Chap 1 矩陣與線性方程组

§1.6 LU分解.

$$\underset{n\times n}{A} = \underset{\substack{n\times n \\ \text{下三角}}}{L} \times \underset{\substack{n\times n \\ \text{上三角}}}{U}$$

$$\underset{m\times n}{} \quad \underset{\substack{m\times m \\ \text{下三角}}}{} \quad \underset{\substack{m\times n \\ \text{row echelon from}}}{}$$

Ex. (100 北科)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 21 \end{bmatrix}$$ ，求 A 的 LU分解.

sol.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 3 \\ -2 & -6 & 7 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 21 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 8 \\ 0 & -3 & 5 & 17 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 4 \end{bmatrix} = U \text{ ，取 } L = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4}{2} & \frac{-1}{-1} & 0 & 0 \\ \frac{-2}{2} & \frac{-3}{-1} & \frac{-2}{-2} & 0 \\ \frac{8}{2} & \frac{-3}{-1} & \frac{-4}{-2} & \frac{4}{4} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

，則 $A=LU$ 為 A 的 LU-decomposition

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \underset{L}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}} \underset{D}{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}} \underset{U}{\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

為 LDU-decomposition

Note

(1) 並非每個矩陣皆可作LU

如：$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) LU的目的

solve $A\vec{x}=\vec{b} \Rightarrow LU\vec{x}=\vec{b}$

令 $\vec{y}=U\vec{x}$，則 $L\vec{y}=\vec{b}$

Step 1: solve $L\vec{y}=\vec{b}$ 之 $\vec{y}$ via. forward substitution

Step 2 solve $U\vec{x}=\vec{y}$ 之 $\vec{x}$ via back substitution

Ex. (100 中山)

利用 LU 解 $A\vec{x}=\vec{b}$，$A=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & -4 & 6\\ -2 & 6 & -6\end{bmatrix}$，$\vec{b}=\begin{bmatrix}2\\-3\\8\end{bmatrix}$

sol.

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & -4 & 6\\ -2 & 6 & -6\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 2 & -4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = U$$

$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}$，則 $A=LU$

Step 1: solve $L\vec{y}=\vec{b}$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-3\\8\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$$

Step 2: solve $U\vec{x}=\vec{y}$

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\8\\3\end{bmatrix}$$