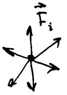
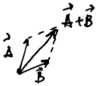
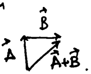
Статика I

Δ мат. точки. Условие равновесия: $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\dots+\vec{F}_n=0$





Как складывать силы?
- параллелограмм
- треугольник

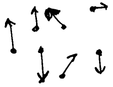


$\vec{R}=\vec{F}_1+\dots+\vec{F}_n$ – равнодействующая.

Эквивалентна всей системе сил.

Вопрос Точка в равновесии, действуют 3 одинаковые по модулю силы. Какой угол между ними? Введение про вектора, проекции и т.д.

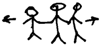
Система точек



Сумма всех сил, действ. на все точки, должна быть равна нулю.

Сложим все силы – получилась равнодействующая.
В каком смысле она эквив. всем силам?

Демонстрация Деформация человека. $\vec{R}=0$, но чувствуется!



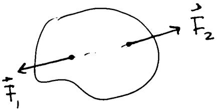
Причина – деформации, растяжения.

Модель – будем рассм. только АТТ. (Расст. между точками неизменно)

Важный вопрос Где точка приложения равнодействующей?

Ответ неочевиден. Надо аксиомы и теоремы.

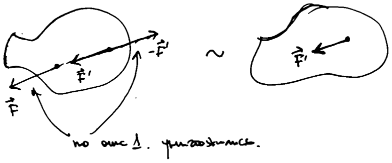
Аксиома


$\vec{F}_2$
$\vec{F}_1$

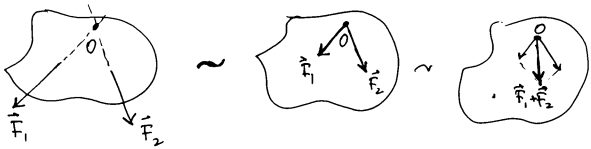
Если к АТТ приложены 2 непараллельные силы, то АТТ в равновесии т. и т.т. когда
- силы по модулю равны
- противоп. по напр.
- лежат на одной линии

Следствие

1) Силу можно двигать вдоль линии действия.


$-\vec{F}'$
$\vec{F}'$
$\vec{F}$
$\sim$
$\vec{F}'$
по акс 1. уничтожились.

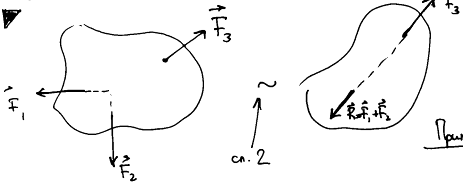
2)


O
$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$
$\sim$
O
$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$
$\sim$
O
$\vec{F}_1+\vec{F}_2$

Теорема о трёх силах

Если АТТ в равновесии под действием 3-х не-|| сил, то линии их действия пересекаются в одной точке.

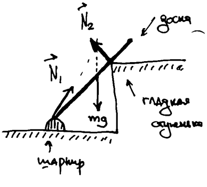
▼


$\vec{F}_3$
$\vec{F}_1$
$\vec{F}_2$
$\sim$
сл. 2
$\vec{F}_3$
$\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$

Но по акс. это 2 силы ⇒ д.б. на одной прямой.

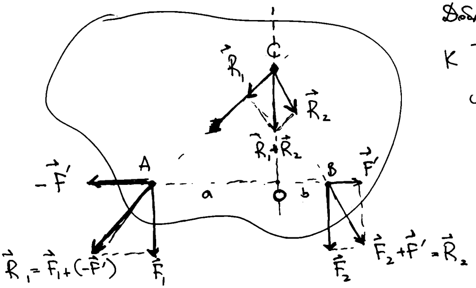
▲

Пример


$\vec{N}_2$
доска
$\vec{N}_1$
mg
гладкая ступенька
шарнир

Мы разобрались с силами, пересекающимися в точке.

Что насчёт || сил? Как их складывать — где точка приложения?


C
$\vec R_1$
$\vec R_2$
$\vec R_1 + \vec R_2$
A
B
$-\vec F'$
$\vec F'$
a
O
b
$\vec R_1 = \vec F_1 + (-\vec F')$
$\vec F_1$
$\vec F_2$
$\vec F_2 + \vec F' = \vec R_2$

Добавим пару $(\vec F', -\vec F')$ [illegible]

К $\vec R_1, \vec R_2$ ~~применим~~

сл. 2

$\vec R_1 + \vec R_2 = \vec F_1 + \vec F_2$. Линия действия проходит через (·) O.

Как её определить? Из подобия Δ.

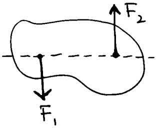
$$\frac{F_1}{F'} = \frac{CO}{AO} \; ; \quad \frac{F_2}{P} = \frac{CO}{OB} \Rightarrow \quad \frac{F_1}{F_2} = \text{[illegible]} \frac{OB}{AO} = \frac{b}{a} \Rightarrow \boxed{F_1 \cdot a = F_2 \text{[illegible]}}$$

Т.е. равнодействующая равна $\vec F_1 + \vec F_2$, а точка приложения определяется

Вопрос Зависит ли что-нибудь от F'?

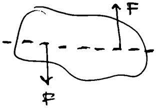
Ось, проходящая через OC — ~~[illegible]~~

Упражнение



Точка приложения будет за пределами системы сил.
(разложив бо́льшую силу на 2 сост.)

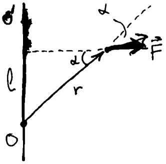
Для системы пары сил



Это не работает!

Линия действия $\vec{R}$ уходит на бесконечность.
Равнодействующей у пары сил нет

Ясно, что пара сил будет вращать АТТ.
Для характеристики этого вращения вводится понятие $\boxed{\text{момента}}$



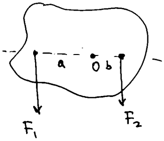
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot l$$ ← плечо силы

Момент направлен по правилу „штопора" (оно же правило правой руки)

Момент — это-то вроде вектора (есть модуль и направление)

Видно, что момент считается относительно оси OO', поскольку l одинаково для всех точек оси. $\forall\, P \in OO'$ $M_P(F) = \text{const}$

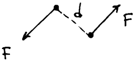
Вернёмся к системе параллельных сил. Там было $\boxed{F_1 \cdot a = F_2 \cdot b}$



Это — равенство моментов сил F_1 и F_2 относительно точки O.
(точнее, оси, к-рая проходит через (.) O)

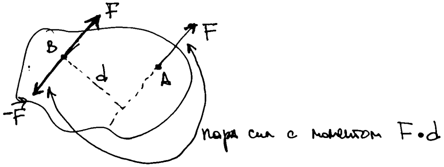
Момент пары сил по определению $M = F \cdot d$, где d — расстояние между силами.

Пара сил характеризуется только моментом, это — единственная характеристика.



Лемма приведения

Всякая сила, приложенная в точке A, экв. той же силе, приложенной в (·)B и паре, момент которой равен моменту силы отн. (·) B.



пара сил с моментом F·d ▲

Общие условия равновесия

∃ есть силы $\vec F_1, \ldots, \vec F_n$. Выберем произв. точку O.

Перенесём туда все силы. Появятся пары, момент к-рых равен $\boxed{\pm F_i \cdot d_i}$

Раз силы в одной точке, то их можно сложить, получим

$\vec R = \vec F_1 + \ldots + \vec F_n$. И суммарный момент $M = \pm F_1 \cdot d_1 \pm F_2 \cdot d_2 \pm \ldots \pm F_n \cdot d_n$.

Как мы знаем, для равновесия необходимо $\boxed{\vec R = 0}$. Это первое условие.

Но остались ещё пары, они будут вращать тело, если не $\boxed{M=0}$

Это второе условие.

Вопрос Как эти условия зависят от точки O?

~~Отв~~ В системе сил, где $\vec R = 0$ момент не зависит от точки.

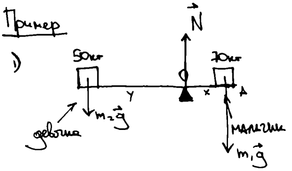
Д $\vec M_O = \vec r_1 \times \vec F_1 + \vec r_2 \times \vec F_2 + \ldots + \vec r_n \times \vec F_n$. $\vec M_{O'} = (\vec r' + \vec r_1) \times \vec F_1 + \ldots + (\vec r' + \vec r_n) \times \vec F_n =$

$$= \vec r_1 \times \vec F_1 + \ldots + \vec r_n \times \vec F_n + \vec r' \times \underbrace{[\vec F_1 + \ldots + \vec F_n]}_{\vec R = 0} = \vec M_O .$$ ▲

Таким образом, можно писать условие $\vec{M}=0$ для любой произвольной точки – той, которая удобнее.

Пример

1)


$\vec N$
50кг
70кг
y
x
A
$m_2\vec g$
девочка
мальчик
$m_1\vec g$

$$M_0 = 70кг\cdot 10^{Н}/_{кг}\cdot x - 50кг\cdot 10^{Н}/_{кг}\cdot y = 0$$

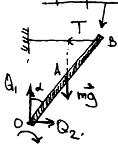
$$7x = 5y$$

Момент отн. (·) A:

$$\begin{cases} M_A = Nx - m_2 g(x+y) \\ N = m_1 g + m_2 g \end{cases} \Rightarrow M_A = m_1 g x + \cancel{m_2 g x} - \cancel{m_2 g x} - m_2 g y = (m_1 x - m_2 y) g$$

Действительно, момент не зависит от точки, если $\sum \vec F = 0$.

2) Фрамуга окна


T
B
A
Q_1
α
$m\vec g$
O
Q_2

OA = L/2, OB = L

Найдем силу реакции в опоре фрамуги.

Сумма сил равна нулю: $\vec Q + \vec T + m\vec g = 0$. $\vec Q$ можно разложить на 2 части.

Значит, по каждой оси тоже.

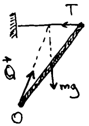
По вертикали: $\boxed{Q_1 = mg}$

По горизонтали: $\boxed{Q_2 = T}$

Уравнение моментов отн. (·) O:

$$mg\cdot\frac{L}{2}\cdot\sin\alpha = T\cdot L\cdot\cos\alpha \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{mg}{2}\cdot tg\alpha}$$

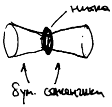
Т.е. $Q_1 = mg$, $Q_2 = \frac{mg}{2} tg\alpha$



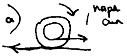
Куда направлен $\vec Q$? Можно ещё по т. о 3-х силах.

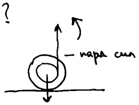
Почему $\vec Q$ напр. не вдоль фрамуги? Потому что она массивная.

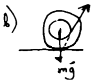
Демонстрация
(S&S exp., 1.14)


нитка
бум. стаканчики

Куда будет вращаться?





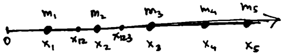


– не будет вращаться вовсе.

Центр тяжести

Мы умеем складывать 2 параллельные силы; а что если их больше?

Рассмотрим такую задачу: пусть есть стержень



Чему равна равнодействующая и в какой точке она приложена?

1) m_1 и m_2 $R_{12} = F_1 + F_2 = m_1 g + m_2 g$

По правилу слож. 2-х ∥ сил, получим: $m_1\cancel{g}(x_{12}-x_1) = m_2\cancel{g}(x_2-x_{12})$

$$x_{12} = \frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

2) R_{12} и m_3 $R_{123} = R_{12} + m_3 g = (m_1+m_2+m_3)g$

Опять склад. две ∥ силы: $(m_1+m_2)\cancel{g}\cdot(x_{123}-x_{12}) = m_3\cancel{g}(x_3-x_{123})$

$$x_{123} = \frac{m_1x_1+m_2x_2+m_3x_3}{m_1+m_2+m_3} \Leftarrow \quad x_{123}(m_1+m_2+m_3) = m_3x_3 + (m_1+m_2)x_{12} = $$

$$= m_3x_3 + m_1x_1 + m_2x_2$$

3) n масс $\boxed{x_{ц.т.} = \frac{m_1x_1+\dots+m_nx_n}{m_1+\dots+m_n}}$

центр тяжести (или центр масс)

Ясно, что если масса в 2d, то

$$\boxed{y_{ц.м} = \frac{m_1y_1+m_2y_2+\dots+m_ny_n}{m_1+\dots+m_n}}$$

Вопрос Пусть есть лёгкий стержень с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$. В какой точке его нужно подвесить, чтобы он был в равновесии?

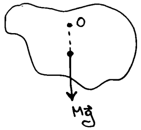
По построению — в ц.м.

Вопрос Где находится ц.м. однородного стержня длиной L?

Вычислить, пользуясь формулами. (разбив на много кусочков)

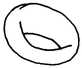
Нахождение центра масс

Возьмём тело. Подвесим его так, чтобы точка подвеса была выше ц.м. и находилась с ним на вертикальной оси.

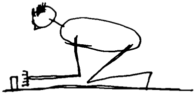


Очевидно, что тело будет в равновесии.
Если теперь взять другую точку подвеса, то точка пересечения этих 2-х прямых будет ц.м., поскольку он лежит на каждой прямой.

Вопрос Может ли центр масс лежать вне тела?



Демонстрация (ФАН) мальчик и девочка, различие в центре масс (S&S exp, 1.15)

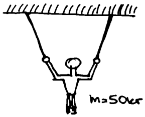


← где ц.м. и почему от него всё зависит?

Несколько вопросов про равновесие и нить.

(лучше потом, после стр. 20)

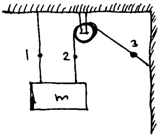
1)



$m = 50$ кг, $g = 10 \frac{Н}{кг}$

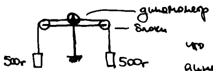
Сила натяжения левого каната:
а) > 250Н
б) = 250Н
в) < 250Н
?

2)



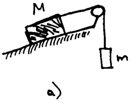
Как соотносятся между собой силы натяжения в нитях 1, 2, 3?

4) **Демонстрация?**

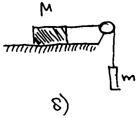


Что покажет динамометр?

3) Сравните силы натяжения нитей в обоих случаях:



а)



б)

1) $T_a > T_b$
2) $T_a = T_b$
3) $T_a < T_b$
?

Сила трения

Кроме сил тяжести и реакции опоры, ещё бывает сила трения

Трение
- покоя (нет проскальз. трущихся пов-тей)
- скольжения (есть проск.)

обычно $0<\mu<1$

Основные свойства

1) сила трения покоя не может быть больше чем F_{max}.

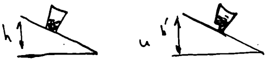
2) F_{max} (при к-рой начинается проскальз.) $= \mu N$

от чего зависит μ?

3) $\vec{F}_{тр.\ скольж.} \uparrow\downarrow \vec{v}$, , $F_{тр.\ скольж.} \approx \mu N$.

Вопрос Зависит ли $F_{тр.}$ от площади контакта?

Демонстрация (S&S exp., 1.17)



$h = h'$?

также насыпать разное количество монеток.

Рассуждения про реальную площадь контакта и природу силы трения.

Оценка площади контакта

Рассмотрим 1кг блок стали на стали. Сила отталкивания ~ $5\cdot10^{-9}$ Н/атом.

Эта сила обеспечивает $\vec{N}=mg=10Н \Rightarrow 5\cdot10^{-9}Н\cdot\#атомов = 10Н \Rightarrow$

$\#атомов = 2\cdot10^{9}$.

Радиус атома $\sim 2\cdot10^{-10}м \Rightarrow S\sim 4\cdot10^{-20}м^2$. Полная площадь: $4\cdot10^{-20}м^2\cdot2\cdot10^{9} =$

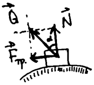
$= 8\cdot10^{-11}м^2$.

$= 8\cdot10^{-7}см^2$.

Кубик имеет объём $\sim 125 см^3 \Rightarrow$ площадь $\sim 25 см^2$.

Итак, $\dfrac{\text{„реальная" площадь}}{\text{видимая площадь}} \approx \dfrac{8\cdot10^{-7}см^2}{25см^2} = \boxed{10^{-8}}$!

Можно рассматривать силу трения как часть силы реакции опоры.

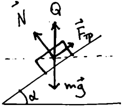


Заметим, что $F_{тр} \le \mu N \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha \le \mu$

↑ „угол трения", когда „=".

Можно решить несколько задач, исходя из условий равновесия.

1)



при каком угле α начнётся скольжение?

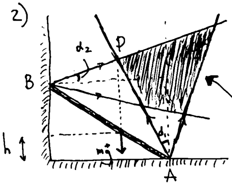
$\vec Q = \vec F_{тр} + \vec N$

Равновесие: $\vec Q$ по вертикали ⇒ угол трения совпадает с α.

$\Rightarrow \mu = \operatorname{tg}\alpha$.

Другой способ, более формальный.
$$\begin{cases} F_{тр} = \mu N = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \mu = \operatorname{tg}\alpha.$$

2)



Лестница AB невесома. На какую высоту h может подняться человек, не нарушая равновесия? К-ты тр. μ_1 и μ_2.

$\mu_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$

$\mu_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$

область, в к-рой лежат линии действия сил реакции опоры на лестницу.

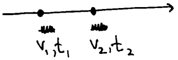
По т. о 3-х силах нужно, чтобы сила тяжести тоже попадала в эту область. Крайняя точка – P.

Интересно, что от массы человека ответ не зависит.

Выход из равновесия. Одномерное движение.

В случае с трением мы видели, что если наклонить слишком сильно, то брусок поедет. Но как он поедет? С ускорением.

Ускорение мера изменения скорости.



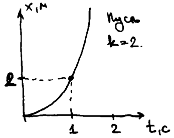
$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Чем меньше интервал, тем лучше.

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, $\Delta t \to 0$. Аналогия со скоростью: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, $\Delta t \to 0$.

Рассмотрим пример пусть координата меняется со временем как $x = k \cdot t^2$

Хотим найти скорость и ускорение в момент времени $t = 1с$.



Пусть $k = 2$.

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$x_1 = k \cdot t_1^2 = 2м$

Какое взять t_2?

1) $t_2 = 1.5с \Rightarrow x_2 = 2\frac{м}{с^2} \cdot 2.25с^2 = 4.5м$

$v = \frac{4.5м - 2м}{1.5с - 1с} = \boxed{5 м/с}$

2) $t_2 = 1.2с \Rightarrow x_2 = 2\frac{м}{с^2} \cdot 1.44с^2 = 2.88м$

$v = \frac{2.88м - 2м}{1.2с - 1с} = \boxed{4.4 м/с}$

3) $t_2 = 1.1с \Rightarrow x_2 = 2 м/с^2 \cdot 1.21 с^2 = 2.42м \Rightarrow v = \frac{0.42м}{0.1с} = \boxed{4.2 м/с}$

4) $t_2 = 1.01с \Rightarrow x_2 = 2 м/с^2 \cdot 1.0201с^2 = 2.0402м \Rightarrow v = \frac{.0402м}{0.01с} = \boxed{4.02 м/с.}$

5) приближается к 4 м/с. Можно ли доказать? (если $t_1 = 1с$ то $v = 4\frac{м}{с}$)

Пусть $t_2 = t_1 + \delta$. Тогда $x_2 = k \cdot (t_1 + \delta)^2 = k \cdot t_1^2 + 2kt_1\delta + \delta^2$.

$$v = \frac{\cancel{kt_1^2} + 2kt_1\delta + \delta^2 - \cancel{kt_1^2}}{\underset{\overset{\|}{\delta}}{t_2 - t_1}} = 2kt_1 + \delta.$$ Когда $\delta \to 0$, то $\boxed{v \to 2kt_1}$

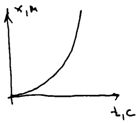
3) $t_3 = 1.1c$ $\Rightarrow$ $a = \dfrac{4.4\frac{м}{c} - 4\frac{м}{c}}{1.1c - 1c} = \boxed{4\,м/c^2}$ Постоянно?

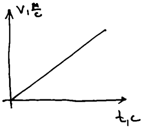
$v_3 = 4.4c$

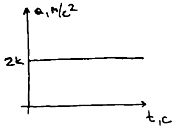
4) $t_2 = t_1 + \delta$ $a = \dfrac{\cancel{2kt_1} + 2k\delta - \cancel{2kt_1}}{t_1 + \delta - t_1} = \boxed{2k = const}$

$v_2 = 2kt_1 + 2k\delta$

Итак, если $x = kt^2$, то $v = 2kt$, $a = 2k$.







Угол наклона?

Тангенс?

Вопрос А что если $x = k \cdot t^3$?

Терминология a постоянно — равноускоренное дв-е ($v = a \cdot t$, $x = \frac{at^2}{2}$)

$a = 0$ — равномерное движение ($v = const$, $x = vt$)

a пост. и < 0 — равнозамедленное дв-е

В основном будем рассматривать случай постоянного ускорения, $a = const$.

О размерностях $v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow [v] = \frac{м}{c}$

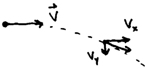
$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow [a] = \frac{м/c}{c} = м/c^2$

Двумерное движение

Перемещение на плоскости – тоже вектор (как и сила).

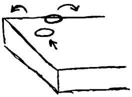
Вопрос Влияет ли движение в одном напр. на движение в другом?

Бросим камень горизонтально – как связаны между собой верт. и гор. скорости?



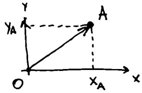
$V_x \sim V_y$?

Демонстрация
(S&S exp., 1.23)



одна монета имеет гор. скорость,
а другая нет, но падают одновременно.

Координаты точки и система отсчёта.

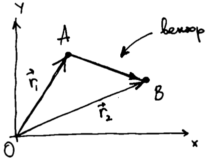


$\vec{r}$ – радиус-вектор. (не только величина, но и направление)

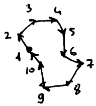
Длина – модуль радиус-вектора, r или $|\vec{r}| = x_A^2 + y_A^2$

координаты – x_A и y_A. – длины проекций $\vec{r}$ на оси x_A и y_A.

Перемещение:
точка переместилась из A в B.



вектор перемещения $\vec{S} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta\vec{r}$ (определение)



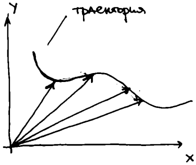
$\vec{S} = 0$, хотя точка прошла какое-то расстояние

Можно складывать несколько перемещений по очереди.

Скорость в 2d

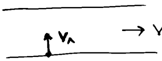
По аналогии с 1d $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$, $\Delta t \to 0$

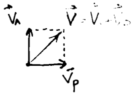
скорость – вектор, направленный в сторону перемещения.


Y
траектория
X

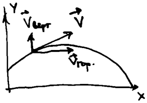
Как складывать скорости?

Стандартный пример – лодка и река.




$\vec{v}_л$
$\vec{v} = \vec{v}_л + \vec{v}_p$
$\vec{v}_p$

Поскольку скорость – вектор, можно раскладывать на составляющие.


Y
$\vec{v}_{верт}$
$\vec{v}$
$\vec{v}_{гор.}$
X

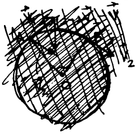
можно говорить о скорости по вертикали (v_y) и по горизонтали (v_x). И рассматривать движение независимо.

Ускорение в 2d

По аналогии с 1d: $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ Направлено в сторону изменения скорости. (а не в сторону перемещения)

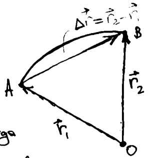
Ускорение можно складывать как и скорости. И тоже раскладывать на сост.

Пример Движение по окружности с пост. скоростью.



$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$

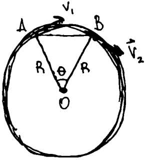
(Сначала – докажем, что $\vec{v} \perp \vec{r}$)

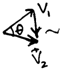

$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$
B
A
$\vec{r}_2$
$\vec{r}_1$
O

Видно, что когда $\Delta\vec{r} \to 0$, он превр. в кас. к окр-ти.

Таким образом, мгновенная скорость напр. $\perp \vec{r}$ (по касат. к окр-ти).

Теперь надо возиться с ускорением.


$\vec{v}_1$
A
B
$\vec{v}_2$
R
θ
R
O


$\vec{v}_1$
θ
$\vec{v}_2$

$\sim \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \Delta\vec{v}$

Имеем подобные ΔOAB и $\vec{v}_1$-$\vec{v}_2$-$\Delta\vec{v}$
(угол и две стороны)
$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$

Если $\Delta t \sim 0$ ($\theta \sim 0$), то $AB \approx \overset{\frown}{AB} = v\Delta t$

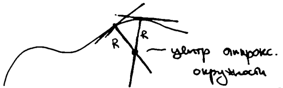
Из 2-х Δ: $\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\Delta t}{R} \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} = a$ (если $\Delta t \to 0$)

При движении по окр-ти ускорение удобно расп. на 2 сост.: перпендикулярно радиусу и по радиусу.
(тангенциальное) a_τ (центростремительное) a_n

Формулу для a_n мы только что получили: $a_n = \frac{V^2}{R}$.

Если скорость по модулю постоянна, то $a_\tau = 0$.

Вопрос Что делать, если движение по кривой?



Каждый участок кривой можно приблизить окружностью. Центр этой окружности находится так.

У такой окружности будет ~~[illegible]~~ радиус R — радиус кривизны кривой.

Если знать ускорение в точке и скорость — можно найти его: $R = V^2/a$.

Пример 1) Спутник на орбите Земли.

Высота = 200 км, можно считать, что радиус орбиты $\approx R_\oplus = 6400$ км.

Период обращения: $T \sim 5000$ с (полтора часа).

$L = 2\pi R$

Какое ускорение у спутника?

$$V = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 6.4 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^3} = 8 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

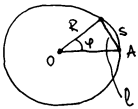
$$a = V^2/R = \frac{64 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2}{6400 \text{ км}} \approx \underline{10 \text{ м/с}^2}$$ — как ускорение свободного падения.

Спутник „падает" к пов-ти Земли, из-за этого у него круговая орбита.

2) „LHC". Радиус ~ 100 м, $v \sim c = 3 \cdot 10^8$ м/с. $\Rightarrow a = 10^{15} \text{ м/с}^2 \gg g$.

То есть, g можно пренебречь по сравнению с a_n.

Несколько определений для движения по окружности.



Положение точки можно характеризовать углом φ.

Линейная скорость: $v = \lim \frac{\Delta l}{\Delta t}$ $\left(\frac{\text{перемещение}}{\Delta t} \right)$

Угловая скорость: $\omega = \lim \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$

Но $s = R \cdot \Delta\varphi \approx l$ если $\Delta\varphi$ маленький. $\Rightarrow$

$$\boxed{V = \frac{R \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \omega}$$

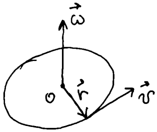
Тогда $\boxed{a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R}$ Если $v = \text{const}$, то $\omega = \text{const}$.

Ещё кое-что. Период обращения $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$, частота $\boxed{\nu = \frac{1}{T}}$

$[T] = с$, $[\nu] = 1/с = Гц$.

Вопрос Всё-таки, $a_n \sim R$ или $\sim 1/R$? Вопрос чему равно отношение ускорений для точек каруселей на расст. $R/2$ и R от центра ?

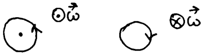
Угловая скорость — вектор ?



Нужно как-то характеризовать направление вращения.

$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Направление по правилу правой руки.



Опыт с вращением груза на нитке — можно ли связать ускорение с силой натяжения?

Динамика

Характеристики движения: $\vec{r}(t), \vec{v}(t), \vec{a}(t)$. Что отвечает за их изменение, почему они меняются?

Равновесие: $\vec{v}(t)=0$ $(\vec{a}(t)=0)$, $\vec{r}(t)=\text{const}$. Что может вывести из равновесия?

Нарушение его условий:
- $\sum \vec{F} \neq 0$
- $\sum \vec{M} \neq 0$

Будем рассматривать сначала случай $\sum \vec{F} \neq 0$.

Опыт: $\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}}$ (второй закон Ньютона)

То есть $\sum \vec{F} \sim \vec{a}$, а коэффициент пропорциональности – инертная масса

Собственно, так можно определить инертную массу, и не факт, что она связана с гравитационной.

Опыт: свободное падение тела под действием силы тяжести.

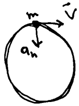
Бросим с Пизанской башни два тела, с грав. массами $m_1^г$ и $m_2^г$

Ускорения: $a_1 = \frac{m_1^г g}{m_1^и}$ и $a_2 = \frac{m_2^г g}{m_2^и}$ $\Rightarrow$ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1^г m_2^и}{m_1^и m_2^г}$ с точностью / до 10^{-11}

Опыт: тела достигают Земли одновременно. $\Rightarrow$ $a_1 = a_2$ и $m^г = m^и$.

Сила – вектор, и ускорение – вектор. То есть, можно разложить силу на 2 составляющие и рассматривать движение вдоль каждой из них независимо.

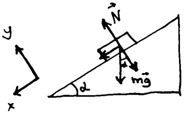
Если тело движется по окр. с пост. скоростью:



$|\vec{v}| = \text{const}$ $\quad \vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$, но $\vec{a}_\tau = 0$

$a_n = \frac{v^2}{R}$. Таким образом, на тело действует сила $\parallel$ направлении радиуса $m\frac{v^2}{R}$ (сила, с к-рой надо тянуть верёвку)

Другой вариант разложения



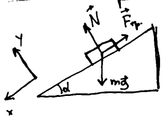
Можно записать з-н Ньютона для каждой из осей:

$$m\vec{a}=\vec{F} \qquad \begin{cases} \text{ось } x: & ma_x = mg\sin\alpha \\ \text{ось } y: & 0 = N - mg\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = g\sin\alpha \\ a_y = 0 \end{cases}$$

Важно: сохранять одну и ту же систему координат в течение всей задачи.

Hint: при α $a_x=0$ => всё правильно.

Включим трение

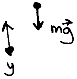


$$m\vec{a}=\vec{N}+m\vec{g}+\vec{F}_{тр}$$

$$\begin{array}{l} \text{ось } x: \\ \text{ось } y: \\ \text{доп. усл.}: \end{array} \begin{cases} ma_x = mg\sin\alpha - F_{тр} \\ 0 = N - mg\cos\alpha \\ F_{тр} = \mu N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha \\ a_y = 0 \end{cases}$$

Замечание: $a_x=0$ (равновесие): $\sin\alpha = \mu\cos\alpha \Rightarrow \boxed{\mu = \operatorname{tg}\alpha}$
как и было раньше.

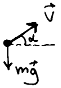
Ещё пример (камень под углом к горизонту)



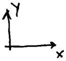
$m\vec{a} = m\vec{g}$

ось y: $a_y = g$, $a_x = 0$.

А если



?



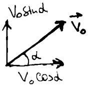
Всё равно $a_x=0$, $a_y=-g$

Это значит, что по оси x движение равномерное ($a_x=0$), а по y – р/уск.

Т.е. $V_x = V_{0x}$

$V_y = ?$ ускорение $-g$, значит $V_y \sim -gt$

Но есть ещё начальная скорость $V_{0y} = V_0\sin\alpha$



Итого: была скорость $V_0\sin\alpha$, но уменьшается на gt =>

$$\begin{cases} V_y = V_0\sin\alpha - gt \\ V_x = V_0\cos\alpha \end{cases}$$

Вопрос Как меняется координаты $x(t)$ и $y(t)$?

С x понятно, раз $V_x = \text{const}$

движение по y можно „разложить“ на две части: $\overset{V_0\sin\alpha}{\text{равномерное}}$ и $\overset{-gt}{\text{р/уск.}}$

Для каждого всё известно.

Важная особенность Может быть так, что $a=0$, но движение при этом есть.

В случае с камнем $a_x=0$, но при этом камень летит в гор. напр-и. Равномерно (скорость $V_x=V_0\cos\alpha=\text{const}$) и прямолинейно. Нет сил, действ. в этом направлении ⇒ ничего не меняется.

Первый закон Ньютона Существуют такие системы отсчёта, в которых тело, не взаимодействующее с другими телами, сохраняет состояние равномерного и прямолинейного движения. Такие с/о – инерциальные.

В случае с камнем – инерц. с/о Земля, поскольку в ней камень по гор. летит равномерно и прямолинейно. [Вычислить ускорение из-за вращ. Земли; $a=\frac{4\pi^2R_\oplus}{T}$] $\approx 3.4\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}$

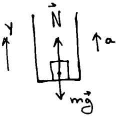
Представим, что мы бежим за камнем со скоростью $V_0\cos\alpha$. Что в нём будет происходить? Камень будет падать вертикально вниз.

Вопрос А есть ли неинерциальные системы отсчёта?

III-й з-н Ньютона
$\vec F_{12}=-\vec F_{21}$ силы, с кот. вз., противопол. по напр-ю и действуют вдоль прямой

Ещё про движение с ускорением.

Ящик массой m стоит на полу лифта, который движется с ускорением $\vec a\uparrow\downarrow\vec g$.
С какой силой лифт давит на ящик?



1) если лифт покоится, то $N=mg$. По физике – сила упругости пола.

2) если есть ускорение a, то $m\vec a=\vec N+m\vec g$, или

$$ma_y=N_y-mg \Rightarrow N_y=m(a+g).$$

Т.е. сила больше, чем mg. – перегрузка! Вес $\vec P=-\vec N$

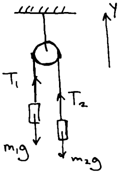
Интересно, что результат не зависит от направления движения – т.е. перегрузка будет и в случае торможения лифта.

Заметим, что $\vec N=m(\vec a-\vec g)$, т.е. если $\vec a=\vec g$, то невесомость!

Ещё пример: человек подпрыгивает. Всё время от отрыва до приземления он в невесомости.

МАШИНА АТВУДА

Разберемся внимательнее с блоком и верёвкой.



$$\begin{cases} m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 \\ m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 \end{cases}$$

После идеализаций: (пусть $m_1 > m_2$)

$$\begin{cases} -m_1a = mg + T_1 \\ m_2a = -m_2g + T_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T = \frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}g, \quad a = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}g$$

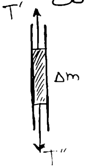
Если $m_1 = m_2 \Rightarrow a = 0$ (тела либо в покое, либо движутся равномерно)

ВЫВОДЫ: если нить невесома и нерастяжима, то T по модулю одинакова во всех точках нити.

Идеализации

1) нить нерастяжима – не меняется длина $\Rightarrow a_1 = -a_2$

2) по III з-ну сила, с которой груз растягивает нить, равна сила натяжения нити. Но как соотносятся между собой T_1 и T_2?



$$\Delta m\vec{a} = \vec{T}' + \vec{T}'' + \Delta m\vec{g}.$$

Если нить невесома, то $\Delta m = 0$ и тогда $\vec{T}' = -\vec{T}'' \Rightarrow$

$$T' = T''$$

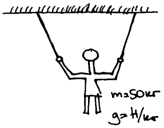
Значит, в участках нити слева и справа от блока натяжения одинаковы.

3) Блок невесом. Если бы ~~бы~~ $T_1 \neq T_2$, то на него действует пара сил и он должен раскручиваться. Значит, $T_1 = T_2$.

Димону: разобрать задачи на блоки

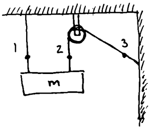
См. стр. 8 для вопросов.

1)



Сила натяжения левого каната
- а) >250Н
- б) =250Н
- в) <250Н

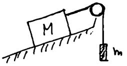
2)



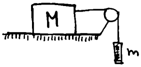
Как соотносятся между собой силы натяжения нити в точках 1, 2 и 3?

3)

а)



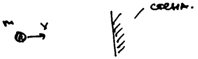
б)



1) $T_a > T_b$
2) $T_a = T_b$
3) $T_a < T_b$

?

Импульс



а) удар упругий, $\Delta t = 0.1$с, $v = 30$ м/с, $m = 50$г

Сила ?

б) удар неупругий, ——— " ———

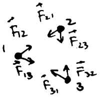
Разница: отскакивает / не отскакивает.

$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t}$$

$\boxed{\text{Def}}$ Импульс: $\underline{\vec{p} = m\vec{v}}$ – вектор.

II з-н Ньютона: $\underline{\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a} = \underline{\vec{F}}$ для м.т.

Для системы?



$$\begin{cases} \Delta\vec{p}_1 = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13})\Delta t + \vec{F}_1^{ext}\Delta t \\ \Delta\vec{p}_2 = (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23})\Delta t + \vec{F}_2^{ext}\Delta t \\ \Delta\vec{p}_3 = (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32})\Delta t + \vec{F}_3^{ext}\Delta t \end{cases}$$

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 + \Delta\vec{p}_3 = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{32})\Delta t + (\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_3^{ext})\Delta t = $$

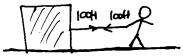
$$\xrightarrow[\text{Н-на}]{\text{III-й з-н}} = \vec{F}^{ext}_{1+2+3}\Delta t$$

Итого: $\underline{\frac{\Delta\vec{p}_{\text{сист.}}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{ext}}$

$\boxed{\text{Def}}$ Изолированная система: $\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i^{ext} = 0$, внешние силы скомпенсированы.

$\Downarrow$ $\Delta\vec{p} = 0 \Rightarrow \underline{\vec{p} = \text{const}}$ – сохраняется (проекция)

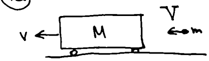
Вопрос



Тянем ящик с силой 100Н. Но со стороны ящика тоже 100Н – скомпенс.!

Почему движется?

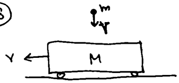
①а



пуля застревает в тележке. Конечная скорость?

Ответ: $u = \frac{Mv + mV}{M+m} > v$

①б



Тот же вопрос.

Ответ: $u = \frac{Mv}{M+m} < v$!

② 2 одинаковые лодки без сопротивления (по инерции) движутся по пов-ти озера. Начинается дождь (вертикальный). Спортсмен из лодки №1 выбрасывает воду, спортсмен из лодки №2 – спит. Лодка движется только ∥ килю. Кто быстрее финиширует?

Пусть попало дождя m. Тогда $u = \frac{Mv}{M+m}$ Изм. скорости $= v - u = \frac{v}{1 + M/m}$

Т.е. где M/m больше, тем изм. скорости меньше.

След., победит спящий.

Импульс и центр масс

Вспомним из статики: $\vec{r}_{ц.м.} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$. Тогда $\vec{V}_{ц.м.} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\boxed{\sum m_i} = M}$

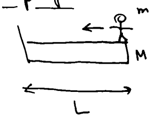
$m_i \vec{v}_i = \vec{p}_i \Rightarrow \Delta p_1 + \ldots + \Delta p_N = \Delta(M \vec{V}_{ц.м.})$.

Но, с другой стороны, $\Delta\vec{p}_1 + \ldots + \Delta\vec{p}_N = \Delta\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{ext}$ $\Rightarrow$

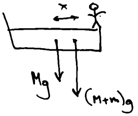
$$\boxed{M \Delta\vec{V}_{ц.м.} = \sum_{i=1}^{N} F_i^{ext}}$$

Итак, если $\sum F_i^{ext} = 0$, то ц.м. движется равномерно и прямолинейно, или покоится.

Пример



На сколько сдвинется ~~[illegible]~~ лодка относительно берега?



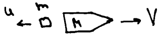
$$Mx = m\left(\frac{L}{2}-x\right) \Rightarrow x = \frac{mL}{2(M+m)} \Rightarrow$$

$$\text{сдвиг лодки} = 2x = \frac{mL}{2(M+m)}$$

Реактивная сила

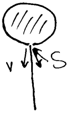
Если выбрасываем какое-то массы, то ц.м. должен остаться на месте ⇒ Газ из косм. корабля полетит в одну сторону, а корабль — в другую.

Листок (реактивная сила)

(1а) 

Скорость ракеты после выброса одной порции?

(1б) Двух порций? k порций?

(2) 

Газ с плотностью ρ. На сколько уменьшится сила натяжения нити?

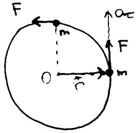
$$V = vS\Delta t \Rightarrow \Delta m = \rho V = \rho v S \Delta t$$

$$\Delta p = \rho v^2 S \Delta t \Rightarrow \underline{\Delta T} = \Delta p/\Delta t = \underline{\rho v^2 S}$$

Вращение в динамике

Мы разобрали случай, когда $\sum\vec F\neq 0$ – появляется ускорение. А что если $\sum\vec M\neq 0$?

Простой пример



Приложим силу, постоянную по модулю, но всё время меняющую направление.

Если бы направление не менялось, то можно было бы написать $F=ma$. ~~Запишем в векторном виде:~~

$$\cancel{\vec r\times\vec F=\vec r\times m\vec a} \Leftrightarrow \cancel{(\text{умножим на } \vec r\times)}$$

$$\cancel{\vec M = m\,\vec r\times\frac{\Delta\vec v}{\Delta t}}$$

Пусть в момент времени есть тангенциальное ускорение a_τ (за счёт силы F). Тогда можно написать

$$ma_\tau=F \Rightarrow mra_\tau=r\cdot F$$

Но $r\cdot F$ – момент силы относительно точки O. $r\cdot a_\tau=r^2\cdot\beta$, β – угловое ускорение.

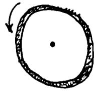
Получается, что $mr^2\cdot\beta=M$. Очень похоже на II-й закон Ньютона, но

$$F\leftrightarrow M$$
$$a\leftrightarrow\beta$$
$$m\leftrightarrow mr^2$$

Определение $I=mr^2$ – момент инерции точки относительно оси, проходящей через O

Второй закон Ньютона для вращения: $\boxed{I\vec\beta=\sum\vec M^{ext}}$ (обратить внимание на вектора).

А что если не точка? Пусть обруч.

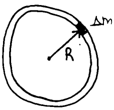


R = 30 см
M = 3 кг – велосипедное колесо.

Какую силу надо приложить, чтобы раскрутить велосипедное колесо?

Как посчитать момент инерции?

Момент инерции можно посчитать, разбив обод на кусочки.



$$I_{\Delta m} = \Delta m \cdot R^2 \Rightarrow I = \sum I_{\Delta m} = M \cdot R^2 \approx 0.27\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$$

Какую силу надо приложить, чтобы раскрутить его до 10 км/ч за 5 секунд?

$$\Delta V = 10\ \text{км/ч}, \quad \Delta t = 5\text{с} \Rightarrow a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \approx 0.55\ \text{м}/\text{с}^2$$

$$\beta = \frac{a}{R^2} = \frac{0.55\ \text{м}/\text{с}^2}{(0.3\text{м})^2} \approx 6\ \text{м}^{-1}\text{с}^{-2}$$

$$I\beta = M = F \cdot R \Rightarrow 0.27\ \text{кг}\cdot\text{м}^2 \cdot 6\ \text{м}^{-1}\text{с}^{-2} \approx F \cdot 0.3\text{м} \Rightarrow$$

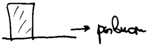
$$\underline{F \approx 6\text{Н}}.$$

А если бы мы раскручивали шар?

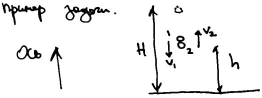
Всё сложнее, потому что $I_{\ominus} = 2/5\, MR^2$.

Приближённое сохр-е импульса

Демонстрация



пример задачи.



Шарик подбрасывают вверх со скоростью $V_0 = 1$ м/с.

Когда он достигает верх. точки. Бросают второй такой же, $2V_0 = 2$ м/с.

Скорость после столкн.?

1) $H = \frac{V_0^2}{2g}$, $h = H - \frac{gt^2}{2}$ — для шарика №1

$h = 2V_0 t - gt^2/2$ ~~⇔~~ — для №2 $\Rightarrow$ $t = V_0/4g$.

2) Скорость перед столкн.: $V_1 = gt = V_0/4$

$$V_2 = 2V_0 - gt = \frac{7V_0}{4}$$

Импульс до удара $p = \frac{7V_0}{4}m - m\frac{V_0}{4} = 1.5\,mV_0$

3) Как происх. удар? Скорость звука.....

$$\Delta t \sim d/c \sim \frac{10^{-2}\,м}{10^{3}\,м/с} \sim 10^{-5}\,с$$

4) Система незамкнута, есть сила тяжести. Её импульс

$$F\Delta t = mg\Delta t.$$

5) сравним с импульсом шариков $\frac{\cancel{m}g\Delta t}{1.5\cancel{m}V_0} \approx \frac{10^{-5}\,м/с}{1.5\,м/с} \approx 10^{-5}$

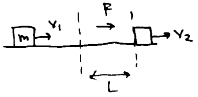
Изм. импульса за счёт внеш. сил — пренебреж.

Окончательное решение этой задачи — чуть позже.

Энергия

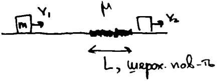
Листок про энергию и работу

①



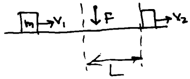
$v_2^2 - v_1^2 = ?$

②


m
v_1
μ
v_2
L, шерох. пов-ть

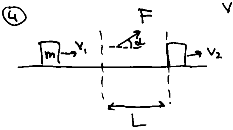
$v_2^2 - v_1^2 = ?$

③



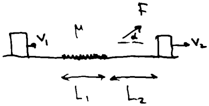
$v_2^2 - v_1^2 = ?$

④



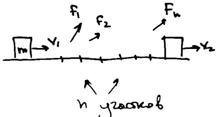
$v_2^2 - v_1^2 = ?$

⑤


v_1
μ
F
α
v_2
L_1
L_2

$v_2^2 - v_1^2 = ?$

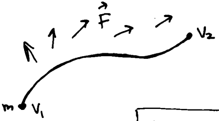
⑥


F_1
F_2
F_n
m
v_1
v_2
n уголков

$v_2^2 - v_1^2 = ?$

⑦ Обобщите предыдущие результаты

Точка движется по кривой

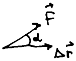


Подсчитаем работу на кусках

$$\boxed{\frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) = \sum_i |\vec{F}_i| \cdot \cos\alpha_i \cdot |\Delta \vec{r}_i|}$$

Теорема о кинетической энергии

Def Работа ΔA силы $\vec{F}$ на участке $\Delta\vec{r}$: $\Delta A = |\vec{F}|\cdot|\Delta\vec{r}|\cdot\cos\alpha$;



Полная работа: $A = \sum \Delta A$

Def Кинетическая энергия тела массы m и скоростью v:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

Теорема о кинетической энергии: изменение кин. энергии равно сумме работ всех действ. сил.

Энергия: $кг \cdot м^2/с^2 = Дж$

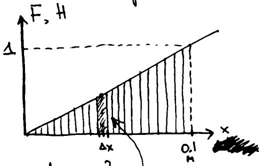
Если сила непостоянна, то нужно разбивать интервал на кусочки.

Пример Какую работу надо совершить, чтобы сжать пружину жесткости $k = 10 Н/м$ на $L = 10 см = 0.1 м$. ?

Проблема: сила всё время меняется, $F = kx$.

Надо разбить.

промежуток L на много кусочков Δx



$\Delta A = F \cdot \Delta x = kx \cdot \Delta x$

Что такое $kx \cdot \Delta x$?

Это площадь трапеции, т.к. $S_{\square} = \Delta x \cdot \frac{F(x-\Delta x) + F(x+\Delta x)}{2} = kx \cdot \Delta x$

Сумма всех таких площадей = площадь треугольника (красного).

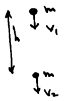
Площадь треугольника $= \frac{L \cdot F(L)}{2} = \frac{kL^2}{2} = \frac{10 Н/м \cdot 0.01 м^2}{2} = 0.1 Дж.$

Итак, чтобы сжать пружину на L, нужно совершить работу

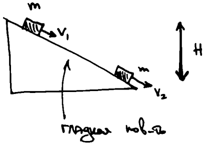
$$\frac{kL^2}{2}.$$

Потенциальная энергия

Листок (работа силы тяжести)

① 

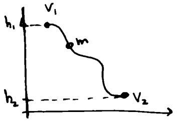
$V_2^2 - V_1^2 = ?$

② 

$V_2^2 - V_1^2 = ?$

③ Обобщите на случай:

$V_2^2 - V_1^2 = ?$



Hint: разбить на кусочки.

$$\frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) = \underbrace{mg(h_1 - h_2)}_{\text{работа } mg}$$

Перепишем. $$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2$$

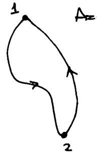
Тоже энергия

mgh – энергия взаимодействия (чего с чем?)

Def Силы, работа которых не зависит от траектории — потенциальные

Пример: сила тяжести или сила Гука.

~~[illegible]~~: Если под действием такой силы точка возвращается в начальное положение, то $A=0$.



Def Потенциальная энергия – энергия взаимодействия, которая зависит только от конфигурации тел. (взаимного расположения).

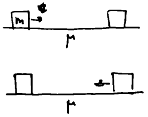
Потенц. энергия тела массы m в поле тяжести:

$$E_{\text{п}} = mgh.$$

Видно, что $A_{1\to2} = E_{п_1} - E_{п_2}$

$$A_{1\to2} + A_{2\to1} = 0.$$

Есть ли какие-нибудь непотенц. силы? Трение.



$A = 2F_{тр} \cdot L \neq 0$!

Итак, силы делятся на потенциальные (консервативные) и непотенциальные (неконсерв.)

$$A = A_{конв.} + A_{н/конв.}$$

По т. о. кин. энергии, $E_{к_2} - E_{к_1} = A_{конв.} + A_{неконв.} = E_{п_1} - E_{п_2} + A_{н/конв} \Rightarrow$

$$\underbrace{(E_{к_2} + E_{п_2})}_{E_2} - \underbrace{(E_{к_1} + E_{п_1})}_{E_1} = A_{н/конв.}$$

← полная механическая энергия

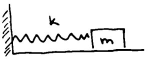
Итого, $\boxed{\Delta E = A_{н/конв.}}$ – закон изменения механической энергии.

Если неконсерв. силы не соверш. работу ($A_{н/конс.} = 0$), то $\Delta E = 0 \Rightarrow$

$E = const$ – з-н сохранения механической энергии.

Если $E = const$, то это значит что $E_к + E_п = const$ ⇒ энергия переходит из кинетической энергии в потенц. и наоборот.

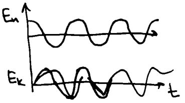
Пример



Пружину растянули на L и отпустили. Что дальше?

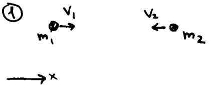
$$E = \frac{kL^2}{2} \to \frac{mv^2}{2} \to \frac{kL^2}{2} \to \dots$$

↑ можно вычислить макс. скорость



Примеры решения задач (импульс + ЗСЭ)

①



Два шарика, одинаковый материал. На сколько возрастёт температура после неупругого удара? Теплоёмкость c.

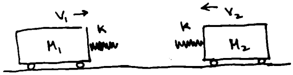
Неверный ход: $\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}=c(m_1+m_2)\Delta T$

так не может быть, потому что должен сохр-ся импульс.

нач. импульс $m_1v_1-m_2v_2$
кон. —"— : $(m_1+m_2)u$ $\Rightarrow$ $u=\frac{m_1v_1-m_2v_2}{m_1+m_2}$

Энергия: $\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}=\frac{(m_1+m_2)u^2}{2}+c(m_1+m_2)\Delta T \Rightarrow \Delta T=\frac{m_1m_2(v_1+v_2)^2}{2c(m_1+m_2)}.$

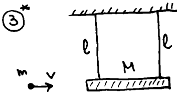
②



При столкн. происходит сжатие пружин, после чего вагоны расходятся. Макс деформация — ?

$$\begin{cases}\frac{M_1v_1^2}{2}+\frac{M_2v_2^2}{2}=\frac{kx^2}{2}+\frac{(M_1+M_2)u^2}{2} \quad \nwarrow \text{ВАЖНО!}\\ M_1v_1-M_2v_2=(M_1+M_2)u\end{cases} \Rightarrow x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_1M_2}{k(M_1+M_2)}}(v_1+v_2)$$

③*



Пуля застр., откл. на угол α. Нач. скорость пули v?

$h=l(1-\cos\varphi) \Rightarrow E_п=$ ~~mgh~~ [illegible] $(M+m)gl(1-\cos\overset{\alpha}{\cancel{\varphi}})$

Но $E_п \neq \frac{mv^2}{2}$ — ведь часть ушла в тепло!

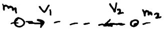
4 Сост. сразу после удара. Скорость v' $\Rightarrow$ $\frac{(M+m)}{2}v'^2=(M+m)gl(1-\cos\alpha)$

Но v': $mv=(M+m)v'$

$$\Rightarrow V=2\left(1+M/m\right)\sqrt{gl}\,\sin\alpha/2.$$

Столкновения частиц (Листок)

① Абсолютно неупругий удар: тела слипаются.

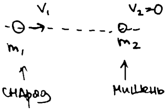
а) 

Скорость после столкновения?

б) Сколько энергии перешло в тепло?

② Упругий удар: сохр-ся и импульс, и мех. энергия системы.

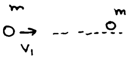
а) Лобовой удар, Скорость после ударов?


v_1
$v_2 = 0$
m_1
m_2
снаряд
мишень

Что будет, если $m_1 = m_2$?

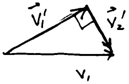
— " — если $m_1 < m_2$?

б) Нецентральный удар (бильярд)



Угол между скоростями разлёта?

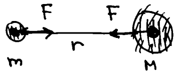
$$\begin{cases} \vec{V}_1 = \vec{V}_1' + \vec{V}_2' \\ V_1^2 = V_1'^2 + V_2'^2 \end{cases} \Rightarrow \text{Угол} = 90^\circ$$


$\vec{V}_1'$
$\vec{V}_2'$
V_1

Сила грав. вз-вия и её работа

Ньютон:

(м.т.)!



$\Rightarrow F = G\frac{mM}{r^2}$

Закон всемирного тяготения.

$G = 6.67\cdot 10^{-11}\ \frac{Н\cdot м^2}{кг^2}$

(грав. поле — — полезн. концепция)

Всегда сила притяжения

Пусть M — Земля, а m — какой-то объект. $F = G\frac{mM_\oplus}{r^2} = ma.$

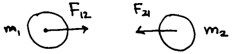
Если смотрим около Земли, то (на высоте $h \ll R_\oplus$) $F = G\frac{mM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2} \simeq G\frac{mM_\oplus}{R_\oplus^2} = mg \Rightarrow$

$$\boxed{g = G\frac{M_\oplus}{R_\oplus^2}} \qquad M_\oplus = 6\cdot 10^{24}\ кг \qquad R_\oplus = 6400\ км.$$

На другой планете? G — постоянно, а $M_\oplus$ и $R_\oplus$ меняются. ⇒ g другое.

Принцип суперпозиции Грав. поле, создаваемое какой-либо массой, не зависит от других масс.

Как притягиваются два шара?



заменим шар N1 на м.т. m_1

заменим шар N2 на м.т. m_2

Гр. поле в месте расп.-я шара N2 не изм. ⇒ F_{21} не изм.
⇒ F_{12} — не изм.

⇓

Сила притяжения между шариками =

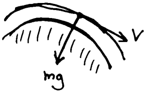
$G\frac{m_1 m_2}{R^2}$ как будто они точечные тела.

Вопрос   Возможно ли движение || пов-ти Земли?

Если Земля плоская, то нет:

.

А если Земля круглая?



Сила тяжести сообщает

$$a_{ц.с.} = \frac{v^2}{R} = \text{[illegible]} \Rightarrow$$

стационарная траект.

$$\frac{mv^2}{R} = mg \Rightarrow \underline{v = \sqrt{gR}} \approx \sqrt{10 \cdot 6400\,км} \approx$$

$$= \sqrt{10\,\tfrac{м}{с^2}\, 6.4 \cdot 10^6\,м} \simeq \underline{8\ км/с}$$

(первая космич. скорость)

А если на большой высоте h? Тогда

$$\frac{mv^2}{R_\oplus + h} = G\frac{mM_\oplus}{(R_\oplus+h)^2} \Rightarrow v^2 = G\frac{M_\oplus}{R_\oplus+h} = \frac{gR_\oplus^2}{R_\oplus+h}$$

Пусть $h = 200$ км $\Rightarrow$

$$v = \sqrt{\frac{10\,м/с^2 \cdot (6.4\cdot10^6\,м)^2}{(6.4+0.2)\cdot 10^6\,м}} \approx \sqrt{\frac{10\,\tfrac{м}{с^2}\cdot 64^2}{6.6}} \cdot 10^6\,м \approx$$

ТЕЛО СТАЛО СПУТНИКОМ

$$\underline{\simeq 7.87\ км/с}$$ – немного меньше I-й косм.

Замечание $v^2 = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus + h} = \frac{GM_\oplus}{r}$, r – радиус орбиты.

Но если спутник движется так что $v = const \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow$

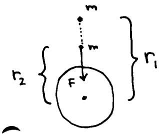
$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{GM_\oplus}{r} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_\oplus}{4\pi^2} = const.$$

$$\boxed{\frac{r^3}{T^2} = const}$$ для всех орбит вокруг одного и того же центра притяжения.

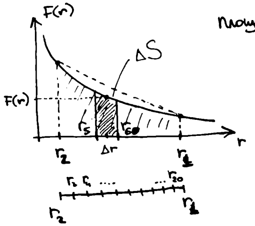
Работа гравитационного поля

~~Допустим, мы хотим поднять камень на высоту h. Надо совершить работу A = mgh. Если высота мала, то это хорошее приближение. А если нет? Сила будет непостоянна, $F = G\frac{mM}{r^2}$.~~

Камень падает с высоты h, энергия меняется на mgh. А если высота большая? $F(r) \neq \mathrm{const}$, а $F(r) = G\frac{mM}{r^2}$. Надо разбить на кусочки.



$\Delta A = F(r)\cdot\Delta r \Rightarrow A = \sum F\cdot\Delta r$ – график и площадь.



Площадь маленьких трапеций

$$\Delta S = \Delta r\,\frac{F(r_5)+F(r_6)}{2} = \Delta r\,\frac{\frac{1}{r_5^2}+\frac{1}{r_6^2}}{2}\,GmM$$ – сложное выражение.

Трюк. Заметим, что $\frac{F(r_5)+F(r_6)}{2} \approx \sqrt{F(r_5)F(r_6)}$ (проверить на числах)

Можно написать, $\Delta S \approx \Delta r\sqrt{F(r_5)F(r_6)} = \Delta r\,\frac{GmM}{r_5 r_6} = (r_6-r_5)\,\frac{GmM}{r_5 r_6} = GmM\left(\frac{1}{r_5}-\frac{1}{r_6}\right)$.

Суммарная площадь: $S = GmM\left(\frac{1}{r_2}-\cancel{\frac{1}{r_3}}+\cancel{\frac{1}{r_3}}-\frac{1}{r_4}+\ldots+\cancel{\frac{1}{r_{19}}}-\cancel{\frac{1}{r_{20}}}+\cancel{\frac{1}{r_{20}}}-\frac{1}{r_1}\right) =$

$= GmM\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$ – простое выражение.

Итак, $A = GmM\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$.

~~[illegible] $A = E_{п_1} - E_{п_2} \Rightarrow E_п = \frac{GmM}{r}$ [illegible]~~

~~Энергия отрицательна! Что это значит?~~

$$\Delta E_к = A \Rightarrow \underbrace{\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}}_{>0} = \underbrace{\frac{GmM}{r_2} - \frac{GmM}{r_1}}_{>0,\ \text{т.к. } r_2 < r_1}$$

В случае малых высот — переход ли в mgh? $h \ll R_\oplus$

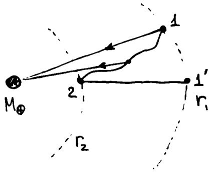
Пусть тело падает на Землю. Нач. высота $r_1 = R_\oplus + h$, $r_2 = R_\oplus \Rightarrow$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = GmM_\oplus\left(\frac{1}{R_\oplus} - \frac{1}{R_\oplus + h}\right) = \frac{GmM}{\underbrace{R_\oplus(R_\oplus + h)}_{\approx R_\oplus^2}} h = m\underbrace{\frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2}}_{g} h \approx mgh$$

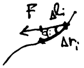
— сошлось!

Теперь надо понять, является ли эта сила консервативной.

Мы рассматривали движение по прямой, а что если хитрее?



На каждом кусочке надо брать $\cos\alpha$:



отрезок вдоль напр-я силы

$$\Delta A = F \cdot \underbrace{\Delta r \cdot \cos\alpha_i}_{\Delta l_i} = F \cdot \Delta l_i$$

Следовательно, траект. можно заменить просто на траект. по прямой. ⇒ от траект. не зависит, зависит только от r_1 и r_2 ⇒ консервативная сила

Тогда можно ввести потенц. энергию

$$A = E_{п_1} - E_{п_2} \Rightarrow E_п = \underset{!}{\ominus}\frac{GmM}{r},$$ r — расстояние до центра притяж.

Тогда полная энергия тела массы m в гравитационном поле массы M

$$\boxed{E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r}}$$

Вторая космическая скорость

С какой минимальной скоростью надо взлетать, чтобы выйти из грав поля Земли?

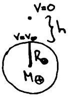
$$E_{\text{нач.}} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM_\oplus}{R_\oplus} \Rightarrow$$

$$E_{\text{кон.}} = 0 \quad (\text{скорость} = 0 \text{ и влияние Земли} = 0)$$

$$mv^2 = 2\frac{GmM_\oplus}{R_\oplus} \Rightarrow v^2 = 2\frac{GM_\oplus}{R_\oplus} = 2gR_\oplus \Rightarrow v = \sqrt{2gR_\oplus} \approx$$

$$\approx \sqrt{2}\, V_{1\text{-я косм.}} \approx \underset{\text{II-я косм. скорость}}{\underline{11.6 \text{ км/сек}}}$$

Вопрос Телу на поверхности Земли сообщают скорость V_0. На какую высоту оно поднимется?



а) V_0 мала. Тогда $h = V_0^2/2g$.

б) V_0 не мала и пренебречь размером Земли нельзя.

$$\frac{mV_0^2}{2} - mgR_\oplus = -\frac{GmM}{R_\oplus + h} = -\frac{mgR_\oplus^2}{R_\oplus + h} \Leftrightarrow$$

$$V_0^2 = 2gR_\oplus - 2g\frac{R_\oplus^2}{R_\oplus + h} \Rightarrow (R_\oplus + h)V_0^2 = 2ghR_\oplus \Rightarrow$$

$$\underline{h = \frac{V_0^2 R_\oplus}{2gR_\oplus - V_0^2}}$$

Видно, что когда $V_0^2 \to 2gR_\oplus$, $h \to \infty$ — как раз вторая космическая.

Отрицательная потенциальная энергия.

Если человек сидит на стуле, какая у него E_n? А если сидит на горе?

⇒ энергия определена с точностью до константы.

$A = mg\Delta h$ – зависит от разности высот, а не от абс. значения.

Таким образом, $E_n = -G\frac{mM}{r}$ тоже с точностью до константы.

Обычно выбирают так, что у слабо вз. тел $E_n = 0$ ⇒ у тел, разнесённых на бесконечность, $E_n = 0$.

Почему энергия $E_n = -G\frac{mM}{r} < 0$? Тела притягиваются, и не нужно совершать никакой работы, чтобы их сблизить. Нужно совершать работу чтобы их развести. Но как это согласуется с тем, что на малых высотах $E = mgh > 0$?

$$E = -G\frac{mM}{r+h} = -mg\frac{R^2}{R+h} = -\frac{mgR}{1+h/R} \approx -mgR\left(1-\frac{h}{R}\right) = -mgR + mgh$$

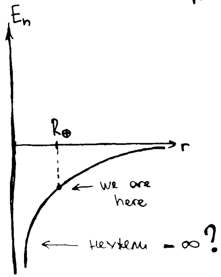
$$\frac{1}{1+0.1} = 0.909 \text{ (exact)} \approx 1 - 0.1 = 0.9$$

Итак, если $h \ll R_\oplus$, то $E_n = -mgR_\oplus + mgh$

Но $-mgR_\oplus$ – константа, её можно отбросить ⇒ $E_n = mgh$.

Важно $E_n = mgh$ отсчитывается от пов-ти Земли
($E = 0$ когда $h = 0$)

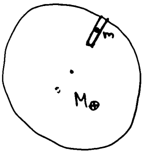
$E_n = -G\frac{mM}{r}$ – отсчитывается от ∞ ($E = 0$ когда $r = \infty$).



Неужели энергия в центре Земли равна $-\infty$? Это означало бы, что сила бесконечно велика. Так ли это?

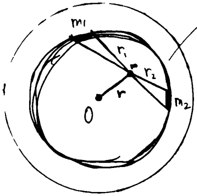
Сила тяжести внутри Земли.

Пусть Земля — однородный шар. Выроем туннель: Поместим в туннель тело m. Какая сила действ. на него?



а) пусть туннель насквозь. В центре Земли сила, очевидно, 0 (по симметрии).

б) Если не в центре.



$$F = G\frac{m_1 m}{r_1^2} - G\frac{m_2 m}{r_2^2} = Gm\left(\frac{m_1}{r_1^2} - \frac{m_2}{r_2^2}\right)$$

Треугольники подобны $\Rightarrow$ их основания относятся как r_1/r_2. Но массы ~ квадрату оснований $\Rightarrow$

$$\frac{m_1}{m_2} \sim \frac{r_1^2}{r_2^2} \Rightarrow F = Gm\left(\frac{m_1}{r_1^2} - \frac{m_2}{r_2^2}\right) = 0.$$

Вывод: на тело внутри сферической оболочки силы не действуют.

Зато действует сила со стороны шарика размером r.

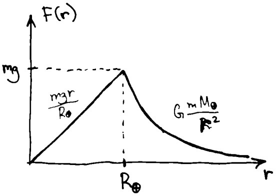
Как её найти?

1) $F \sim 1/r^2$

2) $F \sim$ массе шарика, но она $\sim r^3$

3) $F \sim r$. Осталось опр-ть к-т. На поверхности Земли $F = mg \Rightarrow F = mg\frac{r}{R_\oplus}$.

В центре ноль!



Таким образом, внутри Земли сила ведёт себя похоже на силу Гука.

$F = kr.$

Вопрос Как будет двигаться тело, если его уронить в тоннель, прорытый по диаметру Земли?

А что с энергией?

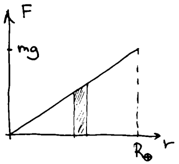
Раз есть $F(r)$, то можно и энергию найти.

1) Разделим на два этапа: до $r = R_\oplus$ и после. До $F(r) = mg\frac{r}{R}$ $\sim r$ – как сила Гука

Значит, $A_{0\to R_\oplus} = \frac{1}{2}\frac{mg}{R_\oplus}R_\oplus^2 = \frac{mgR_\oplus}{2}.$

$\Delta E_n = \frac{mgR_\oplus}{2}.$

Пусть $E(r=0) = 0 \Rightarrow E(R_\oplus) = \frac{mgR_\oplus}{2}.$

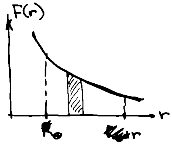


2) Если $r \geq R_\oplus$, то $F(r) = G\frac{mM_\oplus}{(r)^2}$ – тоже уже считали.

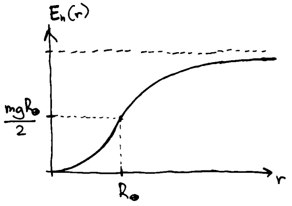
$A_{R_\oplus\to r} = -mg\frac{R_\oplus^2}{r} = \Delta E_n.$

Но мы знаем, что при $r = R_\oplus$ $E_n = \frac{mgR_\oplus}{2}$

(из п.1) $\Rightarrow$ $E_n = \underbrace{\frac{3}{2}mgR_\oplus}_{\uparrow\ \text{произв. константа}} - mg\frac{R_\oplus^2}{r}.$



Итак, $\left[\begin{array}{ll} r \leq R & E_n = \frac{1}{2}mg\frac{r^2}{R_\oplus} \\ r \geq R & E_n = mgR\left(\frac{3}{2} - \frac{R}{r}\right) \end{array}\right.$



~~[illegible]~~

НЕИНЕРЦИАЛЬНЫЕ СО.

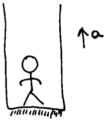
Вопрос 1) Мы находимся в покоящейся машине. Она резко стартует. Человек вылетает из машины. Почему?

В СО „Земля" всё понятно: машина двигается, а человек – нет, ~~возникает сила трения~~

А в СО машины? Никаких сил не действует, почему человек движется?

Ускорение есть, а сил нет.

2) Лифт



В СО лифта $N=mg$ и, получается, никакой разницы между движ. лифта и покоящимся нет – но мы знаем, что разница есть.

В СО Земля ~~[illegible]~~ $m\vec{a}=\vec{N}+m\vec{g} \Rightarrow N=ma\pm mg$

(при ускор. ↑ ↓).

Заметим, что $\underset{\text{СО лифт}}{N=mg}$ $\underset{\text{СО Земля}}{N=mg\pm ma}$

Получается, что если мы в СО „лифт" добавим „силу инерции" $\vec{F}_{и}=-m\vec{a}$, то все будет согласовано.

Заметим: силы инерции вводим искусственно, они не связаны с взаимодействием.

Это – фиктивные силы, они появляются в не-инерциальных СО.

(таких, как ускоряющийся лифт)

Пример посложнее Машина поворачивает, человек отклоняется. Почему?

В СО Земли: человек движется прямолинейно, машина поворачивает.

В СО машины: х3.

Приходится вводить фиктивную центробежную силу.

Ещё пример Человек на карусели. Почему он движется по окружности (в СО карусели)?

Сначала посмотрим в СО Земли. Ускорение ц/с равно $\omega^2 R$.

Человек сидит в кресле, со стороны кресла сила реакции T.

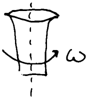
$$m\omega^2 R = T$$

В СО карусели человек покоится, значит, надо ввести „фиктивную" силу

$$\vec{F}_{\underline{ц.б.}} = -\vec{T} \Rightarrow F_{ц.б.} = \underset{\uparrow}{-}m\omega^2 r$$

направлена от центра

Фиктивные силы пропорциональны массе тела.

Метод центрифугирования В центрифугу помещают жидкость и неизвестное в-во состоящее из неск. молекул. Молекулы разной массы ⇒ разная сила сопротивления ⇒ можно разделить.