Log-doğrusal Modellerin Kurulması

Sinan İyisoy

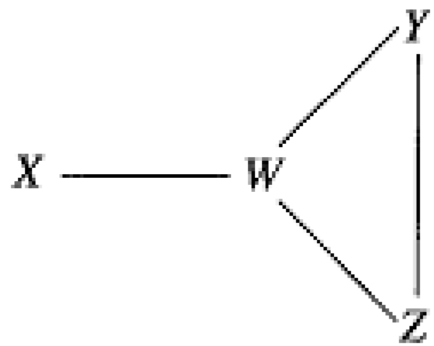
İlişki ve Bağımsızlık

- Agresti kitabında iki kavramı sıklıkla kullanmaktadır: ilişki ve bağımsızlık.
- İlişki (association) bağımsızlığın (independence) karşıtıdır. İlişki varsa bağımsızlık yoktur ve tersi de doğrudur.
- Koşullu ilişki Z nin düzeylerinde X ve Y odds oranlarının 1'den farklı olması durumudur.
- Bu odds oranları 1 olursa koşullu bağımsızlık olur.

İlişki Grafikleri ve İndirgenme

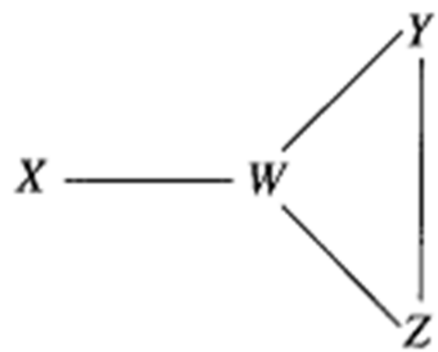
- Log-doğrusal modellerdeki ilişkileri göstermek için grafiksel gösterimler vardır. Burada graf teorisi kullanılarak yapılan bir yöntem gösterilecektir.
- İlişki grafiğindeki köşeler bir değişkeni gösterir. İki köşeyi birleştiren kenar, o iki değişken arasında koşullu ilişki olduğunu gösterir.
- X ---- Y X ile Y arasında 3.bir değişkene göre koşullu ilişki var.

İlişki Grafikleri

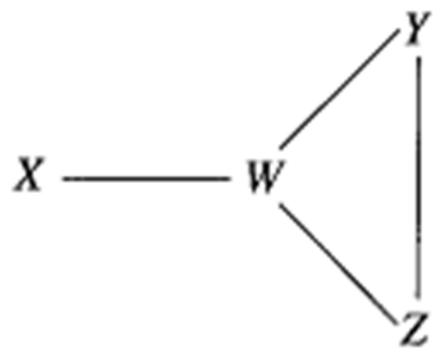


- (WX,WY,WZ,YZ) modelinde XY ve XZ terimleri yoktur. Bu modelde X ve Y nin diğer iki değişken {W,Z} ye göre koşullu bağımsız olduğu varsayılır. Benzer şekilde X ve Z de {W,Y} ye göre koşullu bağımsızdır.
- Dolayısıyla grafikte X,Y ve X,Z birleştirilmemiştir.
- XW kenarı X ile W arasında Z ye göre koşullu ilişki olduğunu gösterir.

Yol ve Ayırma



- Bu grafik aynı zamanda (WX,WYZ) modeli için de çizilebilir.
- Grafikte iki değişkeni birleştiren yollar vardır.
- İki değişkeni birleştiren tüm yolların kesişimine o değişkeni ayıran küme denir. Mesela W, X ve Y yi ayırmaktadır. Çünkü X’den Y’ye giden tüm yollar W’dan geçer.



- Bu grafikte {W,Z} kümesi de X ve Y yi ayırır.
- İki değişken verilen her ayırma kümesi için koşullu bağımsızdır. Dolayısıyla X ve Y hem {W,Z} ye göre hem sadece {W} ye göre koşullu bağımsızdır.

3 Yönlü Tablolarda İndirgenme (Çökme)

- Biliyoruz ki koşullu ilişkiler genellikle marjinal ilişkilerden farklıdır. Bazı indirgenme durumlarında ise aynıdırlar.
- Üç yönlü bir tablo için XY marjinal ve koşullu odds oranlarının aynı olması iki durumda olur
- i) Z ve X koşullu bağımsızsa ya da
- İi) Z ve Y koşullu bağımsızsa.

(XY,YZ) ve (XY,XZ) Modelleri

$$X \text{———} Y \text{———} Z \quad \text{and} \quad Y \text{———} X \text{———} Z$$

- (XY,YZ) ve (XY,XZ) modelleri için marjinal ve koşullu XY odds oranları aynıdır. Çünkü birinci modelde X ve Z koşullu bağımsız (Y ye göre), ikinci modelde ise Y ve Z koşullu bağımsız (X e göre) dır.
- (XZ,ZY) modelinde ise bu durum yoktur.

$$X \text{———} Z \text{———} Y$$

(AM,CM) Modeli

A —— M —— C.

TABLE 8.5 Estimated Odds Ratios for Loglinear Models in Table 8.5

	Conditional Association			Marginal Association		
Model	*AC*	*AM*	*CM*	*AC*	*AM*	*CM*
(A, C, M)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
(AC, M)	17.7	1.0	1.0	17.7	1.0	1.0
(AM, CM)	1.0	61.9	25.1	2.7	61.9	25.1
(AC, AM, CM)	7.8	19.8	17.3	17.7	61.9	25.1
(ACM) level 1	13.8	24.3	17.5	17.7	61.9	25.1
(ACM) level 2	7.7	13.5	9.7			

- A:Alkol C:Sigara M:Marijuana modelinde A ve C, M ye göre koşullu bağımsızdı. Bu modelde AM koşullu (C ye göre) ve marjinal odds oranları (C indirgendiğinde) aynıdır 61.9. Benzer şekilde CM ilişkisi de indirgenebilir. Ama AC ilişkisi indirgenemez. AC marjinal odds oranı :2.7 dir (AC koşullu odds oranı:1).

(AC,AM,CM) Modeli

TABLE 8.5 Estimated Odds Ratios for Loglinear Models in Table 8.5

	Conditional Association			Marginal Association		
Model	AC	AM	CM	AC	AM	CM
(A, C, M)	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
(AC, M)	17.7	1.0	1.0	17.7	1.0	1.0
(AM, CM)	1.0	61.9	25.1	2.7	61.9	25.1
(AC, AM, CM)	7.8	19.8	17.3	17.7	61.9	25.1
(ACM) level 1	13.8	24.3	17.5	17.7	61.9	25.1
(ACM) level 2	7.7	13.5	9.7			

- (AC,AM,CM) modelinde hiçbir ikili koşullu bağımsızlık yoktur. Odds oranlarının farklı olduğu tablodan görülmektedir.

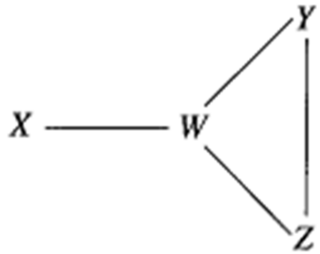
İndirgenme ve Lojit Modeller

- İndirgenme Lojit modellere de uygulanır. Mesela bir klinik denemede X ikili bir tedavi değişkeni, Y ikili bir cevap değişkeni ve Z k düzeyli bir sağlık merkezi değişkeni olsun.

$$\text{logit}[P(Y=1|X=i, Z=k)] = \alpha + \beta x_i + \beta_k^Z$$

- Bu modelde her merkez için aynı β tedavi etkisi vardır. Bu model (XY,XZ,YZ) log-doğrusal modeline karşılık geldiğinden bu etki indirgenme durumunda değişebilir.

Çok Yönlü Tablolarda İndirgenme



- (WX,WY,WZ,YZ) modelinde A={X}, B={W}, C={Y,Z} olsun. B, A ve C yi ayırır. Y ve Z ye göre indirgersek, WX ilişkisi değişmez.
- A={Y,Z}, B={W} ve C={X} olsun. B yine A ve C'yi ayırır. X'e göre indirgendiğinde W,Y,Z arasındaki koşullu ilişkiler değişmez.

Çok Yönlü Tablolarda İndirgenme

- Bir değişken diğerlerinden bağımsızsa, o değişken indirgendiğinde diğer değişkenler arasındaki ilişki değişmez. Mesela W,X,Y arasındaki ilişkiler hem (WX,WY,XY,Z) hem de (WX,WY,XY) modelinde aynıdır.

Model Seçimi

- Yeterince karmaşık, iyi uyum gösteren ve aynı zamanda yorumu kolay olan model seçilir.
- Kullanışlı modeller genelde az sayıda eleman içeren modellerdir. Birkaç değişkenin etkisine bakılır.
- Modellerde açıklayıcı ve cevap değişkeni ayrımı yapılmalıdır.

ACMGR Modeli

- A:Alkol C:Sigara M:Marijuana G:Cinsiyet R:Irk
- A,C,M yi cevap değişkenleri G,R yi açıklayıcı değişkenler olarak düşünüyoruz.
- Model GR yi içermeli.
- Model karşılaştırması G^2 değerine göre yapılabilir.

TABLE 9.1 Alcohol, Cigarette, and Marijuana Use for High School Seniors

		Marijuana Use							
		Race = White				Race = Other			
		Female		Male		Female		Male	
Alcohol Use	Cigarette Use	Yes	No	Yes	No	Yes	No	Yes	No
Yes	Yes	405	268	453	228	23	23	30	19
	No	13	218	28	201	2	19	1	18
No	Yes	1	17	1	17	0	1	1	8
	No	1	117	1	133	0	12	0	17

Source: Harry Khamis, Wright State University.

Model Seçimi

TABLE 9.2 Goodness-of-Fit Tests for Loglinear Models for Table 9.1

Model[a]	G^2	df
1. Mutual independence + *GR*	1325.1	25
2. Homogeneous association	15.3	16
3. All three-factor terms	5.3	6
4a. (2)–*AC*	201.2	17
4b. (2)–*AM*	107.0	17
4c. (2)–*CM*	513.5	17
4d. (2)–*AG*	18.7	17
4e. (2)–*AR*	20.3	17
4f. (2)–*CG*	16.3	17
4g. (2)–*CR*	15.8	17
4h. (2)–*GM*	25.2	17
4i. (2)–*MR*	18.9	17
5. (*AC*, *AM*, *CM*, *AG*, *AR*, *GM*, *GR*, *MR*)	16.7	18
6. (*AC*, *AM*, *CM*, *AG*, *AR*, *GM*, *GR*)	19.9	19
7. (*AC*, *AM*, *CM*, *AG*, *AR*, *GR*)	28.8	20

[a] *G*, gender; *R*, race; *A*, alcohol use; *C*, cigarette use; *M*, marijuana use.

- Model 1 uyumlu değil. Model 2 ve 3 iyi uyuyor. Model 2 den 3'e geçişteki G^2 farkı 15.3-5.3=10 df=16-6=10 çok büyük değil. Dolayısıyla 3 terimli modelleri düşünmeyiz. Model 2 den geriye doğru iki terimli faktörleri elimine ederiz.

Model Seçimi

TABLE 9.2 Goodness-of-Fit Tests for Loglinear Models for Table 9.1

Model[a]	G^2	df
1. Mutual independence + *GR*	1325.1	25
2. Homogeneous association	15.3	16
3. All three-factor terms	5.3	6
4a. (2)–*AC*	201.2	17
4b. (2)–*AM*	107.0	17
4c. (2)–*CM*	513.5	17
4d. (2)–*AG*	18.7	17
4e. (2)–*AR*	20.3	17
4f. (2)–*CG*	16.3	17
4g. (2)–*CR*	15.8	17
4h. (2)–*GM*	25.2	17
4i. (2)–*MR*	18.9	17
5. (*AC*, *AM*, *CM*, *AG*, *AR*, *GM*, *GR*, *MR*)	16.7	18
6. (*AC*, *AM*, *CM*, *AG*, *AR*, *GM*, *GR*)	19.9	19
7. (*AC*, *AM*, *CM*, *AG*, *AR*, *GR*)	28.8	20

[a] *G*, gender; *R*, race; *A*, alcohol use; *C*, cigarette use; *M*, marijuana use.

- Bunu yaparken G^2 deki değişimlere bakarız. G^2 deki değişimleri en küçük olanları modelden atarız. 4g modelindeki değişim en küçüktür. CR yi atarız. Daha sonra CG(model 5),MR(model 6) yi atarak model 6 yı elde ederiz. Daha sonraki çıkarılmalarda G^2 değeri yükselmektedir.

(AC,AM,CM,AG,AR,GM,GR) Modeli

Model 6

Model 7

- Bu modelde C ile {G,R} arasındaki her yol A veya M yi içerir. Modelden çıkan sonuç: A ve M ye göre C, G ve R den bağımsızdır. G ve R ye göre indirgendiğinde model 6 daki C ve A, C ve M arasındaki ilişkiler (AC,AM,CM) modelindekilerle aynıdır.
- GM terimi çıkarıldığında Model 7 elde edilir. Bu modelde A, {G,R} ve {C,M} yi ayırmaktadır. Dolayısıyla Model 7 deki A,C ve M arasındaki tüm ikili koşullu ilişkiler (AC,AM,CM) modelindekilerle aynıdır.

(AC,AM,CM,AG,AR,GM,GR) Modeli

- Örneklem büyüklüğünün fazlalığı düşünüldüğünde Model 7 de kötü uyumlu değildir (G^2=28.8, df=20 ve $\hat{\Delta}$=0.036). Dolayısıyla A,M,V arasındaki ilişkiler araştırılırken G ve R ye indirgenme yapılabilir.
- 5 değişkenli model kullanmanın avantajı G ve R nin A,M,C üzerindeki, yani G ve R nin A ve R nin M üzerindeki etkilerini bulmaktır.

Log-doğrusal Model Karşılaştırma İstatistikleri

- M_0 , M_1in özel bir durumu olmak üzere iki modeli karşılaştırmak için likelihood ratio istatistiği $G^2(M_0|M_1)=G^2(M_0)-G^2(M_1)$ dir.
- **n** gözlenen n_i hücre değerlerinin vektörü, $\hat{\mu}_0$

ve $\hat{\mu}_1$ kestirilen hücre değerleri olsun (M_0 ve M_1 için). Deviance $G^2(M_0)$ iki parçaya ayrılır:

$$G^2(M_0) = G^2(M_1) + G^2(M_0|M_1)$$

Model Karşılaştırma

- $G^2(M)$, n ile kestirilen değerler arasındaki uzaklığı ölçtüğü gibi, $G^2(M_0|M_1)$ de M_0 ve M_1 modelleri arasındaki uzaklığı ölçer. **n** ile $\hat{\mu}_0$

arasındaki uzaklık, **n** ile $\hat{\mu}_1$ ve $\hat{\mu}_0$ ile $\hat{\mu}_1$ arasındaki uzaklıkların toplamıdır.

$$G^2(M_0|M_1) = 2\sum_i n_i \log(n_i/\hat{\mu}_{0i}) - 2\sum_i n_i \log(n_i/\hat{\mu}_{1i})$$

$$= 2\sum_i n_i \log(\hat{\mu}_{1i}/\hat{\mu}_{0i}).$$

Pearson İstatistiği

- $X^2(M_0)$-$X^2(M_1)$ farkı Pearson formunda değildir. Negatif de olabilir. Model karşılaştırma için daha uygun bir Pearson istatistiği

$$X^2(M_0|M_1) = \sum(\hat{\mu}_{1i} - \hat{\mu}_{0i})^2/\hat{\mu}_{0i}.$$

- Burada $\{n_i\}$ yerine $\{\hat{\mu}_i\}$ vardır.
- M_0 varken $G^2(M_0)$ ve $G^2(M_1)$ asimptotik ki-kare, $G^2(M_0|M_1)$ de asimptotik ki-kare olarak

$df=df_{Mo} - df_{M1}$ şeklinde dağılır.

Model Tanılama ve Artıklar

- $G^2(M_0|M_1)$ terimlerin eklenip çıkarılmasının modele katkılarını verir.
- Hücresel artıklar model uyumu hakkında bilgi verir.
- Pearson ve standardize Pearson artıkları benzer şekilde tanımlanmıştır.
- Pearson $$e_i = \frac{n_i - \hat{\mu}_i}{\sqrt{\hat{\mu}_i}}.$$
- Standardize Pearson $$r_i = e_i / \sqrt{1 - \hat{h}_i},$$

Ordinal İlişkileri Modelleme

TABLE 9.3 Opinions about Premarital Sex and Availability of Teenage Birth Control

	Teenage Birth Control[a]			
Premarital Sex	Strongly Disagree	Disagree	Agree	Strongly Agree
Always wrong	81	68	60	38
	(42.4)[1]	(51.2)	(86.4)	(67.0)
	7.6[2]	3.1	−4.1	−4.8
	(80.9)[3]	(67.6)	(69.4)	(29.1)
Almost always wrong	24	26	29	14
	(16.0)	(19.3)	(32.5)	(25.2)
	2.3	1.8	−0.8	−2.8
	(20.8)	(23.1)	(31.5)	(17.6)
Wrong only sometimes	18	41	74	42
	(30.1)	(36.3)	(61.2)	(47.4)
	−2.7	1.0	2.2	−1.0
	(24.4)	(36.1)	(65.7)	(48.8)
Not wrong at all	36	57	161	157
	(70.6)	(85.2)	(143.8)	(111.4)
	−6.1	−4.6	2.4	6.8
	(33.0)	(65.1)	(157.4)	(155.5)

[a1] Independence model fit; [2] standardized Pearson residuals for the independence model fit; [3] linear-by-linear association model fit.

Source: 1991 General Social Survey, National Opinion Research Center.

- Evlilikten önce cinsel birlikteliğe(P) ait düşünceler ile 14,16 yaşlarında doğum kontrolü kullanımına(B) ait düşünceleri ölçen bir anketi düşünelim.

Ordinal İlişkileri Modelleme

- Önceki modellerde nominal ilişkiler vardı.
- Bu değişkenler için bağımsızlık modeli I için $G^2(I)=127.6$ bulunmuştur. Bu değer yüksek bir değerdir.
- PB terimi eklendiğinde model doyar ama G^2 küçülmez. Bunun sebebi verideki ordinalliğin modellenmemesidir.
- P nin ve B nin her ikisinin de aynı uç seviyelerinde bağımsızlık modelinin tahmin ettiği hücre sayıları gözlenenlerden küçüktür. Birinin pozitif ucu, diğerinin negatif ucunda ise durum tersidir.

Ordinal İlişkiler

- Ordinal değişkenler bağımsızlıktan sapmayı genellikle köşelerde gösterir.
- Tablo 9.3 te bu durum pozitif bir trend olarak görülmektedir. Doğum kontrolü hakkında olumlu düşünenlerin evlilik öncesi cinsellik hakkındaki fikirleri de olumludur.
- Ordinal modellerde trendleri belirten ilişki terimleri $u_i v_j$ vardır. Bu modeller bağımsızlık modelinden daha karmaşıktır ve doymamıştır.

İki Yönlü Tablolarda Doğrusal-Doğrusal İlişki

$$\log \mu_{ij} = \lambda + \lambda_i^X + \lambda_j^Y + \lambda_{ij}^{XY}$$

Doymuş Model

$$\log \mu_{ij} = \lambda + \lambda_i^X + \lambda_j^Y + \beta u_i v_j$$

Doğrusal-Doğrusal Model

- Doğrusal-doğrusal model, doymuş modelin $\lambda_{ij}^{XY} = \beta u_i v_j$ için özel bir durumudur. Burada u_i ve v_j satır ve sütun skorlarıdır.
- Doymuş model için (I-1)(J-1) parametre gerekli iken bu model için sadece bir parametre gereklidir.

Doğrusal-Doğrusal İlişki

- $\beta=0$ durumu bağımsızlık durumudur. $\beta u_i v_j$ $\log\mu_{ij}$ nin bağımsızlıktan sapmasını gösterir. Bu sapma sabit bir X düzeyinde Y değerleri ile doğrusal bir ilişki içerisindedir (Tersi de doğru).
- $\beta>0$ olduğunda Y artarken X de artar. $\beta<0$ olduğunda ise tersidir. LxL modeli verinin pozitif ya da negatif bir trend gösterdiğinde bağımsızlık modeline göre daha uyumludur.

Doğrusal-Doğrusal İlişki

- a ve c satırları ve b ve d sütunlarından oluşan 2x2 lik tabloda aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\log \frac{\mu_{ab}\,\mu_{cd}}{\mu_{ad}\,\mu_{cb}} = \beta(u_c - u_a)(v_d - v_b)$$

- |β| arttıkça bu değer güçlenir. Uzak kategoriler için de güçlüdür.
- u_i ve v_j eşit aralıklı olduğunda kolay yorumlanır.
- $\{u_i\}=i$ ve $\{v_j=j\}$ durumunda bitişik satır ve sütunlar için lokal odds oranları sabit exp(β) değeridir (Uniform association).

Uniform Association

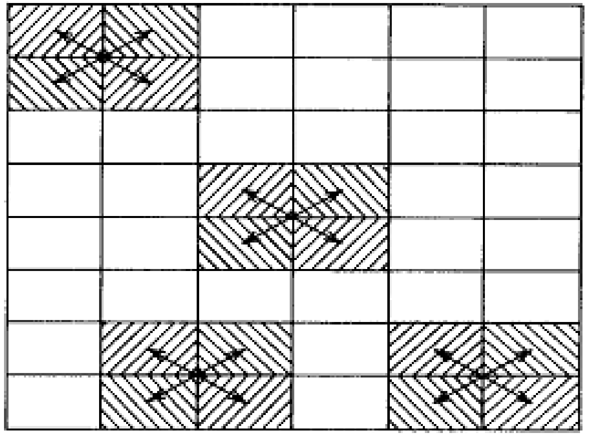


FIGURE 9.2 Constant odds ratio implied by uniform association model. (*Note:* β = the constant log odds ratio for adjacent rows and adjacent columns.)

- Skor seçimi β nın yorumunu etkiler. Genellikle altta yatan değişken süreklidir. Skor seçimi yaparken alttaki değişkenin kategorilerinin orta noktaları arasındaki uzaklıklara yakın değerleri almak düşünülebilir.

Uniform Association

- Skorlar standartlaştırıldığında elde edilen β değeri X ve Y yönlerinde standart sapma uzaklıkları için log odds oranlarını verir. LxL modeli alttaki dağılımın ikili normal olduğu durumda daha iyi uyum gösterir
- Standartlaştırılmış skorlar için β, $\rho/(1-\rho^2)$ ye yakındır.
- Zayıf ilişkiler için $\beta \sim \rho$ dur.

LxL için Lojit Model

- LxL modeli için lojit model Y yi cevap X i açıklayıcı değişken olarak düşünür.
- $\pi_{j|i} = P(Y = j | X = i)$ olduğunda lojit model

$$\log \frac{\pi_{j+1|i}}{\pi_{j|i}} = \log \frac{\mu_{i,j+1}}{\mu_{ij}} = \left(\lambda_{j+1}^{Y} - \lambda_{j}^{Y}\right) + \beta(v_{j+1} - v_{j})u_{i}$$

şeklindedir.

Cinsellik x Doğum Kontrolü Örneği

TABLE 9.4 Output for Fitting Linear-by-Linear Association Model to Table 9.3

Criteria For Assessing Goodness Of Fit

Criterion	DF	Value
Deviance	8	11.5337
Pearson Chi-Square	8	11.5085

Parameter		Estimate	Standard Error	Wald 95% Conf. Limits		Chi-Square	Pr > ChiSq
Intercept		0.4735	0.4339	−0.3769	1.3239	1.19	0.2751
premar	1	1.7537	0.2343	1.2944	2.2129	56.01	<.0001
premar	2	0.1077	0.1988	−0.2820	0.4974	0.29	0.5880
premar	3	−0.0163	0.1264	−0.2641	0.2314	0.02	0.8972
premar	4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
birth	1	1.8797	0.2491	1.3914	2.3679	56.94	<.0001
birth	2	1.4156	0.1996	1.0243	1.8068	50.29	<.0001
birth	3	1.1551	0.1291	0.9021	1.4082	80.07	<.0001
birth	4	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	.	.
linlin		0.2858	0.0282	0.2305	0.3412	102.46	<.0001

LR Statistics

Source	DF	Chi-Square	Pr > ChiSq
linlin	1	116.12	>.0001

- {1,2,3,4} skorları kullanılarak elde edilen LxL modeli sonucu yukarıdaki tablodadır.

Cinsellik x Doğum Kontrolü Örneği

- Bu modeli elde etmek için linlin adlı ixj çarpımlarını içeren bir değişken modele eklenmiştir. Bağımsızlık modelindeki $G^2(I)=127.6$ df=9 değerine karşın bu modelde $G^2(LxL)=11.5$ df=8 olmuştur.
- $\hat{\beta} = 0.286$ doğum kontrolünü daha çok uygun görenlerin cinsellik konusunda da daha toleranslı olduklarını gösterir.
- Kestirilmiş lokal odds oranı $\exp(\hat{\beta}) = 1.33$ ve Wald güven aralığı (1.26,1.41) bulunmuştur.

Cinsellik x Doğum Kontrolü Örneği

- İlişki zayıftır. Lokal olmayan odds oranları daha yüksektir. Köşelerdeki odds oranları

$$\exp\left[\hat{\beta}(u_4 - u_1)(v_4 - v_1)\right] = \exp[0.286(4-1)(4-1)] = 13.1$$

  daha büyüktür.
- Eşit aralıklı farklı skor seçimleri aynı $\hat{\beta}$ ve kestirimleri verir.

Cinsellik x Doğum Kontrolü Örneği

- {1,2,3,4} skorları için G^2=11.5 ve $\hat{\beta}$ =0.285,
- {2,4,6,8} skorları için G^2=11.5 ve $\hat{\beta}$ =0.143 ve
- {1,2,4,5} skorları için G^2=8.8 ve $\hat{\beta}$ =0.146 elde edilir.
- Farklı skor seçimleri farklı odds oranı desenleri üretir. LxL modeli eşit aralıklı skorlarla uyduğunda, uniform lokal odds oranları kategoriler arasındaki gerçek uzaklıklara duyarlı olup olmamasıyla ilgisiz olarak aradaki ilişkiyi açıklar.

Cinsellik x Doğum Kontrolü Örneği

- $\{u_i = i\}$ olduğunda cinsellik için marjinal ortalama ve standart sapma 2.81 ve 1.26'dır. Standartlaştırılmış skorlar {(i-2.81)/1.26} dır.
- Doğum kontrolü için Standartlaştırılmış skorlar {-1.65,-0.69,0.27,1.23} tür. Bu skorlar için $\hat{\beta}$ =0.374 bulunur.
- $\hat{\beta} = \hat{\rho}/(1\text{-}\hat{\rho}^2)$ denkleminden $\hat{\rho}$=0.333 bulunur. İkili normal dağılım durumundaki korelasyon değeri budur.

Yönlü Ordinal Bağımsızlık Testi

- LxL modeli için H_0: bağımsızlık hipotezi H_0:β=0 şeklindedir. Likelihood ratio istatistiği

  $G^2(I|LxL)=G^2(I)-G^2(LxL)$ şeklindedir.
- df= 1 dir. Örneğimiz için $G^2(I|LxL)=127.6-11.5=116.1$ ve $p<.0001$ güçlü bir ilişkiyi gösterir. Wald istatistiği $z^2=(\hat{\beta}/SE)^2=102.5$ (df=1) yine güçlü bir ilişkiyi gösterir.

Yönlü Ordinal Bağımsızlık Testi

- LxL modeli uyumlu olduğunda $G^2(I|LxL)$ yi kullanan yönlü ordinal test asimptotik olarak $G^2(I)$ dan daha güçlüdür. Ki-kare testinin gücü sabit bir noncentrality için df düştükçe artar. LxL uyumlu olduğunda, $G^2(I|LxL)$ ve $G^2(I)$ aynı noncentrality ye sahiptir, o yüzden $G^2(I|LxL)$ daha güçlüdür.