

# Chap 3 排列組合與排容原理

## § 3.2 排列

### 公式

(1)  $n$  件相異物不允許重覆，取  $r$  件排列  $P_r^n$

$$n(n-1) \cdots (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = P_r^n$$

(2)  $n$  件相異物允許重覆，取  $r$  件排列  $n^r$

(3)  $n$  件相異物排列  $n!$

$$n(n-1) \cdots 1 = n!$$

(4)  $n$  件相異物環狀排列  $\frac{n!}{n}$

(5)  $n$  件物品不全相異，共有  $r$  類，第一類  $n_1$  個，  
第  $r$  類  $n_r$  個 排列 (不盡相異物排列)

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!} = \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$$

(6) 公式 (1) 中排列改組合

$$\frac{P_r^n}{r!} = \frac{n!}{r! (n-r)!} = C_r^n = C(n, r) = \binom{n}{r}$$



Ex. (97台大)

由 0, 1, 2, 構成長度 10 之字串

(1) 恰有 5 個 0, 5 個 1, 有幾個

(2) 恰有 3 個 0, 4 個 1, 3 個 2, 有幾個

(3) 至少 2 個 0 有幾個

sol.

(1)  $C_5^{10}$

(2)  $C_3^{10} C_4^7 C_3^3 = (3 \ 4 \ 3)$

(3)  ~~$C_2^{10} 3^8$~~

全部 - (只有 1 個 0 + 沒有 0)  
 $= 3^{10} - (C_1^{10} 2^9 + 2^{10})$

Ex.

排列數 =  $\frac{8!}{4}$

Ex.

MISSISSIPPI

(1) 字母排列數

(2) S 不相鄰之排列數

sol.

(1)  $11! / 4! 4! 2!$

(2) S 先不排  $7! / 4! 2!$    
 $\Rightarrow 7! / 4! 2! \binom{8}{4}$



Ex. (96台大)

(3, 2) 走到 (7, 14)

(1) shortest path 有幾條

(2) 其中不過 (5, 8) 有幾條

sol.

(1)  $4 \rightarrow 12 \uparrow$  排列數

$$16! / 4! 12! = \binom{16}{4} = \binom{16}{12}$$

$$(2) \binom{16}{4} - \binom{8}{2} \binom{8}{2}$$

Ex. (97逢甲)

(1) 証  $(3n)! / 2^n 3^n \in \mathbb{Z}$

(2) 証  $(k!)! / (k!)^{(k-1)!} \in \mathbb{Z}$

pf. 組合証法

$$(1) \boxed{1 \mid 1 \mid 1 \mid 2 \mid 2 \mid 2 \mid \cdots \mid n \mid n \mid n}$$

$$\text{排列數} = (3n)! / (3!)^n = (3n)! / 3^n 2^n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \boxed{\text{組 } k \mid \text{組 } k \mid \cdots \mid \text{組 } k \mid \text{組 } k}$$

共  $(k-1)!$  組

$$\text{排列數} = (k!)! / (k!)^{(k-1)!} \in \mathbb{Z}$$