Chap 1 矩陣與線性方程組

§1.5 可逆之充要條件

Lemma

$A: n\times n$. $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow A \overset{r}{\sim} I_n$

pf.

$(\Rightarrow)$:

$\because A\vec{x}=\vec{0}$ 具唯一解 $\therefore r(A)=n$

$\therefore$

$$A \overset{r}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & & * \\ & 1 & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \overset{r}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \ddots \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$(\Leftarrow)$:

$\because A \overset{r}{\sim} I \quad \therefore A\vec{x}=\vec{0}$ 與 $I\vec{x}=\vec{0}$ 具相同解集

$\because A\vec{x}=0$ 只有零解 $\therefore A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解.

Thm.

$A\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$

$A: n\times n$ (1) A可逆 $\Leftrightarrow$ (2) $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解 $\Leftrightarrow$

(3) $A \sim I_n \Leftrightarrow$ (4) A可寫成列基本矩陣乘法

pf.

(1) $\Rightarrow$ (2):

設 $A\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{0}=\vec{0}$

(2) $\Rightarrow$ (3): Lemma

(3) $\Rightarrow$ (4):

$\because A \sim I_n$ $\therefore \exists E_1, \dots, E_k$ 為列基本矩陣

$\ni E_k \cdots E_1 A = I \Rightarrow A = (E_k \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$

(4) $\Rightarrow$ (1): ok.

Note.

(1) $A\vec{x}=\vec{0}$ 只有零解, 稱 A 為 nonsingular

(2) A is singular $\Leftrightarrow \exists\, \vec{x} \neq \vec{0} \ni A\vec{x}=\vec{0}$

Note

$A: n\times n$ 可逆, 則 $A \sim I$, $E_k \cdots E_1 A = I$, $\therefore A^{-1} = E_k \cdots E_1 I$

Ex. (99 師大)

$$A=\begin{bmatrix}1&4&6\\0&0&1\\2&10&9\end{bmatrix}$$ ，求 A^{-1}

sol.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&6&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\2&10&9&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&6&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\0&2&-3&-2&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&6&1&0&0\\0&2&-3&-2&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&4&6&1&0&0\\0&1&-\frac{3}{2}&-1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&12&5&0&-2\\0&1&-\frac{3}{2}&-1&0&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-12&-2\\0&1&0&-1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0&0&1&0\end{array}\right]\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}5&-12&-2\\-1&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Thm

$A \overset{r}{\sim} B \Leftrightarrow \exists P$ 為可逆 $\ni PA=B$

Thm

$A: n\times n$, (1) 若 A 具左反 B, 則 A 為可逆，且 $A^{-1}=B$

(2) 若 A 具右反 C, 則 A 為可逆，且 $A^{-1}=C$

pf.

(1) 已知 $BA=I$，claim：A is nonsingular

設 $A\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow BA\vec{x}=\vec{0} \Rightarrow \vec{x}=\vec{0}$ $\therefore A$ 為可逆

$\because BA=I$，$\therefore B=IA^{-1}=A^{-1}$

(2) 已知 $AC=I$ $\therefore$ C 具左反 由 (1) $\Rightarrow C$ 為可逆且 $C^{-1}=A$

$\therefore A=C^{-1}$ 為可逆且 $A^{-1}=(C^{-1})^{-1}=C$

Thm

$A: n\times n$, A可逆 $\Leftrightarrow$ $\forall \vec{b}: n\times 1$, $A\vec{x}=\vec{b}$ 具唯一解

$\Leftrightarrow$ $\forall \vec{b}: n\times 1$, $A\vec{x}=\vec{b}$ 有解