超声波在肝硬化组织中传播的数值模拟

项目背景

肝硬化是一种慢性肝病，会导致肝组织纤维化和声学性质改变。超声弹性成像技术通过测量组织对机械振动的响应来评估肝脏硬度，是诊断肝硬化的重要无创手段。本项目通过数值求解声波方程，模拟超声波在健康与硬化肝组织中的传播特性。

几何模型：采用二维同心圆模型

- 内圆：半径 R_{inner}，代表硬化区域，声速 $c_{\text{hard}} \approx 1600$ m/s
- 外环：半径 R_{outer}，代表健康肝组织，声速 $c_{\text{normal}} \approx 1550$ m/s
- 背景：周围介质（水或脂肪），声速 $c_{\text{bg}} \approx 1450$ m/s

任务一：基础声波方程求解器开发

1.1 问题描述

开发二维声波方程的显式有限差分求解器，模拟超声波在肝硬化分层介质中的传播、反射和透射现象。

1.2 控制方程

2D声波方程：
$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2(x,y)\nabla^2 p + s(x,y,t)$

其中：

- $p(x,y,t)$：声压场 (Pa)
- $c(x,y)$：空间变化的声速场 (m/s)
- $s(x,y,t)$：源项（换能器激励）
- $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

初始条件：
$p(x,y,0) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x,y,0) = 0$

1.3 计算域与边界条件

计算域：$\Omega = [0, 0.1] \times [0, 0.08]$ (单位：m)

几何模型：

- 内圆（硬化区）：圆心 $(x_c, y_c) = (0.05, 0.04)$，半径 $R_{\text{inner}} = 0.015$ m
- 外圆（健康肝组织）：圆心同上，半径 $R_{\text{outer}} = 0.025$ m
- 背景：外圆之外为背景介质

边界条件（在 $\partial\Omega$ 上）：
$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$
即Neumann自由边界条件，或使用一阶外推：$p_{\text{boundary}} = p_{\text{interior}}$

1.4 源项设置

点源位置：$(x_s, y_s) = (0.05, 0.02)$ m（位于背景介质中，内圆下方）

源项形式（Ricker子波）：
$s(x,y,t) = A_0 \cdot \delta(x - x_s, y - y_s) \cdot \left[1 - 2\pi^2 f_0^2 (t - t_0)^2\right] \exp\left[-\pi^2 f_0^2 (t - t_0)^2\right]$

其中：

- $A_0 = 10^6$ Pa（源强度）
- $f_0 = 2 \times 10^6$ Hz（中心频率2 MHz）
- $t_0 = 1/f_0$（时间偏移）
- $\delta(x - x_s, y - y_s)$ 表示位于 (x_s, y_s) 的空间脉冲

数值实现：在网格点 (i_s, j_s) 处添加源项，或使用小范围高斯分布近似点源。

1.5 离散化与稳定性

离散方法：时间和空间均采用二阶中心差分格式，网格步长 $\Delta x = \Delta y = h$。

CFL稳定性条件（显式格式必须满足）：
$\Delta t \leq \frac{h}{c_{\max}\sqrt{2}}$

其中 $c_{\max}$ 为计算域内的最大声速。**特别注意**：违反此条件将导致数值解爆炸性增长。

1.6 具体任务

a) 实现显式有限差分求解器，在均匀介质中验证圆形波的传播，确保波速与理论值一致（30分）

b) 通过数值实验验证CFL条件：选取满足和违反CFL条件的时间步长，观察并记录数值稳定/不稳定现象（20分）

c) 构建同心圆肝硬化模型，从点源发出声波，可视化不同时刻的声压场分布，分析波在两个界面处的反射和透射现象（30分）

d) 在界面附近提取波形数据，测量反射波和透射波的幅值，与理论预测进行定性对比分析（20分）

任务二：隐式格式与多重网格求解器

2.1 问题描述

针对任务一的声波方程，开发基于隐式时间离散的求解器，并研究不同迭代方法在求解线性方程组时的效率。

2.2 Crank-Nicolson隐式格式

时间离散（二阶精度，无条件稳定）：
$\frac{p^{n+1} - 2p^n + p^{n-1}}{\Delta t^2} = \frac{c^2}{2}\left[\nabla^2 p^{n+1} + \nabla^2 p^n\right] + s^n$

每个时间步需求解线性方程组 $Ap^{n+1} = b$，其中系数矩阵 A 由隐式项决定。

2.3 迭代求解方法

针对每个时间步产生的线性系统，需实现以下求解方法：

方法1：经典点迭代法

- Jacobi迭代
- Gauss-Seidel迭代
- SOR迭代（超松弛迭代）

方法2：共轭梯度法

方法3：几何多重网格

2.4 具体任务

a) 实现Crank-Nicolson隐式格式，验证其在大时间步长下的稳定性（可超过CFL条件限制）（25分）

b) 分别实现Jacobi、Gauss-Seidel、SOR、共轭梯度法四种迭代求解器，对于相同精度要求（相对残差 $< 10^{-6}$ ），比较各方法的迭代次数和计算时间（30分）

c) 实现完整的几何多重网格V-cycle算法（至少两层网格），包括限制、延拓算子的构造，测试不同前后平滑次数对收敛速度的影响（35分）

d) 在不同网格尺寸下（如 $64^2, 128^2, 256^2$）测试所有方法，分析多重网格方法相对于单层迭代法的加速比和渐近复杂度（10分）

任务三：剪切波弹性成像的声-弹耦合模拟

3.1 问题描述

在超声弹性成像中，通过聚焦超声在组织内部产生辐射力，激发剪切波（横波）传播。剪切波速度与组织弹性模量直接相关，测量剪切波速度可定量评估肝脏硬度。本任务模拟"声辐射力脉冲成像（ARFI）"过程。

3.2 两阶段物理模型

阶段1：声辐射力激励

在组织内部焦点位置 $(x_f, y_f) = (0.05, 0.04)$ m（圆心位置）施加体积力：
$\mathbf{F}(x,y,t) = F_0 \exp\left(-\frac{(x-x_f)^2+(y-y_f)^2}{2\sigma_f^2}\right) \cdot g(t) \cdot \hat{\mathbf{y}}$

参数设置：

- $F_0 = 10^5$ N/m³（辐射力强度）
- $\sigma_f = 2 \times 10^{-3}$ m（焦点尺寸）
- $g(t) = H(t) \cdot H(T_p - t)$：方波调制，$T_p = 0.2$ ms（脉冲持续时间）
- $\hat{\mathbf{y}}$：沿 y 方向的单位矢量

阶段2：剪切波传播

在辐射力作用下，组织产生位移场 $\mathbf{u}(x, y, t) = (u_x, u_y)^T$，满足：

2D弹性波方程（各向同性）：
$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \mu \nabla^2 u_x$

$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) + \mu \nabla^2 u_y + F_y$

物性参数（假设密度 $\rho = 1000$ kg/m³）：

- 背景介质：$\mu_{\text{bg}} = 0$（液体无剪切模量），$\lambda_{\text{bg}} = 2.1 \times 10^9$ Pa
- 健康肝组织：$\mu_{\text{normal}} = 5 \times 10^3$ Pa，$\lambda_{\text{normal}} = 2.4 \times 10^9$ Pa
- 硬化肝组织：$\mu_{\text{hard}} = 2 \times 10^4$ Pa，$\lambda_{\text{hard}} = 2.56 \times 10^9$ Pa

波速关系：

- 纵波速度：$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ （约1500-1600 m/s）
- 剪切波速度：$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ （健康组织约2 m/s，硬化组织约4.5 m/s）

3.3 离散化方案

空间离散：使用二阶中心差分离散所有空间导数，网格步长 $h = \Delta x = \Delta y$

时间离散：显式Leap-frog格式或标准中心差分

离散形式（以 u_x 为例）：
$u_{x,i,j}^{n+1} = 2u_{x,i,j}^n - u_{x,i,j}^{n-1} + \frac{\Delta t^2}{\rho} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta^n}{\partial x} \bigg|_{i,j} + \mu (\nabla^2 u_x^n)_{i,j} \right]$

其中散度 $\theta = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$ 用中心差分计算。

CFL条件（由纵波速度决定）：
$\Delta t \leq \frac{h}{c_{p,\max}\sqrt{2}}$

3.4 具体任务

a) 实现2D弹性波方程求解器，在同心圆模型中设置不同的弹性模量，从焦点施加瞬时体积力，可视化位移场的时空演化（30分）

b) 在健康区和硬化区分别放置虚拟探测点，记录位移-时间曲线，使用互相关或峰值追踪法计算剪切波到达时间差，进而计算剪切波速度并与理论值对比（30分）

c) 计算位移场的散度 $\nabla \cdot \mathbf{u}$ 和旋度 $\nabla \times \mathbf{u}$，分别可视化纯纵波和纯剪切波的传播模式，分析两种波的传播特性差异（20分）

d) 研究剪切波遇到硬化/健康组织界面时的反射和透射现象，分析界面对剪切波速度测量的影响（20分）

提交要求

代码规范

- 提供完整可运行的源代码（推荐MATLAB或Python）
- 代码结构清晰，包含充分注释
- 参数可调（网格尺寸、时间步长、物性参数等）

报告内容

1. **理论推导**（15%）：控制方程离散化、稳定性条件推导（如需）、收敛性分析（任务二）
2. **数值实现**（30%）：算法流程说明、关键技术细节、数据结构设计（任务二的多重网格）
3. **结果与分析**（40%）：可视化结果（波场快照、动画、剖面曲线）、定量分析（误差、收敛曲线、加速比等）、物理现象解释
4. **讨论**（15%）：方法优缺点、数值结果与理论预测的对比、可能的改进方向

协作要求

- 三个任务可由不同成员负责，但需协调统一网格划分标准、模型几何参数、数据输出格式
- 鼓励任务间相互调用（如任务二使用任务一的结果，任务三使用任务二的求解器）

总分：100分

加分项：

- 实现任务三，个人final project成绩 +10，团队其余成员+5