排序

快速排序

算法原理

采用分而治之的策略：

- 将元素序列分为两个子序列：$\boxed{S = S_L + S_R}$ //$O(n)$

  子序列规模缩小，而且

  各自内部的排序互相独立：$\boxed{\max(S_L) \le \min(S_R)}$

- 递归地对子序列分别排序

  $\boxed{T(n_L) + T(n_R) \approx 2 \times T(n/2)}$

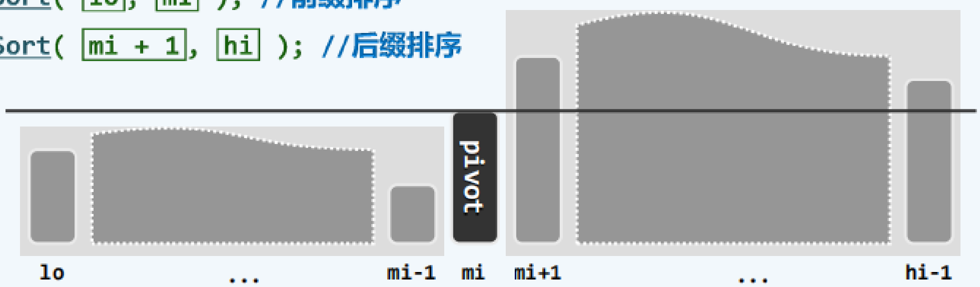
- 平凡解：只剩单个元素时，本身就是解

- 合并结果 //$O(1)$

以上策略的重点在于找到将原序列分裂为两个子序列的轴点，且在轴点左侧/右侧的元素都不比它大/小，因此轴点必定是序列中已然归位的一个元素。如果没有这样一个现成的轴点，我们就需要构造出这样一个轴点，或者说是让轴点归位，然后以轴点为界将原序列分成左右两个独立的子序列，并在子序列中递归做相同的处理（让轴点归位和分裂序列），当所有轴点归位后原序列就完成排序。主体算法如下所示：

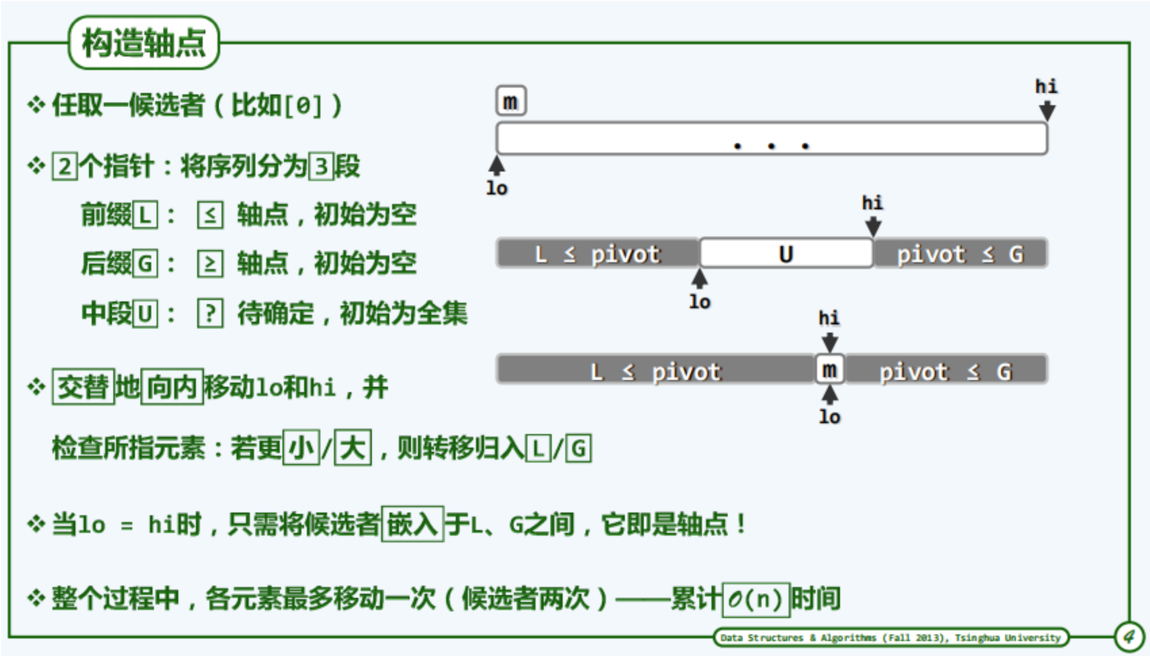
> 一个序列完全有序，则其中所有元素皆是轴点，反之亦然。

```
template <typename T> void Vector<T>::quickSort( Rank lo, Rank hi ) {
    if ( hi - lo < 2 ) return; //单元素区间自然有序，否则
    Rank mi = partition( lo, hi - 1 ); //先构造轴点，再
    quickSort( lo, mi ); //前缀排序
    quickSort( mi + 1, hi ); //后缀排序
}
```



如何构造轴点

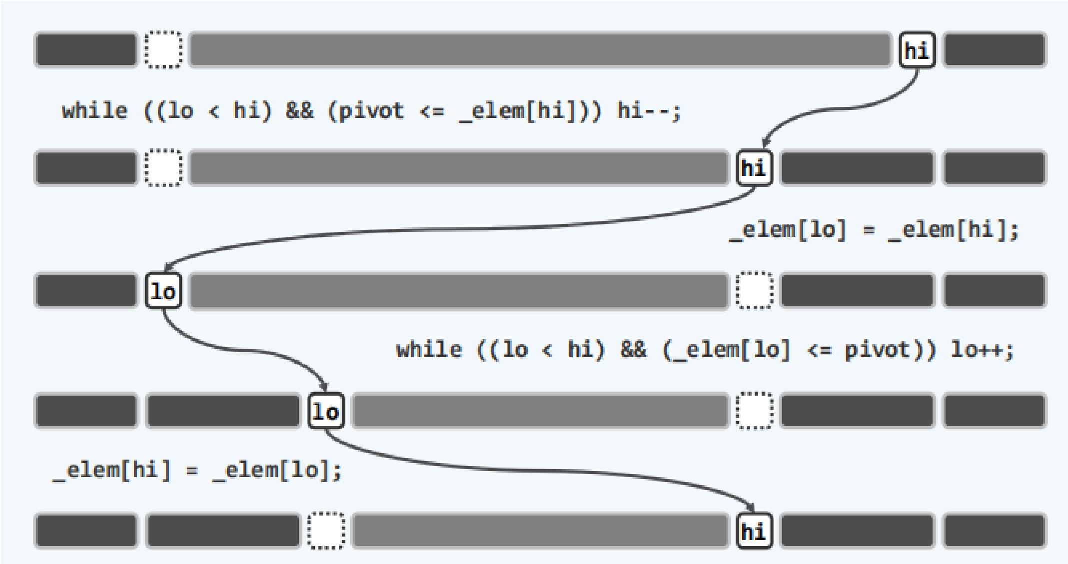
即partition函数如何实现。



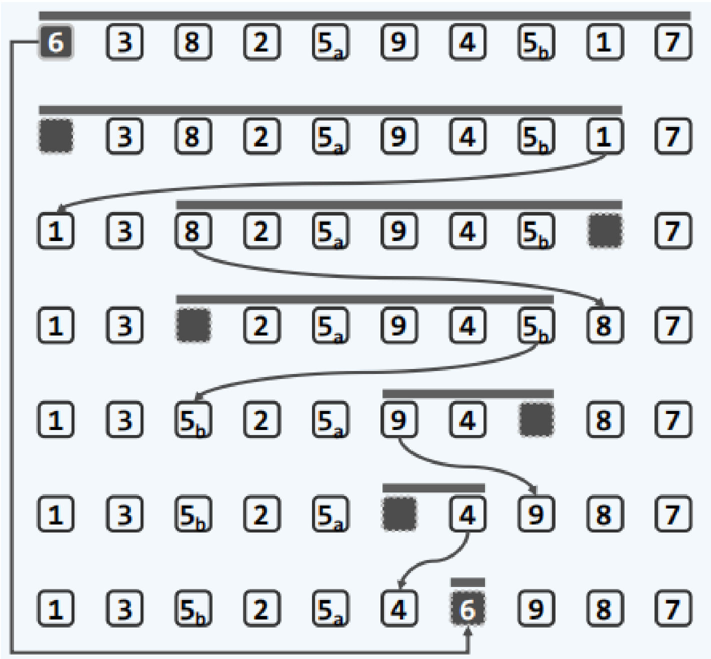
算法实现：

算法原理图：

- 不变性：L<PIVOT<G；U[lo]和U[hi]交替空闲；
- 单调性：U不断减小；L和G不断增大。



举例说明：



性能分析

❖ 不稳定：lo/hi的移动方向相反，左/右侧的大/小重复元素可能前/后颠倒

❖ 就地：只需$\mathcal{O}(1)$附加空间——时间呢？

❖ 最好情况：每次划分都（接近）平均，轴点总是（接近）中央

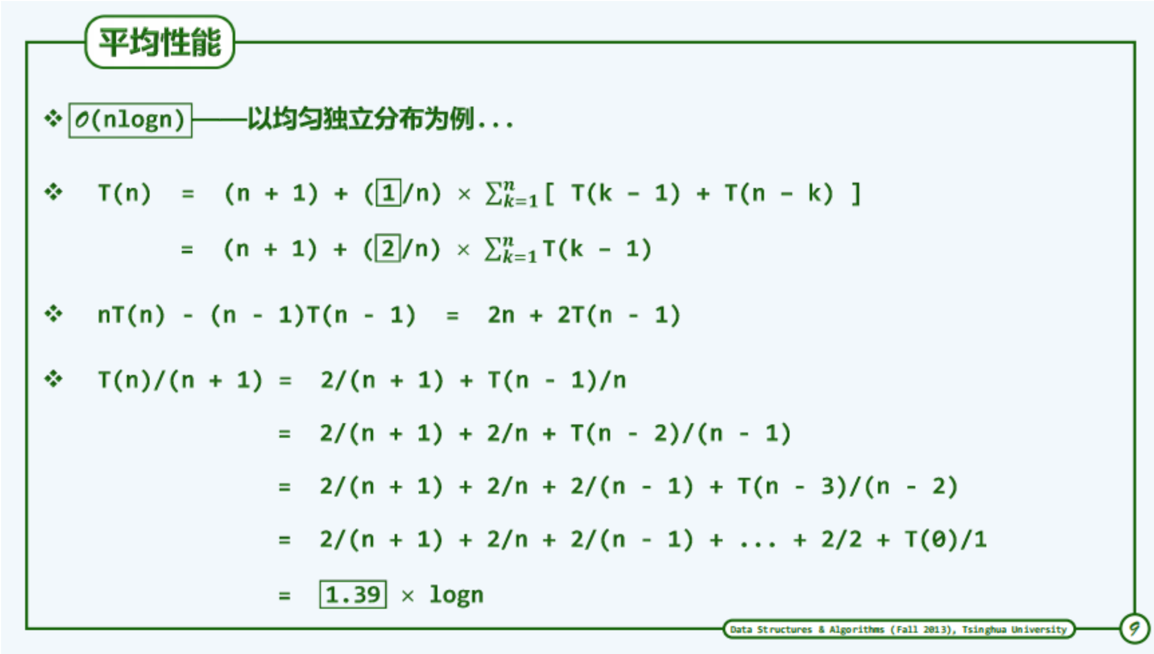
$T(n) = 2 \times T(\boxed{(n-1)/2}) + \mathcal{O}(n) = \boxed{\mathcal{O}(n\log n)}$ //到达下界！

❖ 最坏情况：每次划分都极不均衡 //比如，轴点总是最小/大元素

$T(n) = T(\boxed{n-1}) + T(\boxed{0}) + \mathcal{O}(n) = \boxed{\mathcal{O}(n^2)}$ //与起泡排序相当！

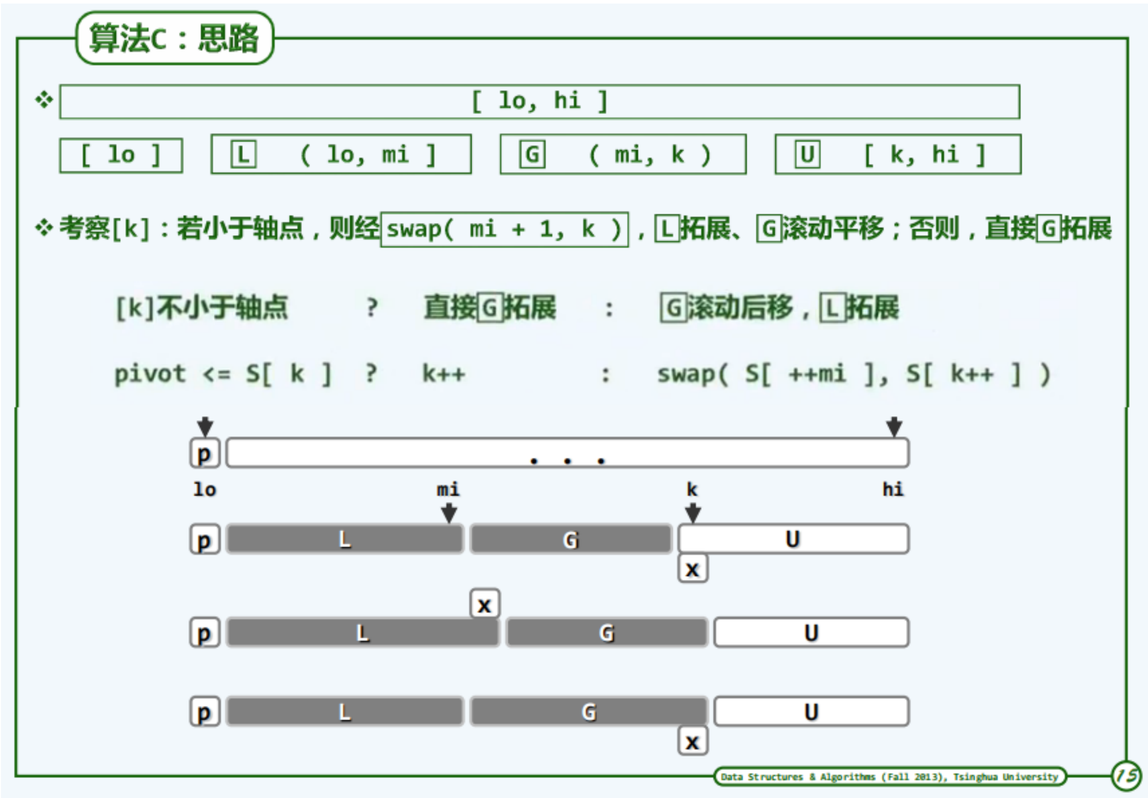
❖ 即便采用随机选取、（Unix）三者取中之类的策略

也只能降低最坏情况的概率，而无法杜绝



另一版本

算法原理：



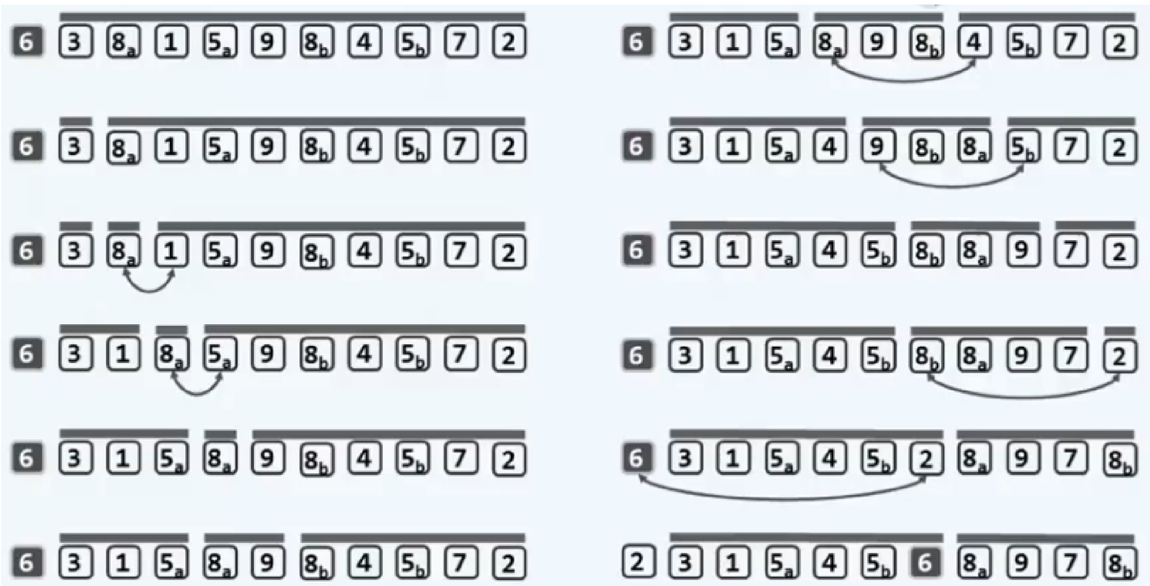
算法实现：

算法C：实现

```
template <typename T> Rank Vector<T>::partition( Rank lo, Rank hi ) { //[lo, hi]
   swap( _elem[ lo ], _elem[ lo + rand() % ( hi - lo + 1 ) ] ); //随机交换
   T pivot = _elem[ lo ]; int mi = lo;
   for ( int k = lo + 1; k <= hi; k++ ) //自左向右考查每个[k]
      if ( _elem[ k ] < pivot ) //若[k]小于轴点，则将其
         swap( _elem[ ++mi ], _elem[ k ]); //与[mi]交换，L向右扩展
   swap( _elem[ lo ], _elem[ mi ] ); //候选轴点归位（从此名副其实）
   return mi; //返回轴点的秩
}
```

Data Structures & Algorithms (Fall 2013), Tsinghua University 16

举例说明：



选取算法

1. K选取：选取排在第K位的元素
2. 中位数选取：选取排在中间⌊n/2⌋的元素
3. 众数选取：选取总数超过一半的元素

众数选取

三种策略

1. 众数必是中位数，因此只要找出中位数，然后进行验证即可：

```
template <typename T> bool majority( Vector<T> A, T & maj )
   { return majEleCheck( A, maj = median( A ) ); }
```

2. 众数必是频繁数，因此只要找出频繁数，然后进行验证即可：

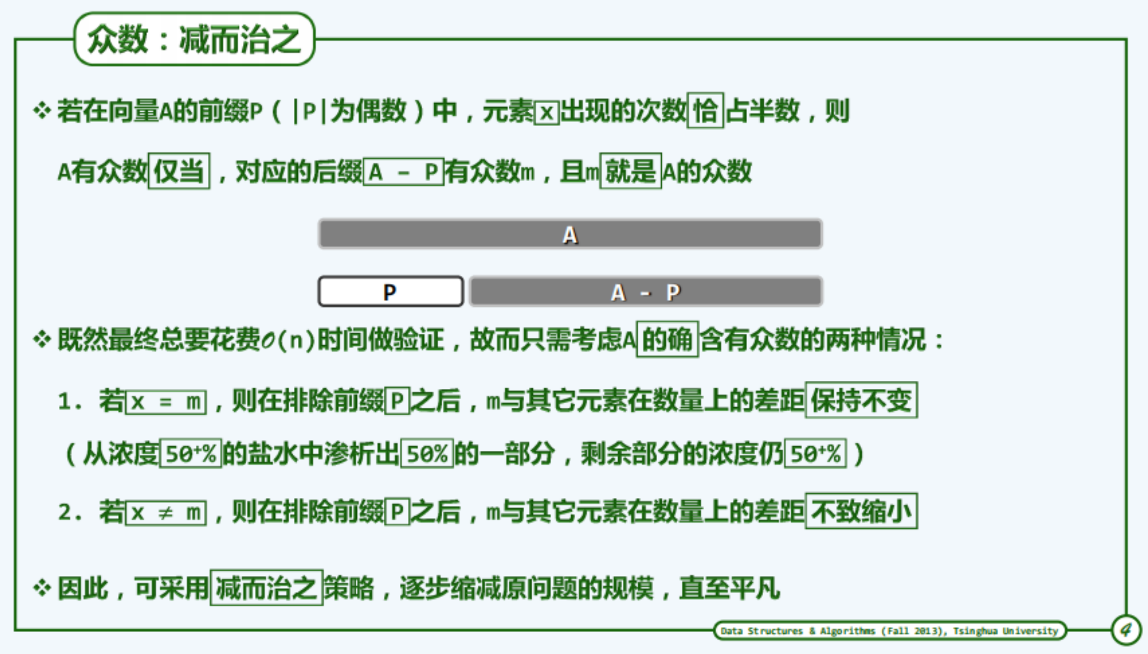
```
template <typename T> bool majority( Vector<T> A, T & maj )
   { return majEleCheck( A, maj = mode( A ) ); }
```

3. 盐水策略，即通过减治找出唯一候选者，然后进行验证：

```
template <typename T> bool majority( Vector<T> A, T & maj )
   { return majEleCheck( A, maj = majEleCandidate( A ) ); }
```

盐水策略

盐水策略的基本原理：



根据以上原理，可知该策略的执行过程就是：不断找出存在半数者的前缀并删去，在最后剩余序列中超过半数的那个元素就是众数的唯一候选者。

1. 确定删除前缀：将首元素作为当前的众数候选者x，向后扫描直到x占据一半，此时的扫描区间就是需要删除的前缀；
2. 删除前缀并选取当前序列的首元素作为新的众数候选者，继续步骤1；
3. 重复步骤1和2，直到序列没有可以删除的前缀时，此时序列中的超过半数者就是真正的众数候选者。

算法实现

```
❖template <typename T> T majEleCandidate( Vector<T> A ) {
    T maj; //众数候选者
 // 线性扫描：借助计数器c，记录maj与其它元素的数量差额
    for ( int c = 0, i = 0; i < A.size(); i++ )
       if ( 0 == c ) { //每当c归零，都意味着此时的前缀P可以剪除// 此时表示前缀已经删除，因此进入
          maj = A[i]; c = 1; //众数候选者改为新的当前元素        新的序列重新寻找前缀进行删除。
       } else //否则
          maj == A[i] ? c++ : c--; //相应地更新差额计数器
    return maj; ////至此，原向量的众数若存在，则只能是maj —— 尽管反之不然
 }
```

K选取

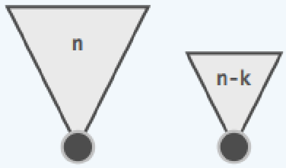
直观尝试

❖ 蛮力

对A排序 //O(nlogn)

从前向后行进k步 //O(k) = O(n)

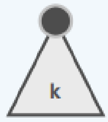
❖ 堆(A)



将所有元素组织为小顶堆 //O(n)

连续调用k次delMin() //O(klogn)

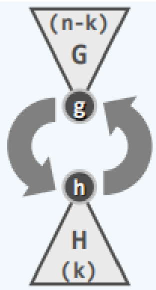
❖ 堆(B)



任选（比如前）k个元素，组织为大顶堆 //O(k)

对于剩余的n - k个元素，各调用一次insert()和delMax() //O(2*(n - k)*logk)

使用两个堆实现，即包含k个元素的大顶堆和包含剩余元素的小顶堆：如果大顶堆的堆顶元素大于小顶堆的堆顶元素，就将其交换并重新下滤调整。循环这个过程直到大顶堆的堆顶元素不再大于小顶堆的堆顶元素，这时小顶堆的堆顶元素g就是要求的第k个元素（因为此时小顶堆存在n-k-1个元素比g大，而大顶堆的k个元素比g小，两者相夹，g就恰好处于第k个元素的位置上）。



❖ H：任取k个元素，组织为大顶堆 //O(k)

G：其余n - k个元素，组织为小顶堆 //O(n - k)

反复地： 比较h和g //O(1)

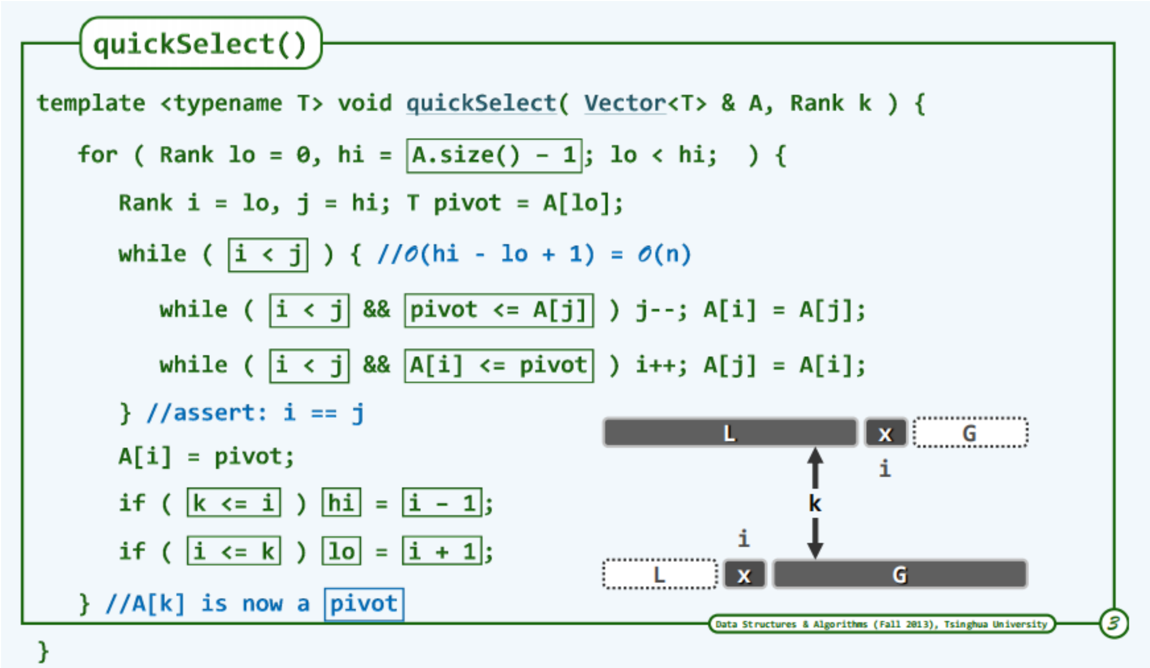
如有必要，交换之 //O(2 × (logk + log(n - k)))

直到： h ≤ g //O(min(k, n - k))

快速选取

这是快速排序的一种利用，其重点在于减治策略。其过程如下：

1. 随机选取一个轴点P进行归位；
2. 如果目标元素K的秩小于P，则可以将选取范围缩减至比P小的区间L；如果目标元素K的秩大于P，则可以将选取范围缩减至比P大的区间G；如果如果目标元素K的秩等于P，则可以直接返回；
3. 在新的区间内重复步骤1和2，直到区间缩减为单元素的情况，此时该元素就是所求目标元素。

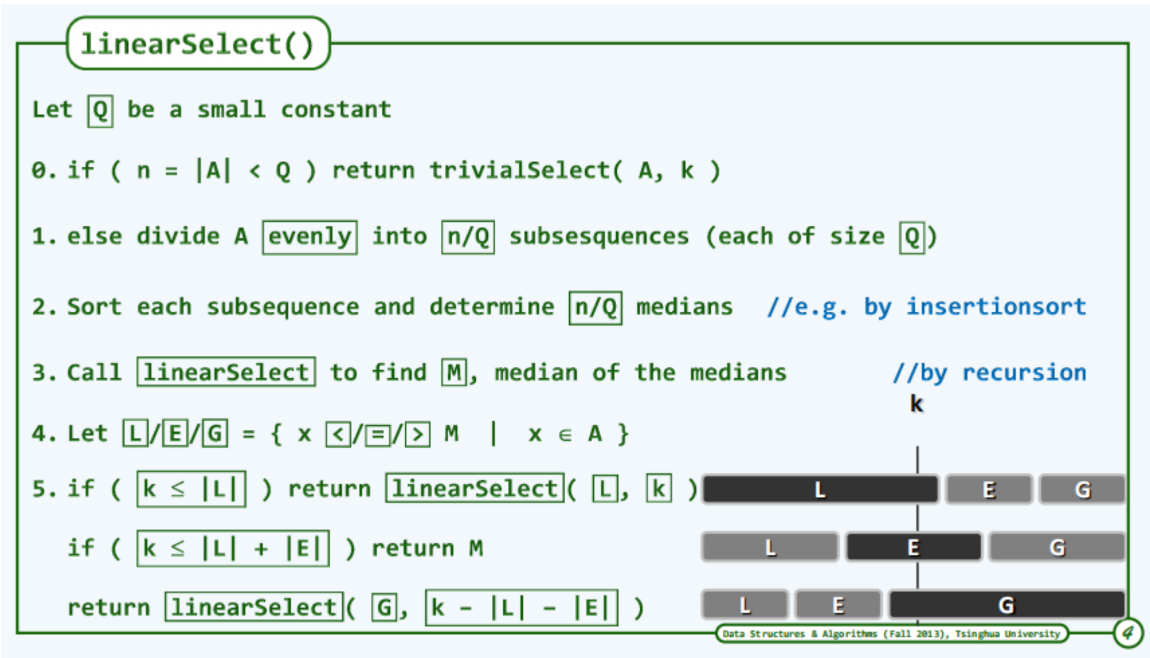


线性选取

这是基于快速选取的一种改进，即更加有效的缩减目标元素的选取区间。其过程如下：

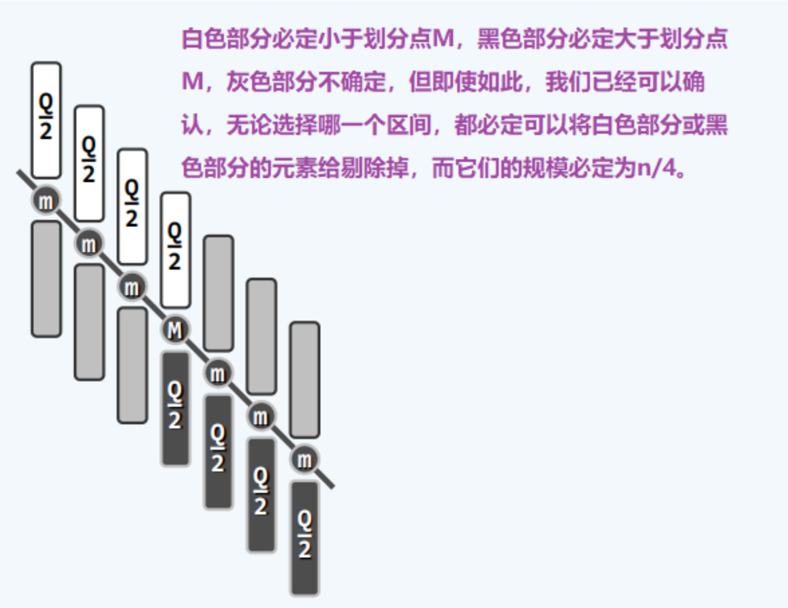
1. 选取一个适当且足够小的值Q；
2. 如果目标向量的规模n比Q还小，则可以直接用平凡算法（直接排序）求得目标元素k；
3. 如果目标向量的规模足够大，则将目标向量切分成n/Q个规模为Q的子向量；
4. 对这n/Q个子向量进行排序以求得它们各自的中位数，并通过递归的方式求得这些中位数的中位数M；
5. 按照所求的中位数M将原向量进行划分为三个区间：大于M的区间、小于M的区间和等于M的区间；
6. 此时便可以按照目标元素与中位数M之间的大小，将选取区间缩减至对应的小区间上，并按照上述步骤递归处理该子区间，直至平凡的情况。但如果目标元素等于其中的某一个中位数M，则可以直接返回。

总体来说就是，找到合适的划分点将选取区间缩减至更小的范围内，并不断重复这个过程，直到区间够小，可以直接排序求得目标元素的秩或刚好划分点就是所求元素。



规模的有效缩减

经过每次划分，都可以将规模至少缩减至原来的3/4：



复杂度分析

❖ 将linearSelect()算法的运行时间记作T(n)

❖ 第0步：$\mathcal{O}(1)$ = $\mathcal{O}(Q\log Q)$ //递归基：序列长度|A| ≤ Q

❖ 第1步：$\mathcal{O}(n)$ //子序列划分

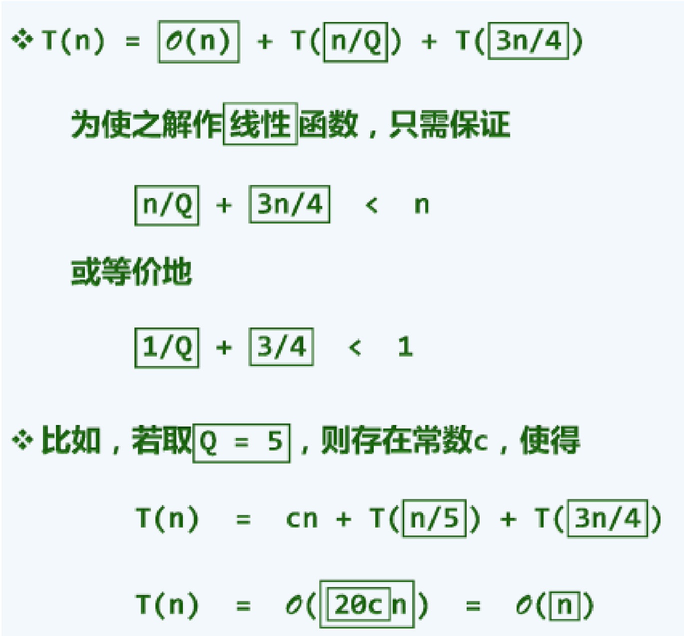
❖ 第2步：$\mathcal{O}(n)$ = $\mathcal{O}(1) \times n/Q$ //子序列各自排序，并找到中位数

❖ 第3步：T(n/Q) //从n/Q个中位数中，递归地找到全局中位数

❖ 第4步：$\mathcal{O}(n)$ //划分子集L/E/G，并分别计数 —— 一趟扫描足矣

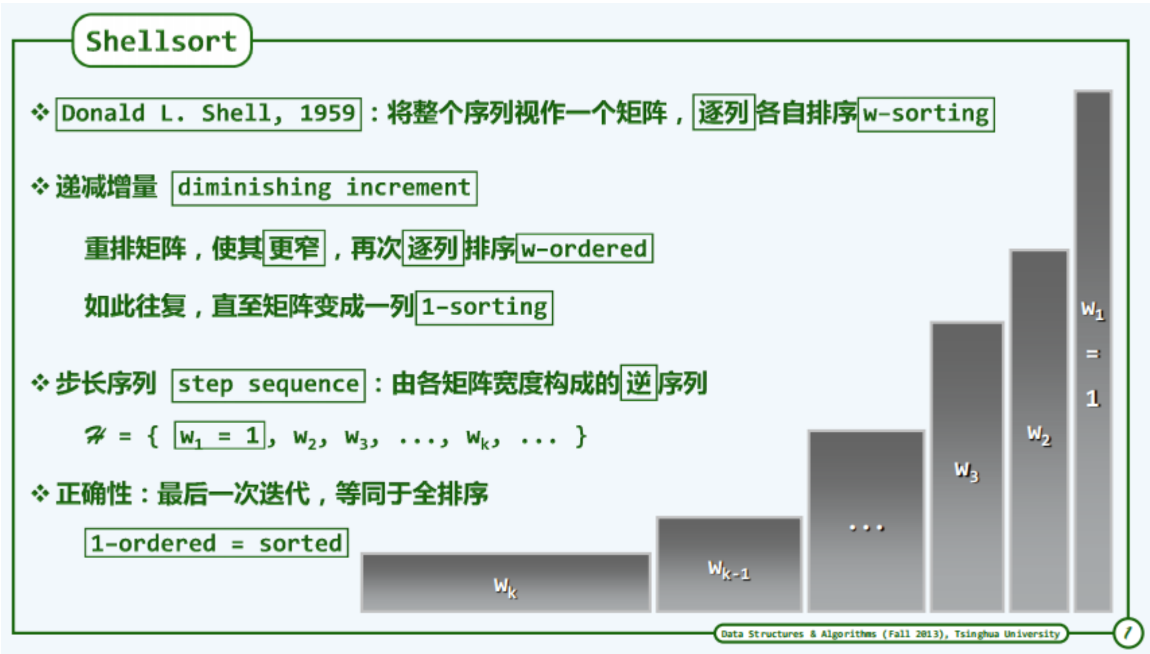
❖ 第5步：T(3n/4) // 已知规模至少可以缩减至3n/4

综合各步可得总体的时间复杂度为：



希尔排序

基本原理



通俗点讲就是，将序列分成多个组（即矩阵的多个列），然后进行组内排序，等所有组排完序后，再将整个序列重新分成组数更小（即矩阵更窄）的多个组，再进行组内排序。不断重复这个过程，直到组数变为1并进行一次全排序（即1-sorting），从而结束排序。总结一句话就是不断分组排序，直到组数为1。

> 步长序列：对应每次排序的组数所组成的序列。

举例说明

Example : $w_5 = 8$

80 23 19 40 85 1 18 92 71 8 96 46 12

按每行至多8个元素排成矩阵

（或者说将序列分成8组）

80 23 19 40 85 1 18 92
71 8 96 46 12

每列一组

进行排序

71 8 19 40 12 1 18 92
80 23 96 46 85

排完序后，按每列（组）原本在序列中的位置重新组合成完整的序列（实际上在排序过程中各组在序列中的位置并没有变化，变化的只是组内元素之间的位置）

71 8 19 40 12 1 18 92 80 23 96 46 85

宽度减少并继续以上步骤

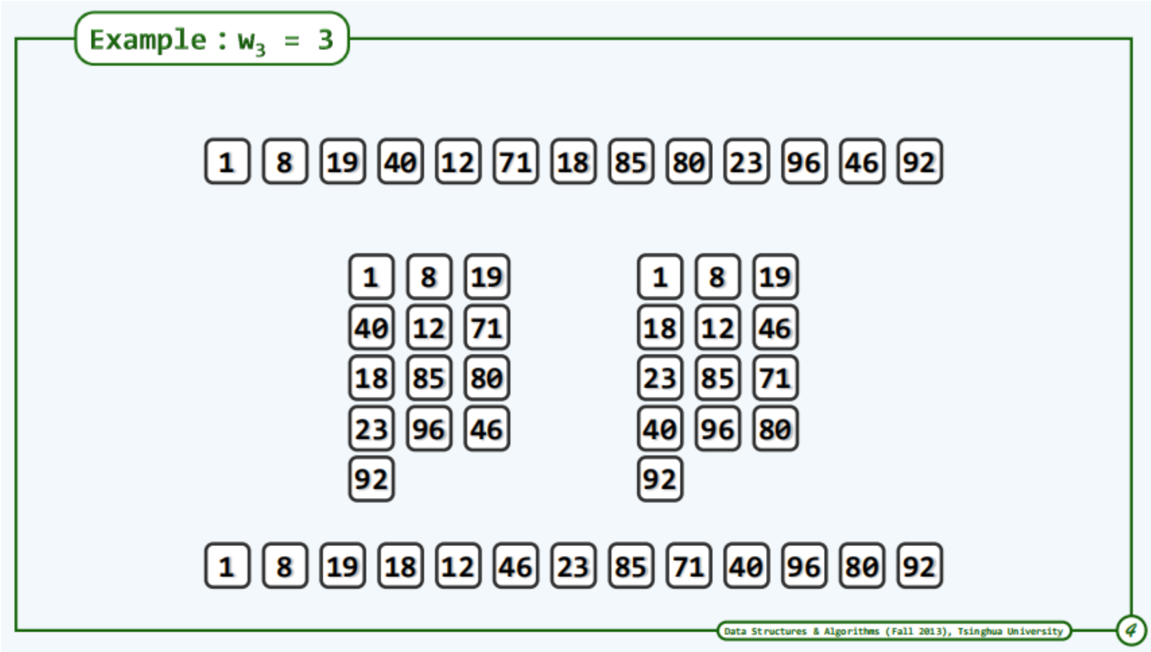
Example : $w_4 = 5$

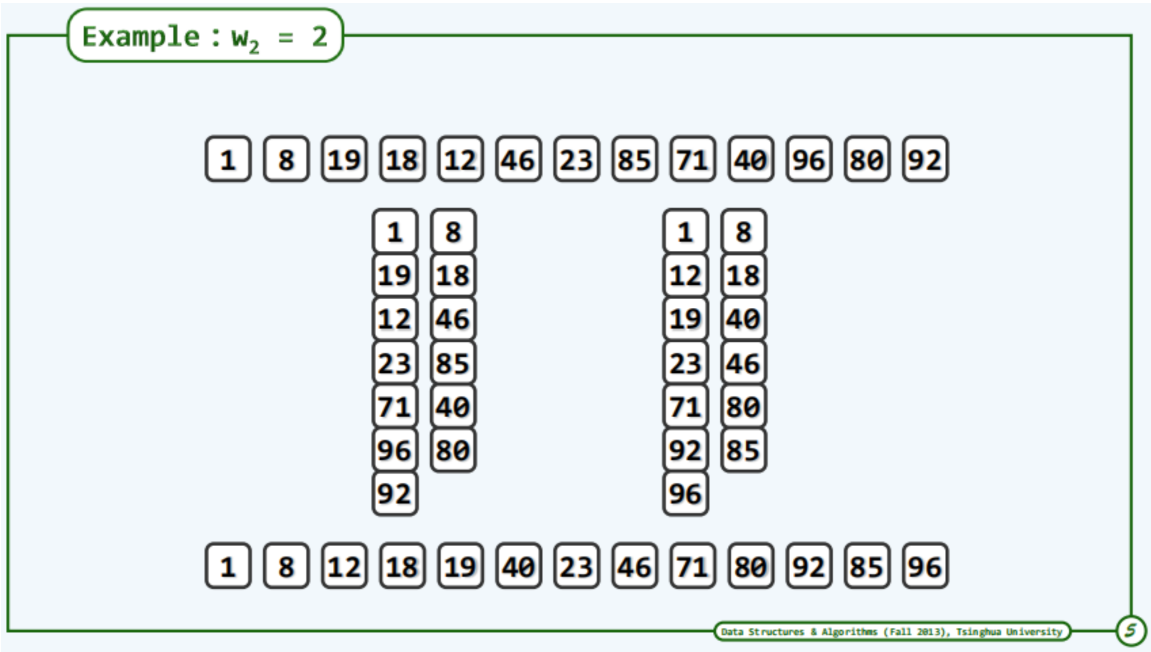
71 8 19 40 12 1 18 92 80 23 96 46 85

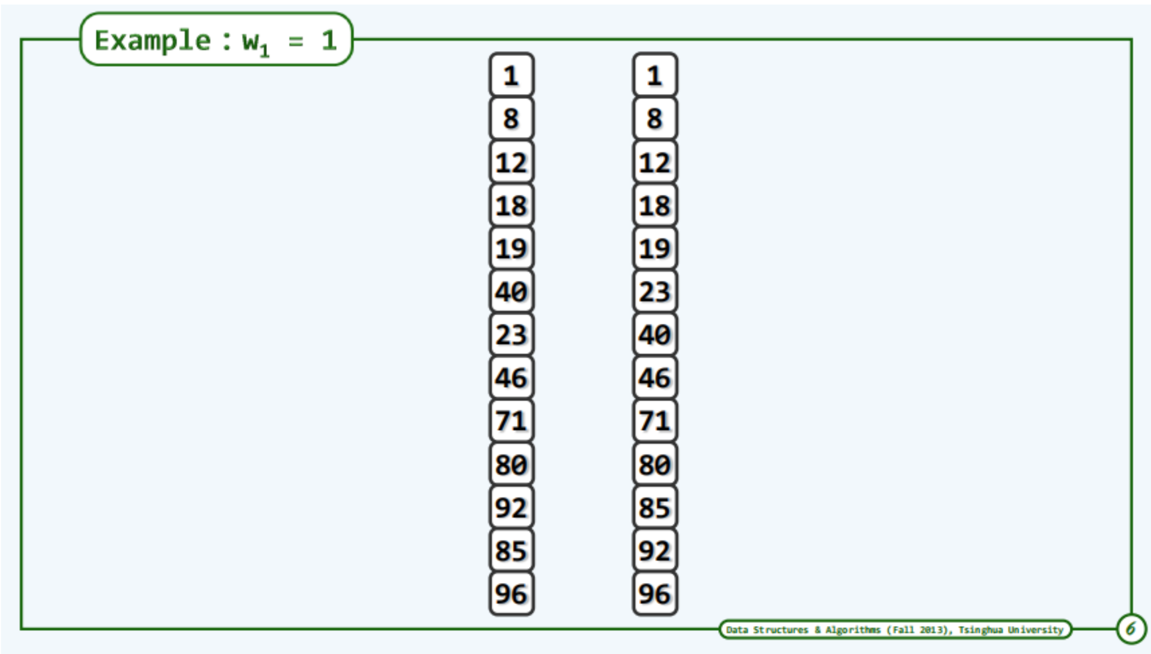
71 8 19 40 12
1 18 92 80 23
96 46 85

1 8 19 40 12
71 18 85 80 23
96 46 92

1 8 19 40 12 71 18 85 80 23 96 46 92

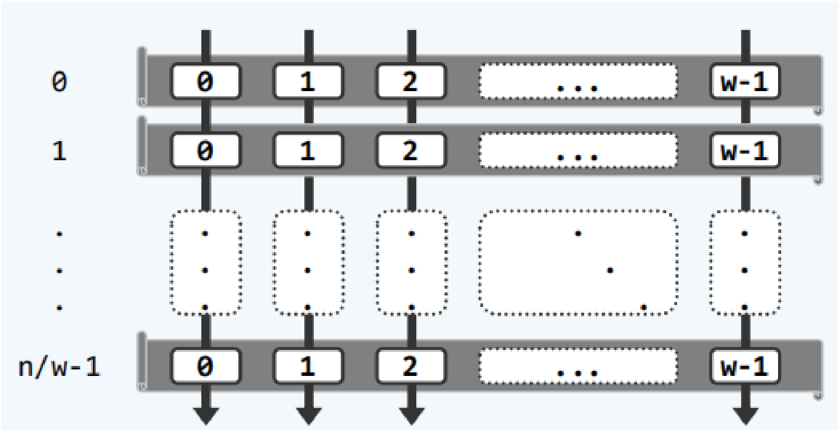

Example : w_3 = 3
1 8 19 40 12 71 18 85 80 23 96 46 92
1 8 19
40 12 71
18 85 80
23 96 46
92
1 8 19
18 12 46
23 85 71
40 96 80
92
1 8 19 18 12 46 23 85 71 40 96 80 92
Data Structures & Algorithms (Fall 2013), Tsinghua University
4


Example : w_2 = 2
1 8 19 18 12 46 23 85 71 40 96 80 92
1 8
19 18
12 46
23 85
71 40
96 80
92
1 8
12 18
19 40
23 46
71 80
92 85
96
1 8 12 18 19 40 23 46 71 80 92 85 96
Data Structures & Algorithms (Fall 2013), Tsinghua University
5


Example : w_1 = 1
1 8 12 18 19 40 23 46 71 80 92 85 96
1 8 12 18 19 23 40 46 71 80 85 92 96
Data Structures & Algorithms (Fall 2013), Tsinghua University
6

如何分组

实际上并不需要真的进行分组，各组的排序其实都可以在原序列上进行。假设此时宽度为w（组数为w），则第i组的元素的秩就是 A[i+kw]（0≤k<n/w），所以我们只需根据这些元素的秩在逻辑上完成重排，而无需在物理上实现分组。能够这样做的原因就在于向量循秩访问的特性。



组内排序

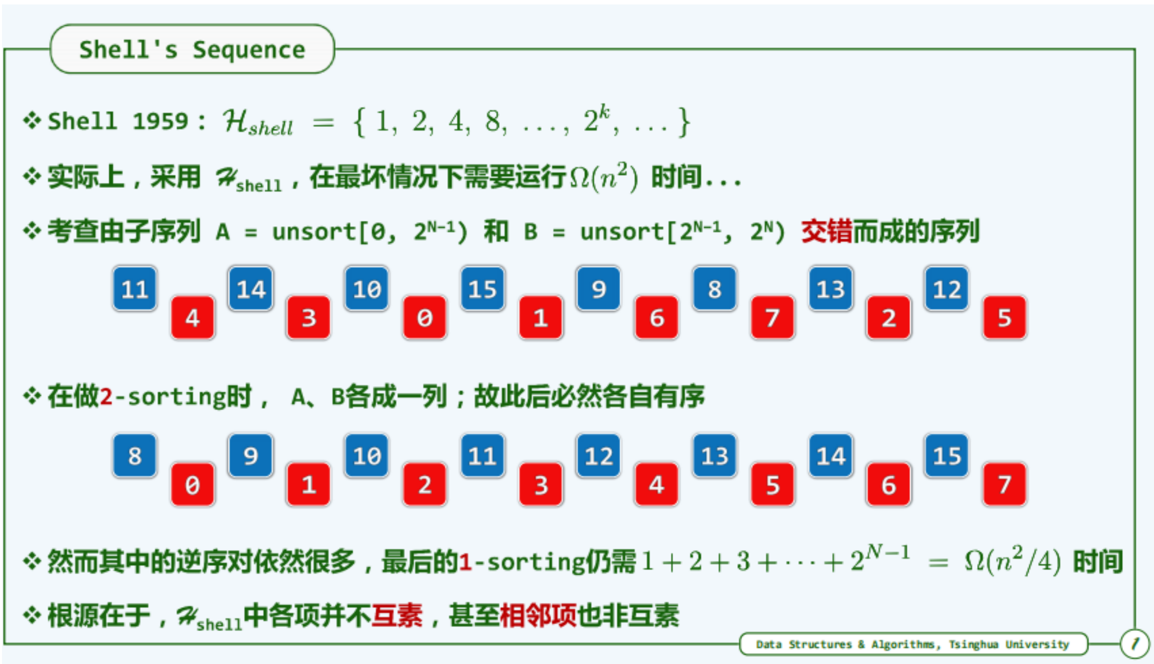
每组内部的排序必须采用**输入敏感的算法（即输入的序列越有序，所花费的时间就越少）**，以保证有序性颗持续改善，且总体成本足够低廉。

对此，**插入排序**就是一个非常适合的算法，其实际运行时间完全取决于输入序列所含的逆序对总数。

但无论采用哪种组内排序算法，希尔排序的总体效率还是**取决于具体使用何种步长序列**。

希尔序列

这是由希尔提出的一个效率不太高的步长序列。



内容拓展

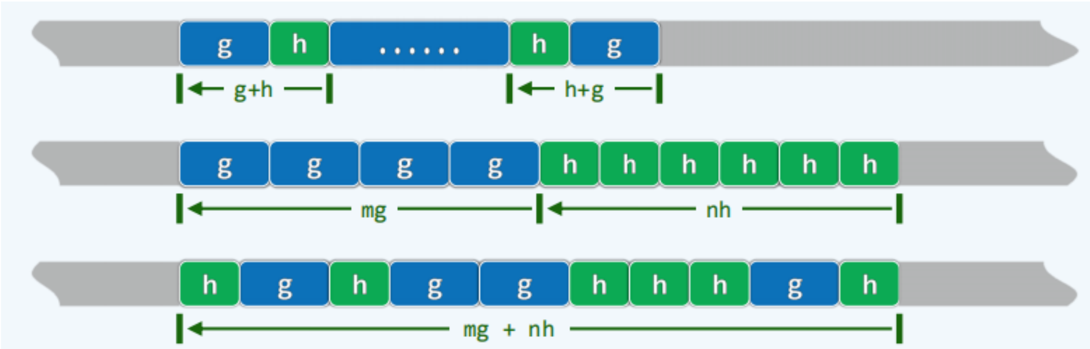
1. 一些概念：

   h-ordered：指在该序列中距离间隔h的元素之间呈顺序性；

   1-ordered：指距离间隔为1的元素之间都具有顺序性，即全排序；

   h-sorting：使序列变成h-ordered的过程，即希尔排序的一次迭代。

2. 一个g-ordered的序列经过h-sorting后，它既是g-ordered，也是h-ordered，称为(g，h)-ordered，或严格地表示成(mg+nh)-ordered。也就是说，凡是任何两个元素之间的间隔能表示成(mg+nh)，它们之间就是顺序的。



3. 假设存在一个(g，h)-ordered的序列，考察其中某个元素i，它与哪些元素具有顺序性？
    - 如果g和h是互素的，根据定理"不能用(mg+nh)表示的最大数值为(g-1)(h-1)-1"可知，与元素i间隔大于(g-1)(h-1)-1的所有元素都与i具有顺序性。反过来说，间隔小于该数值的元素都有可能与i构成逆序对，它们的总数影响组内插入排序的效率，但随着希尔排序每一次迭代，该数值会越来越小，使得插入排序的效率越来越高；
    - 如果g和h是非互素的，不能用(mg+nh)表示的数值存在于任何范围，也就是序列中的任何元素都有可能与i构成逆序对，它们的总数无法确定，而且随着希尔排序的进行，该总数还可能增加，这也是希尔序列效率不高以及步长序列要求互素的原因。
4. 由上可知，随着希尔排序的不断迭代，序列中的逆序对会不断减少，而插入排序的时间复杂度正比于序列的逆序对数，所以插入排序花费的时间也会不断减少，这也是希尔排序效率高的原因。然而，在采用希尔序列的希尔排序中，有可能导致逆序对数不降反增的趋势，这也是希尔序列效率低的缘故，所以采用适当的步长序列非常重要，最好保证步长序列中各项之间是互素的。