1. Силовые линии.

Удобная визуализация электрического поля — **силовые линии**. Рисуются они так, что $\vec{E}$ в любой точке направлено по касательной к силовой линии.

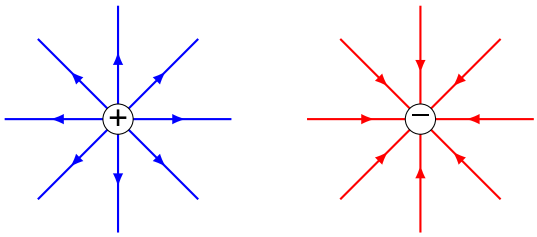


Рис. 1: Силовые линии точечного заряда.

А как будут выглядеть силовые линии системы из двух разноимённых зарядов? Можно ли наложить две картинки от точечных зарядов? Очевидно, нет, потому что силовые линии будут пересекаться.

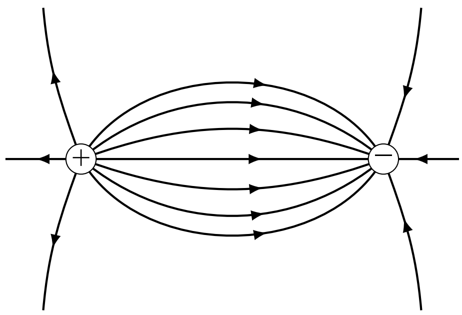
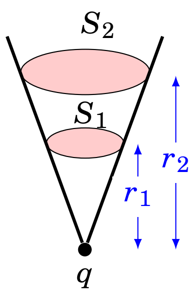


Рис. 2: Силовые линии для двух разноимённых зарядов.

Вернёмся к одиночному точечному заряду q (пусть он для определённости будет положительным).



Выделим конус, образованный двумя силовыми линиями, выходящими из заряда. Возьмём два сечения S_1 и S_2, находящихся на расстоянии r_1 и r_2 от вершины конуса. Очевидно, что

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2. \tag{1}$$

Заметим, что количество силовых линий N, проходящих через S_1 и S_2 одинаково, поэтому **густота** силовых линий $n = N/S$ ведёт себя как

$$\frac{n_2}{n_1} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \Rightarrow n \sim \frac{1}{r^2}. \tag{2}$$

Получается, что густота силовых линий ведёт себя как напряжённость электрического поля (вспомним, что по закону Кулона $E \sim 1/r^2$). Таким образом, можно сказать, что густота $n \sim E$.

Итак, правила рисования силовых линий такие:

- линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных;
- число линий $\sim$ заряду (т.к. $n \sim E$);
- линии не пересекаются.

2. Поток.

Введём ещё одно понятие, которое очень нам пригодится. Рассмотрим для начала однородное поле $\vec{E}$. Нарисуем площадку S, перпендикулярную силовым линиям. Число линий, пересекающих эту площадку, равно $N = n \cdot S$, но так как $n \sim E$, то можно написать, что $N \sim E \cdot S$. По определению, **потоком** электрического поля E через площадку S называется величина

$$\Phi = E \cdot S. \tag{3}$$

По нашему определению, число силовых линий, пересекающих площадку, пропорционально потоку.

Что делать, если $\vec{E}$ не перпендикулярен площадке?

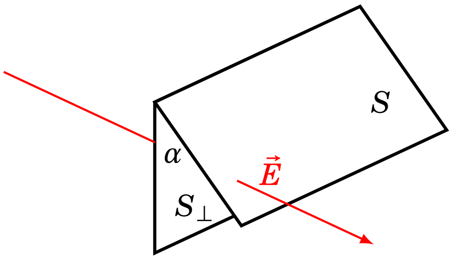


Рис. 3: Поток через площадку под произвольным углом.

Рассмотрим площадку $S_\perp = S \cdot \cos\alpha$. Поток через S такой же, как через $S_\perp$ (по числу силовых линий), т.е.

$$\Phi_{S_\perp} = \Phi_S = E \cdot S_\perp = E \cdot S \cdot \cos\alpha. \tag{4}$$

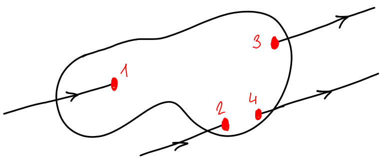
В общей ситуации, если мы хотим вычислить поток через поверхность произвольной формы, надо разбить её на много маленьких почти прямоугольных площадок, и на каждой посчитать свой поток:

$$\Phi = \sum_i E_i \cdot \Delta S_i \cdot \cos\alpha_i, \tag{5}$$

что для краткости записывают как

$$\Phi = \sum_i \vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i. \tag{6}$$

2.1. Поток через замкнутую поверхность.



Рассмотрим замкнутую поверхность в электрическом поле. У каждой маленькой площадки есть свой $\Delta\vec{S}_i$. В случае **1** и **2** $\vec{E} \uparrow\downarrow \Delta\vec{S}$, а значит, $\Delta\Phi < 0$. В случае **3** и **4** $\vec{E} \uparrow\uparrow \Delta\vec{S}$, и $\Delta\Phi > 0$. Получается сложная сумма.

Но полный поток $\sim$ (# входящих линий – # выходящих линий). В нашем случае количество входящих линий в точности равно количеству выходящих, так что поток равен нулю.

Проиллюстрируем это на примере простой поверхности — куба.

Пусть куб с ребром l помещён в однородное поле $\vec{E}$, направленное вдоль оси x. Подсчитаем поток этого поля через поверхность куба. Для этого посчитаем поток через каждую грань, а потом сложим всё вместе.

1. $\Phi_1 = ES\cos\pi = -E \cdot l^2$;

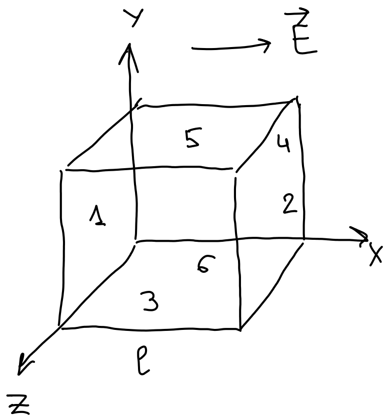


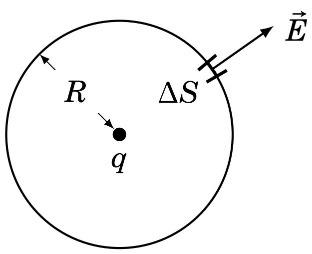
Рис. 4: Поток через поверхность куба.

2. $\Phi_2 = ES\cos 0 = E\cdot l^2$;
3. $\Phi_3 = ES\cos\pi/2 = 0$;
4. $\Phi_4 = ES\cos\pi/2 = 0$;
5. $\Phi_5 = ES\cos\pi/2 = 0$;
6. $\Phi_6 = ES\cos\pi/2 = 0$;

Складывая всё вместе, получаем $\Phi = \Phi_1 + \ldots + \Phi_6 = 0$, т.е. поток поля через замкнутую поверхность куба равен нулю, как и ожидалось.

2.2. Закон Гаусса.

В случае более сложной геометрии посчитать поток может быть сложно. Но всё-таки иногда получается. Например, возьмём заряд q и окружим его сферой радиуса R.



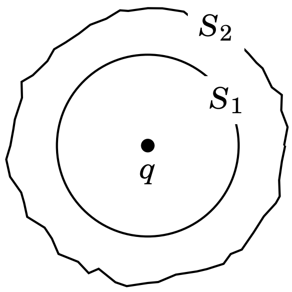
Из соображений симметрии очевидно, что электрическое поле, созданное зарядом q, направлено вдоль лучей, выходящих из него. Получается, что в каждой точке на поверхности сферы электрическое поле направлено перпендикулярно поверхности, т.е. угол между $\vec{E}$ и $\Delta\vec{S}$ всегда равен 0.

Кроме того, поскольку электрическое поле на расстоянии R от заряда q равно по модулю $E = kq/R$, мы понимаем, что оно одинаково на всей поверхности сферы. С учётом этого, формула для потока (6) превращается в

$$\Phi = \sum k\frac{q}{R^2}\cdot\Delta S = k\frac{q}{R^2}\sum\Delta S = k\frac{q}{R^2}S = 4\pi kq = \frac{q}{\epsilon_0}. \tag{7}$$

Мы воспользовались тем, что площадь сферы радиуса R равна $S = 4\pi R^2$.

Итак, поток электрического поля точечного заряда через сферу не зависит от её радиуса, а зависит лишь от величины заряда. Этот результат был заранее очевиден на языке силовых линий: действительно, поток пропорционален количеству силовых линий, которое равно $N = n\cdot S$. Но густота убывает как $1/R^2$ (следствие закона Кулона), а площадь сферы растёт как R^2, поэтому от R ничего зависеть и не должно.



Теперь рассмотрим произвольную поверхность вокруг q. Обозначим её за S_2 (S_1 — наша исходная сфера). Как мы только что видели, поток через S_1 равен $\Phi_1 = q/\epsilon_0$. Но поскольку поток пропорционален количеству силовых линий, проходящих через поверхность, мы можем сделать вывод, что поток через поверхность S_2 такой же: $\Phi_2 = \Phi_1 = q/\epsilon_0$.

Итак, мы можем сформулировать следующее утверждение:

Поток через любую замкнутую поверхность,
которая окружает заряд q, равен q/ϵ_0.

То есть, вместо вычисления сложной суммы (6) получилось довольно простое утверждение. Подчеркнём, что оно никак не зависит от формы поверхности — достаточно лишь, чтобы она была замкнутой.

А если заряд снаружи поверхности — вносит ли он вклад в поток? Как мы уже видели, если источник поля снаружи поверхности, то поток, будучи пропорционален (# входящих линий – # выходящих линий), равен нулю.

Теперь вспомним про принцип суперпозиции. Благодаря ему, можно считать поток от отдельных зарядов, а затем складывать их. Таким образом, можно сформулировать **закон Гаусса**:

Суммарный поток электрического поля через замкнутую поверхность равен $\sum q_i/\epsilon_0$, где q_i — заряды внутри поверхности.

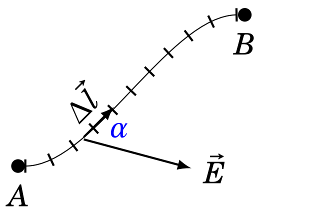
Заметим, что закон Гаусса эквивалентен закону Кулона. Действительно, что мы не знаем закон Кулона, а знакомы только с Гауссом. Возьмём заряд q и окружим его сферой. По симметрии, везде на поверхности этой сферы $\vec{E}$ одинаково и направлено $\perp S$, следовательно, поток равен $\Phi = E \cdot S = E \cdot 4\pi r^2$.

Но по закону Гаусса этот поток должен быть равен $\Phi = q/\epsilon_0$, значит, $E = kq/r$ — получился закон Кулона. Примерно так закон Гаусса можно применять для нахождения электрического поля в задачах, где есть какая-нибудь симметрия.

3. Потенциал.

3.1. Основные определения.

Если заряд q_0 поместить во внешнее поле $\vec{E}$ то, как мы видели, на него будет действовать сила $\vec{F} = q_0\vec{E}$. Если мы хотим этот заряд переместить, то надо будет совершить работу против этой силы (т.е. против поля $\vec{E}$). Аналогия — с напряжённостью поля тяжести $\vec{g}$.



Пусть заряд перемещается из точки A в точку B по какой-то траектории.

Чтобы найти работу сил при таком перемещении, нужно разбить траекторию на множество маленьких кусочков длины Δl. На каждом кусочке работа равна

$$\Delta A = F \cdot \Delta l \cdot \cos\alpha, \tag{8}$$

где α — угол между касательной к кусочку и $\vec{F}$ (мы будем это для краткости записывать как $\vec{F} \cdot \Delta\vec{l}$). Полная работа записывается как сумма:

$$A = \sum_A^B \vec{F} \cdot \Delta\vec{l} = q_0 \sum_A^B \vec{E} \cdot \Delta\vec{l}. \tag{9}$$

Потенциальная энергия системы при совершении такой работы изменилась на

$$\Delta U_{A\to B} = -A = -q_0 \sum_A^B \vec{E} \cdot \Delta\vec{l}. \tag{10}$$

Разностью потенциалов между точками A и B называется отношение этого изменения потенциальной энергии к величине заряда q_0 (**пробного заряда**):

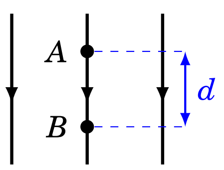
$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = \frac{\Delta U_{A\to B}}{q_0} = -\sum_A^B \vec{E} \cdot \Delta\vec{l}. \tag{11}$$

Потенциальную энергию обычно отсчитывают от какой-то точки O, которую условно принимают за 0. Действуя таким образом, можем ввести понятие **потенциала** φ_A в точке A:

$$\varphi_A = \frac{\Delta U_{O\to A}}{q_0} = -\sum_O^A \vec{E} \cdot \Delta\vec{l}. \tag{12}$$

Отметим, что потенциал φ и разность потенциалов $\Delta\varphi$ — характеристика электрического поля, а не пробного заряда q_0.

3.2. Пример: потенциал в однородном поле.

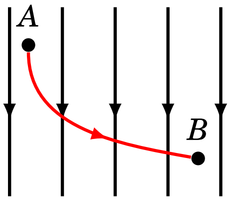


В качестве первого упраженения посчитаем разность потенциалов между двумя точками в однородном поле. Заряд перемещается из точки A в точку B как показано на рисунке, вдоль силовой линии поля. Тогда

$$\varphi_B - \varphi_A = -\sum \vec{E} \cdot \Delta\vec{l} = -\sum E \cdot \Delta l \cdot \cos 0 = -E \sum \Delta l = -E \cdot d. \tag{13}$$

Заметим, что $\varphi_B < \varphi_A$, т.к. $Ed < 0$. Силовые линии всегда смотрят в сторону уменьшения потенциала.

Усложним задачу: пусть теперь наш пробный заряд перемещается из точки A в точку B не вдоль силовой линии, а по какому-то произвольному пути (см. рисунок).



Разобьём эту траекторию на много маленьких кусочков; разность потенциалов по-прежнему равна

$$\varphi_B - \varphi_A = -\sum \vec{E}\cdot\Delta\vec{l} = -\sum E\cdot\Delta l\cdot\cos\alpha. \tag{14}$$

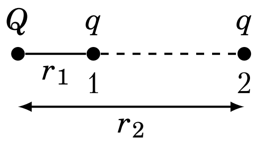
Электрическое поле везде одинаково, поэтому его можно вынести за знак суммы. Все оставшиеся слагаемые имеют вид $\Delta l\cos\alpha$. Это — проекция длины кусочка Δl на вертикальное направление, Δh. Получается такая сумма:

$$\varphi_B - \varphi_A = -E\sum\Delta h = -E\cdot d. \tag{15}$$

Получился такой же ответ, как и в (13), не зависящий от конкретного пути.

Мы видим, что все точки, лежащие в плоскости, перпендикулярной $\vec{E}$, имеют одинаковый потенциал относительно A. Такая поверхность (поверхность одинакового потенциала) называется **эквипотенциальной**.

3.3. Пример: потенциал точечного заряда.



Подсчитаем разность потенциалов для ещё одной простой конфигурации поля — точечного заряда. Пусть имеется заряд Q. На расстоянии r_1 от него находится пробный заряд q. Заряд перемещают по прямой на расстояние r_2 от заряда Q. Какова будет разность потенциалов между точками 2 и 1?

По определению, $\Delta\varphi$ равно

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\sum_{r_1}^{r_2} E\cdot\Delta l = -kQ\sum_{r_1}^{r_2}\frac{1}{l^2}\Delta l. \tag{16}$$

Направление напряжённости поля везде совпадает с направлением перемещения, поэтому вместо скалярного произведения можно брать обычное.

Посмотрим, как выглядит эта сумма на графике. Выделим среди всех кусочков отрезок, например, от l_{16} до l_{17}. Слагаемое, соответствующее этому кусочку, имеет вид

$$\frac{1}{l_{16}^2}\cdot\Delta l = \frac{1}{l_{16}^2}(l_{17}-l_{16}). \tag{17}$$

Видно, что это слагаемое соответствует площади прямоугольника, заштрихованного красным на графике, а вся сумма, стало быть, соответствует площади под графиком функции $1/l^2$ в пределах $1/r_1$ до $1/r_2$.

Будем считать вместо площади этого прямоугольника площадь трапеции — ошибка составит около Δl^2, то есть, пренебрежимо малую величину (количество таких треугольников $\sim(\Delta l)^{-1}$, значит, суммарная ошибка от всех них $\sim\Delta l$ — может быть сделана сколь угодно малой). Итак, предлагается вместо (17) написать

$$\frac{1/l_{16}^2 + 1/l_{17}^2}{2}(l_{17}-l_{16}). \tag{18}$$

Но суммировать такие слагаемые опять сложно. Применим ещё один трюк: учтём, что в случае близких чисел их среднее арифметическое примерно равно их среднему геометрическому. Иными словами, вместо (18) напишем

$$\sqrt{\frac{1}{l_{16}^2 l_{17}^2}}(l_{17}-l_{16}) = \frac{1}{l_{16}} - \frac{1}{l_{17}}. \tag{19}$$

Теперь надо просуммировать все такие слагаемые:

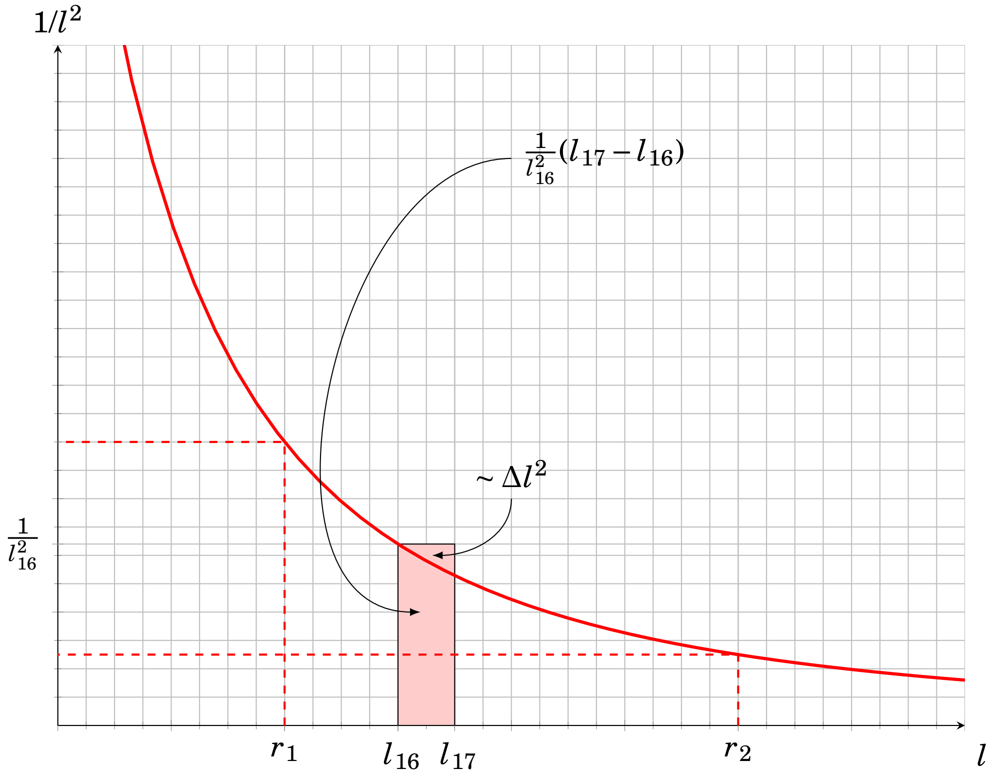


Рис. 5: Вычисление площади под графиком $1/l^2$.

$$\sum_{r_1}^{r_2} \frac{1}{l^2}\Delta l = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_1} - \frac{1}{l_2} + \ldots + \frac{1}{l_N} - \frac{1}{r_2}. \tag{20}$$

Видно, что почти всё сократится, а останется

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -kQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = k\frac{Q}{r_2} - k\frac{Q}{r_1}. \tag{21}$$

Заодно мы подсчитали площадь под графиком $1/l^2$ — она оказалась равна $1/r_1 - 1/r_2$.

Установим такое правило: потенциал на бесконечности (когда $r \to \infty$) равен нулю. Тогда можно ввести понятие потенциала в конкретной точке, удалённой от заряда на расстояние r. Из формулы (21) получается, что

$$\varphi(r) = k\frac{Q}{r}. \tag{22}$$

Это выражение мы будем называть **потенциалом точечного заряда**.

Заметим, что для потенциала тоже действует принцип суперпозиции. Если имеется несколько зарядов $Q_1, Q_2, \ldots$, расположенных на расстояниях $r_1, r_2, \ldots$ от точки наблюдения, то потенциал в ней равен

$$\varphi = \sum_i k\frac{Q_i}{r_i}. \tag{23}$$

Наконец, отметим ещё один факт. В отличие от напряжённости поля $\vec{E}$ потенциал является скаляром, т.е. имеет всего одну компоненту. Это иногда облегчает его вычисление.

3.4. Потенциальная энергия в поле точечного заряда.

В предыдущем разделе мы вычислили разность потенциалов при перемещении пробного заряда q в поле другого заряда Q. Теперь зададимся вопросом: чему равна потенциальная энергия такой системы?

Ответить на этот вопрос легко, если учесть определение потенциала (11):

$$U = q\Delta\varphi = k\frac{qQ}{r}. \tag{24}$$

При одноимённых зарядах ($qQ > 0$) потенциальная энергия поля положительна и убывает при разведении зарядов.

Заметим, что потенциал и потенциальная энергия — совсем разные вещи. Потенциальная энергия U показывает, какую работу нужно затратить, чтобы собрать данную систему из отдельных частей (т.е. чтобы заряды q и Q из бесконечности привести на расстояние r между ними). Потенциал $\varphi(r)$, в свою очередь, является функцией положения в пространстве.

Иными словами, потенциал — это характеристика только лишь поля, независимая от пробного заряда; потенциальная энергия же — характеристика системы зарядов и поля между ними.

4. Ёмкость и конденсаторы.

Если зарядить проводник (например, сферу), его потенциал повысится (поскольку $\varphi = kQ/r$). Для любого проводника $\varphi \sim Q$, поэтому можно ввести понятие **ёмкости**:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \tag{25}$$

Ёмкость измеряется в фарадах (в честь Майкла Фарадея).

Например, ёмкость сферы равна $C = R/k = 4\pi\epsilon_0 R$, пропорциональна радиусу. Можно оценить ёмкость Земли: $C = 9 \cdot 10^9 \cdot 6.4 \cdot 10^6$м ≈ 700 мкФ. Видно, что даже такой большой объект как Земля имеет довольно маленькую ёмкость.

Можно ли обобщить это понятие на случай нескольких проводников? Возьмём два незаряженных проводника произвольной формы и соединим их батарейкой с напряжением U. Затем отключим батарейку.

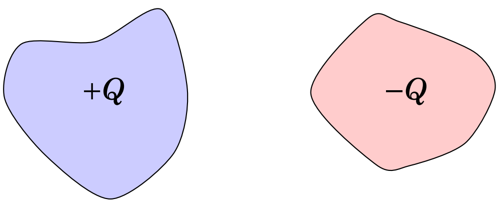


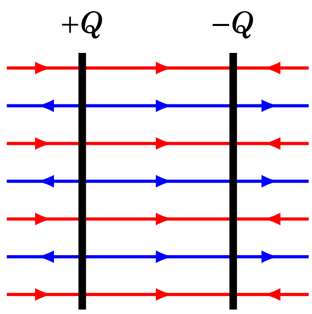
Рис. 6: Два проводника, составляющие конденсатор.

В результате разность потенциалов между проводниками становится равна U. Предположим, что на одном проводнике при этом скопился заряд $+Q$, а на другом — $-Q$. Можно ввести понятие **ёмкости конденсатора**:

$$C = \frac{Q}{U}. \tag{26}$$

Поскольку разность потенциалов пропорциональна заряду, то ёмкость является исключительно характеристикой конденсатора, его геометрии. Проиллюстрируем это на примере плоского конденсатора.

4.1. Пример: ёмкость плоского конденсатора.



Рассмотрим две проводящие пластины площадью S, с зарядами $+Q$ и $-Q$. Пластины расположены на расстоянии d друг от друга. Если это расстояние много меньше, чем размеры пластин ($\sqrt{S} \gg d$), то мы можем считать их бесконечно большими.

Поэтому поле, создаваемое ими, можно считать однородным. Картина силовых линий этих полей показана на рисунке. Из него вытекает, что слева и справа от пластин суммарное поле будет равно 0 — поля от положительно и отрицательно заряженных пластин компенсируются. А вот между пластинами поле, наоборот, будет равно сумме полей:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}. \tag{27}$$

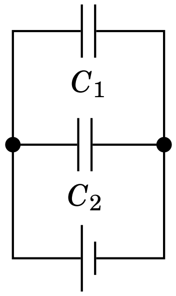
Итак, между пластинами будет однородное поле с напряжённостью E. Это обеспечит разность потенциалов между пластинами, равную

$$U = E \cdot d = \frac{Qd}{\epsilon_0 S}. \tag{28}$$

В соответствии с определением (26) получаем, что ёмкость плоского конденсатора равна

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \tag{29}$$

4.2. Параллельное соединение конденсаторов.



Посмотрим, что будет, если два конденсатора соединить параллельно, плюсом к плюсу. Вопрос ставится так: можно ли их заменить одним конденсатором? Допустим, заряды на них Q_1 и Q_2, ёмкости C_1 и C_2 соответственно.

Если мы заменим два конденсатора одним (с зарядом Q и ёмкостью C), то заряд на нём должен быть равен суммарному заряду $Q = Q_1 + Q_2$. Напряжение при этом остаётся тем же самым, так что

$$U = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C}. \tag{30}$$

Отсюда следует, что $C = C_1 + C_2$. Итак, при параллельном соединении конденсаторов их ёмкости складываются.

Очевидно, если параллельно соединить конденсаторов, то $C = C_1 + \ldots + C_N$.

5. Энергия, запасённая в конденсаторе.

Рассмотрим конденсатор, состоящий из двух параллельных проводящих пластин площадью S, расстояние между которыми d (как обычно, $\sqrt{S} \gg d$). Вначале пластины не заряжены. Попробуем зарядить этот конденсатор следующим образом: возьмём небольшой заряд Δq с одной пластины и перенесём его на другую. Нам не придётся совершать никакой работы: ведь поскольку пластины не заряжены, то поле между ними отсутствует.

Повторим эту процедуру. Теперь уже придётся совершить небольшую работу, так как между пластинами будет электрическое поле. По мере увеличения заряда на пластинах переносить небольшие порции заряда будет всё труднее. Подсчитаем работу, которая необходима для зарядки пластин конденсатора до заряда Q.

Итак, пусть на обкладках конденсатора уже есть какой-то заряд q. Этот заряд создаёт напряжение $u = q/C$. Для того, чтобы перенести заряд Δq в таком напряжении, надо совершить работу

$$\Delta A = \Delta q u = \Delta q \frac{q}{C}. \tag{31}$$

Значит, полная работа, необходимая для зарядки конденсатора равна

$$A = \sum \Delta A = \frac{1}{C} \sum_{q=0}^{q=Q} q \Delta q. \tag{32}$$

Встаёт вопрос о подсчёте этой суммы. Рассчитаем её графически.

На этом графике площадь, закрашенная красным, равна $q\Delta q$ — это площадь прямоугольника со сторонами q и Δq. Ясно, что при уменьшении Δq эта площадь будет почти неотличима от площади трапеции под графиком (ошибка составит $\Delta q^2/2$).

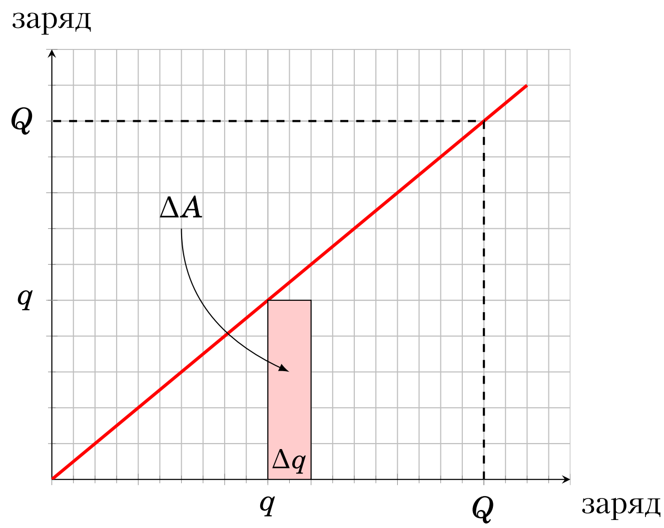


Рис. 7: Работа, необходимая для зарядки конденсатора.

Если мы просуммируем все эти площади, как предписывает нам формула (32), то получится площадь под наклонной линией, то есть, площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами Q. Таким образом,

$$A = \frac{1}{C}\sum_{q=0}^{q=Q} q\Delta q = \frac{1}{C}\frac{Q^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2}. \tag{33}$$

Итак, мы нашли работу, которую необходимо затратить, чтобы зарядить конденсатор ёмкости C до заряда Q (или до напряжения U). Очевидно, что эта работа идёт на увеличение потенциальной энергии в конденсаторе. Таким образом, энергия запасённая в конденсаторе, выражается формулой (33).

Ясно, что это работает для любого конденсатора, а не только плоского (в этом вычислении мы вообще не пользовались его формой).

Посмотрим ещё на один вариант записи этой энергии. Вспомним, что $U = Ed$, тогда получится, что энергия в конденсаторе

$$W = \frac{1}{2}\epsilon_0 (Sd)E^2 = \epsilon_0 V E^2, \tag{34}$$

где V — объём конденсатора. Можно ввести понятие **плотности энергии**:

$$w = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2. \tag{35}$$

Мы видим, что там, где есть электрическое поле, появляется и потенциальная энергия этого поля, пропорциональная E^2. Это наблюдение верно не только для конденсатора, но и вообще для любой ситуации.

5.1. Пример: два конденсатора с перевёрнутой полярностью.

Конденсаторы ёмкостями C_1 и C_2 ($C_1 > C_2$) заряжены до напряжения U. Затем их подключают друг к другу так, как показано на схеме. Найти разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$.

После того, как конденсаторы будут подключены друг к другу, заряды на пластинах перераспределяться пока потенциалы на пластинах не сравняются. Из этого следует, что

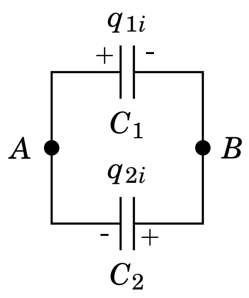


Рис. 8: Два конденсатора.

конденсатор C_2 перезарядится так, что на его левой пластине будет плюс, а на правой минус. Обозначим заряды конденсаторов после перезарядки как q_{1f} и q_{2f}. Запишем суммарный заряд до перезарядки:

$$q_i = q_{1i} + q_{2i} = C_1U - C_2U = (C_1 - C_2)U. \tag{36}$$

Конечный заряд:

$$q_f = q_{1f} + q_{2f} = (C_1 + C_2)U_f. \tag{37}$$

Но система изолирована, а значит, суммарный заряд поменяться не может, $q_i = q_f$. Отсюда находим конечное напряжение на конденсаторах (оно же — разность потенциалов $\varphi_A - \varphi_B$):

$$U_f = \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}U. \tag{38}$$

Ответ на вопрос задачи мы нашли, но осталась небольшая тонкость. Подсчитаем энергию системы в начале

$$W_i = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U^2 \tag{39}$$

и в конце:

$$W_f = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U_f^2 = \frac{1}{2}\frac{(C_1 - C_2)^2}{C_1 + C_2}U. \tag{40}$$

Видно, что

$$\frac{W_f}{W_i} = \left(\frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2}\right)^2 < 1. \tag{41}$$

Получается, что в ходе перезарядки часть энергии потерялась. Сейчас это не очень легко оценить, но выясняется, что это потери на электромагнитное излучение.

6. Диэлектрики и конденсатор.

Диэлектрики отличаются от проводников тем, что в них нет свободных носителей заряда. Поэтому во внешнем электрическом поле они ведут себя по-другому — в результате **поляризации** уменьшают поле внутри себя.

Пусть в пространстве есть некое распределение свободных зарядов. Заполним его диэлектриком. Напряжённость в заполненной области упадёт в ϵ раз, константа ϵ — **диэлектрическая проницаемость**.

Вещество	ϵ
бумага	3.7
фарфор	6
вода	80
дерево	4
стекло	10

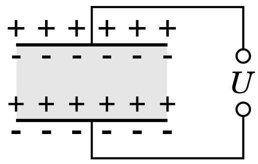
Что будет, если такой диэлектрик вставить в конденсатор? Рассмотрим плоский конденсатор, пространство между обкладками полностью заполним веществом ϵ. Поле упадёт в ϵ раз, значит, ёмкость вырастет в ϵ раз:

$$C_\epsilon = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}. \tag{42}$$

Разберём пример, который подробнее покажет, что именно происходит с конденсатором, когда в него вставляют диэлектрик.

6.1. Пример: конденсатор и связанные заряды.

Плоский конденсатор ёмкостью C_0 присоединён к источнику с напряжением U. Какой заряд протечёт через источник при заполнении пространства между обкладками диэлектриком ϵ?



До внесения диэлектрика на обкладках был заряд $Q_0 = C_0U$. После внесения диэлектрика заряд изменился, так как изменилась ёмкость: $Q_1 = \epsilon C_0 U$. Таким образом, протекший заряд равен

$$\Delta Q = Q_1 - Q_0 = (\epsilon - 1)C_0 U. \tag{43}$$

Разберёмся с этим немного внимательнее. При внесении диэлектрика (на картинке обозначен серым цветом) в электрическое поле, которое существует между пластин, в нём появляются **связанные заряды**, возникающие из-за поляризации атомов и молекул в диэлектрике. Именно за счёт них в диэлектрике возникает электрическое поле.

Найдём связанный заряд в диэлектрике. С одной стороны, напряжённость поля между пластинами конденсатора равна $E = U/d$, так как напряжение между ними не изменилось — пластины подключены к источнику. С другой стороны, ясно, что это поле складывается из поля от заряженных пластин и поля от связанных зарядов, причём эти поля направлены в противоположные стороны:

$$E = \frac{U}{d} = \frac{Q_1/S - q_{\text{св}}/S}{\epsilon_0}, \qquad q_{\text{св}} = Q_1 - \frac{\epsilon_0 SU}{d} = (\epsilon - 1)C_0 U. \tag{44}$$

Здесь мы использовали тот факт, что поле между заряженными пластинами с поверхностной плотностью зарядов σ равно $E = \sigma/\epsilon_0$.

Заметим, что $q_{\text{св}} = \Delta Q$. Разумеется, до этого можно было догадаться с самого начала — через батарейку протекает ровно такой заряд, чтобы на пластинах установилась разность потенциалов U.

7. Теорема единственности.

Напоминание о свойствах проводника:

1. $\vec{E}_{\text{внутри}} = 0$;
2. поверхность проводника всюду имеет одинаковый потенциал;
3. $\vec{E}$ перпендикулярно поверхности проводника;
4. весь заряд проводника скапливается на его поверхности.

Рассмотрим проводник, которому сообщили заряд $Q > 0$. Единственным ли образом он распределится по поверхности? Докажем **теорему единственности**.

Допустим, есть два возможных распределения заряда, назовём их P_1 и P_2. Если этому же незаряженному проводнику сообщить заряд $-Q < 0$, то будет два распределения P_1' и P_2', которые от P_1 и P_2 отличаются только знаком (т.к. электрическое поле между маленькими зарядами просто поменяет знак).

Пусть заряд Q принял конфигурацию P_1. «Заморозим» это распределение, наложим заряд $-Q$ так, чтобы он был в конфигурации P_2'. Суммарный заряд равен нулю, и должны выполняться пп. 1–4.

Очевидно, на проводнике будет область A, заряженная положительно, и область B, заряженная отрицательно. Рассмотрим силовую линию из A. Есть два варианта: либо она уходит на бесконечность, либо кончается на проводнике.

Если она кончается на проводнике, то это означает, что у двух точек разные потенциалы, но это противоречит п. 2. Если силовая линия уходит на бесконечность, то это означает, что потенциал на бесконечности меньше, чем потенциал в A.

Рассмотрим тогда область B — в неё силовая линия приходит из бесконечности, значит, потенциал на бесконечности больше, чем потенциал в B, но потенциалы у A и B должны быть равны — имеем противоречие.

Теорема единственности доказана.

8. Метод изображений.

В теореме единственности мы видели, что существует единственное распределение напряжённости поля в пространстве вне проводников, при котором поверхности проводников эквипотенциальны, а их заряды (или потенциалы) равны заданным значениям.

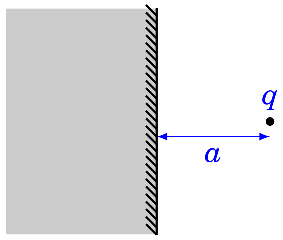
Метод изображений позволяет «заменить» распределение зарядов по поверхности проводника воображаемыми зарядами (**изображениями**) внутри проводника. Нужно соблюдать несколько простых правил:

- если проводник заземлён, то на его поверхности нулевой потенциал;
- если же задан заряд проводника, то поверхность должна быть эквипотенциальной;
- сумма зарядов изображений должна быть равна суммарному заряду проводника.

По теореме единственности существует единственное поле, удовлетворяющее этим условиям. Рассмотрим два полезных примера.

8.1. Пример: заряд и проводящая плоскость.

Заряд $q > 0$ поднесли к бесконечной проводящей плоскости на расстояние a. Найдите силу взаимодействия заряда и плоскости.



При поднесении заряда к такой поверхности заряды на ней перераспределяются так, что на поверхности возникает избыток отрицательного заряда. При этом поверхность имеет нулевой потенциал (т.к. она простирается до бесконечности). Значит, надо подобрать воображаемые заряды так, чтобы выполнялось это условие.

Очевидно, если мы разместим заряд $-q$ за поверхностью на расстоянии a от неё (или на расстоянии $2a$ от заряда q), то это условие выполнится. Действительно, на поверхности, проходящей посередине между зарядами q и $-q$ любая точка равноудалена от этих зарядов, и значит, потенциал в ней будет равен нулю.

Таким образом, мы заменили систему из заряда и плоскости на систему из двух точечных зарядов. Сила их взаимодействия равна, очевидно,

$$F = k\frac{q^2}{(2a)^2} = k\frac{q^2}{4a^2}. \tag{45}$$

Из нашего рассмотрения понятно, что заряд притягивается к плоскости.

8.2. Пример: заряд и заземлённая сфера.

Точечный заряд q поднесли к заземлённой проводящей сфере радиуса R. Какова будет сила взаимодействия заряда с этой сферой? Заряд находится на расстоянии L от центра сферы.

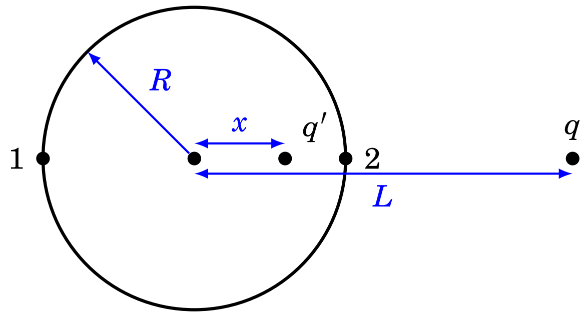


Рис. 9: Заряд и заземлённая сфера.

Попробуем подобрать заряд–изображение q'. Из симметрии понятно, что он должен находиться на прямой, соединяющей центр сферы и заряд q. Ясно также, что он должен находиться внутри сферы. Пусть он расположен на расстоянии x от центра сферы. Итак, нам нужно найти сам заряд q' и x.

Чтобы подобрать эти параметры, нам нужно вспомнить, что сфера заземлена, а значит, её потенциал равен 0. Посмотрим для начала на потенциал в точках 1 и 2:

$$\varphi_1 = k\frac{q}{L+R} + k\frac{q'}{R+x} = 0, \tag{46}$$

$$\varphi_2 = k\frac{q}{L-R} + k\frac{q'}{R-x} = 0. \tag{47}$$

Решая эту систему, находим

$$q' = -q\frac{R}{L}, \quad x = \frac{R^2}{L}. \tag{48}$$

А что же происходит в остальных точках?

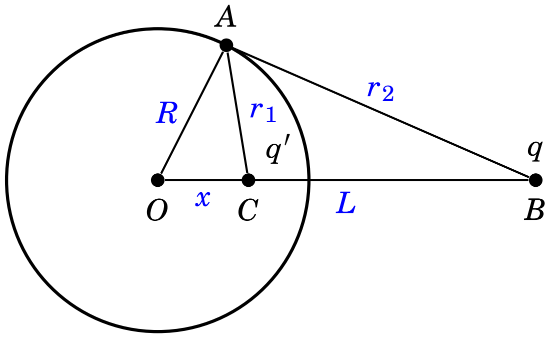


Рис. 10: Потенциал в произвольной точке на сфере.

Заметим, что $\frac{R}{x} = \frac{L}{R}$, т.е. $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OA}$, значит, треугольники OAB и OAC подобны.
Значит, для любой точки A на сфере $\frac{r_1}{r_2} = \frac{R}{L}$.
Потенциал в этой точке равен

$$\varphi_A = k\frac{q}{r_2} - kq\frac{R}{L}\frac{1}{r_1} = 0. \tag{49}$$

Итак, выясняется, что заряд, определяемый формулой (48), даёт нулевой потенциал на всей поверхности сферы.

Таким образом, мы нашли заряд–изображение для нашей задачи. Остаётся только посчитать силу взаимодействия двух точечных зарядов. Она равна

$$F = k\frac{|q||q'|}{(L-x)^2} = kq^2\frac{RL}{(L^2-R^2)^2}. \tag{50}$$

По теореме Гаусса очевидно, что на сфере индуцируется заряд, как раз равный q'.