Работа, псевдоработа и теплота

Игорь Шендерович

shender.i@gmail.com

Аннотация

В данной заметке рассматривается взаимосвязь между совершённой работой и теплотой. Показано, что обычное интегрирование второго закона Ньютона не даёт описания тепловой стороны механических явлений; для их описания применяется первый закон термодинамики. С его помощью удаётся установить, что работа силы трения в некоторых случаях оказывается отличной от произведения силы трения на перемещение предмета.

1. Теорема о движении центра масс и псевдоработа.

Как известно, движение центра масс системы описывается уравнением

$$M\vec{a}_{\text{ц.м.}} = \sum \vec{F}^{\text{ext}}, \tag{1}$$

где M — общая масса системы, $\vec{a}_{\text{ц.м.}}$ — ускорение центра масс, $\sum \vec{F}^{\text{ext}}$ — сумма всех *внешних* сил, действующих на систему.

Из этого равенства можно получить что-то похожее на закон сохранения энергии. Действительно, домножим правую и левую части на $d\vec{r}_{\text{ц.м.}}$ — радиус–вектор перемещения центра масс.

$$M\frac{d\vec{v}_{\text{ц.м.}}}{dt}d\vec{r}_{\text{ц.м.}} = \sum \vec{F}^{\text{ext}} d\vec{r}_{\text{ц.м.}} \quad \Longleftrightarrow \quad M\vec{v}_{\text{ц.м.}} d\vec{v}_{\text{ц.м.}} = \sum \vec{F}^{\text{ext}} d\vec{r}_{\text{ц.м.}} \tag{2}$$

Проинтегрируем последнее равенство. Слева стоит дифференциал от $\vec{v}^2_{\text{ц.м.}}/2$, поэтому при интегрировании получим

$$\frac{M\Delta v^2_{\text{ц.м.}}}{2} = \int \sum \vec{F}^{\text{ext}} d\vec{r}_{\text{ц.м.}} \tag{3}$$

Выглядит действительно как закон сохранения энергии — слева изменение кинетической энергии, справа — величина, напоминающая суммарную работу внешних сил. Однако, это не совсем работа — как можно заметить, здесь сила умножается не на перемещение точки приложения силы (как должно быть), а на перемещение центра масс.

Легко видеть, что это разные величины. Рассмотрим, например, процесс сжатия шарика, наполненного газом, с помощью внешних сил. Если мы сжимаем шарик равномерно со всех сторон, то его центр масс перемещаться не будет (и сумма внешних сил будет равна нулю). При этом, как мы знаем из термодинамики, совершённая работа будет даваться выражением $A = \int p dV$, в то время как в правой части формулы (3) получается ноль. Будем поэтому называть объект в правой части уравнения (3) *псевдоработой*.

Рассмотрим несколько простых примеров.

Брусок массой m со начальной скоростью v_0 въезжает на шероховатый стол, коэффициент трения между ним и столом равен μ (рис. 1). Какой путь S пройдёт брусок перед тем, как остановиться?

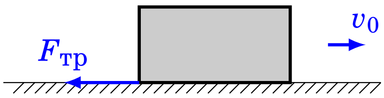

Рис. 1: Останавливающийся брусок.

Здесь всё очевидно. Изменение кинетической энергии равно $mv_0^2/2$, по формуле (3) оно равно произведению внешней силы (которая в данном случае одна: сила трения) на перемещение центра масс, то есть, на интересующее нас перемещение S. Получаем

$$\frac{mv_0^2}{2} = \mu mgS \quad\Longrightarrow\quad S = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \tag{4}$$

Конечно, этот же ответ можно получить другим способом: поняв, что ускорение центра масс бруска постоянно и равно $a_{\text{ц.м.}} = -\mu g$, написать уравнение для скорости $v_{\text{ц.м.}} = v_0 - \mu gt$. Отсюда получается, что время до остановки равно $T = v_0/\mu g$, ну а пройденное расстояние, в самом деле, даётся формулой $S = v_0^2/2\mu g$.

Второй пример тоже не отличается сложностью. Представим себе такой же брусок, но теперь его тянут по столу с постоянной силой F, причём тянут так, что он двигается с постоянной скоростью (рис. 2). Что в этом случае даст нам уравнение (3)?

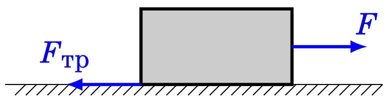

Рис. 2: Брусок, двигающийся с постоянной скоростью.

Изменение кинетической энергии, очевидно, будет равно нулю: скорость бруска не меняется. Внешних сил тут уже две: сила F, с которой тянут брусок, и равная ей по модулю (и противоположная по направлению) сила $F_{тр}$. Соответственно, суммарная *псевдоработа* этих сил равна нулю. Уравнение (3) даёт нам $0 = 0$.

Всё это вроде бы неплохо, уравнения не противоречат друг другу, но есть одна тонкость: все мы знаем, что при движении по шероховатой поверхности брусок и стол должны нагреться. Где же в наших уравнениях эта выделяющаяся теплота? Она не появляется именно потому, что это не совсем закон сохранения энергии, а проинтегрированный второй закон Ньютона с псевдоработой в правой части.

Из-за псевдоработы в правой части уравнение (3) иногда ошибочно атрибутируется как закон сохранения энергии. Это приводит к непониманию сути некоторых физических явлений. В следующих разделах мы постараемся разобраться с этим.

2. Первый закон термодинамики.

Разумеется, справедливость уравнения (3) не подвергается сомнению: оно было получено корректными математическими процедурами из верного утверждения (второго закона Ньютона). Речь идёт о том, что в это уравнение не входят термодинамические величины, в частности, поток тепла, входящий или выходящий из системы.

Здесь становится критически важным понятие системы, которую мы рассматриваем. Проиллюстрируем это на примере из предыдущего раздела.

Рассмотрим опять брусок, который тянут с постоянной силой F по шероховатому столу с коэффициентом трения μ. Скорость бруска постоянна. Допустим, мы протащили наш брусок на расстояние d. Как определить, сколько при этом выделилось тепла?

Уравнение (3) ничего об этом не говорит; как мы видели в предыдущем разделе, оно сводится к тривиальности вида $0 = 0$. Попробуем применить к этой ситуации первый закон термодинамики. Этот закон говорит нам, что внесённая в систему теплота и совершённая над ней работа идут на изменение энергии системы:

$$Q^{\text{ext}} + W^{\text{ext}} = \Delta E. \tag{5}$$

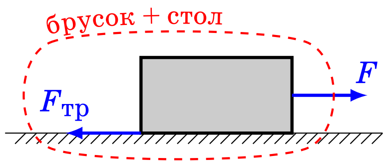

Рис. 3: Первый закон термодинамики: брусок и стол.

Возьмём в качестве системы брусок и стол (см. рис. 3). Над этой системой совершает работу одна внешняя сила F (сила трения, которая действует со стороны стола на брусок, является внутренней). Изменение энергии, как мы выяснили, равно нулю, так как скорость не меняется. Таким образом, получается, что $Q^{\text{ext}} < 0$ — то есть, система энергию не поглощает, а излучает наружу (как мы и ожидали) в виде теплоты. Эта тепловая энергия, выделяющаяся в системе, равна

$$Q_{\text{брусок+стол}} = W^{\text{ext}} = Fd. \tag{6}$$

Заметим, что здесь W^{ext} означает именно *работу*, в отличие от псевдоработы из предыдущего раздела. Работу силы F, с которой мы тянем брусок, посчитать легко, поскольку про перемещение точки приложения нам всё известно — оно равно d. Таким образом, вся работа, совершаемая внешней силой F, уходит в теплоту, выделяющуюся в системе, то есть, за счёт этого нагреваются и стол, и брусок.

Можно ли узнать, сколько теплоты досталось непосредственно бруску? Здесь нас ждёт небольшой сюрприз.

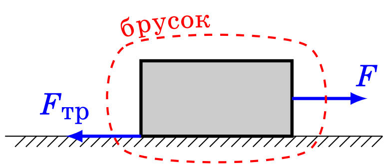

Рис. 4: Первый закон термодинамики: брусок.

Итак, ограничим систему для рассмотрения одним лишь бруском (см. рис. 4). Для этой системы тоже можно написать первый закон термодинамики. На этот раз внешних сил две: сила F, с которой тянут брусок, и сила трения $F_{\text{тр}}$ (равная F), действующая со стороны стола. Изменение внутренней энергии системы по-прежнему равно нулю, так как кинетическая энергия бруска не меняется. Таким образом, выделившаяся в системе теплота равна

$$Q_{\text{брусок}} = W^{\text{ext}} = Fd + A_{\text{тр}}. \tag{7}$$

Скорее всего, $A_{\text{тр}} < 0$, но чему она равна? Если бы она была равна $A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}d = -Fd$, то получалось бы, что тепло не выделяется, и брусок не нагревается, что противоречит предыдущим выкладкам и нашему опыту. Таким образом, мы должны сделать вывод, что работа силы трения $|A_{\text{тр}}|$ *меньше* Fd.

Почему так вообще может произойти? Работа получается как произведение двух множителей: силы и перемещения точки приложения этой силы. Сила трения в любом случае равна $F_{\text{тр}} = F$, иначе наш брусок ускорялся бы, вопреки условиям задачи. Значит, всё дело в перемещении точки приложения (назовём его x). По каким-то причинам $x < d$, и, таким образом, выделившаяся теплота в системе, состоящей только лишь из бруска, равна

$$Q_{\text{брусок}} = Fd - F_{\text{тр}}\,x = Fd - Fx = F(d - x). \tag{8}$$

Каковы причины того, что $x < d$? Детальный ответ на этот вопрос можно дать, рассматривая микроскопический механизм возникновения трения[1]. В данной заметке этот вопрос не обсуждается.

Разумеется, мы получим похожий результат, если будем рассматривать систему, состоящую только из стола. В такой системе внешней силой является сила трения со стороны бруска. Кинетическая энергия стола, разумеется, не меняется, и мы можем написать

$$Q_{\text{стол}} = A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}}\,x = Fx. \tag{9}$$

Складывая уравнения (9) и (8) мы, естественно, получаем уравнение (6).

Заметим, что конкретное значение x нельзя вычислить, не зная детально параметров бруска и стола: характер контакта бруска со столом, теплопроводность и т.д.

Мы можем применить первый закон термодинамики и ко второму примеру, рассмотренному в разделе 1, а именно, к бруску, который постепенно замедляется под действием силы трения. Если взять в качестве системы брусок + стол, то внешних сил не будет (опять-таки, все силы трения являются в этой системе внутренними силами), и, следовательно, теплота будет выделяться за счёт уменьшения кинетической энергии:

$$Q^{\text{ext}} = \Delta E_k. \tag{10}$$

Кинетическая энергия уменьшается, так что энергия в системе действительно выделяется. Вся кинетическая энергия уходит в нагрев бруска и стола:

$$Q_{\text{стол+брусок}} = \frac{mv_0^2}{2}. \tag{11}$$

При этом работа силы трения, как и в предыдущем примере, не равна FS (напомним, что S — путь, пройденный бруском до остановки).

3. Заключение.

При вычислении работы надо соблюдать внимательность и не путать *работу* с *псевдоработой* — последняя служит только для механического описания процессов и непригодна для обсуждения тепловых потоков в системе. Вычисление работы нужно проводить вместе с применением первого закона термодинамики, который и является законом сохранения энергии в полном смысле.

[1] См., например, Work and heat transfer in the presence of sliding friction, B.A. Sherwood and W.H. Bernard, *Am. J. Phys*, Vol. **52**, No. **11**, November 1984.

4. Литература.

1. “Work and heat transfer in the presence of sliding friction”, B.A. Sherwood and W.H. Bernard, *Am. J. Phys*, **52** (11), November 1984.

2. “Physics that Textbook Writers Usually Get Wrong”, Robert P. Bauman, *Phys. Teach.*, **30**, 353 (1992).

3. “Energy and the Confused Student”, John W. Jewett, *Phys. Teach.*, **46**, 38 (2008).