Chap 1 矩陣與線性方程組

§1.3 基本列運算

Def

$A: m\times n$

(1) $r_{ij}(A)$ 表將 A 的第 i 列與第 j 列交換

(2) $r_i^{(k)}(A)$ 表將 A 的第 i 列乘 k 倍 $k\neq 0$

(3) $r_{ij}^{(k)}(A)$ 表將 A 的第 i 列的 k 倍加至第 j 列

Note

(1) $(r_{ij})^{-1} = r_{ij}$

(2) $(r_i^{(k)})^{-1} = r_i^{(\frac{1}{k})}$

(3) $(r_{ij}^{(k)})^{-1} = r_{ij}^{(-k)}$

Def.

r: elementary row operation.

稱 $E=r(I)$ 為 row elementary matrix

In particular, $R_{ij} = r_{ij}(I)$, $R_i^{(k)} = r_i^{(k)}(I)$, $R_{ij}^{(k)} = r_{ij}^{(k)}(I)$

Thm

$A \xrightarrow{r} B$, $E=r(I)$, 則 $B=EA$

Note

$E = r(I)$: row elementary matrix. 則 E 為可逆. 則 $E^{-1} = r^{-1}(I)$

ie $R_{ij}^{-1} = R_{ij}$, $(R_i^{(k)})^{-1} = R_i^{(\frac{1}{k})}$, $(R_{ij}^{(k)})^{-1} = R_{ij}^{(-k)}$

Ex (100中正)

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 將 A 寫成列基本矩陣乘積

sol.

$A \xrightarrow{r_1} A_1 \xrightarrow{r_2} A_2 \xrightarrow{r_3} \cdots \longrightarrow I$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} -\frac{1}{3} \xrightarrow{r_{12}^{-\frac{1}{3}}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \times 3 \xrightarrow{r_2^{3}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} -2$

$\xrightarrow{r_{21}^{(-2)}} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \xrightarrow{r_1^{\frac{1}{3}}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

則 $R_1^{(\frac{1}{3})} R_{21}^{(-2)} R_2^{(3)} R_{12}^{(\frac{-1}{3})} A = I$

$\Rightarrow A = \left(R_1^{(\frac{1}{3})} R_{21}^{(-2)} R_2^{(3)} R_{12}^{(\frac{-1}{3})} \right)^{-1} I$

$= R_{12}^{(\frac{-1}{3})\,-1} \; R_2^{(3)\,-1} \; R_{21}^{(-2)\,-1} \; R_1^{(\frac{1}{3})\,-1}$

$= R_{12}^{\frac{1}{3}} \; R_2^{\frac{1}{3}} \; R_{21}^{2} \; R_1^{3}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Thm

$A \overset{r}{\sim} B$ (A列等價於B), 則 $\exists P$ 為可逆 $\ni PA = B$