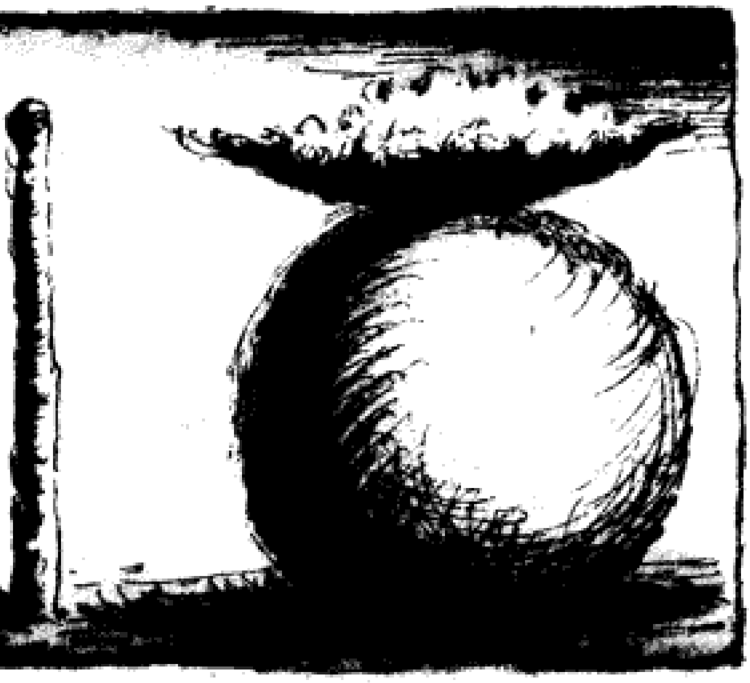
Э. Казарян,
Р. Саакян

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОСТАТИКЕ



Изучая постоянные (не изменяющиеся со временем) электрические поля, создаваемые заряженными проводниками, прежде всего следует иметь в виду, что напряженность электростатического поля внутри проводников равна нулю. Отсюда непосредственно следует, что заряды в проводниках распределяются по их поверхности. Таким образом, задачи электростатики обычно сводятся к нахождению электрического поля вне проводников и к определению распределения зарядов на поверхности проводников.

Сформулируем несколько типичных электростатических задач.

З а д а ч а 1. *Точечный заряд q находится на расстоянии d от поверхности заземленного сферического проводника радиуса r (рис. 1). Определить заряд q', индуцированный на этой поверхности.*

З а д а ч а 2. *Между двумя заземленными концентрическими сферическими поверхностями, радиусы которых r_1 и r_2, помещен точечный заряд q (рис. 2). Расстояния от заряда до сферических поверхностей равны соответственно d_1 и d_2. Найти индуцированные на сферах заряды q_1' и q_2'.*

З а д а ч а 3. *Точечный заряд q находится на расстояниях d_1 и d_2 от проводящих заземленных бесконечных плоскостей (рис. 3). Найти заряды q_1' и q_2', наведенные на этих плоскостях.*

Общие методы решения подобных задач изучаются в соответствующем разделе математической физики, не входящей в школьную программу. Однако существует ряд сравнительно простых частных методов, которые позволяют решать задачи по электростатике, не выходя за пределы элементарной математики (например, метод изображений, о котором упоминалось в статье Г. Мякишева «Электростатическое поле»; см. «Квант», 1975, № 4). Здесь мы рассмотрим один из

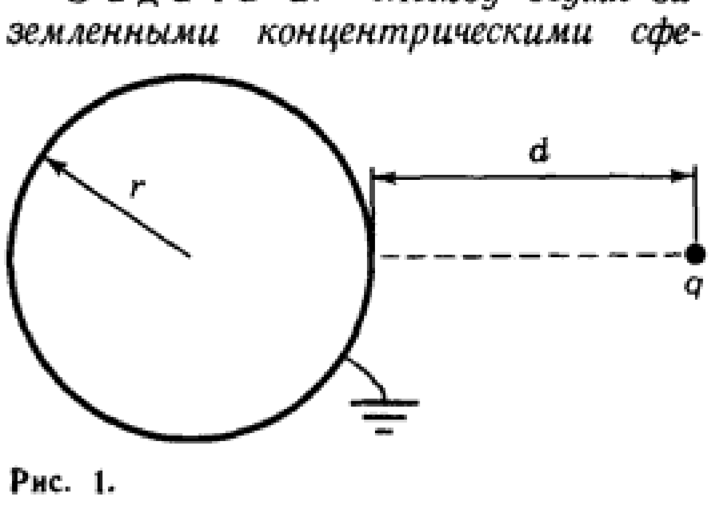


Рис. 1.

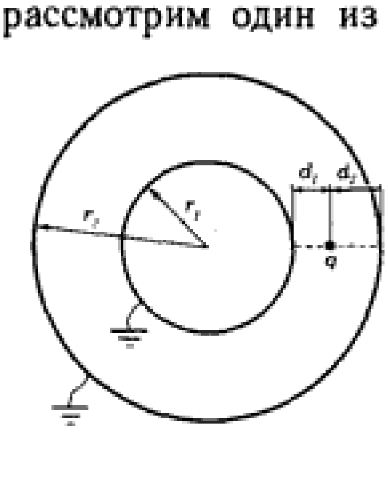


Рис. 2.

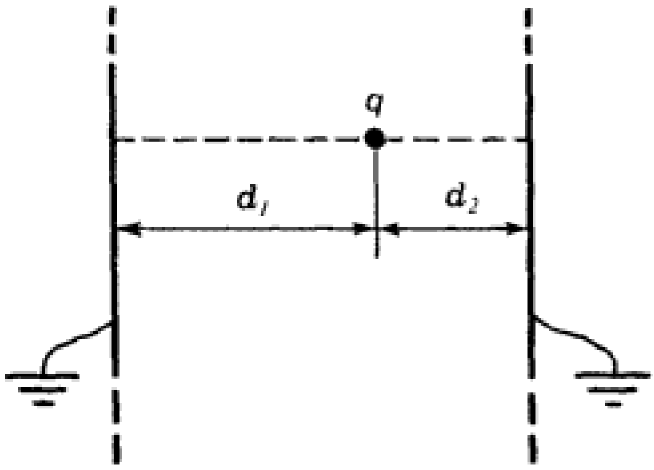


Рис. 3.

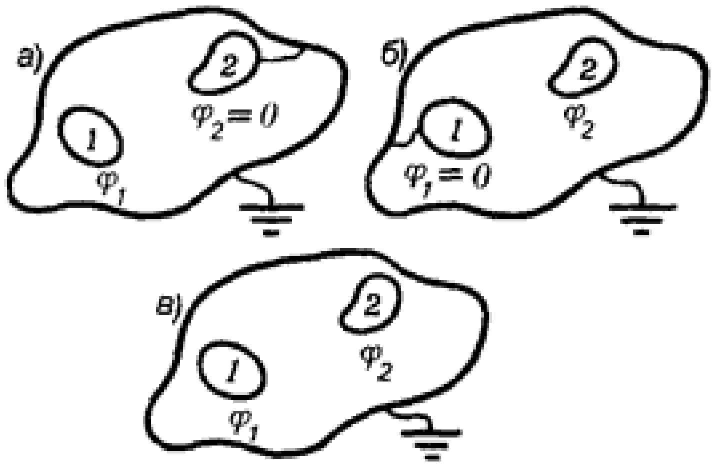


Рис. 4.

таких методов, основанный на теореме (или принципе) взаимности.

В чем заключается сущность этой теоремы? Ее можно сформулировать так: *если в системе из n проводников проводники, несущие заряды $q_1, q_2, \ldots, q_n$, имеют потенциалы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ соответственно, а при зарядах $q_1', q_2', \ldots, q_n'$ потенциалы проводников равны $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_n'$, то справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i' = \sum_{i=1}^{n} q_i'\varphi_i. \qquad (1)$$

Покажем, что это действительно так.

Согласно принципу суперпозиции потенциалы проводников находятся в линейной зависимости от зарядов. Или, наоборот, заряды на проводниках линейно зависят от потенциалов. Рассмотрим сначала частный случай — внутри заземленной проводящей поверхности находятся два заряженных проводника *1* и *2* (рис. 4). Соединим второй проводник с заземленной поверхностью, тогда потенциал этого проводника обратится в нуль (см. рис. 4, *а*). Потенциал первого проводника обозначим через φ_1. Заряды на каждом из проводников должны быть пропорциональны φ_1, т. е.

$$\Delta q_1 = C_{11}\varphi_1 \quad \text{и} \quad \Delta q_2 = C_{21}\varphi_1. \qquad (2)$$

Здесь Δq_1 и Δq_2 — заряды на первом и втором проводниках соответственно, а C_{11} и C_{21} — постоянные величины, называемые коэффициентами емкости и зависящие от формы и взаимного расположения проводников. C_{11} и C_{21} характеризуют заряды первого и второго проводников в случае, когда потенциал первого проводника равен единице, а второй проводник заземлен.

Теперь заземлим первый проводник, а потенциал второго проводника обозначим через φ_2 (см. рис. 4, *б*). Тогда

$$\Delta q_1' = C_{12}\varphi_2 \quad \text{и} \quad \Delta q_2' = C_{22}\varphi_2, \qquad (3)$$

где $\Delta q_1'$ и $\Delta q_2'$ — новые заряды на проводниках, а C_{12} и C_{22} — соответствующие коэффициенты емкости. C_{12} и C_{22} показывают, каковы заряды первого и второго проводников, если потенциал второго проводника равен единице, а первый проводник заземлен.

Очевидно, что если ни один из проводников не заземлен и их потенциалы равны φ_1 и φ_2 (см. рис. 4, *в*), то заряды q_1 и q_2 на проводниках равны соответственно

$$q_1 = C_{11}\varphi_1 + C_{12}\varphi_2,$$
$$q_2 = C_{21}\varphi_1 + C_{22}\varphi_2.$$

Эти соотношения получены путем сложения выражений (2) и (3).

Аналогичные рассуждения можно провести и для общего случая, когда система состоит из n проводников. Для заряда q_i i-го проводника получим

$$q_i = C_{i1}\varphi_1 + C_{i2}\varphi_2 + \ldots + C_{in}\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} C_{ik}\varphi_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (4)$$

Здесь коэффициент емкости C_{ik} характеризует заряд i-го проводника, когда все проводники, кроме k-го, за-

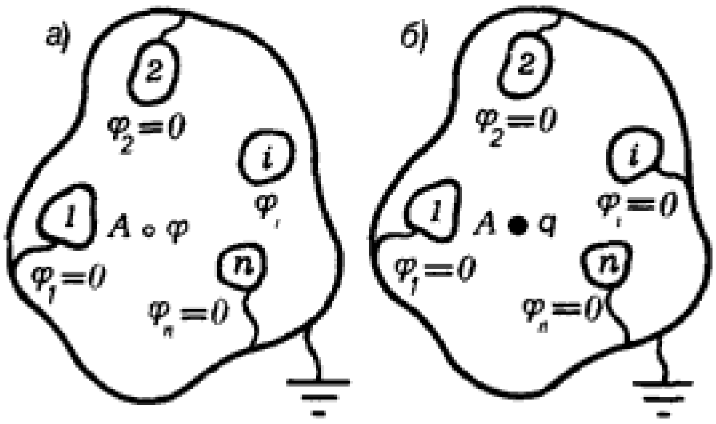


Рис. 5.

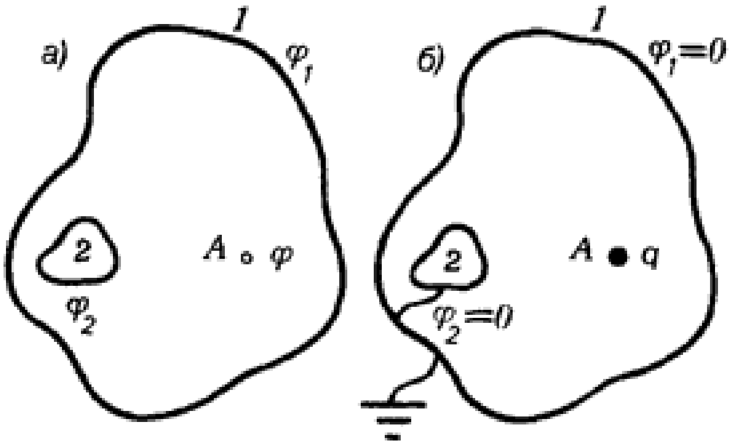


Рис. 6.

землены, а потенциал k-го проводника равен единице. Пусть теперь заряд i-го проводника равен q_i', а его потенциал φ_i'. Умножим равенство (4) почленно на φ_i':

$$q_i\varphi_i' = \sum_{k=1}^{n} C_{ik}\varphi_k\varphi_i' ,$$

а затем просуммируем обе части полученного равенства по всем значениям i от 1 до n:

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i' = \sum_{i,\ k=1}^{n} C_{ik}\varphi_k\varphi_i' .$$

Но

$$\sum_{i,\ k=1}^{n} C_{ik}\varphi_k\varphi_i' = \sum_{i,\ k=1}^{n} C_{ik}\varphi_i'\varphi_k = \sum_{i=1}^{n} q_i'\varphi_i$$

(так как и i, и k принимают все значения от 1 до n), поэтому окончательно получаем

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i' = \sum_{i=1}^{n} q_i'\varphi_i. \qquad (5)$$

Таким образом, теорема взаимности доказана, поскольку равенства (1) и (5) идентичны.

Прежде чем применить теорему взаимности для решения сформулированных выше задач, рассмотрим две дополнительные задачи.

Дополнительная задача 1. *Имеется система проводников, которые все, кроме i-го, заземлены, а i-й проводник имеет потенциал φ_i (рис. 5). В некоторой точке A системы потенциал равен φ. Определить заряд q_i', индуцируемый на i-м проводнике, если все проводники заземлить, а в точку A поместить заряд q.*

Представим себе, что в точке A находится проводник, причем его линейные размеры малы по сравнению с расстояниями до других проводников (тогда его присутствие не изменит распределения зарядов и потенциалов в системе). Будем называть его проводником A. Рассмотрим два состояния системы:

а) заряд проводника A равен нулю, его потенциал φ, потенциал i-го проводника φ_i, а потенциалы всех остальных проводников равны нулю (см. рис. 5, *а*);

б) заряд проводника A равен q, потенциалы всех остальных проводников равны нулю, а заряд, индуцируемый на i-м проводнике, равен q_i' (см. рис. 5, *б*).

Согласно теореме взаимности

$$q\varphi + q_i'\varphi_i = 0,$$

откуда

$$q_i' = -q\frac{\varphi}{\varphi_i}.$$

Дополнительная задача 2. *В замкнутой проводящей поверхности 1, потенциал которой φ_1, находится проводник 2 (рис. 6). Его потенциал равен φ_2, а потенциал точки A, находящейся между проводниками, равен φ. Найти заряды q_1' и q_2', индуцируемые на проводниках, если проводники заземлить, а в точку A поместить заряд q.*

Имеем два состояния системы:

а) заряд в точке A равен нулю, ее потенциал φ, а потенциалы проводников равны φ_1 и φ_2 (см. рис. 6, *а*);

б) заряд в точке A равен q, потенциалы проводников равны нулю, а индуцированные на них заряды равны q_1' и q_2' (см. рис. 6, *б*).

Для простоты здесь и дальше мы будем говорить о заряде и о потенциале *точки* A, подразумевая, что в этой точке находится проводник (как это было сделано в задаче 1).

По теореме взаимности

$$q_1'\varphi_1+q_2'\varphi_2+q\varphi=0. \qquad (6)$$

Из одного этого равенства нельзя, конечно, найти оба индуцированных заряда. Однако можно воспользоваться еще тем условием, что проводящая поверхность *1* во втором случае заземлена. Это означает, что электрическое поле снаружи отсутствует, а значит, алгебраическая сумма всех зарядов, находящихся внутри заземленной поверхности, равна нулю, т. е.

$$q_1'+q_2'+q=0. \qquad (7)$$

Решая совместно уравнения (6) и (7), получим

$$q_1'=q\,\frac{\varphi_2-\varphi}{\varphi_1-\varphi_2}$$

и

$$q_2=-q\,\frac{\varphi_1-\varphi}{\varphi_1-\varphi_2}.$$

Теперь уже можно вернуться к основным трем задачам. Для их решения будем пользоваться теоремой взаимности. Метод, основанный на применении этой теоремы, несколько формальный, но очень простой и удобный. Вся сложность состоит только в том, чтобы разумно выбрать рассматриваемые два состояния системы и записать для них равенство (1).

Решение задачи 1. По условию задачи точечный заряд q находится на определенном расстоянии от заземленной проводящей сферы, на которой наводится заряд q' (состояние 1).

Предположим, что сферическая поверхность не заземлена и имеет потенциал φ_0, а заряда q нет. Тогда на его месте потенциал поля равен $\varphi=\varphi_0\,\frac{r}{r+d}$ (r — радиус сферической поверхности, d — расстояние от заряда q до этой поверхности). Это — второе состояние системы.

Запишем для этих двух состояний системы теорему взаимности:

$$q\varphi+q'\varphi_0=0,$$

или

$$q'=-q\,\frac{\varphi}{\varphi_0}=-q\,\frac{r}{r+d}.$$

Полученный результат можно применить к случаю, когда заряд q' наводится на бесконечной проводящей плоскости. Действительно, бесконечную плоскость можно рассматривать как сферическую поверхность с бесконечно большим радиусом, т. е. $r\to\infty$. Следовательно, в пределе при $r\to\infty$ имеем

$$q'=-q\,\frac{r}{r+d}=-q\frac{1}{1+d/r}=-q,$$

т. е. индуцированный на бесконечной плоскости заряд равен по величине, но противоположен по знаку поднесенному к плоскости точечному заряду, где бы этот заряд ни находился.

Решение задачи 2. Согласно условию задачи первое состояние системы таково: заряд q находится в заданной точке между заземленными сферическими поверхностями, на которых наводятся заряды q_1' и q_2'.

В качестве второго состояния рассмотрим случай, когда внешняя сфера заземлена, внутренняя сфера имеет потенциал φ_1, заряд q отсутствует, но на его месте потенциал поля равен φ.

Исходя из решения дополнительной задачи 1, получим

$$q_1'=-q\,\frac{\varphi}{\varphi_1}. \qquad (8)$$

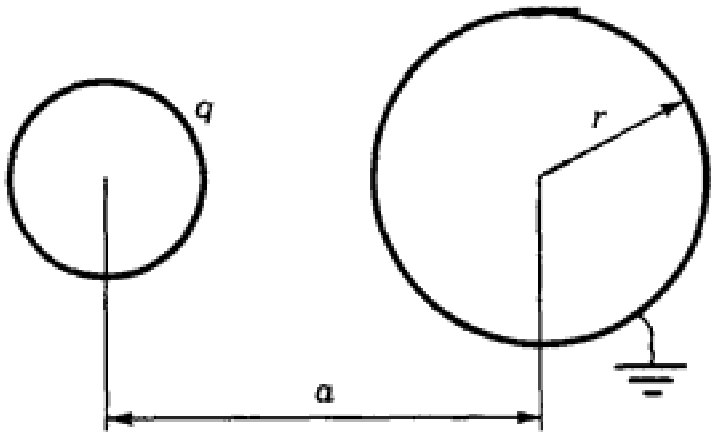


Рис. 7.

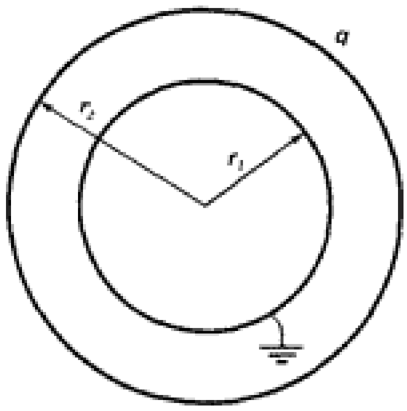


Рис. 8.

Заряд q_2', индуцированный на внешней сфере, найдем из условия, что алгебраическая сумма зарядов, находящихся внутри заземленной поверхности, равна нулю:

$$q_1'+q_2'+q=0. \tag{9}$$

Таким образом, нам остается найти отношение φ/φ_1. Предположим, что, когда внешняя сфера заземлена, а внутренняя имеет потенциал φ_1, заряд внутренней сферы равен q_0. Очевидно, что при этом на внешней сфере наведется заряд $-q_0$. Выразим потенциалы φ и φ_1 через заряды q_0 и $-q_0$:

$$\varphi=\frac{q_0}{r_1+d_1}+\frac{-q_0}{r_2},$$

$$\varphi_1=\frac{q_0}{r_1}+\frac{-q_0}{r_2}.$$

Отсюда

$$\frac{\varphi}{\varphi_1}=\frac{\dfrac{1}{r_1+d_1}-\dfrac{1}{r_2}}{\dfrac{1}{r_1}-\dfrac{1}{r_2}}. \tag{10}$$

Тогда окончательно из равенств (8)–(10) получим

$$q_1'=-q\frac{r_1d_2}{(r_1+d_1)(d_1+d_2)},$$

$$q_2'=-q\frac{r_2d_1}{(r_1+d_1)(d_1+d_2)}.$$

Решение задачи 3. Оно непосредственно следует из решения задачи 2, поскольку две параллельные бесконечные плоскости можно рассматривать как две концентрические сферы с бесконечно большими радиусами.

Запишем результат решения задачи 2 в виде

$$q_1'=-q\frac{r_1d_2}{(r_1+d_1)(d_1+d_2)}=$$

$$=-q\frac{d_2}{(1+d_1/r_1)(d_1+d_2)},$$

$$q_2'=-q\frac{r_2d_1}{(r_1+d_1)(d_1+d_2)}=$$

$$=-q\frac{r_2d_1}{(r_2-d_2)(d_1+d_2)}=$$

$$=-q\frac{d_1}{(1-d_2/r_2)(d_1+d_2)}.$$

Если $r_1\to\infty$ и $r_2\to\infty$, то

$$q_1'=-q\frac{d_2}{d_1+d_2},$$

$$q_2'=-q\frac{d_1}{d_1+d_2}.$$

Упражнения

1. Центр шара, несущего заряд q, находится на расстоянии a от центра заземленного шарового проводника радиуса r (рис. 7). Определить заряд q', индуцированный на заземленном шаре.

2. Из двух концентрических сферических проводников, радиусы которых r_1 и r_2 ($r_1<r_2$), внутренний заземлен, а внешний имеет заряд q (рис. 8). Найти заряд q', наведенный на внутренней сфере.