Chap 4 生成函数

§4.4 求和算子

Note

$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$

$\frac{A(x)}{1-x} = (1+x+x^2+\cdots)(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)$

$= a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+\cdots+(a_0+a_1+\cdots+a_n)x^n+\cdots$

令 $S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$ 為 a_n 之 partial sum

則 $\frac{1}{1-x}A(x)=S(x)$ 為 S_n 之 GF

稱 $\frac{1}{1-x}$ 為 sum operator

Ex.

求 $3\times2\times1+4\times3\times2+\cdots+(n+1)n(n-1)=?$

sol.

令 $a_n=(n+1)n(n-1)$.

則 a_n 之 partial sum

$S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n=1\cdot0\cdot(-1)+2\cdot1\cdot0+3\cdot2\cdot1+\cdots+(n+1)n(n-1)$

$A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)n(n-1)x^n$

$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}$, 对 x 微分 3 次

$\frac{6}{(1-x)^4}=\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)n(n-1)x^{n-2}$

$\therefore$ S_n 之 GF $S(x)=\frac{1}{1-x}A(x)=\frac{6x^2}{(1-x)^5}$

$S(x)=6x^2\left[\sum_{r=0}^{\infty}\binom{5+r-1}{r}x^r\right]$

10上 1:00:d