

# Rapport de Laboratoire - Control Theory

Nicolas Jurquet (21211) - Xavier Allaud(21151)

March 2024

## 1 Introduction

Le but de ce rapport est d'expliquer le processus de conception d'un régulateur PID avec une boucle de rétroaction en utilisant un kit TCLab. Pour se faire, il faudra identifier la dynamique d'entrée/sortie du système afin de construire un modèle de celui-ci. Sur base de ce modèle, il sera possible d'implémenter un PID discret qu'il faudra ensuite optimiser puis tester en conditions réelles.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Identification de la Dynamique</b>	<b>2</b>
2.1	Processus $P(s)$ . . . . .	2
2.1.1	Approximation graphique du modèle pour MV . . . . .	3
2.1.2	Modèle de Borda (FOPDT) . . . . .	3
2.1.3	Modèle de van der Grinten (SOPDT) . . . . .	4
2.1.4	Modèle de Strejc . . . . .	4
2.1.5	Comparaison des modèles d'approximation . . . . .	5
2.2	Perturbation $D(s)$ . . . . .	5
<b>A</b>	<b>Méthode graphique pour l'obtention des paramètres d'approximation</b>	<b>6</b>

## 2 Identification de la Dynamique

Pour que ce qui va être présenté par la suite ait du sens, il est nécessaire de savoir dans quelles conditions nous travaillons.

Nos réponses sont basées sur un point de fonctionnement de  $MV_0 = 50\%$ ,  $DV_0 = 50\%$  et une sortie  $PV_0 = 49.3^\circ\text{C}$ . C'est à dire que la température obtenue sur  $PV$  lorsqu'une puissance de chauffage de 50% est appliquée sur les 2 chauffages est de  $49.3^\circ\text{C}$  en régime établi.

### 2.1 Processus $P(s)$

Appliquons un step  $X(s) = \frac{1}{s}$  autour du point de fonctionnement (de 30% à 70%) lorsque le système se situe en régime établi pour analyser la "step response"  $Y(s) = \frac{P(s)}{s}$ .

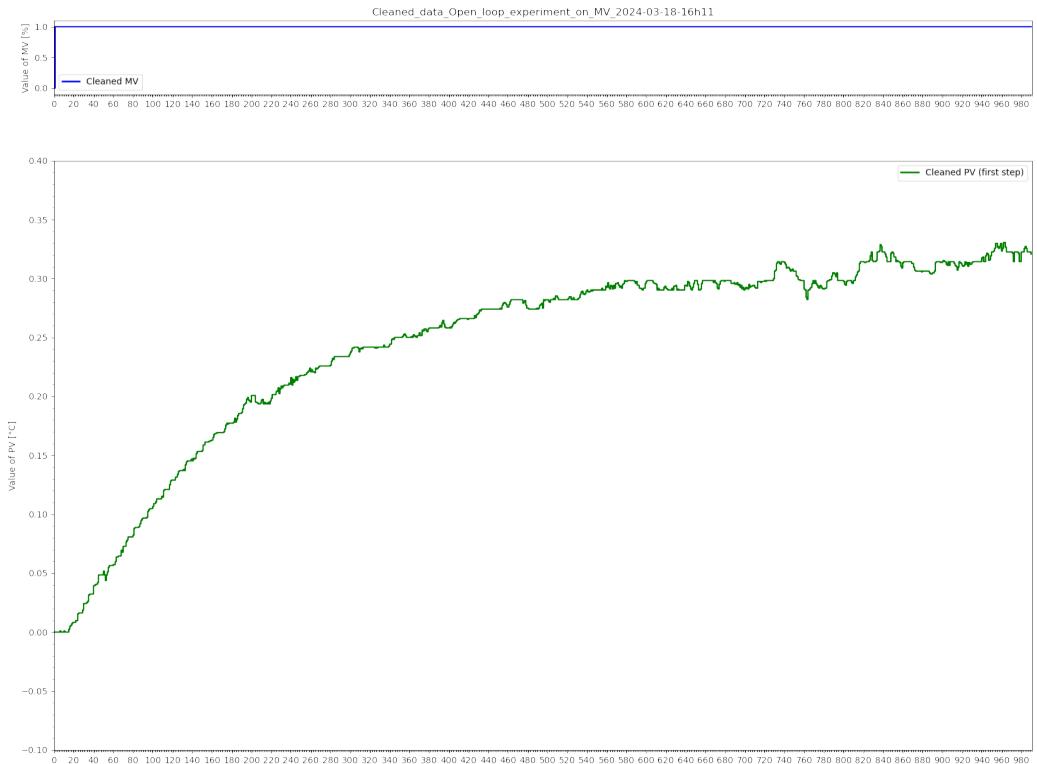


FIGURE 1 – Réponse à un step sur MV

- Le graphique (1) obtenu permet (presque) d'affirmer que le processus est un système du 1<sup>e</sup> ordre avec un délai. L'allure de la "step response" est donc  $y(t) = K_p(1 - e^{-t/T})u(t)$ .
- Le but est maintenant d'obtenir les paramètres de la fonction de transfert du processus  $P(s)$  ce qui permettra de prédire  $Y(s)$  pour n'importe quel  $X(s)$  puisque  $Y(s) = P(s) \cdot X(s)$  ou  $PV = P(s) \cdot MV$ . Pour se faire, on utilise une fonction de minimisation d'erreur :

```
minimize(FOPDT_cost,
    p0,args=(MVm,PVm,Ts,
    (fig,ax1,11,12)),
    method='Powell',
    bounds=bnbs,
    options={'maxiter': maxIter})
```

Où  $p0$  contient les points de départ d'optimisation pour les paramètres  $K_p$ ,  $T$  et  $\theta$ . La fonction de minimisation va faire varier ces paramètres afin que la fonction de coût,  $FOPDT\_cost$ , renvoie la

valeur la plus basse possible.

FOPDT\_cost :

```

for i in range(0,len(MV)):
    t.append(i*Ts) #calcule le temps correspondant au point actuel
    ↵ de la donnée en se basant sur la période de sample
    MVTemp.append(MV[i]) #itère sur la longueur du vecteur d'entrée

Delay_RT(MVTemp,theta,Ts,MVDelay) #application d'un délai à MV
FO_RT(MVDelay,Kp,T,Ts,PVSim) #On applique un délai au premier ordre via le
    ↵ délai appliqué à MV puis on calcule un point du vecteur de sortie à
    ↵ chaque itération
objective = objective + (PV[i] - PVSim[i])**2 #on ajoute le carré de
    ↵ l'erreur actuel à la somme des carré des erreurs précédentes

```

Le fichier `Identification.ipynb` permet de trouver les valeurs estimées de  $K_P$ ,  $T_{1p}$ ,  $T_{2p}$  et  $\theta_p$  qui vont par après nous servir à modéliser le Processus et la Perturbation de façon optimale, ainsi que les différentes méthodes d'approximations des modèles du 1<sup>e</sup> et 2<sup>e</sup> ordre.

Pour notre réponse du Processus, nous obtenons les valeurs suivantes pour un modèle du 2<sup>e</sup> ordre :

$$\begin{aligned} K_P &= 0.308 \\ T_{1p} &= 183.819 \text{ s} \\ T_{2p} &= 3.292 \cdot 10^{-12} \text{ s} \\ \theta_p &= 20.015 \text{ s} \end{aligned}$$

Et les valeurs suivantes pour un modèle du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\begin{aligned} K_P &= 0.314 \\ T_p &= 206.264 \text{ s} \\ \theta_p &= 12.999 \text{ s} \end{aligned}$$

On remarque directement que  $T_{2p}$  est négligeable par rapport à  $T_{1p}$ , et permet donc de confirmer que le processus agit comme un système du 1<sup>er</sup> ordre avec délai :

$$\hat{P}(s) = \frac{K_P e^{-\theta_p s}}{(T_{1p}s + 1)(T_{2p}s + 1)} \approx \frac{K_P e^{-\theta_p s}}{T_{1p}s + 1} \quad (1)$$

### 2.1.1 Approximation graphique du modèle pour MV

Il est également possible de déterminer la dynamique du Processus graphiquement sur base de la Figure 1. Nous obtenons les paramètres  $K_P$ ,  $T_u$ ,  $T_g$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  et  $a$  dont la détermination est expliquée en Annexe A :

$$\begin{aligned} K_P &= 0.305 \\ T_u &= 17 \text{ s} \\ T_g &= 211 \text{ s} \\ t_1 &= 95 \text{ s} \\ t_2 &= 133 \text{ s} \\ a &= 0.1 \end{aligned}$$

Ces paramètres serviront à utiliser les méthodes classiques d'approximation du modèle, à savoir le modèle de **Broida**, **Van Der Grinten** et **Strejc**.

### 2.1.2 Modèle de Broida (FOPDT)

Ce modèle consiste à approximer le Processus par un système du 1<sup>er</sup> ordre avec délai de la forme :

$$P_B(s) = \frac{K_P e^{-\theta s}}{Ts + 1}$$

Le 1<sup>er</sup> modèle de Broida est obtenu en définissant la constante de temps  $T$  et le délai  $\theta$  comme suit :

$$T = T_g = 211 \text{ s} \quad \text{et} \quad \theta = T_u = 17 \text{ s}$$

Le 2<sup>e</sup> modèle de Broida est obtenu en définissant la constante de temps  $T$  et le délai  $\theta$  comme suit :

$$T = 5.5(t_2 - t_1) = 209 \text{ s} \quad \text{et} \quad \theta = 2.8t_1 - 1.8t_2 = 26.60 \text{ s}$$

### 2.1.3 Modèle de van der Grinten (SOPDT)

Ce modèle consiste à approximer le Processus par un système du 2<sup>e</sup> ordre avec délai de la forme :

$$P_{vdG}(s) = \frac{K_P e^{-\theta s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$T_1$ ,  $T_2$  et  $\theta$  sont obtenus comme suit :

$$\begin{aligned} T_1 &= T_g \frac{3ae - 1}{1 + ae} = -30.61 \text{ s} \\ T_2 &= T_g \frac{1 - ae}{1 + ae} = 120.81 \text{ s} \\ \theta &= T_u - \frac{T_1 T_2}{T_1 + 3T_2} = 28.15 \text{ s} \end{aligned}$$

Nous constatons que la 1<sup>e</sup> constante de temps  $T_1$  est négative, ce qui est physiquement impossible ! Il n'est cependant pas étonnant d'obtenir ce résultat étant donné que le Processus est un système du 1<sup>er</sup> ordre avec délai. Un modèle du 2<sup>e</sup> ordre tel que van der Grinten n'est donc pas adapté pour approximer notre Processus et ne sera donc pas représenté par après.

### 2.1.4 Modèle de Strejc

Ce modèle consiste à approximer le Processus par un système du  $n^e$  ordre avec des pôles et constantes de temps identiques de la forme :

$$P_S(s) = \frac{K_P e^{-\theta s}}{(Ts + 1)^n}$$

L'ordre  $n$  est obtenu avec la Table 1 :

Order $n$	$T_{u_{th}}/T_g$	$T_g/T$
	$a_n$	$b_n$
1	0.00	1.00
2	0.10	2.72
3	0.22	3.69
4	0.32	4.46
5	0.41	5.12
6	0.49	5.70
7	0.57	6.23

TABLE 1 – Ordre  $n$  du modèle de Strejc en fonction de  $a_n$  et  $b_n$

Nous avons que  $T_u/T_g = 0.08$  et donc ce situe à  $a_1 \leq 0.08 < a_2$ , ce qui nous donne un ordre  $n = 1$ .  $a_n$  vaut alors 0.00 et  $b_n$  vaut 1.00. La constante de temps  $T$  et le délai  $\theta$  vont être au final trouvés directement avec les valeurs de  $T_g$  et  $T_u$  comme le modèle de Broida :

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_g}{b_n} = T_g = 211 \text{ s} \\ \theta &= T_u - a_n T_g = T_u = 17 \text{ s} \end{aligned}$$

### 2.1.5 Comparaison des modèles d'approximation

## 2.2 Perturbation D(s)

Nous appliquons maintenant un step sur DV pour observer la réponse du système à une perturbation.

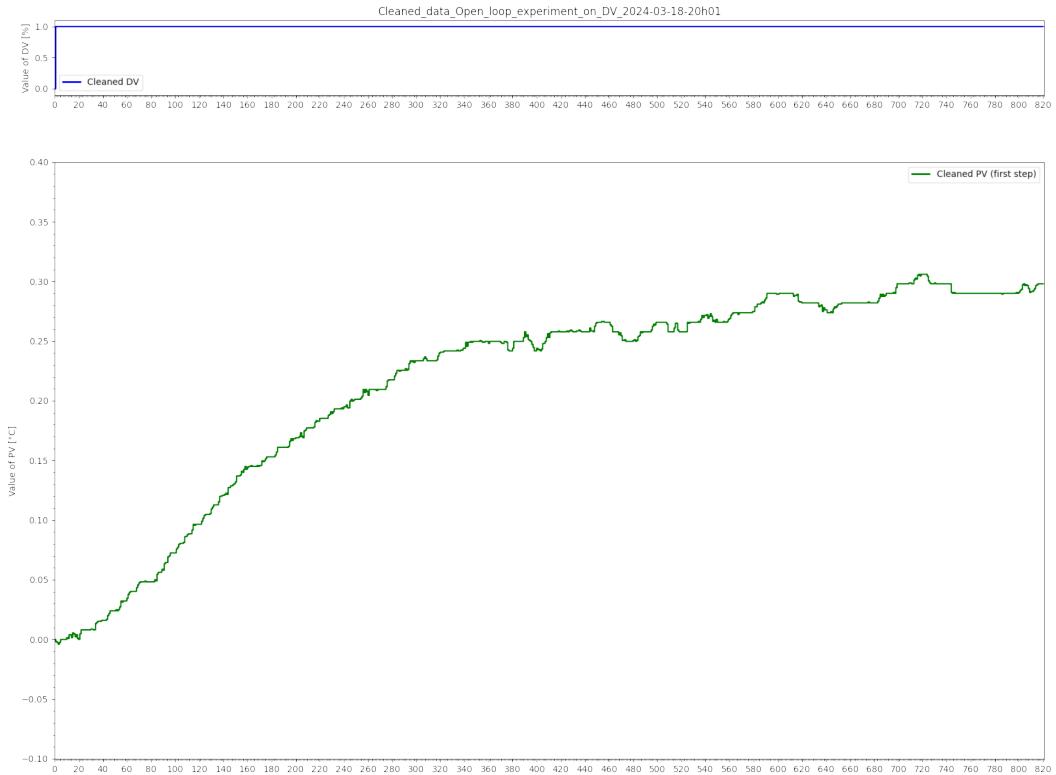


FIGURE 2 – Réponse à un step sur DV

Étant donné l'allure du graphe (2), et en particulier le point d'inflexion aux alentours de 80 secondes, nous pouvons estimer que la perturbation se comporte comme un système du 2<sup>e</sup> ordre avec délai de la forme :

$$\hat{D}(s) = \frac{K_D e^{-\theta_d s}}{(T_{1d}s + 1)(T_{2d}s + 1)} \quad (2)$$

En effet, nous obtenons grâce au fichier `Identification.ipynb`, les valeurs suivantes pour un modèle du 2<sup>e</sup> ordre :

$$\begin{aligned} K_D &= 0.295 \\ T_{1d} &= 182.255 \text{ s} \\ T_{2d} &= 13.184 \text{ s} \\ \theta_d &= 28.999 \text{ s} \end{aligned}$$

Et les valeurs suivantes pour un modèle du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\begin{aligned} K_D &= 0.296 \\ T_d &= 184.880 \text{ s} \\ \theta_d &= 40.136 \text{ s} \end{aligned}$$

Les valeurs obtenues pour  $T_{1d}$  et  $T_{2d}$  nous permettent de confirmer que la perturbation est un système du 2<sup>e</sup> ordre.

## A Méthode graphique pour l'obtention des paramètres d'approximation

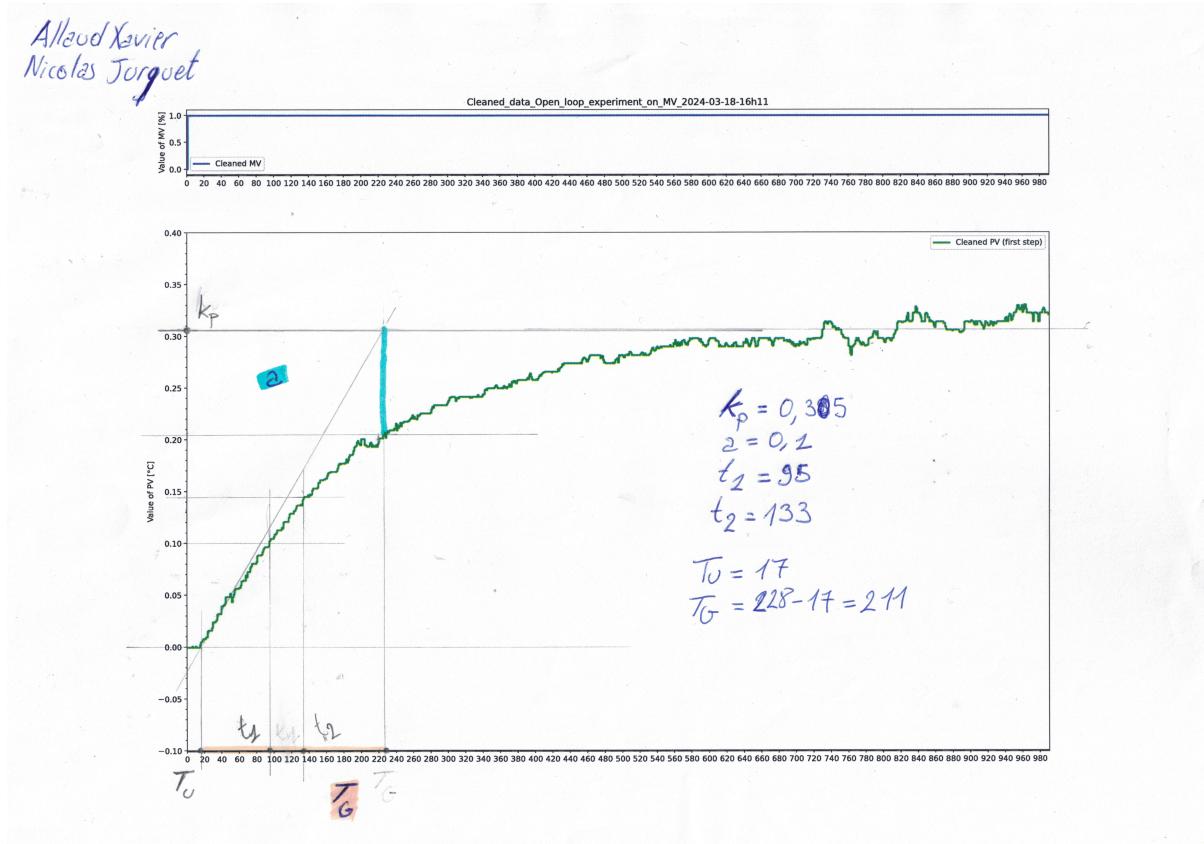


FIGURE 3 – Obtention des paramètres d'approximation pour un step sur MV