

# Chap 3 排列組合與排容原理.

## §3.5 亂序及禁位問題

Thm (derangement)

$\{1, 2, \dots, n\}$  作排列使得每個號碼皆不在自然位置的排列數為

$$D_n = n! \left[ \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i!} \right]$$

pf.

$$|U| = n!$$

令  $A_i$  表  $i$  在自然位置  $i=1, \dots, n$ .

$$D_n = N(\overline{A_1} \overline{A_2} \dots \overline{A_n})$$

$$= S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + \dots + (-1)^n S_n$$

$$= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}(n-n)!$$

$$= \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)! = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} \cancel{(n-i)!}$$

$$= n! \left[ \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \right]$$



## Note

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \Rightarrow e^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$\therefore D_n \rightarrow n! e^{-1} \text{ , as } n \rightarrow \infty$$

Ex. (97海大)

15 學生, 一堂課每個學生位置皆不同有幾種

sol.

$$(15!) D_{15} \rightarrow (15!)^2 e^{-1}$$

Ex. (99成大)

1, 2, ..., 8 作亂序

(1) 前 4 個數為 1~4 的排列有  $n$  種

(2) 前 4 個數為 5~8 的排列有  $n$  種

sol.

$$(1) D_4 D_4$$

$$(2) 4! 4!$$



Ex. (99成大)

4個女生. 5個男生

$w_1$  不喜歡  $m_1, m_3, m_5$

$w_2$  ~~不~~  $m_2, m_4$

$w_3$  ~~不~~  $m_3, m_5$

$w_4$  ~~不~~  $m_4$

$w_1 \sim w_4 \rightarrow m_1 \sim m_5$  的 1-1 對應有幾種

sol.

$$|U| = 5 \times 4 \times 3 \times 2.$$

令  $a_i$  表示  $w_i$  在禁位上,  $i=1, 2, 3, 4$ .

$$N(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4) = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4$$

太麻煩

$$= 5 \times 4 \times 3 \times 2 - 8(4 \times 3 \times 2) + \boxed{\phantom{00}}(3 \times 2) - \boxed{\phantom{00}}(2) + \boxed{\phantom{00}}$$

$C$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$C$	$m_1$	$m_3$	$m_5$	$m_2$	$m_4$
$w_1$	X		X		X	$w_1$	X	X	X		
$w_2$		X		X		$w_3$		X	X		
$w_3$			X		X	$w_2$				X	X
$w_4$				X		$w_4$					X

rook polynomial

$$r(C, x) = 1 + 8x + \text{---} x^2 + \text{---} x^3 + \text{---} x^4$$

$$\Rightarrow r(C_1, x) r(C_2, x) = (1 + 5x + 4x^2)(1 + 3x + x^2)$$

$$\Rightarrow N(\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \bar{a}_4) \Rightarrow r(C_1, x) r(C_2, x)$$

$$= (1 + 5x + 4x^2)(1 + 3x + x^2)$$

$$\Rightarrow 5 \times 4 \times 3 \times 2 - 8(4 \times 3 \times 2) + 20(3 \times 2) - 17(2) + 4.$$