Эта разностная схема носит название *предиктор-корректор*, или *счет-пересчет.* Первая схема из (5.11) – схема Эйлера с шагом $\tau/2$ (предиктор), вторая – схема со значением $\overline{y}_i$ на полушаге (корректор).

2) $\sigma = 1/2$, $\alpha = 1$;

$$\frac{\overline{y}_i - y_i}{\tau} = f(t_i, y_i); \quad \frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = \frac{1}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \overline{y}_i)).$$

Рассмотрим *метод Рунге – Кутта четвертого порядка точности.* Используем схему:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\tau} = (k_1(y_i) + 2k_2(y_i) + 2k_3(y_i) + k_4(y_i))/6, \quad i = 0,1,\ldots,n, \quad y_0 = u_0, \tag{5.12}$$

где k_1, k_2, k_3, k_4 – поправки, вычисляемые по формулам

$$k_1 = f(t_i, y_i); \quad k_2 = f(t_i + \tau/2, y_i + \tau k_1/2); \quad k_3 = f(t_i + \tau/2, y_i + \tau k_2/2); \quad k_4 = f(t_i + \tau, y_i + \tau k_3). \tag{5.13}$$

При определении y_{i+1} по заданному y_i необходимо четыре раза вычислять правую часть (5.12) в следующей последовательности: k_1, k_2, k_3, k_4. Если предположить достаточную гладкость $u(t)$, (непрерывную дифференцируемость вплоть до производных 4-го порядка) и разложить u_{i+1}, k_1, k_2, k_3, k_4 в окрестности $t = t_i$, нетрудно показать, что невязка $\psi = O(\tau^4)$, то есть разностная схема (5.12), имеет 4-й порядок аппроксимации.

5.3. Применение итерационных методов решения систем линейных алгебраических уравнений

Требуется решить задачу Коши при помощи численных методов

$$\frac{dy}{dt} = -y + e^{-t} \quad, 0 < t \le T, \quad y(0) = 1.$$

Вводим функцию $f(t, y)$

$$f(t, y) := -y + e^{-t}.$$

Задаем шаг, количество шагов по времени и начальное условие

$$\tau := 1, \; n := 10, \; y0 := 1.$$

Выводим длину расчетного временного интервала

$$t0 := \tau \cdot n$$

$$t0 = 10.$$

Задаем точное значение решения (считается аналитически)

$$F(t) := e^{-t}(t+1)$$
$$i := 0..n$$
$$y_i := F(i \cdot \tau).$$

Метод Эйлера для решения задачи Коши.

Вводим функцию, реализующую алгоритм метода Эйлера

$$Eiler(n, y0) := \left| \begin{array}{l} y_0 \leftarrow y0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad y_{i+1} \leftarrow y_i + \tau \cdot f(i \cdot \tau, y_i) \\ y \end{array} \right.$$

Вызываем данную функцию

$$y1 := Eiler(n, y0).$$

Строим графики точного решения и приближенного, рассчитанного методом Эйлера (Рис. 5.1).

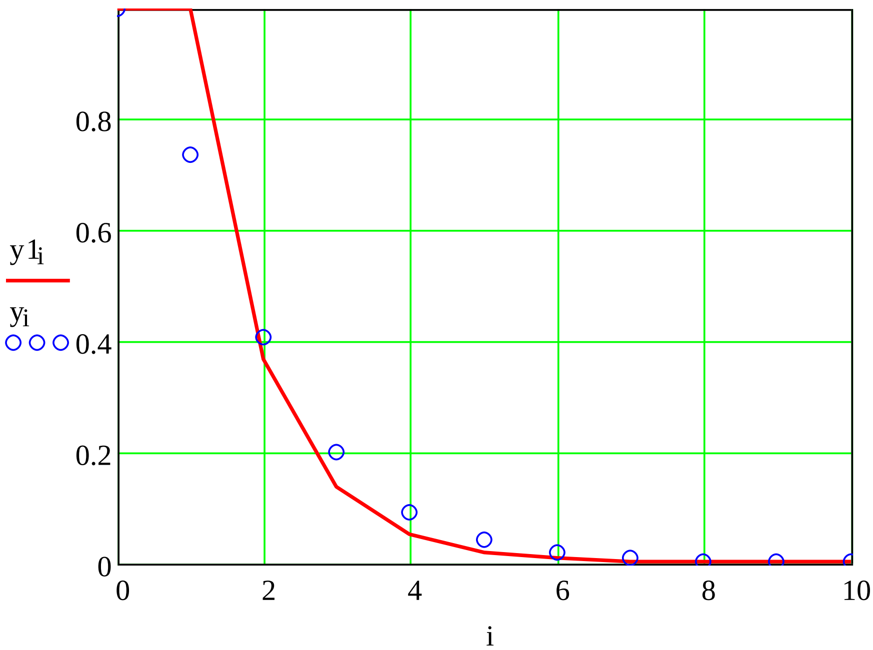

Рис. 5.1. Графики точного решения и приближенного, рассчитанного методом Эйлера

Выводим значение погрешности

$$|y - y1| = 0,279.$$

Метод Рунге – Кутта второго порядка точности для решения задачи Коши.

Вводим функцию, реализующую алгоритм метода Рунге – Кутта второго порядка точности:

$$\text{Ruhge\_Kutt\_2}(n, y0) := \begin{array}{|l} y_0 \leftarrow y0 \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \begin{array}{|l} y1 \leftarrow y_i + \dfrac{\tau}{2} \cdot f(i \cdot \tau, y_i) \\ y_{i+1} \leftarrow y_i + \tau \cdot f[(i+0.5) \cdot \tau, y1] \end{array} \\ y \end{array}$$

Вызываем данную функцию

$$y2 := \text{Ruhge\_Kutt\_2}(n, y0)$$

Строим графики точного решения и приближенного, рассчитанного методом Рунге – Кутта второго порядка точности (Рис. 5.2).

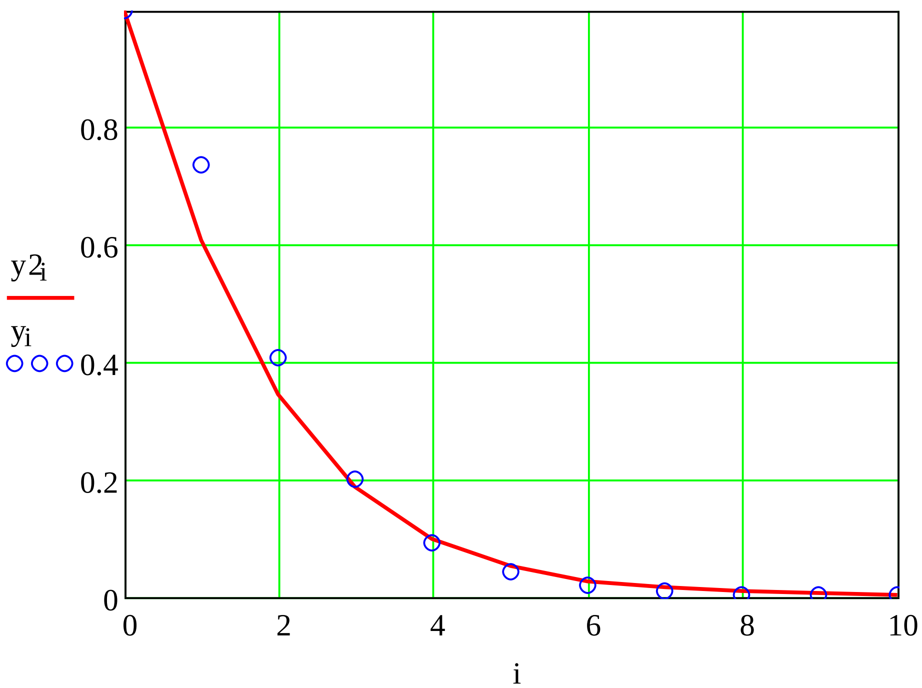

Рис. 5.2. Графики точного решения и приближенного, рассчитанного методом Рунге – Кутта второго порядка точности

Выводим значение погрешности

$$|y - y2| = 0{,}146\,.$$

Метод Рунге – Кутта четвертого порядка точности для решения задачи Коши.

Вводим функцию, реализующую алгоритм метода Рунге – Кутта четвертого порядка точности

$$
\mathrm{Ruhge\_Kutt\_4}(n, y0) := \left|
\begin{array}{l}
y_0 \leftarrow y0 \\
\text{for } i \in 0..n-1 \\
\quad \left|
\begin{array}{l}
k1 \leftarrow f(i \cdot \tau, y_i) \\
k2 \leftarrow f\left[(i + 0.5) \cdot \tau, y_i + \dfrac{\tau}{2} \cdot k1\right] \\
k3 \leftarrow f\left[(i + 0.5) \cdot \tau, y_i + \dfrac{\tau}{2} \cdot k2\right] \\
k4 \leftarrow f\left[(i + 1) \cdot \tau, y_i + \tau \cdot k3\right] \\
y_{i+1} \leftarrow y_i + \dfrac{\tau}{6} \cdot (k1 + 2 \cdot k2 + 2 \cdot k3 + k4)
\end{array}
\right. \\
y
\end{array}
\right.
$$

Вызываем данную функцию

$$y3 := \mathrm{Ruhge\_Kutt\_4}(n, y0).$$

Строим графики точного решения и приближенного, рассчитанного методом Рунге – Кутта четвертого порядка точности (Рис. 5.3).

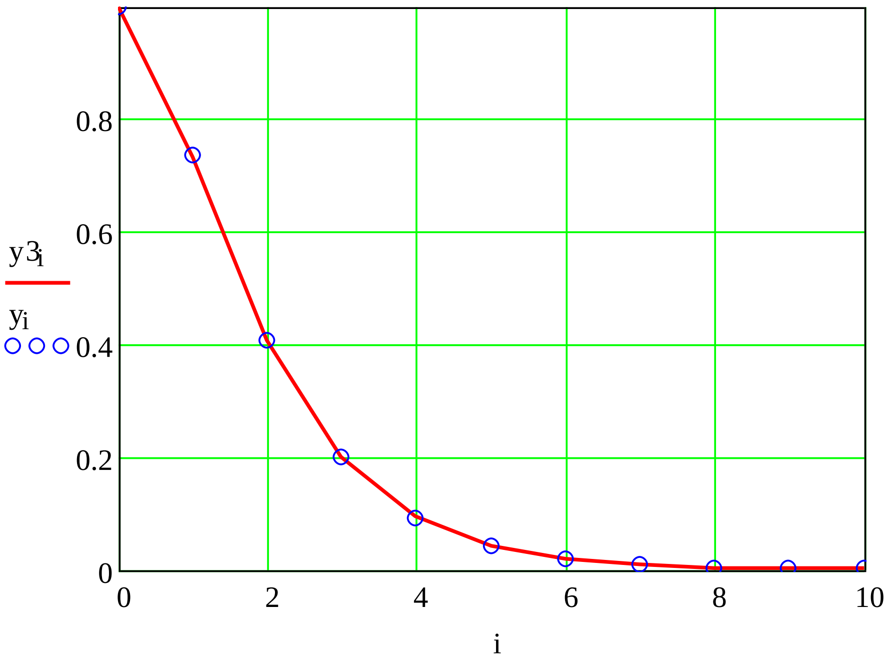

Рис. 5.3. Графики точного решения и приближенного, рассчитанного методом Рунге – Кутта четвертого порядка точности

Выводим значение погрешности

$$|y - y3| = 5{,}468 \times 10^{-3}.$$

5.4. Варианты заданий к лабораторной работе №5

Решите задачу Коши, используя методы Эйлера, Рунге – Кутта второго и четвертого порядков точности.

1) $y' = -2y + e^{-t} + \cos(2t), \quad y(0) = 3;$
2) $y' = -y/3 + 2 + \sin(t), \quad y(0) = 2;$
3) $y' = -3y - 2t + \sin(2t), \quad y(0) = 2;$
4) $y' = -y/2 + e^{-3t} + \cos(t), \quad y(0) = 4;$
5) $y' = -y + e^{-t} + e^{2t}, \quad y(0) = 1;$
6) $y' = -2y + \cos(t) + e^{-t}, \quad y(0) = 3;$
7) $y' = -y + \sin(2t) + e^{-2t}, \quad y(0) = 1;$
8) $y' = -y/2 + \sin(2t) + e^{-t}, \quad y(0) = 2;$
9) $y' = -2y + \cos(t) + \sin(t), \quad y(0) = 3;$
10) $y' = -y + \cos(2t) + \sin(2t), \quad y(0) = 1.$

Содержание отчета

Отчет должен содержать:
- титульный лист;
- постановку задачи (согласно варианту);
- точное решение задачи;
- краткое описание методов решения задачи Коши;
- программную реализацию данных методов;
- выводы о проделанной работе.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие численные методы решения задачи Коши вам известны? Кратко опишите каждый метод.
2. Запишите разностную схему решения задачи Коши на основе метода Эйлера.
3. Запишите разностную схему решения задачи Коши на основе метода Рунге – Кутта 2 порядка.
4. Приведите пример решения задачи Коши при помощи метода Эйлера.
5. Приведите пример решения задачи Коши при помощи метода Рунге – Кутта 2 порядка.
6. Какова погрешность метода Эйлера?

7. Определите погрешность решения задачи Коши методом Эйлера на конкретном примере.

8. Определите погрешность решения задачи Коши методом Рунге – Кутта 2 порядка на конкретном примере.

9. От чего зависит погрешность численного решения задачи Коши?

10*. Приведите пример решения системы дифференциальных уравнений.