



## Статика I

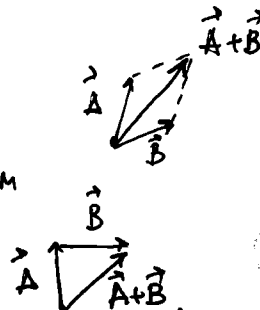
\* МАТ. ТОЧКА. Условия равновесия:  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$



Как складывать силы?

• параллелограмм

• треугольник



$\vec{R} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n$  - равнодействующая.

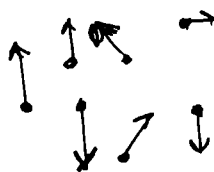
Эквивалентные все системы сил.

Вопрос Точка в равновесии, действуют 3 взаимно не коллинеарные силы.

Какой угол между ними?

Введение про вектора, проекции и т.д.


Система точек




Сумма всех сил, действующих на все точки, должна быть равна нулю.

~~Сложим все силы - получим равнодействующую.~~

В каком смысле она эквив. все силы?

Демонстрация Деформация равна.  $\vec{R} = 0$ , но увеличивается! 

Причина - деформация, растяжение.

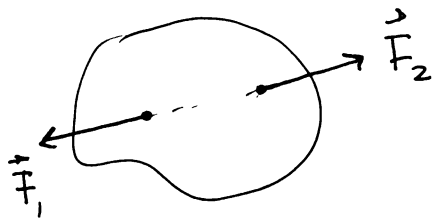
Модель - система распр. телеско ХТТ. (Распр. между телами)    
 деформация

Важный вопрос Где точка приложения равнодействующей?

Ответ неочевиден. Надо аксиомы - теоремы.

2

## Аксиома

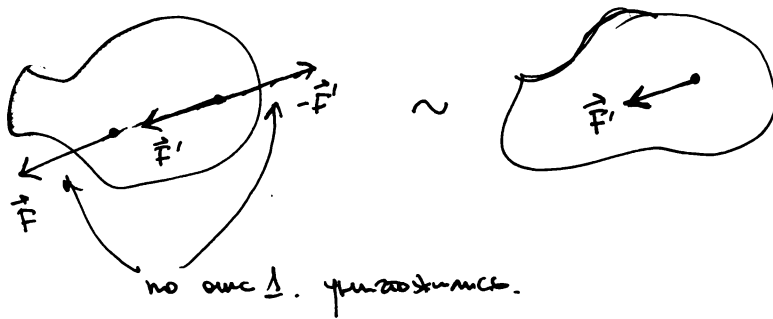


Если к АТТ приложены 2 направленные друг на друга силы, то

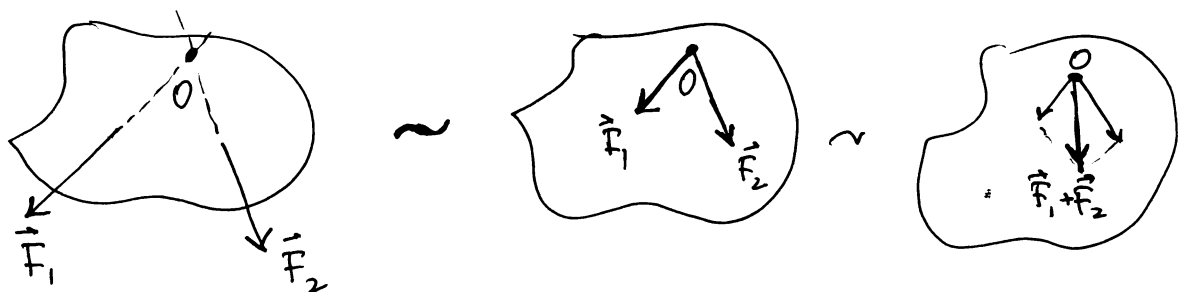
АТТ в равновесии т.е. т.т. тогда

- силы по модулю равны
- направлены по нити
- лежат на одной линии

Следствие 1) Силы можно свести в одну силу действия.

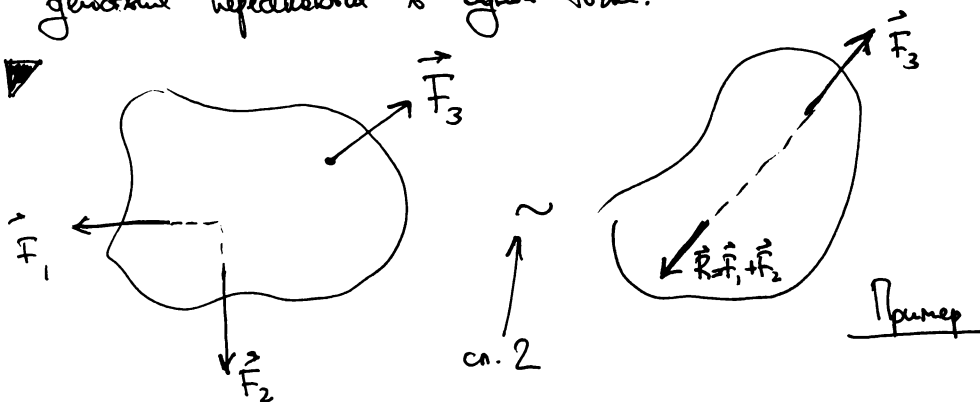


2)



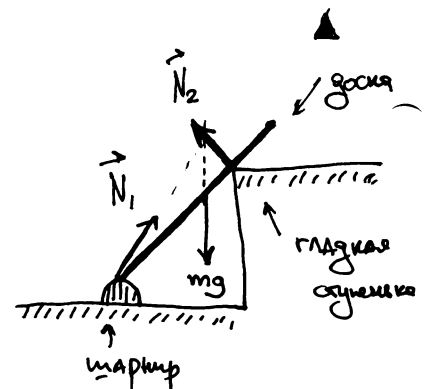
## Теорема о трёх силах

Если АТТ в равновесии ~~то~~ под действием 3-х не-|| сил, то линии их действия пересекутся в одной точке.



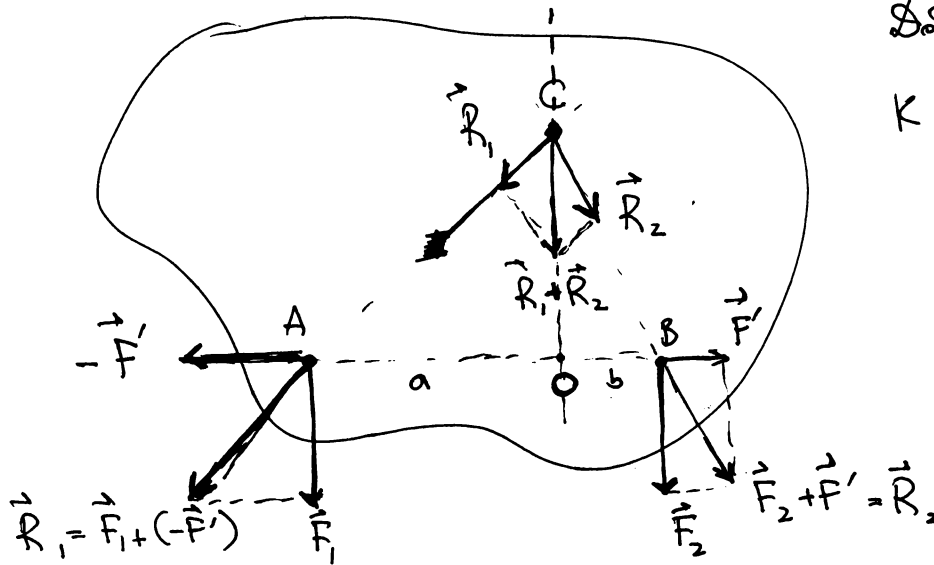
Но по акс. то 2 силы  $\Rightarrow$  г.д. на одной линии.

Пример





Множество с началом, представляющее 1 вектор.  
Что такое 1 вектор? Как их считать — это тоже вопрос?



Сложение векторов  $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$   
К  $\vec{R}_1, \vec{R}_2$  относятся  
с. 2

$\vec{R}_1 + \vec{R}_2 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ . Нужно найти вектор  $\vec{R}$  (?) 0.

Как её найти? Угловой  $\Delta$ .

$$\frac{F_1}{F'} = \frac{CO}{AO} ; \frac{F_2}{F'} = \frac{CO}{OB} \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{OB}{AO} = \frac{b}{a} \Rightarrow F_1 \cdot a = F_2 \cdot b$$

Т.е. равнодействующая равна  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ , а точка приложения определяется

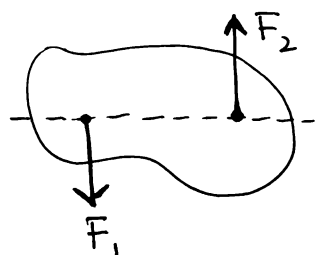
Вопрос: Задача на 10-м классе с  $F'$ ?

Общ. уравнение для  $OC$  — ~~неизвестно~~

А как быть, если  $\vec{F}_1 \uparrow \vec{F}_2$ ? Справится ли этот механизм?

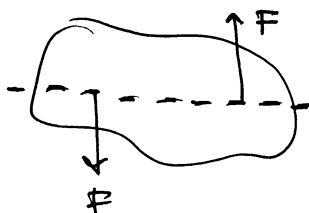
4

Упрощение



Такая упрощенная система  
за определенным условием сн.  
(разности расстояний от осей по 2 осн.)

Для системы  
пар сил



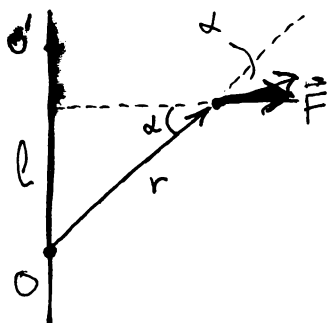
это не работает!

Линия действия  $\vec{R}$  уходит на бесконечность.

Равновесие системы у пар сил нет

Ясно, что пара сил будет равновесия нет.

Для характеристики этой системы введем понятие **момента**



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot l \quad \leftarrow \text{мехо сн}$$

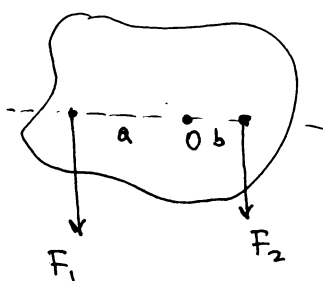
Момент направлен по правилу "винта" (это же правило правой руки)

Момент — это то, что вращает (это правило и направление)

Видно, что момент создается относительно оси  $OO'$ , поэтому  $l$  отсчитываем где  
как вращает осн.  $\forall P \in OO' \quad M_P(F) = \text{const}$

Возвращаясь к системе параллельных сил. Там было

$$F_1 \cdot a = F_2 \cdot b$$



Это — равенство моментов сил  $F_1$  и  $F_2$  относительно точки O.

(точнее, осн, к-рая проходит через O)

Момент пары сил по определению  $M = F \cdot d$ , где

$d$  — расстояние между силами.

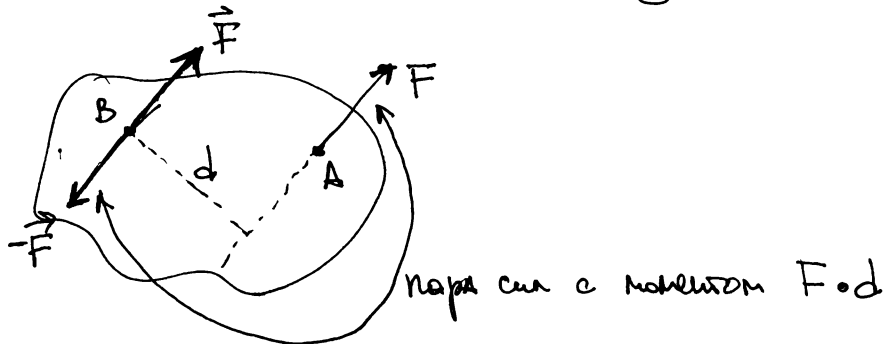
Пара сил характеризуется только моментом, это — единственная характеристика.





## Лемма параллельности

Всякая сила, приложенная в точке A, экв. той же силе, приложенной в (.) B и перп. моменту соответ. паре моментов сил отн. (.) B.



## Определение параллельности

— ] есть силы  $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ . Выберем произв. точку O.

Перенесём сюда все силы. Повернём перп., моменты и-паре  $\pm F_i \cdot d_i$

Пар сил в одной точке, то мы можем считать, что

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n. \quad \text{и суммарный момент } M = \pm F_1 \cdot d_1 \pm F_2 \cdot d_2 \pm \dots \pm F_n \cdot d_n.$$

Как мы знаем, для параллельности необходимо  $\boxed{\vec{R} = 0}$ . Это первое условие.

Но остаются ещё пары, эти должны быть равны нулю, если не  $\boxed{M = 0}$ .

Это второе условие.

Вопрос Как эти условия зависят от точки O?

~~В~~ В системе сил, где  $\vec{R} = 0$  моменты не зависят от точки.

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n. \quad \vec{M}_{O'} = (\vec{r}_1 + \vec{r}') \times \vec{F}_1 + \dots + (\vec{r}_n + \vec{r}') \times \vec{F}_n = \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \dots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n + \vec{r}' \times [\vec{F}_1 + \dots + \vec{F}_n] = \vec{M}_O. \end{aligned}$$

### Headquarters

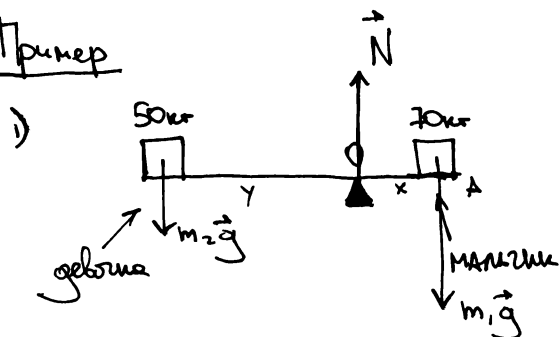
Hogil Kim Memorial Building #501, POSTECH, San 31, Hyoja-dong, Nam-gu  
Pohang, Gyeongbuk 790-784, Korea  
Tel : +82-54-279-8661~4 Fax : +82-54-279-8679

### Branch Office

The Korean Federation of Science and Technology Societies Building 11<sup>th</sup> floor  
635-4 Yoksam-dong, Kangnam-gu, Seoul, 135-703, Korea  
Tel : +82-2-561-7641~2 Fax : +82-2-561-7140

Таким образом, можно искать условие  $\vec{M}=0$  где более удобен тот или иной, который удобнее.

Пример



$$M_0 = 70 \text{ кг} \cdot 10^4 \text{ м} \cdot x - 50 \text{ кг} \cdot 10^4 \text{ м} \cdot y = 0$$

$$7x = 5y$$

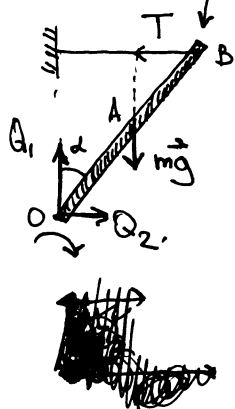
Момент отн. (.) A:

$$\begin{cases} M_A = N \cdot x - m_2 g (x+y) \\ N = m_1 g + m_2 g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_A = m_1 g x + m_2 g x - m_2 g x - m_2 g y = \\ = m_1 g x - m_2 g y \end{cases}$$

Действительно, момент не зависит от точки, если  $\sum \vec{F} = 0$ .

$$= m_1 g x - m_2 g y$$

2) Фрагмент окна



Найдем силу реакции в опоре фрагмента.

$$\text{Сумма сил равна нулю: } \vec{Q} + \vec{T} + \vec{mg} = 0.$$

$\vec{Q}$  можно разложить на 2 силы.

Знаем, по какой оси тоже.

$$\begin{aligned} \text{По вертикали: } Q_1 &= mg \\ \text{По горизонтали: } Q_2 &= T \end{aligned}$$

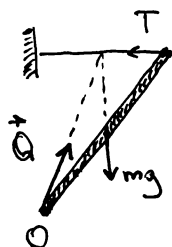
Уравнение моментов отн. (.) O:

$$mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \sin \alpha = T \cdot L \cdot \cos \alpha \Leftrightarrow T = \frac{mg}{2} \cdot \tan \alpha$$

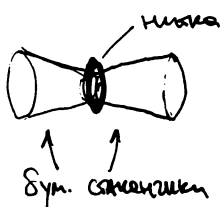
$$\text{т.е. } Q_1 = mg, Q_2 = \frac{mg}{2} \tan \alpha$$

Куда направлен  $\vec{Q}$ ? Можно еще по т. о 3-х силах.

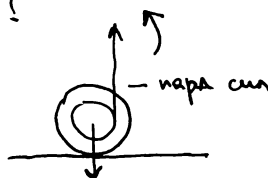
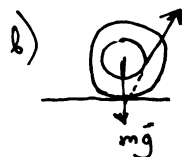
Потому  $\vec{Q}$  направ. не вдоль ~~фрагмента~~? Потому что она массивная.



Демонстрация  
(S&S exp. 1.14)



Куда будет вращаться?



- не будет вращаться вовсе.

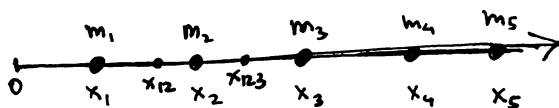


Центр тяжести

Мы имеем совокупность 2 непересекающихся тел; а что если их больше?

Рассмотрим такую задачу: пусть есть несколько

тел, пусть каждая частица находится в некотором месте, где она находится?



1)  $m_1$  и  $m_2$

$$R_{12} = F_1 + F_2 = m_1 g + m_2 g$$

По уравнению стат. 2-х || сил, получим:

$$m_1 g (x_{12} - x_1) = m_2 g (x_2 - x_{12})$$

$$x_{12} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

2)  $R_{12}$  и  $m_3$

$$R_{123} = R_{12} + m_3 g = (m_1 + m_2 + m_3) g$$

Определим стат. где || сил:  $(m_1 + m_2) g (x_{123} - x_{12}) = m_3 g (x_3 - x_{123})$

$$x_{123} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \Leftarrow$$

$$\begin{aligned} x_{123} (m_1 + m_2 + m_3) &= m_3 x_3 + (m_1 + m_2) x_{12} = \\ &= m_3 x_3 + m_1 x_1 + m_2 x_2 \end{aligned}$$

3) n масс

$$x_{y.c.} = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}$$

центр тяжести (или центр масс)

Ясно, что если масса б. 2d, то

$$y_{y.c.} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + \dots + m_n}$$

Вопрос Пусть есть лёгкий стержень с массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . В какой точке его нужно подвесить, чтобы он был в равновесии?

По определению — в ц.м.

Вопрос Где находится ц.м. однородного стержня длиной  $L$ ?

Вспоминаем, пользуясь формулами, (разбив на много кусочков)

#### Headquarters

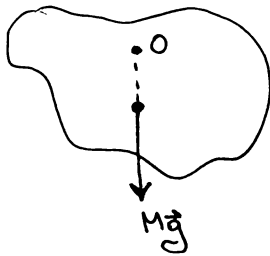
Hogil Kim Memorial Building #501, POSTECH, San 31, Hyoja-dong, Nam-gu  
Pohang, Gyeongbuk 790-784, Korea  
Tel : +82-54-279-8661~4 Fax : +82-54-279-8679

#### Branch Office

The Korean Federation of Science and Technology Societies Building 11<sup>th</sup> floor  
635-4 Yoksam-dong, Kangnam-gu, Seoul, 135-703, Korea  
Tel : +82-2-561-7641~2 Fax : +82-2-561-7140

# Нахождение центра масс

Возьмем тело. Поглядев его так, чтобы точка погляда была выше ц.м. и находилась с ним на вертикальной оси.



Очевидно, что тело будет в равновесии.

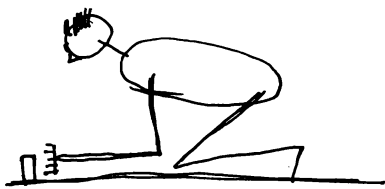
Если теперь взять другую точку погляда, то точка пересечения этих 2-х прямых будет ц.м., поскольку он лежит на каждой прямой.

Вопрос Может ли центр масс лежать вне тела?



Демонстрация (фант)

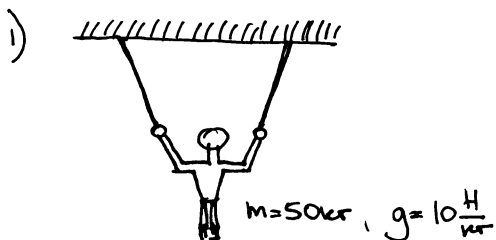
Маленький и большой, разный в центре масс (S&S exp, 1.15)



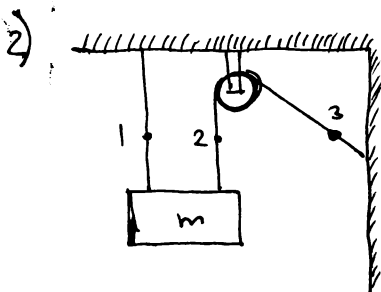
← где ц.м. и почему от него все зависит?

Несколько вопросов про равновесие и т.п.

(лучше потом, после exp. 20)

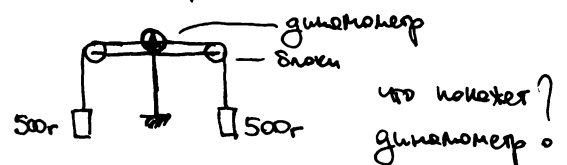


Сила натяжения каната: а)  $> 250 \text{ Н}$   
б)  $= 250 \text{ Н}$   
в)  $< 250 \text{ Н}$  ?

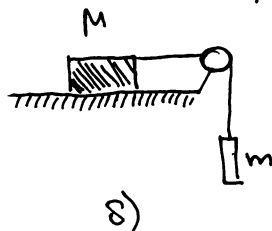
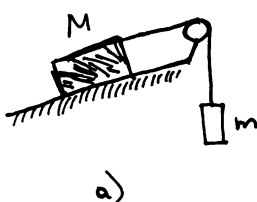


Как соотносятся между собой силы натяжения в точках 1, 2, 3?

4) Демонстрация?



3) Сравните силы натяжения нитей в двух случаях:



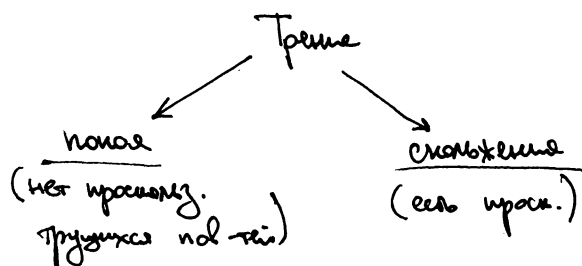
1)  $T_a > T_b$   
2)  $T_a = T_b$  ?  
3)  $T_a < T_b$





## Сила трения

Кроме сил тяжести и реакции опоры, ещё действует сила трения



Сила  $\leq \mu N$

## Основные законы

- 1) сила трения никогда не может быть больше чем  $F_{\max}$ .
- 2)  $F_{\max}$  (упр. и-р. называется проскальз.)  
 $= \mu N$   
от чего зависит  $\mu$ ?
- 3)  $\vec{F}_{\text{тр. скольз.}}$   $\uparrow \downarrow \vec{v}$   $\therefore F_{\text{тр. скольз.}} \approx \mu N$ .

Вопрос Зависит ли  $F_{\text{тр.}}$  от площади контакта?

## Демонстрация

(S&S exp., 1.17)



$h = h' ?$

также начавшее движение по инерции.

Рассуждения про реальную площадь контакта и природу силы трения.

## Оценка площади контакта

Рассмотрим лит. блок став на стани. Сила сжатия  $\sim 5 \cdot 10^{-3} \text{ Н/атом}$ .

Т.к. сила сдерживает  $\vec{N} = mg = 10 \text{ Н} \Rightarrow 5 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \# \text{ атомов} = 10 \text{ Н} \Rightarrow$   
 $\# \text{ атомов} = 2 \cdot 10^9$

Радиус атома  $\sim 2 \cdot 10^{-10} \text{ м} \Rightarrow S \sim 4 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2$ . Полная площадь:  $4 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2 \cdot 2 \cdot 10^9 =$

$= 8 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2$ .

$= 8 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2$ .

Кубик имеет объём  $\sim 125 \text{ см}^3 \Rightarrow$  площадь  $\sim 25 \text{ см}^2$ .

Итак,  $\frac{\text{"реальная" площадь}}{\text{всего площадь}} \approx \frac{8 \cdot 10^{-7} \text{ см}^2}{25 \text{ см}^2} = 10^{-8} !$

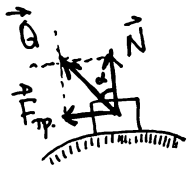
## Headquarters

Hogil Kim Memorial Building #501, POSTECH, San 31, Hyeon-dong, Nam-gu  
Pohang, Gyeongbuk 790-784, Korea  
Tel : +82-54-279-8661~4 Fax : +82-54-279-8679

## Branch Office

The Korean Federation of Science and Technology Societies Building 11\* floor  
635-4 Yoksam-dong, Kangnam-gu, Seoul, 135-703, Korea  
Tel : +82-2-561-7641~2 Fax : +82-2-561-7140

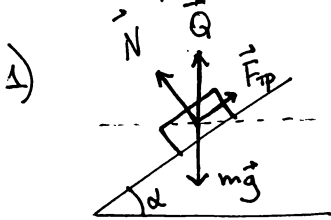
Можно рассматривать силу трения как часть силы реакции опоры.



$$\text{Заметим, что } F_{\text{тр}} \leq \mu N \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \leq \mu$$

↑ "угол трения", когда "=".

Можно решить несколько задач, иногда у условия равновесие.



при каком угле  $\alpha$  начнется скольжение?

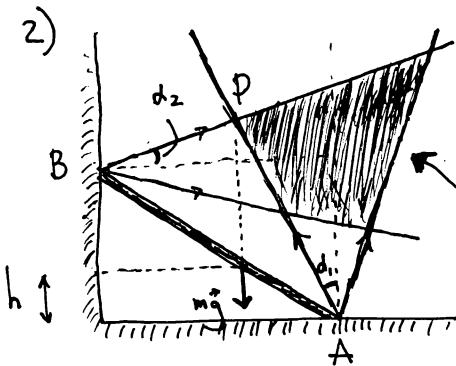
$$\vec{Q} = \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}$$

Равновесие:  $\vec{Q}$  по вертикали  $\Rightarrow$  угол трения совпадает с  $\alpha$ .

$$\Rightarrow \mu = \operatorname{tg} \alpha.$$

Другой способ, более формальный.

$$\begin{cases} F_{\text{тр}} = \mu N = m g \sin \alpha \\ N = m g \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \mu = \operatorname{tg} \alpha.$$



Лестница AB неслетит на какую высоту  $h$  может подняться человек, не нарушая равновесия?

К-ты  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

$$\mu_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$$

$$\mu_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$$

область, в которой лежит линия действия сил реакции опоры на лестницу.

По т. о 3-х силах нужно, чтобы сила тяжести тоже попала в эту область. Крайняя точка - P.

Интересно, что от массы человека ответ не зависит.



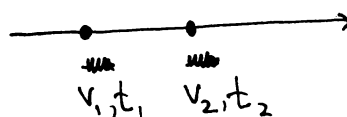
Вздох и равновесие.

Однородное движение.

В случае с прыжком мы видим, что если наклонить ступеньку сильно, то прыжок пройдет. Но как он пройдет? С ускорением.

Ускорение

мера изменения скорости.



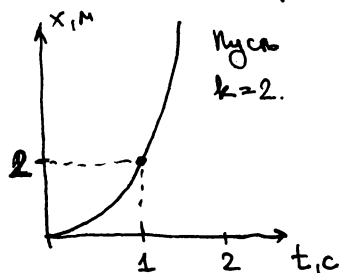
$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Чем меньше интервал, тем лучше.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \Delta t \rightarrow 0. \text{ Аналогия со скоростью: } v = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \Delta t \rightarrow 0.$$

Рассмотрим пример путь пропорционален квадрату времени как  $x = k \cdot t^2$

Хотим найти скорость и ускорение в момент времени  $t = 1c$ .



$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$x_1 = k \cdot t_1^2 = 2 \text{ м}$$

Какое было  $t_2$ ?

$$1) t_2 = 1.5c \Rightarrow x_2 = 2 \frac{\text{м}}{c^2} \cdot 2.25c^2 = 4.5 \text{ м}$$

$$v = \frac{4.5 \text{ м} - 2 \text{ м}}{1.5c - 1c} = 5 \text{ м/с}$$

$$2) t_2 = 1.2c \Rightarrow x_2 = 2 \frac{\text{м}}{c^2} \cdot 1.44c^2 = 2.88 \text{ м}$$

$$v = \frac{2.88 \text{ м} - 2 \text{ м}}{1.2c - 1c} = 4.4 \text{ м/с}$$

$$3) t_2 = 1.1c \Rightarrow x_2 = 2 \frac{\text{м}}{c^2} \cdot 1.21c^2 = 2.42 \text{ м} \Rightarrow v = \frac{0.42 \text{ м}}{0.1c} = 4.2 \text{ м/с}$$

$$4) t_2 = 1.01c \Rightarrow x_2 = 2 \frac{\text{м}}{c^2} \cdot 1.0201c^2 = 2.0402 \text{ м} \Rightarrow v = \frac{0.0402 \text{ м}}{0.01c} = 4.02 \text{ м/с}$$

5) приближается к 4 м/с. Можно ли доказать?

$$\text{Пусть } t_2 = t_1 + \delta. \text{ Тогда } x_2 = k \cdot (t_1 + \delta)^2 = k \cdot t_1^2 + 2k t_1 \delta + k \delta^2.$$

(если  $t_1 = 1c$   
то  $v = 4 \frac{\text{м}}{c}$ )

$$v = \frac{k t_1^2 + 2k t_1 \delta + k \delta^2 - k t_1^2}{t_2 - t_1} = 2k t_1 + \delta. \text{ Когда } \delta \rightarrow 0, \text{ то } v \rightarrow 2k t_1$$

**Headquarters**

Hogil Kim Memorial Building #501, POSTECH, San 31, Hyoja-dong, Nam-gu  
Pohang, Gyeongbuk 790-784, Korea  
Tel : +82-54-279-8661~4 Fax : +82-54-279-8679

**Branch Office**

The Korean Federation of Science and Technology Societies Building 11<sup>th</sup> floor  
635-4 Yoksam-dong, Kangnam-gu, Seoul, 135-703, Korea  
Tel : +82-2-561-7641~2 Fax : +82-2-561-7140

Итак, выяснилось, что если  $x = k \cdot t^2$ , то  $v(t) = 2k \cdot t$ . А что насчет ускорения?

То же самое, попробуем найти  $a$  в разные времена  $t_1 = 1 \text{ c}$ .

12

$$1) t_2 = 1.5 \text{ c} \Rightarrow a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{6 \text{ м/с} - 4 \text{ м/с}}{1.5 \text{ c} - 1 \text{ c}} = \boxed{4 \text{ м/с}^2}$$

$v_2 = 6 \text{ м/с}$

$$2) t_2 = 1.2 \text{ c} \Rightarrow a = \frac{4.8 \text{ м/с} - 4 \text{ м/с}}{1.2 \text{ c} - 1 \text{ c}} = \frac{0.8 \text{ м/с}}{0.2 \text{ c}} = \boxed{4 \text{ м/с}^2}$$

$v_2 = 4.8 \text{ c}$

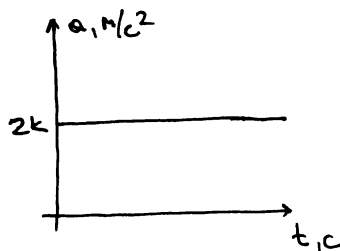
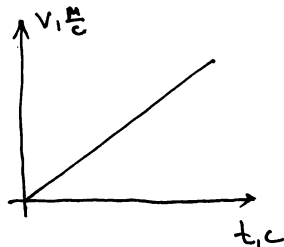
$$3) t_3 = 1.1 \text{ c} \Rightarrow a = \frac{4.4 \frac{\text{м}}{\text{с}} - 4 \frac{\text{м}}{\text{с}}}{1.1 \text{ c} - 1 \text{ c}} = \boxed{4 \text{ м/с}^2} \quad \text{Постоянно?}$$

$v_3 = 4.4 \text{ c}$

$$4) t_2 = t_1 + \delta \quad a = \frac{2kt_1 + 2k\delta - 2kt_1}{t_1 + \delta - t_1} = \boxed{2k = \text{const}}$$

$v_2 = 2kt_1 + 2k\delta$

Итак, если  $x = kt^2$ , то  $v = 2kt$ ,  $a = 2k$ .



Угол наклона?

Тангенс?

Вопрос А что если  $x = k \cdot t^3$ ?

**Терминология**

$a$  постоянно — равноускоренное гл-е ( $v = a \cdot t$ ,  $x = \frac{at^2}{2}$ )

$a = 0$  — равномерное движение ( $v = \text{const}$ ,  $x = vt$ )

$a$  пов. и  $\neq 0$  — равнозамедленное гл-е

В основном будем рассматривать случаи постоянного ускорения,  $a = \text{const}$ .

О размерностях

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow [v] = \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow [a] = \frac{\text{м/с}}{\text{с}} = \text{м/с}^2$$

## Двухмерное движение

Перемещение на плоскости — тоже вектор (как и сила).

Вопрос Влияет ли движение в. о. на вып. на движение в. груза?

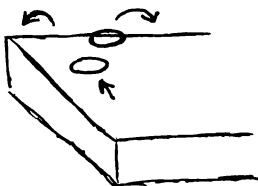
Бросил камень горизонтально — как связаны между собой вып. и гор. скорости?



$$V_x \sim V_y ?$$

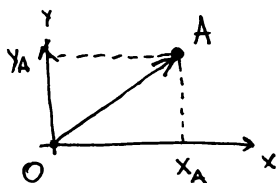
## Демонстрация

(SSS exp. 1.23)



одна монета имеет гор. скорость,  
а другая нет, но падают одновременно.

## Координаты точки и система отсчёта.



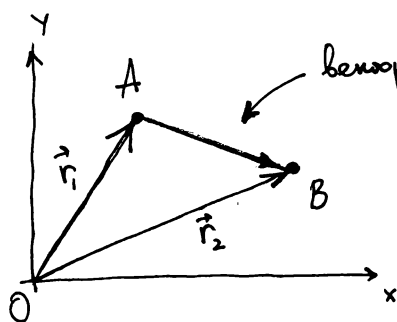
$\vec{r}$  — радиус-вектор. (не только величина, но и направление)

Длина — модуль радиус-вектора,  $r$  или  $|\vec{r}| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$

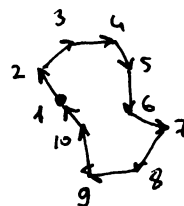
координаты —  $x_A$  и  $y_A$ . — длины проекции  $\vec{r}$  на оси  $x_A$  и  $y_A$ .

Перемещение:

точка перемещается  
из A в B.



вектор перемещения  $\vec{S} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \Delta \vec{r}$  (определение)



$\vec{S} = 0$ , хотя точка прошла  
какое-то расстояние

Можно складывать несколько перемещений по очереди.

### Headquarters

Hogil Kim Memorial Building #501, POSTECH, San 31, Hyoja-dong, Nam-gu  
Pohang, Gyeongbuk 790-784, Korea  
Tel : +82-54-279-8661~4 Fax : +82-54-279-8679

### Branch Office

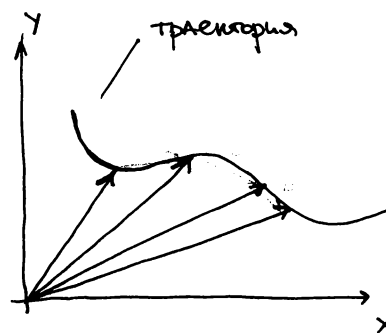
The Korean Federation of Science and Technology Societies Building 11<sup>th</sup> floor  
635-4 Yoksam-dong, Kangnam-gu, Seoul, 135-703, Korea  
Tel : +82-2-561-7641~2 Fax : +82-2-561-7140

## Скорость в 2d

(14)

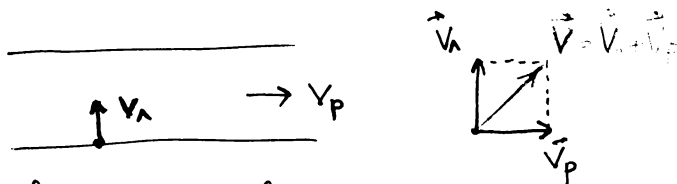
По аналогии с 1d  $\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ ,  $\Delta t \rightarrow 0$

Скорость — вектор, направленный в сторону перемещения.

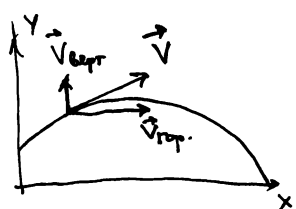


Как складывать скорости?

Стандартный пример — лодка и река.



Поскольку скорость — вектор, можно рассуждать на составляющие.



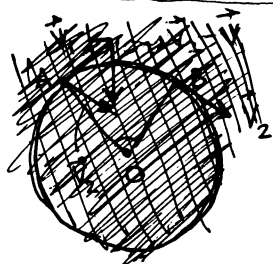
можно говорить о скорости по вертикали ( $v_y$ ) и по горизонтали ( $v_x$ ). И рассуждать движение независимо.

## Ускорение в 2d

По аналогии с 1d:  $\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$  Направлено в сторону изменения скорости.  
(а не в сторону перемещения)

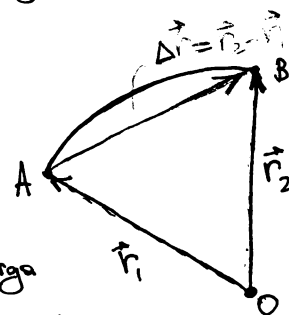
Ускорение можно складывать как и скорости. И тоже рассуждать на сост.

Пример Движение по окружности.



с поск. скоростью.  
 $\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}$

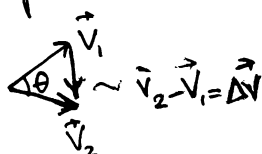
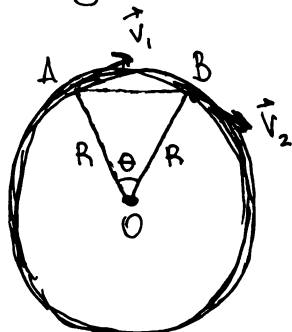
(Сначала — доказательство, что  $\vec{v} \perp \vec{r}$ )



Видно, что норма  $\vec{r}_1$   
 $\Delta \vec{r} \rightarrow 0$ , он превр. в кас. к окружн.

Таким образом, мгновенная скорость направл.  $\perp \vec{r}$  (по касет. к окружн.).

Теперь надо вывести  $\vec{a}$  ускорение.



Углом подобие  $\triangle OAB$  и  $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \Delta \vec{v}$   
(угол и две стороны)  
 $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$

Если  $\Delta t \rightarrow 0$  ( $\theta \rightarrow 0$ ), то  $AB \approx \widehat{AB} = v \Delta t$

Уб 2-х  $\triangle$ :  $\frac{\Delta v}{v} = \frac{v \Delta t}{R} \Rightarrow \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} = a$  (если  $\Delta t \rightarrow 0$ )



При движении по окружности ускорение удобно расм. на 2 сост.:

нормальное ускорение  $a_n$  по радиусу.

(центростремительное)

$a_n$

тангенциальное

$a_t$

Формулы для  $a_n$  мы только что получили:  $a_n = \frac{v^2}{R}$ .

Если скорость по модулю постоянна, то  $a_t = 0$ .

Вопрос Что такое, если движение по кривой?



Каждый участок кривой можно представить окружностью. Центр этой окружности находится так

У каждой окружности будет ~~какая-то~~ радиус  $R$  - радиус кривизны кривой.

Если знать ускорение в точке и ~~тогда~~ скорость - можно найти его:  $R = \frac{v^2}{a}$ .

Пример 1) Спутник на орбите Земли.

Высота = 200 км, можно считать, что радиус орбиты  $\approx R_{\oplus} = 6400$  км.

Период обращения:  $T \sim 5000$  с (несколько часов).

Какое ускорение у спутника?

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \cdot 3.14 \cdot 6.4 \cdot 10^6}{5 \cdot 10^3} = 8 \cdot 10^3 \text{ м/с.}$$

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{64 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{с}^2}{6400 \text{ км}} \approx 10 \text{ м/с}^2 - \text{как ускорение свободного падения.}$$

|| Спутник "падает" к пов-ти Земли, из-за того у него угловое орбитальное.

2) "ЛHC". Радиус  $\sim 100$  м,  $v \sim c = 3 \cdot 10^8$  м/с.  $\Rightarrow a = 10^{15} \text{ м/с}^2 \gg g$ .

То есть,  $g$  можно пренебречь по сравнению с  $a_n$ .

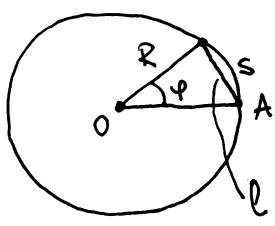
#### Headquarters

Hogil Kim Memorial Building #501, POSTECH, San 31, Hyoja-dong, Nam-gu  
Pohang, Gyeongbuk 790-784, Korea  
Tel : +82-54-279-8661~4 Fax : +82-54-279-8679

#### Branch Office

The Korean Federation of Science and Technology Societies Building 11<sup>th</sup> floor  
635-4 Yoksam-dong, Kangnam-gu, Seoul, 135-703, Korea  
Tel : +82-2-561-7641~2 Fax : +82-2-561-7140

Несомненно определением где движение по окружности.



Положение точки можно характеризовать углом  $\varphi$ .

Линейная скорость:  $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$  (перемещение)

Угловая скорость:  $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$

Но  $s = R \cdot \Delta \varphi \approx l$  если  $\Delta \varphi$  маленький.  $\Rightarrow$

$$v = \frac{R \cdot \Delta \varphi}{\Delta t} = R \cdot \omega$$

Tогда  $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$

Если  $v = \text{const}$ , то  $\omega = \text{const}$ .

Еще кое-что. Период обращения  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , частота  $\nu = \frac{1}{T}$

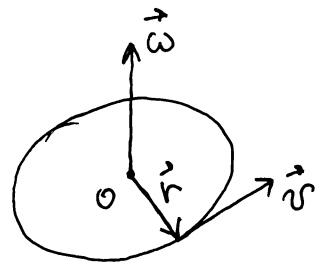
$$[T] = c, [\nu] = 1/c = \Gamma_s.$$

Вопрос Взяли,  $a_n \sim R$  или  $\sim 1/R$ ? Вопрос

какое равно отношение ускорения где точка находится на расст.

Угловая скорость - вектор?

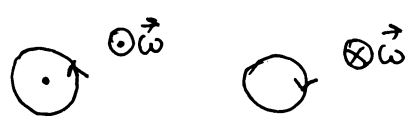
$R/2$  и  $R$  от центра?



Нужно как-то характеризовать направление вращения.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Направление по правилу правой руки.



Опыт с вращением груза на нитке - можно ли достичь ускорения с силой натяжения?





## ДИНАМИКА

Характеристики движения:  $\vec{r}(t)$ ,  $\vec{v}(t)$ ,  $\vec{a}(t)$ . Что отвечает за их изменение, почему они меняются?

Равновесие:  $\vec{v}(t) = 0$  ( $\vec{a}(t) = 0$ ),  $\vec{r}(t) = \text{const.}$  Что может привести к равновесию?

Нарушение его условий:

- $\sum \vec{F} \neq 0$
- $\sum \vec{M} \neq 0$

Будем рассуждать сначала случаи  $\sum \vec{F} \neq 0$ .

Опыт:  $\boxed{\sum \vec{F} = m \vec{a}}$  (второй закон Ньютона)

То есть  $\sum \vec{F} \sim \vec{a}$ , а коэффициент пропорциональности — инертная масса

Собственно, так можно определить инертную массу, и на факт, что она связана с гравитационной.

Опыт: свободное падение тела под действием силы тяжести.

Сравним с Луной и Землей два тела, с грав. массами  $m_1^r$  и  $m_2^r$

Ускорения:  $a_1 = \frac{m_1^r g}{m_1^u}$  и  $a_2 = \frac{m_2^r g}{m_2^u} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1^r m_2^u}{m_2^r m_1^u}$  с точностью до  $10^{-11}$

Опыт: тела достигают Земли одновременно.  $\Rightarrow a_1 = a_2$  и  $m^r = m^u$ .

~~Сила~~ Сила — вектор, и ускорение — вектор. То есть, можно разложить силу на 2 составляющие и рассмотреть движение вдоль каждой из них независимо.

Если тело движется по окруж. с const. скоростью:



$|\vec{v}| = \text{const}$   $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$ , но  $\vec{a}_\tau = 0$

$a_n = \frac{v^2}{R}$ . Таким образом, на тело действует сила  $F$

направленная радиусу:  $m \frac{v^2}{R}$  (сила, с к-рой тело тянется к центру)

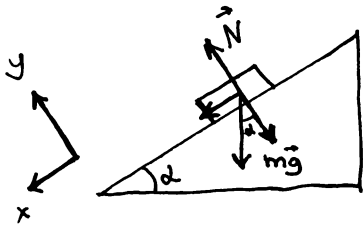
### Headquarters

Hogil Kim Memorial Building #501, POSTECH, San 31, Hyoja-dong, Nam-gu  
Pohang, Gyeongbuk 790-784, Korea  
Tel : +82-54-279-8661~4 Fax : +82-54-279-8679

### Branch Office

The Korean Federation of Science and Technology Societies Building 11<sup>th</sup> floor  
635-4 Yoksam-dong, Kangnam-gu, Seoul, 135-703, Korea  
Tel : +82-2-561-7641~2 Fax : +82-2-561-7140

# Другой вариант разложения



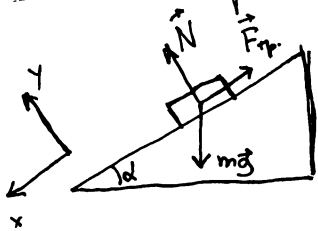
Можно замечать 3-й вариант где катится по оси:

$$\vec{ma} = \vec{F} \quad \begin{cases} \text{ос } x: & ma_x = mg \sin \alpha \\ \text{ос } y: & 0 = N - mg \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = g \sin \alpha \\ a_y = 0 \end{cases}$$

Важно: координаты ось  $y$  и  $z$  не являются координатой в термине бей загор.

Hint: при  $a_x = 0 \Rightarrow$  бей уравнение.

## Вариант трение

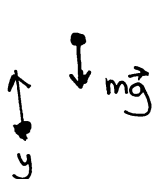


$$\vec{ma} = \vec{N} + \vec{mg} + \vec{F}_{тр}$$

$$\begin{cases} \text{ос } x: & ma_x = mg \sin \alpha - F_{тр} \\ \text{ос } y: & 0 = N - mg \cos \alpha \\ \text{гон. } y_{\text{сн}}: & F_{тр} = \mu N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \\ a_y = 0 \end{cases}$$

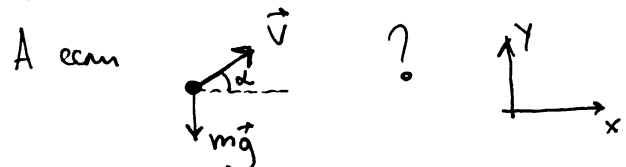
Замечание:  $a_x = 0$  (параллельно):  $g \sin \alpha = \mu g \cos \alpha \Rightarrow \boxed{\mu = \tan \alpha}$   
как и было параллельно.

## Еще вариант (конец ног уклон к горизонту)



$$\vec{ma} = \vec{mg}$$

$$\text{ос } y: \quad a_y = g, \quad a_x = 0.$$



Бей важно  $a_x = 0, a_y = -g$

Это значит, что по оси  $x$  движение равномерное ( $a_x = 0$ ), а по  $y$  - п/усл.

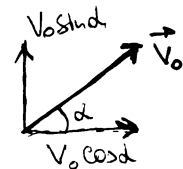
T.e.  $V_x = V_{0x}$   
 $V_y = ?$

ускорение  $-g$ , значит  $V_y \sim -gt$

Но еще начальные условия  $V_{0y} = V_0 \sin \alpha$

Итого: была скорость  $V_0 \sin \alpha$ , но уменьшалась на  $gt \Rightarrow$

$$\begin{cases} V_y = V_0 \sin \alpha - gt \\ V_x = V_0 \cos \alpha \end{cases}$$



## Вопрос как меняется координаты $x(t)$ и $y(t)$ ?

с  $x$  известно, так  $V_x = \text{const}$

движение по  $y$  можно "разложить" на две части: равномерное и п/усл.

Для которого бей уравнение.



Важная особенность Может быть так, что  $a=0$ , но движение не стат. есть.

В случае с камнем  $a_x=0$ , но при этом камень летит в гор. напр-ии.

Равномерно (скорость  $V_x = V_0 \cos \alpha = \text{const}$ ) и прямолинейно. Нет сил, действующих в этом направлении  $\Rightarrow$  импульс не меняется.

Первый закон Ньютона Существуют такие системы отсчёта, в которых тело, не взаимодействующее с другими телами, сохраняет состояние равномерного и прямолинейного движения. Такие с/о - инерциальные.

В случае с камнем - инерц. с/о Земля, поскольку в ней камень по гор. летит равномерно и прямолинейно. [Вычислим ускорение  $y$ -го слоя Земли;  $a = \frac{4\pi^2 R_\oplus}{T^2} \approx 5.4 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$ ]

Представим, что мы бежим за камнем со скоростью  $V_0 \cos \alpha$ . Что в нас будет происходить? Камень будет падать вертикально вниз.

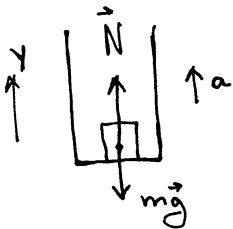
Вопрос А есть ли неинерциальные системы отсчёта?

III-й закон Ньютона  
 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ , силы, с которыми взаимодействуют тела, равны по величине и противоположны по направлению.

Ещё про движение с ускорением.

Физик находит  $m$  стоит на полу лифта, который движется с ускорением  $\vec{a} \uparrow \vec{g} \downarrow$ .

С какой силой лифт давит на физика?



1) если лифт покоится, то  $N=mg$ . По физике - сила упругости пола.

2) если есть ускорение  $a$ , то  $m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}$ , или

$$ma_y = N_y - mg \Rightarrow N_y = m(a+g).$$

Т.е. сила больше, чем  $mg$ . - перезвуха! Вес  $\vec{P} = -\vec{N}$

Ускорено, что результат не зависит от направления движения - т.е. перезвуха будет и в случае торможения лифта.

Заметим, что  $\vec{N} = m(\vec{a} - \vec{g})$ , т.е. если  $\vec{a} = \vec{g}$ , то невесомость!

Ещё пример: человек подпрыгивает. Всё время от отрыва до приземления он в невесомости.

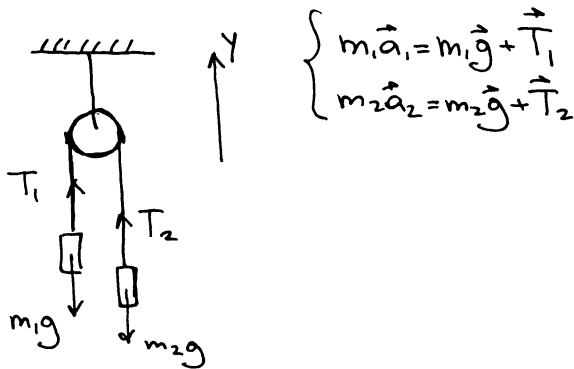
#### Headquarters

Hogil Kim Memorial Building #501, POSTECH, San 31, Hyoja-dong, Nam-gu  
Pohang, Gyeongbuk 790-784, Korea  
Tel : +82-54-279-8661~4 Fax : +82-54-279-8679

#### Branch Office

The Korean Federation of Science and Technology Societies Building 11<sup>th</sup> floor  
635-4 Yoksam-dong, Kangnam-gu, Seoul, 135-703, Korea  
Tel : +82-2-561-7641~2 Fax : +82-2-561-7140

Разберёмся внимательнее с силой и перемещением.



$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1 \\ m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2 \end{cases}$$

После идеализации: (масса  $m_1 > m_2$ )

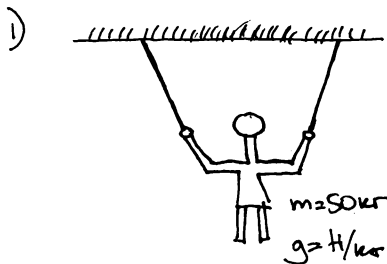
$$\begin{cases} -m_1 a = -m_1 g + T_1 \\ m_2 a = -m_2 g + T_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g, \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

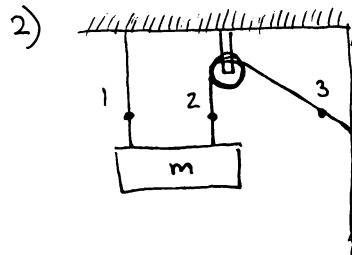
Если  $m_1 = m_2 \Rightarrow a = 0$  (тело либо в покое, либо движется равномерно)

Выводы: если тело невесомо и нерастяжимо, то  $T$  по модулю одинаково во всех точках нити.

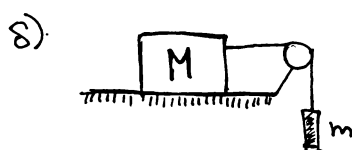
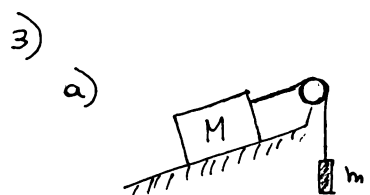
См. стр. 8 для вопросов.



Сила натяжения  
каждой нити  
а)  $> 250 \text{ Н}$   
б)  $= 250 \text{ Н}$   
в)  $< 250 \text{ Н}$



Как соотносится  
между собой сила  
натяжения нити  
в точках 1, 2 и 3?



- 1)  $T_a > T_b$
- 2)  $T_a \geq T_b$
- 3)  $T_a < T_b$

?

## Идеализация

- 1) нить нерастяжима - не меняется длина  $\Rightarrow a_1 = -a_2$
- 2) по III з-ну сила, с которой груз растягивает нить, равна силе натяжения нити. Но как соотносится между собой  $T_1$  и  $T_2$ ?



$$\Delta m \vec{a} = \vec{T}' + \vec{T}'' + \Delta m \vec{g}$$

Если нить невесомая, то  $\Delta m = 0$   
и тогда  $\vec{T}' = -\vec{T}'' \Rightarrow T' = T''$

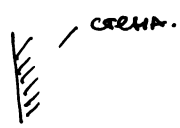
Значит, в узелках нити сила и направление натяжения одинаковы.

- 3) Сила невесомая. Если  $T_1 \neq T_2$ , то на нить действует пара сил и она должна прогибаться. Значит,  $T_1 = T_2$ .

Дополн: разобрать задачу на блок



## Удары



а) удар упругий,  $\Delta t = 0.1 \text{ c}$ ,  $v = 30 \text{ м/с}$ ,  $m = 50 \text{ г}$

Сила ?

б) удар неупругий, \_\_\_\_\_ "

Разница: останавливается / не останавливается.

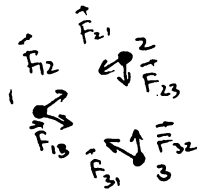
$$F = \frac{m \Delta v}{\Delta t}$$



Умываш:  $\vec{p} = m\vec{v}$  - величина.

II закон Ньютона:  $\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a} = \vec{F}$  где м.т.

Для системы?



$$\begin{cases} \Delta \vec{p}_1 = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}) \Delta t + \vec{F}_1^{\text{ext}} \Delta t \\ \Delta \vec{p}_2 = (\vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}) \Delta t + \vec{F}_2^{\text{ext}} \Delta t \\ \Delta \vec{p}_3 = (\vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}) \Delta t + \vec{F}_3^{\text{ext}} \Delta t \end{cases}$$

$$\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 + \Delta \vec{p}_3 = (\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{32}) \Delta t + (\vec{F}_1^{\text{ext}} + \vec{F}_2^{\text{ext}} + \vec{F}_3^{\text{ext}}) \Delta t =$$

Уточн:  $\frac{\Delta \vec{p}_{\text{сов.}}}{\Delta t} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}$

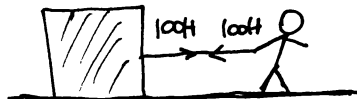
III - в замкн. H-MA  $\rightarrow = \vec{F}_{1+2+3}^{\text{ext}} \Delta t$



Узаконенная система:  $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} = 0$  , величина сумм сохраняется.

$\Rightarrow \Delta \vec{p} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$  - сохраняется (справедливо)

Вопрос



Тогда ответ. с этой кат. Но с другой стороны тоже кат - сохраняется!

Нужны глюеры?

### Headquarters

Hogil Kim Memorial Building #501, POSTECH, San 31, Hyoja-dong, Nam-gu  
Pohang, Gyeongbuk 790-784, Korea  
Tel : +82-54-279-8661~4 Fax : +82-54-279-8679

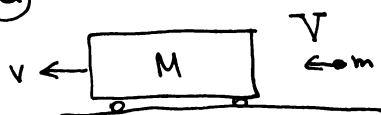
### Branch Office

The Korean Federation of Science and Technology Societies Building 11\* floor  
635-4 Yoksam-dong, Kangnam-gu, Seoul, 135-703, Korea  
Tel : +82-2-561-7641~2 Fax : +82-2-561-7140

# Лекция (интерес как лектор)

20-25 мин

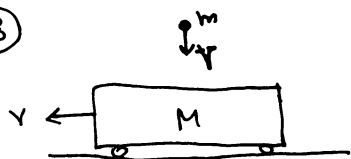
1a



пуля застрелит в тележку. Конечная скорость?

Отв:  $u = \frac{Mv + mV}{M+m} > v$

1b



То же вопрос.

Отв:  $u = \frac{Mv}{M+m} < v$  !

2

2 одинаковые поезда без сопротивления (но инерции) движутся по кол-ти рельс. Первый поезд (вертикальный). Скорость у поезда 1/2 скорости поезда, скорость у поезда 2 - 1 м/с. Поезда движутся только 11 м/с. Кто быстрее движется?

Пусть концы поезда m. Тогда  $u = \frac{Mv}{M+m}$  Узн. скорость =  $v - u = \frac{v}{1 + M/m}$

т.е. где  $M/m$  больше, тем узн. скорость меньше,

Скор., наоборот меньше

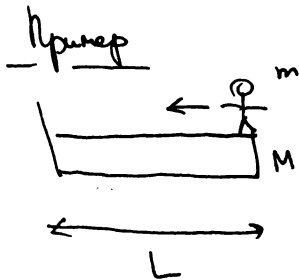
## Импульс и центр масс

Вспомогательный у системы:  $\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$ . Тогда  $\vec{v}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = M$

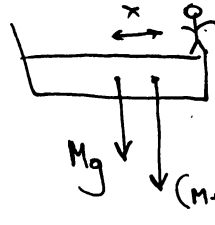
~~$m_i \vec{v}_i = \vec{p}_i$~~   $\Rightarrow \Delta p_1 + \dots + \Delta p_N = \Delta(M \vec{v}_{cm})$ .  
Но, с группой скорости,  $\Delta \vec{p}_1 + \dots + \Delta \vec{p}_N = \Delta \vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}$   $\Rightarrow$

$$M \Delta \vec{v}_{cm} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext}$$

Узна, если  $\sum \vec{F}_i^{ext} = 0$ , то узн. движение равномерно и прямолинейно, или покоится.



На сколько человек ~~стоит~~ лодка отклонится  
вправо?



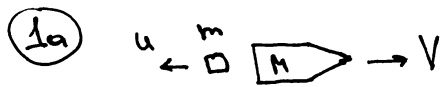
$$Mx = m\left(\frac{L}{2} - x\right) \Rightarrow x = \frac{mL}{2(M+m)} \Rightarrow$$

$$\text{сдвиг лодки} = 2x = \frac{mL}{2(M+m)}$$

### Реактивная сила

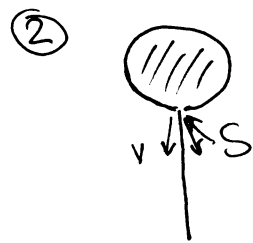
Если выстреливать вперед - то масса, то у.т. должен остаться на месте  $\Rightarrow$   
Газ из котла корабля вылетит в одну сторону, а корабль - в другую.

### Лусок (реактивная сила)



Сколько паров воды вылетит  
назад?

18) Двух кораблей? и кораблей?



Газ с массой g. На сколько увеличится сила натяжения  
нити?

$$V = vS \Delta t \Rightarrow \Delta m = gV = gvS \Delta t$$

$$\Delta p = gv^2 S \Delta t \Rightarrow \underline{\Delta T = \Delta p / \Delta t = gv^2 S}$$

#### Headquarters

Hogil Kim Memorial Building #501, POSTECH, San 31, Hyoja-dong, Nam-gu  
Pohang, Gyeongbuk 790-784, Korea  
Tel : +82-54-279-8661~4 Fax : +82-54-279-8679

#### Branch Office

The Korean Federation of Science and Technology Societies Building 11<sup>th</sup> floor  
635-4 Yoksam-dong, Kangnam-gu, Seoul, 135-703, Korea  
Tel : +82-2-561-7641~2 Fax : +82-2-561-7140