Chap4 生成函數

§4.3 指數生成函數

Def.

a_n 為一個數列，定義 $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$

稱為 a_n 的 exponential generating function (EGF)

公式

(1) $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

(2) $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$

(3) $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(4) $\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

口訣：

拿：考慮物品 { 組合：GF ; 排列：EGF }

放：考慮箱子：{ 相同球：GF ; 相異球：EGF }

Ex.

n件相異物，允許重覆取 r 件排列

sol.

物品 1 的 EGF：$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$

$A(x)=(e^x)^n$，求 $\frac{x^r}{r!}$ 的係數

$$A(x)=e^{nx}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(nx)^r}{r!}=\sum_{r=0}^{\infty}n^r\frac{x^r}{r!}\rightarrow n^r$$

Ex.

n個相異物，放到n個相異箱子，不允許空箱

sol.

箱子 1 的 EGF：$\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\quad=e^x-1$

$A(x)=(e^x-1)^m$，求 $\frac{x^m}{m!}$ 的係數

$$A(x)=(-1+e^x)^m=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i(e^x)^{n-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{((n-i)x)^m}{m!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m\frac{x^m}{m!}$$

$$\Rightarrow\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m$$

Ex.

四元 n 序列中.

(1) 含偶數個 0 之序列數

(2) 含偶數個 0 且偶數個 1 之序列數

(3) 含 0.1 個數為偶數之序列數

Sol.

(1) 0 出現次數的 EGF: $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

1 出現次次的 EGF: $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=e^x$

$\vdots$

3

$A(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)e^xe^xe^x$, 求 $\frac{x^n}{n!}$ 之係數

$A(x)=\frac{1}{2}(e^{4x}+e^{2x})=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4x)^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}\right)$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(4^n+2^n)\frac{x^n}{n!}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(4^n+2^n)$

(2) $A(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)e^xe^x$, 求 $\frac{x^n}{n!}$ 之係數

(3) $A(x)=\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2e^xe^x+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2e^xe^x$, 求 $\frac{x^n}{n!}$ 之係數

Ex. (98 東吳)

ENGINE 中取4個字母排列有幾種

sol.

$A(x) = \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\right)^2\left(1+\frac{x}{1!}\right)^2$，求 $\frac{x^4}{4!}$ 之係數

$= \left(1+2x+2x^2+x^3+\frac{1}{4}x^4\right)\left(1+2x+x^2\right)$

x^4 之係數為 $2+2+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$

$\frac{x^4}{4}$ 〃 為 $\frac{17}{4}(4!)$