Chap4 生成函數

§4.2 整數分割

Note

令 P_n 表 n 之整數分割數，$P_1=1$，$P_2=2$，$P_3=3$，$P_4=5$，…

令 $P_0=1$，P_n 相當於 n 個相同球放至 n 個相同箱子允許空箱的方法數.

令 $P(x)=\sum_{n=0}^{n} P_n x^n$

1 出現次數 GF：$1+x+x^2+\cdots=\frac{1}{1-x}$

2 〃 GF：$1+x^2+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$

⋮

n 〃 GF：$1+x^n+x^{2n}+\cdots=\frac{1}{1-x^n}$

則 $\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{1-x^n}\right)$ 中 x^r 之係數，為 P_r

(1) 奇數分割之GF：

$$P_o(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x^3}\right)\left(\frac{1}{1-x^5}\right)\cdots$$

(2) 偶數分割之GF

$$P_e(x)=\left(\frac{1}{1-x^2}\right)\left(\frac{1}{1-x^4}\right)\left(\frac{1}{1-x^6}\right)\cdots$$

Ex.

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$，証：$n$ 之奇數分割等於 n 之相異分割數.

pf.

令 a_n 表 n 之奇數分割數，$P_o(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

b_n 表 n 之相異分割數，$P_d(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

claim. $a_n = b_n, \forall n \Leftrightarrow P_o(x) = P_d(x)$

$$P_d(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots$$

$$= \left(\frac{\cancel{1-x^2}}{1-x}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^4}}{\cancel{1-x^2}}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^6}}{1-x^3}\right)\left(\frac{\cancel{1-x^8}}{\cancel{1-x^4}}\right)\cdots$$

$$= P_o(x)$$

Ex.

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$，証 n 之 r 堆分割數等於最大為 r 之分割數.

pf.

利用 Ferrer graph

$8=4+2+2$		$8=3+3+1+1$
○○○○	$\xleftrightarrow[\text{置}]{\text{轉}}$	○○○
○○		○○○
○○		○
		○