространстве вне проводника совпадает с полем всего двух точечных зарядов (рис.3,б). Почему оказалась возможной такая подмена? Вспомним, что поверхность проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность, причем в нашем примере потенциал проводника равен нулю. Поле же двух зарядов $+q$ и $-q$ обладает следующим свойством: эквипотенциальная поверхность $\varphi = 0$ совпадает с плоскостью симметрии OO', т.е. точно повторяет форму поверхности рассматриваемого проводника. Именно в этом причина совпадения полей, изображенных на рисунке 3.

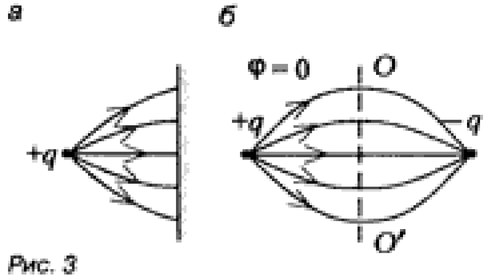

Рис. 3

В других случаях тоже надо стремиться расположить заряды-изображения внутри проводника так, чтобы поверхность нужного постоянного потенциала совпадала с поверхностью проводника. Тогда поле внешних зарядов и проводника будет совпадать с полем внешних зарядов и зарядов-изображений (т.е. проводник подменяется изображениями). Дело в том, что граница рассматриваемой области (пространства вне проводника) имеет в этих случаях одинаковый потенциал, и расположение зарядов внутри области также одно и то же (все изображения находятся в проводнике, т.е. вне этой области). Выполнения этих условий достаточно, чтобы утверждать, что поля совпадают всюду внутри области. Это утверждение часто называют *принципом единственности в электростатике.*

Возникает резонный вопрос — как это сделать? Как найти заряды-изображения и их положения, если известны форма и потенциал проводника? К сожалению, в общем случае такого рецепта не существует, и обычно приходится действовать, как говорят, «с конца» — от зарядов к проводнику. Возьмем несколько точечных зарядов, рассчитаем их поле, найдем любую эквипотенциальную поверхность $\varphi = \varphi_0$ и заполним пространство внутри этой поверхности проводником с потенциалом φ_0. Тогда поле, которое мы уже рассчитали, представляет собой готовое решение для получившегося проводника и тех зарядов, что оказались вне его. Заряды же, которые «погибли» внутри проводника, играют роль зарядов-изображений. Таким способом можно построить много «готовых» решений, правда нет гарантии, что всегда удастся подобрать решение под заранее выбранный проводник.

Вот пример. Рассмотрим какую-нибудь эквипотенциальную поверхность для тех же зарядов $+q$ и $-q$, например с $\varphi = -1$ В (рис.4,а). Поле зарядов вне этой поверхности совпадает с полем заряда $+q$ и проводника, имеющего фиксированный потенциал $\varphi = -1$ В (рис.4,б).

Еще пример. Поле четырех зарядов $+q, +q, -q$ и $-q$, размещенных в вершинах прямоугольника (рис.5,а), имеет эквипотенциальную поверхность $\varphi = 0$ в виде двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Значит, часть этого поля, заключенная в первом квадранте, совпадает с полем заряда $+q$, помещенного в двугранный угол (рис.5,б). Три других заряда являются изображениями заряда $+q$. Попробуйте сами найти решение для заряда, помещенного в трехгранный угол (для этого вам придется использовать семь дополнительных зарядов).

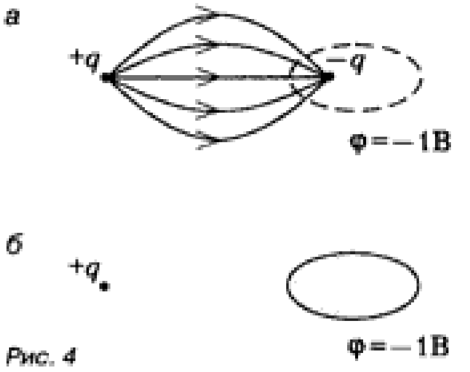

Рис. 4

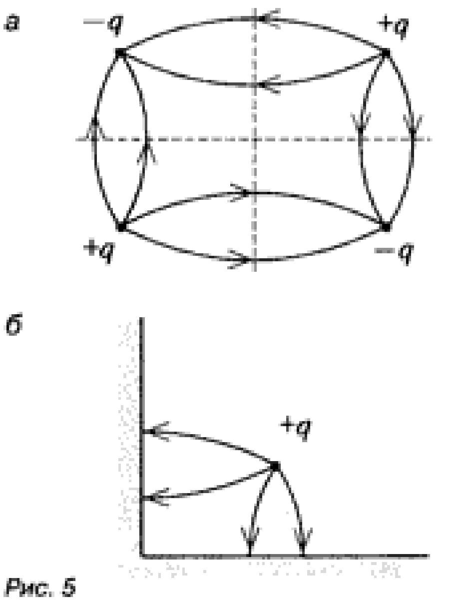

Рис. 5

Вернемся к проводящему шару. Возьмем два заряда $+q_1$ и $-q_2$ ($q_1 > q_2$), расположенных на расстоянии l друг от друга (рис.6,а). Оказывается, что эквипотенциальная поверхность $\varphi = 0$ представляет собой сферу. (Потенциал точечного заряда q имеет вид $\varphi = kq/r$. Условие $kq_1/r_1 - kq_2/r_2 = 0$ преобразуется в равенство $r_1/r_2 = q_1/q_2$, т.е. описывает геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до заданных двух точек имеет фиксированное значение.) Чтобы определить радиус этой сферы R и расстояние L от ее центра до заряда $+q_1$, можно приравнять к нулю потенциалы точек A и B:

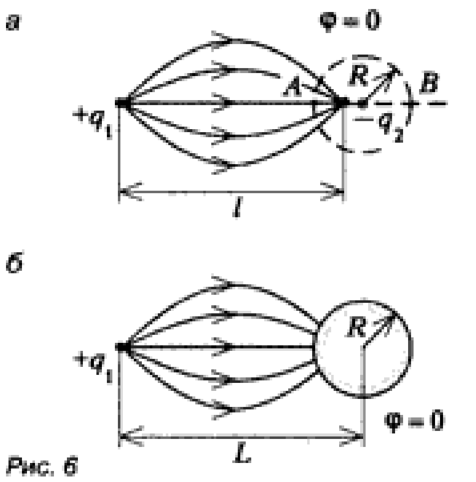

Рис. 6

$$k\frac{q_1}{L-R} - k\frac{q_2}{R-(L-l)} = 0,$$

$$k\frac{q_1}{L+R} - k\frac{q_2}{R+(L-l)} = 0.$$

Поле данных двух зарядов в пространстве вне сферы в точности совпадает с полем, которое возникает, если заряд $+q_1$ поместить на расстоянии L от центра заземленного проводящего шара радиусом R (рис.6,б). В том случае, когда задано положение шара, нам известны R и L, а положение отрицательного заряда-изображения (l) и его величину (q_2) можно найти:

$$l = L - \frac{R^2}{L}, \quad q_2 = \frac{q_1 R}{L} \qquad (2)$$

(расстояние от q_2 до центра равно R^2/L). Сравните ответ для q_2 с полученным ранее ответом (1) для заряда на заземленном шаре. Сила, с которой заряд $+q_1$ притягивается к шару, равна

$$F = k\frac{q_1 q_2}{l^2}.$$

А как быть в случае, если задан заряд шара Q? Оказывается, решение этой задачи легко получить из задачи о заземленном шаре. Сконструируем ответ следующим образом. Рассмотрим заземленный шар в поле заряда q_1, отсоединим его от земли и, не позволяя зарядам смещаться, распределим равномерно по поверхности шара дополнительный заряд $q_3 = Q + q_2$. Так как до этого на шаре был заряд $-q_2$, то полный заряд шара станет равен Q. При этом напряженность поля внутри шара останется равной нулю. Значит, в соответствии с принципом единственности, мы нашли правильное решение. Поле наведенных зарядов вне шара будет совпадать с полем двух точечных зарядов: $-q_2$ на расстоянии R^2/L от центра шара и q_3 в центре шара. Например, в случае незаряженного шара ($Q = 0$) получаем $q_3 = q_2$, и сила притяжения между точечным зарядом q_1 и незаряженным проводящим шаром оказывается равной

$$F = k\frac{q_1 q_2}{l^2} - k\frac{q_1 q_2}{L^2},$$

где L — расстояние от заряда q_1 до центра шара, а l и q_2 определяются формулами (2).

Осталось ответить на один вопрос — как найти распределение зарядов по поверхности проводника? Для этого надо рассчитать напряженность поля $\vec{E}$ возле той точки поверхности, которая нас интересует (напомним, что $\vec{E}$ перпендикулярна к поверхности), и воспользоваться формулой, связывающей напряженность с поверхностной плотностью заряда (см. Приложение):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (3)$$

Например, в случае проводящей плоскости поле равно векторной сумме полей заряда q и заряда-изображения $-q$. На расстоянии x от основания перпендикуляра, опущенного из заряда на плоскость (рис.7), напряженность равна

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{x^2+d^2}\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qd}{(x^2+d^2)^{3/2}},$$

откуда находим

$$\sigma(x) = \frac{2qd}{4\pi(x^2+d^2)^{3/2}}.$$

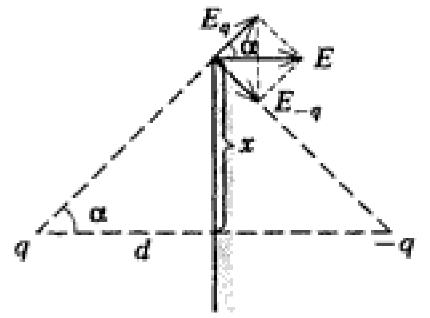

Рис. 7

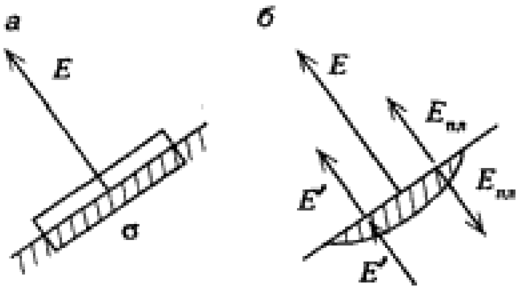

Рис. 8

Приложение

Выведем формулу (3) двумя способами для тех, кто уже знаком с теоремой Гаусса[1], и для тех, кто пока предпочитает обходиться без нее.

С теоремой Гаусса все очень просто: надо применить ее к маленькому плоскому цилиндру, одно основание которого находится в проводнике, а другое — вне него (рис. 8,*а*): $ES = \sigma S/\varepsilon_0$, откуда получаем (3).

Другое доказательство основано на выделении вклада близлежащего участка поверхности. Если этот участок достаточно мал, то его можно считать плоским и вблизи центра (на расстояниях, малых по сравнению с размерами участка) совпадающим с полем $\vec{E}_{пл}$ бесконечной равномерно заряженной плоскости (рис. 8,*б*). Поле $\vec{E}'$ всех остальных зарядов не испытывает скачка на поверхности, оно уничтожает поле $\vec{E}_{пл}$ внутри проводника и складывается с $\vec{E}_{пл}$ вне него: $E_{пл} + E' = E$, $E_{пл} - E' = 0$, получаем, что для любого проводника поле возле его поверхности выражается через поле равномерно заряженной плоскости: $E = 2E_{пл}$. И тут самое время вспомнить, что в одном из случаев поле проводника нам хорошо известно — это поле уединенного заряженного шара. Возле поверхности шара

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\cdot 4\pi R^2}{R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда мы немедленно делаем вывод, что такой же ответ годится для произвольного проводника, а заодно получаем в качестве «навара» поле бесконечной равномерно заряженной плоскости:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

[1] *См., например, статью «Силовые линии и теорема Гаусса», которую можно найти в журнале «Квант» №3 за 1990 г. или в Приложении к журналу «Квант» № 5/95.*

ИНФОРМАЦИЯ

Турнир юных физиков

(Начало см. на с. 5)

вверх-вниз с частотой порядка 100 Гц. Конусообразная кучка мелкодисперсного порошка (например, ликоподия или талька), насыпанная на пластину, остается устойчивой при малых амплитудах вибраций. Если амплитуда увеличивается, конус разрушается. Дальнейшее увеличение амплитуды приводит к распределению, очерченному резкой границей, а при еще более высоких амплитудах снова возникает кучка. Исследуйте и объясните явление.

5. Автоколебания. Изготовьте и исследуйте автоколебательную систему, содержащую термистор в качестве единственного нелинейного элемента.

6. Водяной генератор. Если некоторый объем воды замораживать с одной стороны, то на границе «лед — вода» возникает разность потенциалов. Измерьте ее и объясните явление.

7. Солнце. В центре Солнца внезапно выделилось «сверхплановое» количество энергии, равное энергии, излучаемой Солнцем за один год. Как будут изменяться в течение одного года наблюдаемые с Земли параметры Солнца?

8. «Поверхностная» информация. Разработайте способ передачи информации, в котором она переносилась бы волнами на поверхности воды. Исследуйте направленность изготовленных Вами передающих и приемных устройств (антенн).

9. Полотер. Устройство опирается на горизонтальную поверхность плоскостями двух одинаковых дисков, которые могут вращаться в противоположных направлениях с заданной скоростью. Исследуйте, как зависит величина силы, приложенной к устройству для его равномерного перемещения вдоль горизонтальной поверхности, от скорости этого перемещения и скорости вращения дисков.

10. Мыльные пузыри. Колечко детской игрушки для выдувания мыльных пузырей обмакивают в мыльный раствор и дуют на образовавшуюся в кольце мыльную пленку. При какой скорости воздушного потока начнут выдуваться пузыри? Как нужно регулировать скорость потока, чтобы выдуть пузырь максимального размера?

11. Свеча. Многие свечи перед тем как погаснуть мерцают. Исследуйте и объясните это явление.

12. Автомобиль. Автомобиль въезжает на мокрый участок прямолинейного шоссе. Как будет изменяться его скорость, если толщина слоя воды медленно нарастает с расстоянием по линейному закону? Считать, что двигатель автомобиля работает с постоянной мощностью.

13. «Серый свет». Изготовьте источник света, воспринимаемого глазом как серый.

14. Когерер. Известно, что стеклянная трубка с двумя электродами и металлическими опилками между ними (когерер) обладает различным сопротивлением в цепях постоянного и переменного тока. Исследуйте зависимость электрического сопротивления когерера от частоты тока.

15. Соляной осциллятор. Стаканчик с небольшим отверстием в дне, содержащий соленую воду, укреплен частично погруженным в широкий сосуд с пресной водой. Объясните механизм наблюдаемого периодического процесса и исследуйте зависимость его периода от различных параметров. Для наглядности соленую воду следует подкрасить.

16. Град. Объясните механизм возникновения града и предложите собственный метод предотвращения его выпадения.

17. Перчатки. Некоторые люди отказываются носить перчатки зимой, потому что считают, что в перчатках холоднее, чем без них. Другие предпочитают носить варежки вместо перчаток. А как думаете Вы?

Публикацию подготовили
В.Лобышев, Е.Юносов