

Rapport de Laboratoire - Control Theory

Nicolas Jurquet (21211) - Xavier Allaud(21151)

March 2024

1 Introduction

Le but de ce rapport est d'expliquer le processus de conception d'un régulateur PID avec une boucle de rétroaction en utilisant un kit TCLab. Pour se faire, il faudra identifier la dynamique d'entrée/sortie du système afin de construire un modèle de celui-ci. Sur base de ce modèle, il sera possible d'implémenter un PID discret qu'il faudra ensuite optimiser puis tester en conditions réelles.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction | 1 |
| 2 | Identification de la Dynamique | 3 |
| 2.1 | Processus P(s) | 3 |
| 2.1.1 | Approximation graphique du modèle pour MV | 4 |
| 2.1.2 | Modèle de Borda (FOPDT) | 4 |
| 2.1.3 | Modèle de van der Grinten (SOPDT) | 5 |
| 2.1.4 | Modèle de Strejc | 5 |
| 2.1.5 | Comparaison des modèles d'approximation | 6 |
| 2.2 | Perturbation D(s) | 7 |
| 2.2.1 | Comparaison des modèles avec paramètres optimaux | 8 |
| 3 | Lead-Lag | 10 |
| 4 | Régulateur PID | 12 |
| 4.1 | Introduction | 12 |
| 4.2 | Optimisation par la méthode IMC | 12 |
| 4.3 | Réponse indicielle du régulateur PID | 13 |
| 4.3.1 | Influence de K_C | 14 |
| 4.3.2 | Influence de T_D et T_I | 14 |
| 4.3.3 | Influence de α | 15 |
| 4.4 | FeedForward | 15 |
| 4.4.1 | Délai | 16 |
| 4.4.2 | Gain et Lead-Lag | 16 |
| 5 | Simulation du système | 18 |
| 5.1 | Réponse à une perturbation DV en mode manuel sans FF | 18 |
| 5.2 | Réponse à une perturbation DV en mode manuel avec FF | 19 |
| 5.3 | Réponse à une perturbation DV & changement de consigne SP en mode automatique sans FF | 19 |
| 5.4 | Réponse à une perturbation DV & changement de consigne SP en mode automatique avec FF | 20 |
| 5.5 | Influence de α et γ | 20 |
| 6 | Données Expérimentales | 22 |
| 6.1 | Scénario 1 | 23 |
| 6.2 | Scénario 2 | 24 |

| | |
|--|-----------|
| 6.3 Scénario 3 | 25 |
| A Méthode graphique pour l'obtention des paramètres d'approximation | 26 |

2 Identification de la Dynamique

Pour ce qui va être présenté par la suite ait du sens, il est nécessaire de savoir dans quelles conditions nous travaillons.

Nos réponses sont basées sur un point de fonctionnement de $MV_0 = 50\%$, $DV_0 = 50\%$ et une sortie $PV_0 = 49.3^\circ\text{C}$. C'est à dire que la température obtenue sur PV lorsqu'une puissance de chauffage de 50% est appliquée sur les 2 chauffages est de 49.3°C en régime établi.

2.1 Processus $P(s)$

Appliquons un step $X(s) = \frac{1}{s}$ autour du point de fonctionnement (de 30% à 70%) lorsque le système se situe en régime établi pour analyser la "step response" $Y(s) = \frac{P(s)}{s}$.

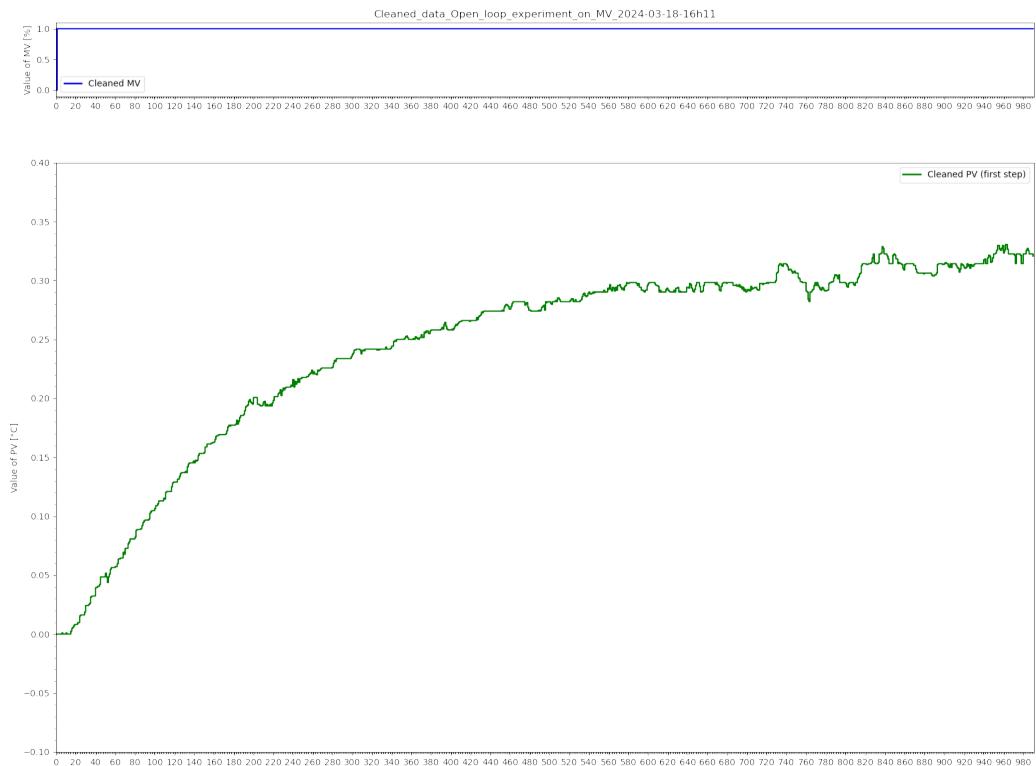


FIGURE 1 – Réponse à un step sur MV

- Le graphique (Figure 1) obtenu permet (presque) d'affirmer que le processus est un système du 1^e ordre avec un délai. L'allure de la "step response" est donc $y(t) = K_p(1 - e^{-t/T})u(t)$.
- Le but est maintenant d'obtenir les paramètres de la fonction de transfert du processus $P(s)$ ce qui permettra de prédire $Y(s)$ pour n'importe quel $X(s)$ puisque $Y(s) = P(s) \cdot X(s)$ ou $PV = P(s) \cdot MV$. Pour se faire, on utilise une fonction de minimisation d'erreur :

```
minimize(FOPDT_cost,
    p0,args=(MVm,PVm,Ts,
    (fig,ax1,l1,l2)),
    method='Powell',
    bounds=bnbs,
    options={'maxiter': maxIter})
```

Où $p0$ contient les points de départ d'optimisation pour les paramètres K_p , T et θ . La fonction de minimisation va faire varier ces paramètres afin que la fonction de coût, $FOPDT_cost$, renvoie la

valeur la plus basse possible.

FOPDT_cost :

```

for i in range(0,len(MV)):
    t.append(i*Ts) #calcule le temps correspondant au point actuel
    ↵ de la donnée en se basant sur la période de sample
    MVTTemp.append(MV[i]) #itère sur la longueur du vecteur d'entrée

Delay_RT(MVTTemp,theta,Ts,MVDelay) #application d'un délai à MV
FO_RT(MVDelay,Kp,T,Ts,PVSim) #On applique un délai au premier ordre via le
    ↵ délai appliqué à MV puis on calcule un point du vecteur de sortie à
    ↵ chaque itération
objective = objective + (PV[i] - PVSim[i])**2 #on ajoute le carré de
    ↵ l'erreur actuel à la somme des carré des erreurs précédentes

```

Le fichier `Identification.ipynb` permet de trouver les valeurs estimées de K_P , T_{1p} , T_{2p} et θ_p qui vont par après nous servir à modéliser le Processus et la Perturbation de façon optimale, ainsi que les différentes méthodes d'approximations des modèles du 1^e et 2^e ordre.

Pour notre réponse du Processus, nous obtenons les valeurs suivantes pour un modèle du 2^e ordre :

$$\begin{aligned} K_P &= 0.308 \\ T_{1p} &= 183.819 \text{ s} \\ T_{2p} &= 3.292 \cdot 10^{-12} \text{ s} \\ \theta_p &= 20.015 \text{ s} \end{aligned}$$

Et les valeurs suivantes pour un modèle du 1^{er} ordre :

$$\begin{aligned} K_P &= 0.314 \\ T_p &= 206.264 \text{ s} \\ \theta_p &= 12.999 \text{ s} \end{aligned}$$

On remarque directement que T_{2p} est négligeable par rapport à T_{1p} , et permet donc de confirmer que le processus agit comme un système du 1^{er} ordre avec délai :

$$\hat{P}(s) = \frac{K_P e^{-\theta_p s}}{(T_{1p}s + 1)(T_{2p}s + 1)} \approx \frac{K_P e^{-\theta_p s}}{T_{1p}s + 1} \quad (1)$$

2.1.1 Approximation graphique du modèle pour MV

Il est également possible de déterminer la dynamique du Processus graphiquement sur base de la Figure 1. Nous obtenons les paramètres K_P , T_u , T_g , t_1 , t_2 et a dont la détermination est expliquée en Annexe A :

$$\begin{aligned} K_P &= 0.305 \\ T_u &= 17 \text{ s} \\ T_g &= 211 \text{ s} \\ t_1 &= 95 \text{ s} \\ t_2 &= 133 \text{ s} \\ a &= 0.1 \end{aligned}$$

Ces paramètres serviront à utiliser les méthodes classiques d'approximation du modèle, à savoir le modèle de **Broida**, **Van Der Grinten** et **Strejc**.

2.1.2 Modèle de Broida (FOPDT)

Ce modèle consiste à approximer le Processus par un système du 1^{er} ordre avec délai de la forme :

$$P_B(s) = \frac{K_P e^{-\theta s}}{Ts + 1}$$

Le 1^{er} modèle de Broida est obtenu en définissant la constante de temps T et le délai θ comme suit :

$$T = T_g = 211 \text{ s} \quad \text{et} \quad \theta = T_u = 17 \text{ s}$$

Le 2^e modèle de Broida est obtenu en définissant la constante de temps T et le délai θ comme suit :

$$T = 5.5(t_2 - t_1) = 209 \text{ s} \quad \text{et} \quad \theta = 2.8t_1 - 1.8t_2 = 26.60 \text{ s}$$

2.1.3 Modèle de van der Grinten (SOPDT)

Ce modèle consiste à approximer le Processus par un système du 2^e ordre avec délai de la forme :

$$P_{vdG}(s) = \frac{K_P e^{-\theta s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

T_1 , T_2 et θ sont obtenus comme suit :

$$\begin{aligned} T_1 &= T_g \frac{3ae - 1}{1 + ae} = -30.61 \text{ s} \\ T_2 &= T_g \frac{1 - ae}{1 + ae} = 120.81 \text{ s} \\ \theta &= T_u - \frac{T_1 T_2}{T_1 + 3T_2} = 28.15 \text{ s} \end{aligned}$$

Nous constatons que la 1^e constante de temps T_1 est négative, ce qui est physiquement impossible ! Il n'est cependant pas étonnant d'obtenir ce résultat étant donné que le Processus est un système du 1^{er} ordre avec délai. Un modèle du 2^e ordre tel que van der Grinten n'est donc pas adapté pour approximer notre Processus et ne sera donc pas représenté par après.

2.1.4 Modèle de Strejc

Ce modèle consiste à approximer le Processus par un système du n^{e} ordre avec des pôles et constantes de temps identiques de la forme :

$$P_S(s) = \frac{K_P e^{-\theta s}}{(Ts + 1)^n}$$

L'ordre n est obtenu avec la Table 1 :

| Order n | $T_{u_{th}}/T_g$ | T_g/T |
|-----------|------------------|---------|
| | a_n | b_n |
| 1 | 0.00 | 1.00 |
| 2 | 0.10 | 2.72 |
| 3 | 0.22 | 3.69 |
| 4 | 0.32 | 4.46 |
| 5 | 0.41 | 5.12 |
| 6 | 0.49 | 5.70 |
| 7 | 0.57 | 6.23 |

TABLE 1 – Ordre n du modèle de Strejc en fonction de a_n et b_n

Nous avons que $T_u/T_g = 0.08$ et donc ce situe à $a_1 \leq 0.08 < a_2$, ce qui nous donne un ordre $n = 1$. a_n vaut alors 0.00 et b_n vaut 1.00. La constante de temps T et le délai θ vont être au final trouvés directement avec les valeurs de T_g et T_u comme le modèle de Broida :

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_g}{b_n} = T_g = 211 \text{ s} \\ \theta &= T_u - a_n T_g = T_u = 17 \text{ s} \end{aligned}$$

2.1.5 Comparaison des modèles d'approximation

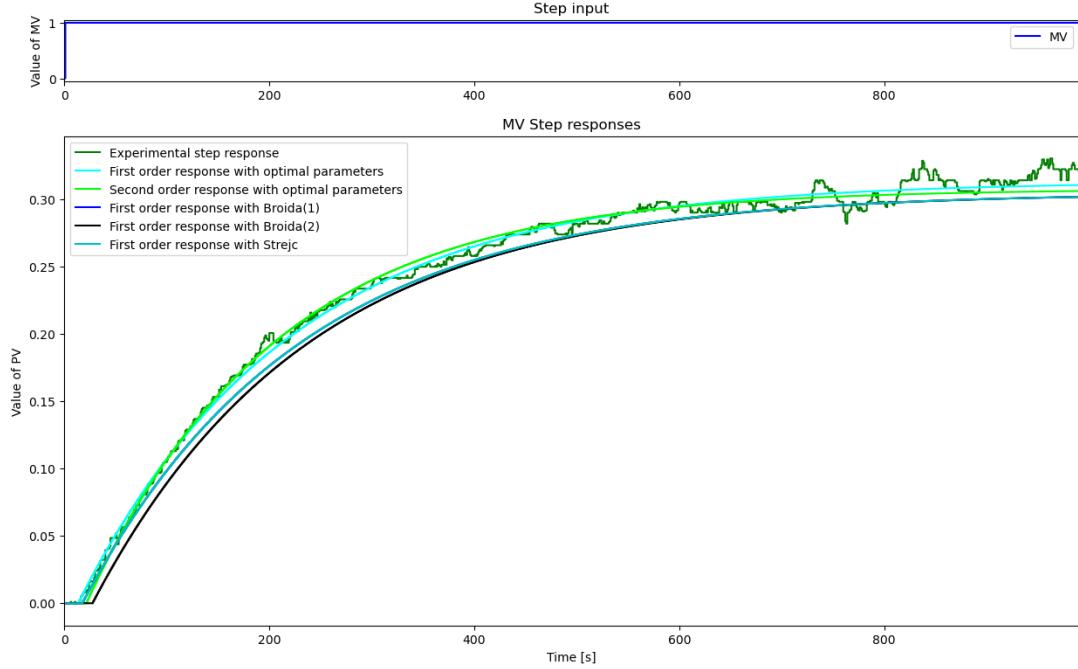


FIGURE 2 – Approximations de la réponse temporelle d'un step sur MV

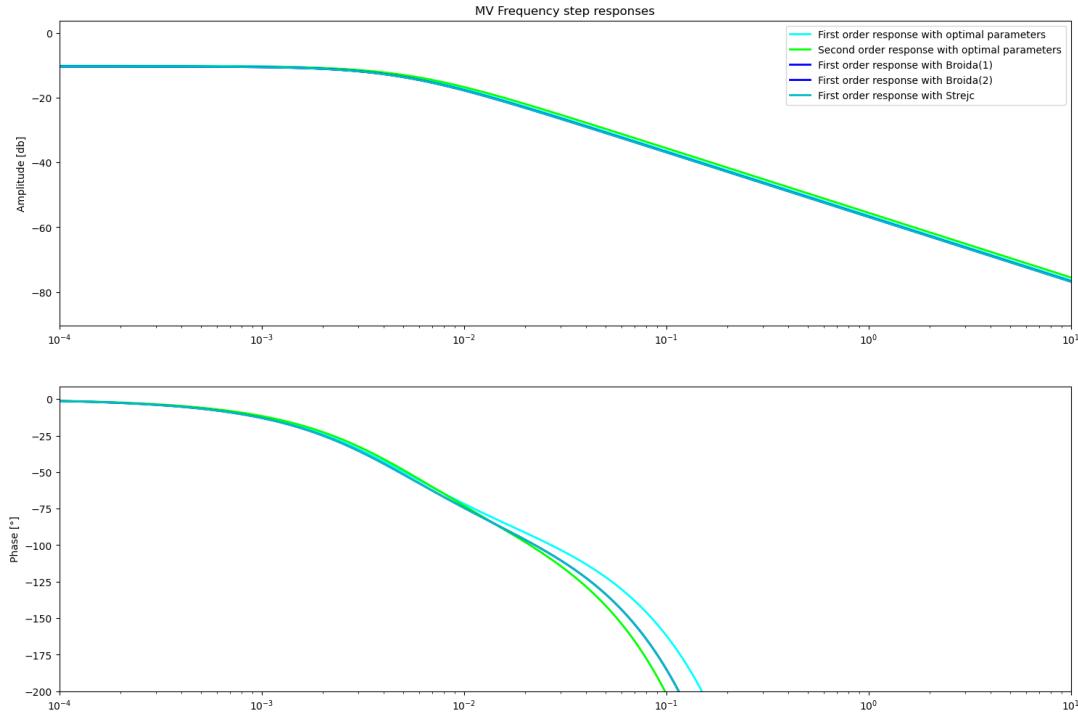


FIGURE 3 – Approximations de la réponse fréquentielle d'un step sur MV

La Figure 2 montre les différentes réponses d'un step sur MV pour chacun des modèles décrits au-dessus (à l'exception du modèle de van der Grinten). Elles représentent toutes bien une réponse du 1^e ordre avec délai, et restent assez proches les unes des autres. Les modèles commencent tous avec un délai similaire et terminent en régime établi à environ le même gain statique K_P . Cependant, on distingue tout de même les modèles avec paramètres optimaux des modèles graphiques.

Les paramètres optimaux ont été trouvés par un algorithme de minimisation de l'erreur, tandis que les paramètres graphiques ont été trouvés par une méthode graphique dont la précision est à prendre avec recul.

La Figure 3 nous permet ensuite de comparer les réponses fréquentielles des différents modèles. La première observation est que tous les modèles sont pratiquement superposés en terme de gain. En basses fréquences, ils atteignent bien un gain de $K_P = -10 \text{ dB} = 0.3$ et en hautes fréquences, ils subissent tous une pente de -20 dB/décade . On peut également confirmer que la réponse du 2^e ordre avec paramètres optimaux est bien en fait un 1^{er} ordre en raison d'une constante de temps négligeable.

En ce qui concerne la phase, on obtient bien une allure à laquelle on s'attendait pour un système du 1^{er} ordre avec délai, à savoir une phase qui tends vers l'infini (en négatif) lorsque la fréquence tends vers l'infini. Nous constatons que la courbe bleue (premier ordre optimal) et la courbe verte (second ordre optimal) dévient plus la fréquence augmente. Cela peut être expliqué par la différence entre les deux délais θ_p qui sont de 13 et 20 secondes respectivement. En effet, pour atteindre une même phase représentée par $\theta_s = j\theta\omega$, il faudra une fréquence plus élevée pour le modèle du 1^{er} ordre que pour le modèle du 2^e ordre.

2.2 Perturbation D(s)

Nous appliquons maintenant un step sur DV pour observer la réponse du système à une perturbation.

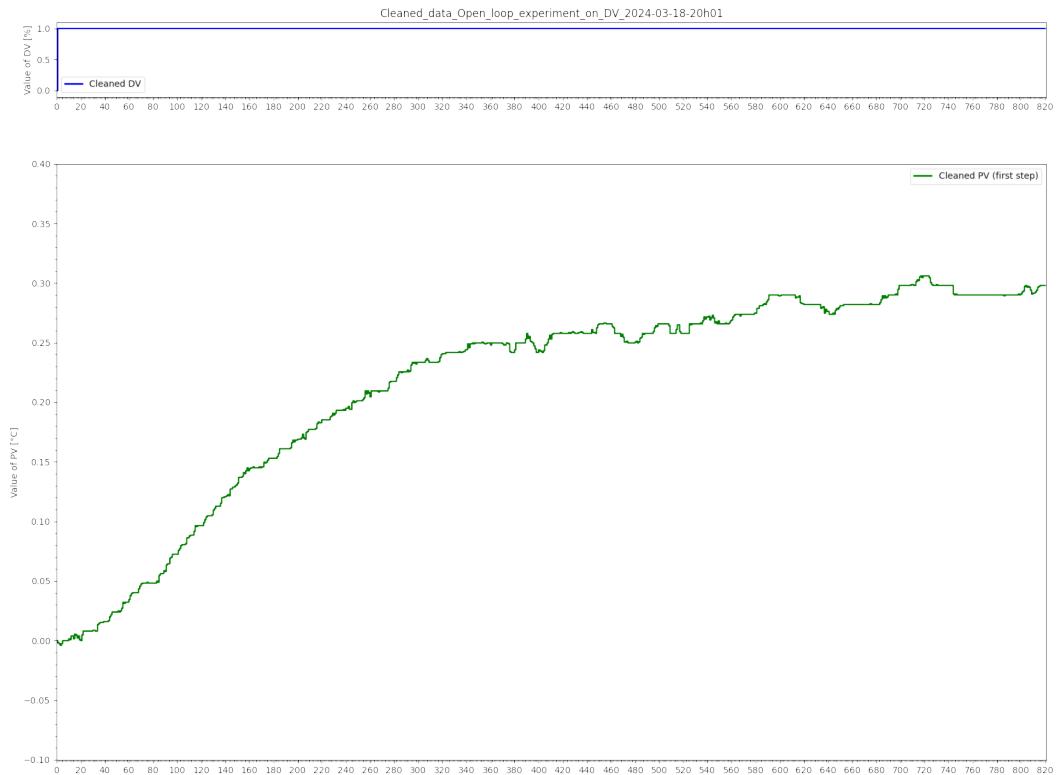


FIGURE 4 – Réponse à un step sur DV

Étant donné l'allure du graphe (Figure 4), et en particulier le point d'inflexion aux alentours de 80 secondes, nous pouvons estimer que la perturbation se comporte comme un système du 2^e ordre avec délai de la forme :

$$\hat{D}(s) = \frac{K_D e^{-\theta_d s}}{(T_{1d}s + 1)(T_{2d}s + 1)} \quad (2)$$

En effet, nous obtenons grâce au fichier `Identification.ipynb`, les valeurs optimales suivantes pour un

modèle du 2^e ordre :

$$\begin{aligned} K_D &= 0.295 \\ T_{1d} &= 182.255 \text{ s} \\ T_{2d} &= 13.184 \text{ s} \\ \theta_d &= 28.999 \text{ s} \end{aligned}$$

Et les valeurs suivantes pour un modèle du 1^{er} ordre :

$$\begin{aligned} K_D &= 0.296 \\ T_d &= 184.880 \text{ s} \\ \theta_d &= 40.136 \text{ s} \end{aligned}$$

Les valeurs obtenues pour T_{1d} et T_{2d} nous permettent de confirmer que la perturbation peut se comporter comme un système du 2^e ordre.

2.2.1 Comparaison des modèles avec paramètres optimaux

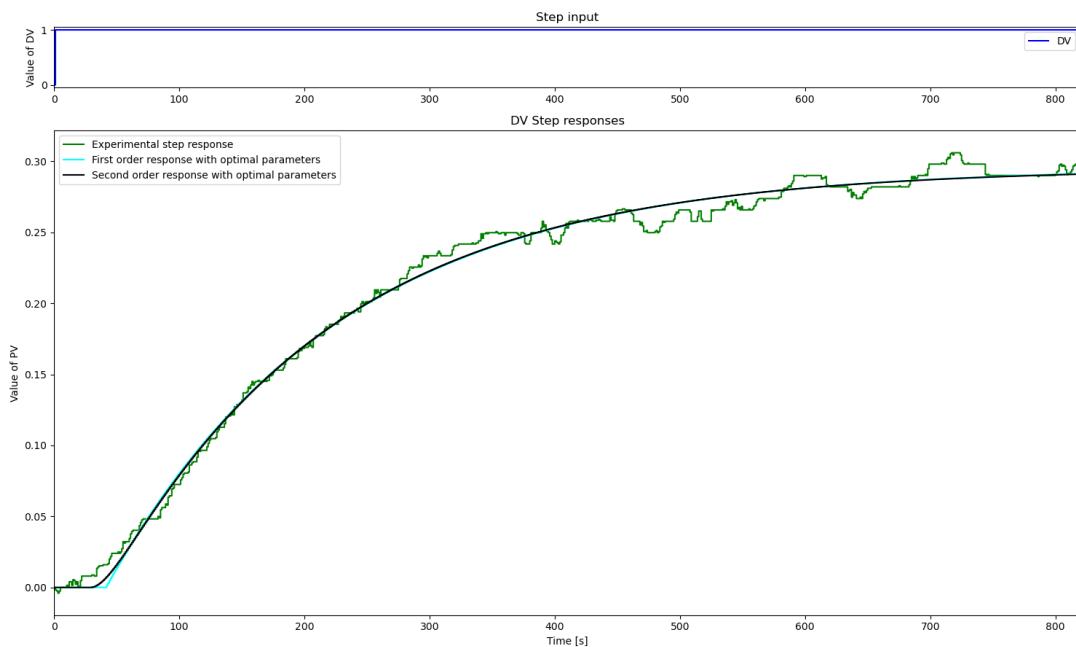


FIGURE 5 – Approximations de la réponse temporelle d'un step sur DV

Il est clair que la Figure 5 montre que les modèles du 1^{er} et 2^e ordre avec paramètres optimaux sont très proches l'un de l'autre. La seule différence réside en la décomposition du délai du 1^{er} ordre en un délai et une constante de temps T_{2d} pour le 2^e ordre. L'ajout de cette constante de temps permet de mieux modéliser la réponse expérimentale du système à une perturbation.

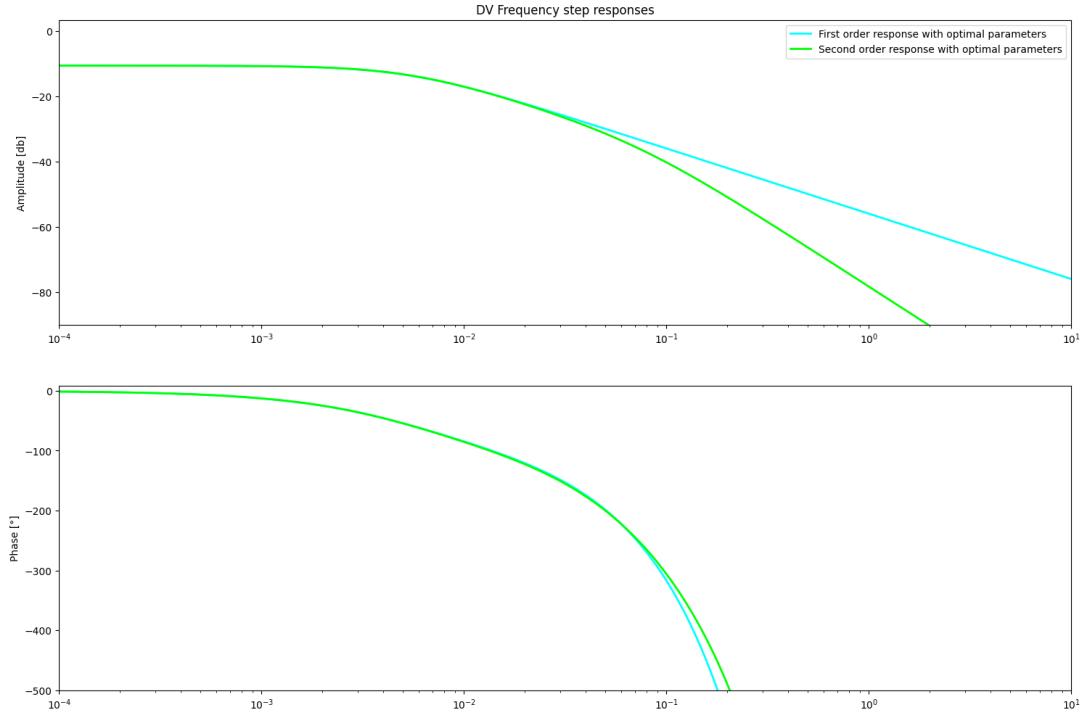


FIGURE 6 – Approximations de la réponse fréquentielle d'un step sur DV

Pouvant modéliser la perturbation comme un système du 1^{er} ou 2^e ordre avec délai, la réponse fréquentielle (Figure 6) est différente pour les deux modèles. À hautes fréquences, le modèle du premier ordre possède une pente de -20 dB/décade tandis que le modèle du second ordre possède une pente de -40 dB/décade . Le gain à basses fréquences vaut bien également $K_P = -10 \text{ dB} = 0.3$.

La phase, comme pour la partie Processus, tends vers l'infini (en négatif) lorsque la fréquence tends vers l'infini et dévie entre les deux modèles à hautes fréquences. Cela peut être expliqué par la différence entre les deux délais θ_p qui sont cette fois de 40 secondes pour le premier ordre et 29 secondes pour le second ordre. Le délai du second ordre étant cette fois plus petit, nous avons le comportement opposé : pour atteindre une même phase représenté par $\theta s = j\theta\omega$, il faudra une fréquence plus élevée pour le modèle du 2^e ordre que pour le modèle du 1^{er} ordre.

3 Lead-Lag

Un système Lead-Lag contient deux constantes de temps T_{LEAD} et T_{LAG} , respectivement au numérateur et au dénominateur. Il peut avoir un certain gain statique K_P et un délai θ .

$$P(s) = K_P \frac{T_{LEAD}s + 1}{T_{LAG}s + 1} e^{-\theta s} \quad (3)$$

La valeur initiale du gain peut se calculer, et fait apparaître 3 scénarios : $T_{LEAD} < 0$, $T_{LEAD} > 0$ avec $T_{LEAD} > T_{LAG}$, ainsi que $T_{LEAD} > 0$ avec $T_{LEAD} < T_{LAG}$.

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} K_P \frac{T_{LEAD}s + 1}{T_{LAG}s + 1} e^{-\theta s} = K_P \frac{T_{LEAD}}{T_{LAG}} \quad (4)$$

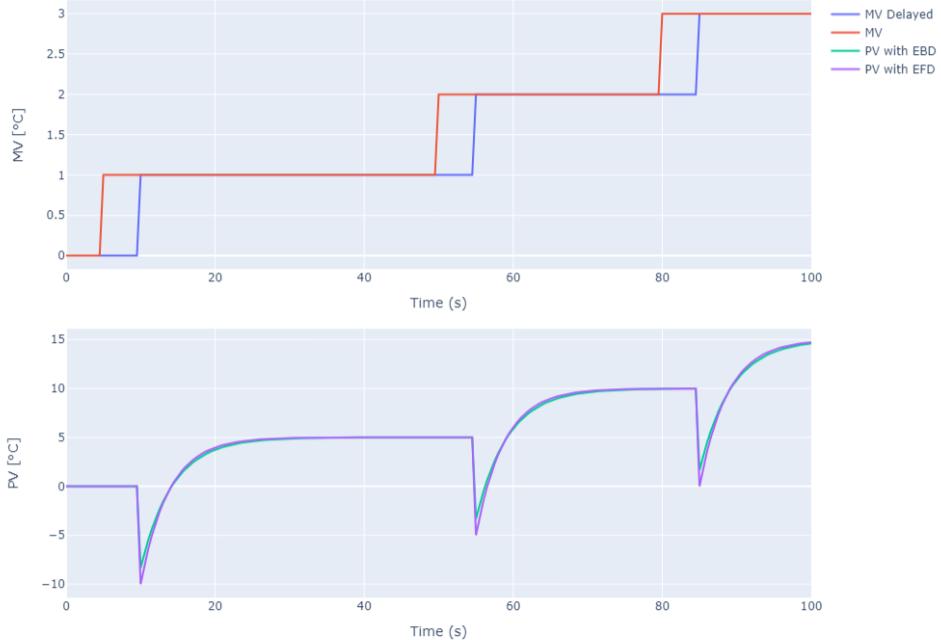


FIGURE 7 – Réponse d'un système Lead-Lag avec $T_{LEAD} < 0$

Nous pouvons ici observer sur la Figure 7 le pic négatif dû à la constante Lead négative. Il met ensuite un certain temps d'établissement pour atteindre le gain statique $K_P = 5$. Le délai est également visible en voyant que PV commence à agir après le délai appliqué sur MV . Nous voyons de plus, que les méthodes EBD et EFD sont similaires en termes d'approximation, mais afin d'éviter les problèmes de stabilité du EFD, il est préférable d'utiliser EBD.

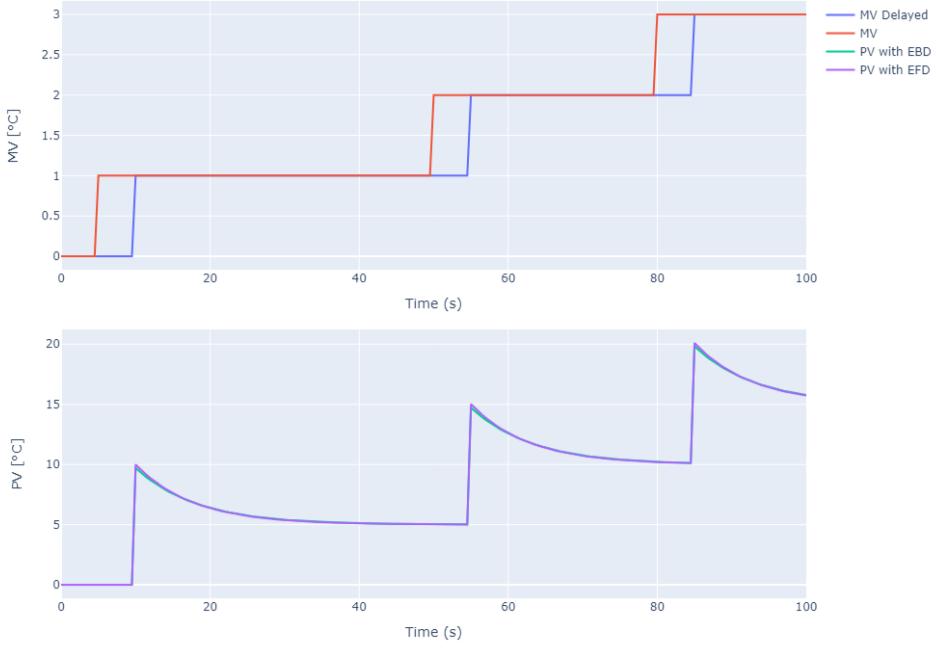


FIGURE 8 – Réponse d'un système Lead-Lag avec $T_{LEAD} > T_{LAG} > 0$

Dans le cas où $T_{LEAD} > T_{LAG}$, nous pouvons observer sur la Figure 8 que le pic est bien positif et à une valeur double du gain statique puisque $T_{LEAD} = 2T_{LAG}$.

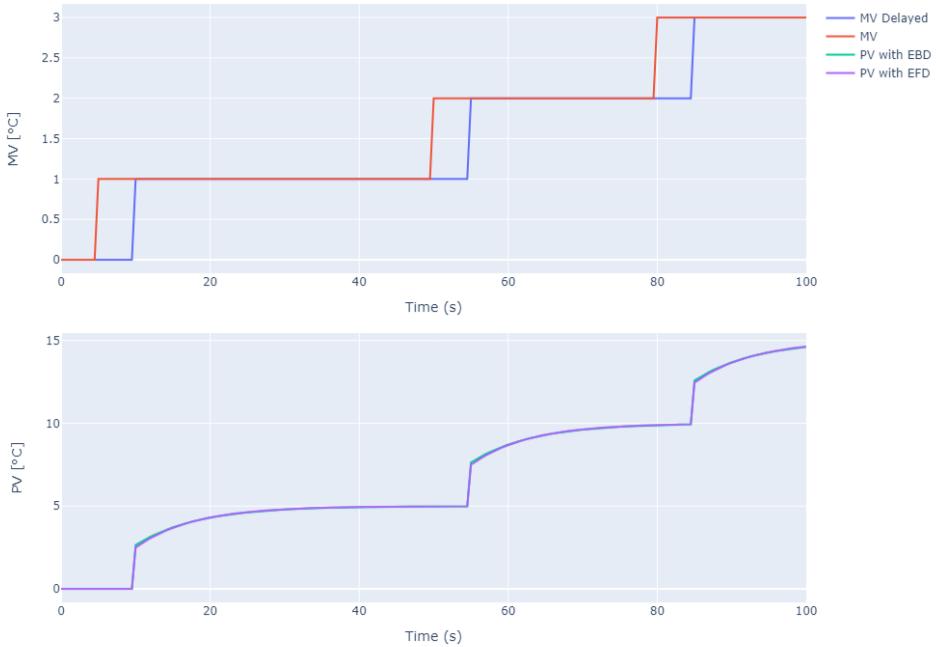


FIGURE 9 – Réponse d'un système Lead-Lag avec $T_{LAG} > T_{LEAD} > 0$

Enfin, la Figure 9 montre le cas où $T_{LEAD} < T_{LAG}$, où le gain initial est 2 fois plus petit que le gain statique puisque $T_{LEAD} = 1/2T_{LAG}$.

4 Régulateur PID

4.1 Introduction

Afin de réguler les variations en sortie PV , on utilise un régulateur PID, qui reprend la valeur de PV pour la soustraire à la consigne SP donnant donc l'erreur $E = SP - PV$ à corriger sur MV .

Pour rappel, un régulateur PID est composé de trois termes :

- Le terme proportionnel P qui est proportionnel à l'erreur E et vise une erreur statique nulle.
- Le terme intégral I qui est proportionnel à la somme des erreurs passées et donc accumule l'erreur.
- Le terme dérivé D qui est proportionnel à la dérivée de l'erreur et vise à corriger anticipativement l'erreur future.

La sortie du régulateur est alors donnée par :

$$MV = K_C \left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{\alpha T_D s + 1} \right) E \quad (5)$$

Dans le cadre du laboratoire, le régulateur utilise également le **Reset de l'Action Intégrale** et la **Saturation de l'Action Intégrale** venant adapter l'action intégrale en fonction de, respectivement, la valeur de MV en mode manuel, et la saturation de MV atteignant les limites MV_{MAX} / MV_{MIN} .

$$MV_I = MV_{Man} - MV_P - MV_D - MV_{FF}$$

et

$$MV_I = MV_{MAX} - MV_P - MV_D - MV_{FF}$$

Afin de pouvoir implémenter le régulateur PID, toutes les formules ont évidemment été discrétisées, et ce pour deux méthodes : Euler Backwards Difference (EBD) et Trapezoïdes (TRAP).

4.2 Optimisation par la méthode IMC

Il est important de choisir les paramètres K_C , T_I et T_D de façon à implémenter le bon régulateur pour notre processus. Une façon d'obtenir ces paramètres optimaux est de réaliser un step sur MV et d'observer la dynamique du Processus. Le modèle trouvé va nous permettre de calculer ces valeurs via des tables.

On utilisera la ligne I du tableau présent dans le cours, correspondant à un modèle du second ordre avec délai ($\tau_3 = 0$).

$$\begin{aligned} K_C &= \frac{1}{K_P} \frac{T_{1p} + T_{2p}}{T_{CLP} + \theta} \\ T_I &= T_{1p} + T_{2p} \\ T_D &= \frac{T_{1p} T_{2p}}{T_{1p} + T_{2p}} \end{aligned}$$

Il est bon de noter que nous aurions pu utiliser la ligne G du tableau (premier ordre avec délai) totalement équivalente étant donné que notre Processus est du premier ordre ($T_{2p} \approx 0$). La constante T_D et donc l'action Dérivée valant 0, le régulateur devient en fait un régulateur PI.

$$\begin{aligned} K_C &= \frac{1}{K_P} \frac{T_{1p}}{T_{CLP} + \theta} \\ T_I &= T_{1p} \\ T_D &= 0 \end{aligned}$$

La constante de temps en boucle fermée T_{CLP} est un certain ratio de la première constante de temps du processus T_{1p} définie par $T_{CLP} = \gamma T_{1p}$. L'influence de γ sera discutée en simulation de boucle fermée par après.

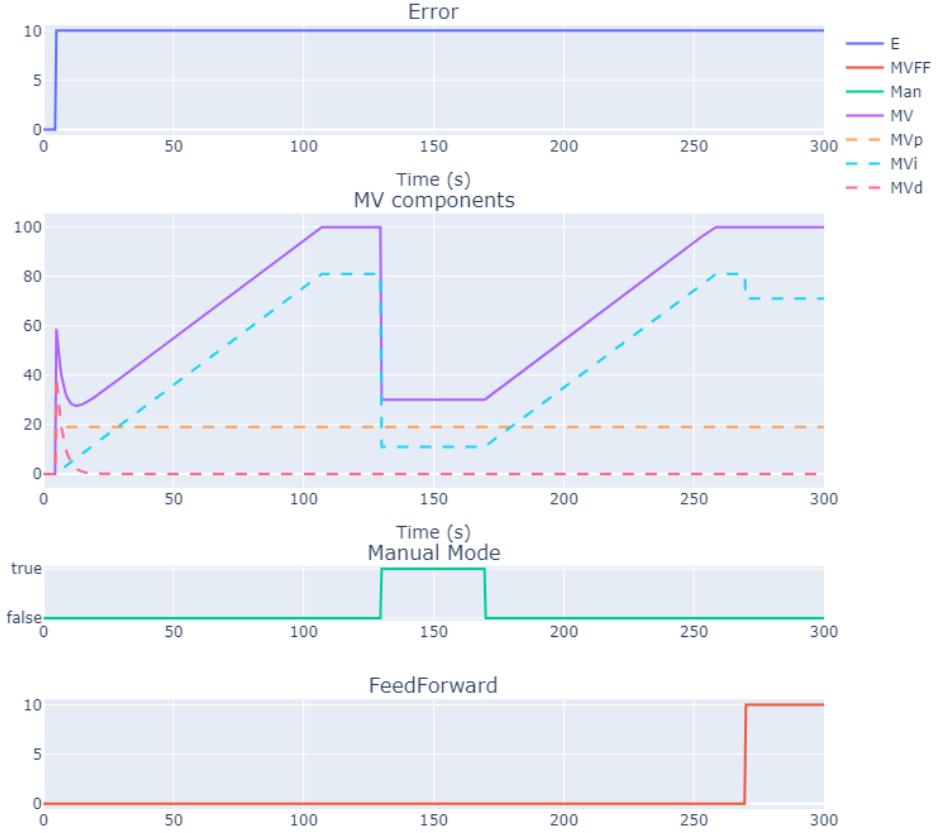


FIGURE 10 – Réponse indicielle du PID à un step sur E ($K_C = 1.9$, $T_D = 6$, $T_I = 24$, $\alpha = 0.4$)

4.3 Réponse indicielle du régulateur PID

Nous allons maintenant analyser la réponse du régulateur lorsqu'on applique une erreur E constante à son entrée. La figure 10 représente cette réponse. Premièrement, nous voyons tout au long du graphique que MV est la somme de ces actions $MV = MV_P + MV_I + MV_D + MV_{FF}$. A l'instant du step sur l'erreur, la composante proportionnelle MV_P augmente instantanément puisqu'elle est proportionnelle à l'erreur, la composante intégrale MV_I est encore nulle puisqu'elle n'a pas encore accumulé d'erreurs, et la composante dérivée MV_D est limitée à $1/\alpha$ puis diminue suivant sa constante de temps T_D .

Ensuite, lorsque nous sommes en mode automatique, l'action intégrale MV_I augmente linéairement puisque l'erreur est constante. Cela va continuer jusqu'à éventuellement atteindre les limites imposées sur la sortie MV , ici, une puissance de chauffe $MV_{MAX} = 100\%$ et $MV_{MIN} = 0\%$. Il est alors nécessaire de réaliser un Reset de l'Action Intégrale, c'est-à-dire, venir adapter la valeur de MV_I pour garder la sortie MV dans les limites.

$$MV_I = MV_{MAX} - MV_P - MV_D - MV_{FF}$$

Lorsque l'on passe en mode manuel (boucle ouverte), la valeur de MV est donnée par l'opérateur et donc ici, fixé à 30%. En effet, on voit sur le graphe que MV chute à 30% et que l'action intégrale MV_I est alors adaptée pour garder la sortie MV à cette valeur.

Enfin, une perturbation a été ajoutée à la fin de la simulation pour montrer l'effet de l'action Feed-Forward. À saturation, le Reset de l'Action Intégrale prends également en compte cette perturbation pour garder la sortie MV dans les limites et donc, on le voit sur le graphe lorsque MV_I est réduit de 10%. Si MV ne sature pas, cette perturbation sera directement ajoutée à la sortie MV permettant ainsi de minimiser l'impact sur PV .

4.3.1 Influence de K_C

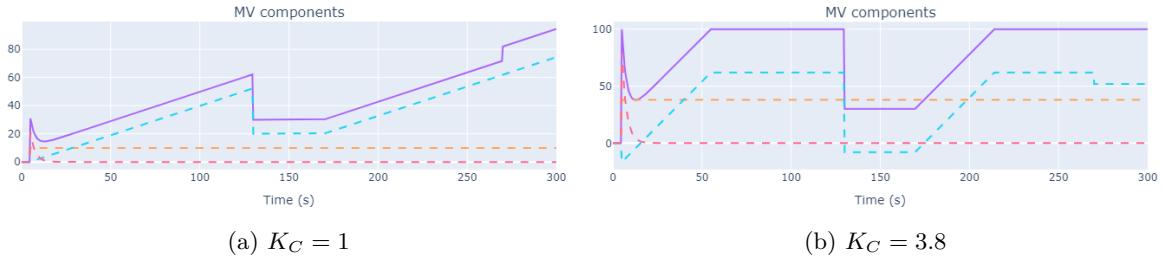


FIGURE 11 – Influence de K_C sur la réponse indicelle du PID

Le gain du régulateur K_C est un gain, donc un multiplicateur agissant sur toutes les actions comme le montre l'équation (5). On voit sur la Figure 11 que pour $K_C = 1$, tout est atténué et nous atteignons même pas la saturation. Une perturbation en fin de simulation est alors ajoutée à MV et non enlevée à MV_I pour conserver MV_{MAX} sur MV .

Lorsque l'on augmente K_C , tout est amplifié et plus aggressif. On le voit directement avec l'atteinte rapide de la saturation. Un gain trop élevé peut poser problème puisque le pic initial de l'action dérivée est directement proportionnel à K_C . Le graphe (b) montre même une saturation de ce pic obligeant l'action intégrale MV_I à passer en négatif.

Nous pouvons également faire le lien avec le coefficient γ . Celui-ci agit directement sur le gain sortant de l'optimisation IMC via la relation de la ligne I du tableau.

$$K_C = \frac{1}{K_P} \frac{T_{1p} + T_{2p}}{\gamma T_{1p} + \theta}$$

Il est clair que pour un processus et délai fixe, un grand K_C induit un petit γ et donc un caractère plus aggressif du régulateur.

4.3.2 Influence de T_D et T_I

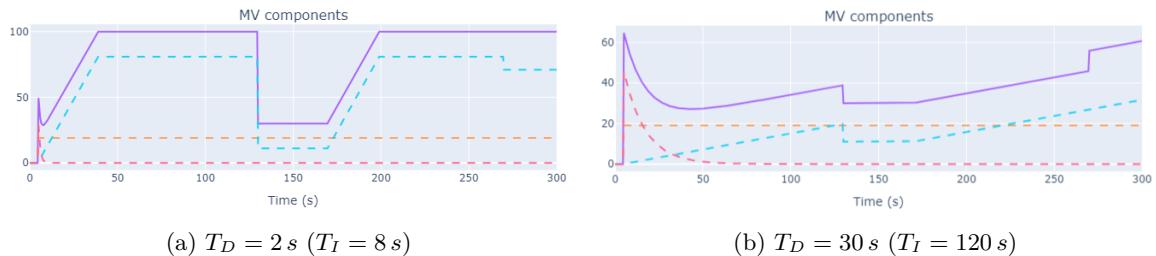


FIGURE 12 – Influence de T_D et T_I sur la réponse indicelle du PID

La constante de temps dérivée agit sur la pente de la tangente initiale et donc aussi sur le temps de montée de l'action dérivée. La constante de temps intégrale agit sur la pente de l'action intégrale. Étant donné que l'on respecte généralement $\frac{T_D}{T_I} < 0.25$, nous avons choisi de limiter les constantes par $T_I = \frac{T_D}{0.25}$.

Nous constatons effectivement que l'action dérivée atteint son régime établi bien plus rapidement lorsque $T_D = 2\text{ s}$ que lorsque $T_D = 30\text{ s}$. Il y a également une différence notable quant à la hauteur du pic initial de l'action dérivée. Elle est représentée par :

$$MV_D = K_C E \frac{T_{Ds}}{\alpha T_{Ds} + 1}$$

Travaillant à une fréquence suffisamment grande, lorsque 1 est non-négligeable par rapport à αT_D , le pic est influencé par T_D . Arrivé à une valeur de T_D suffisamment grande, le 1 devient négligeable, et T_{Ds} peut

se simplifier résultant en un pic qui tends vers :

$$MV_D = \frac{K_C E}{\alpha} = \frac{1.9 \cdot 10\%}{0.4} = 47.5\%$$

En effet, le graphe (b) montre déjà un pic de 45.6% pour $T_D = 30 s$ rendant celui-ci presque indépendant à une augmentation de T_D .

La Figure 12 montre également l'impact de T_I sur la pente de l'action intégrale. Cette action intégrale est inversemement proportionnelle à T_I .

$$MV_I = \frac{K_C E}{T_I s}$$

L'accumulation de l'erreur aura donc une plus grande valeur pour une constante T_I plus faible, résultant en une variation plus grande de MV_I , en d'autres termes, une pente plus élevée.

4.3.3 Influence de α

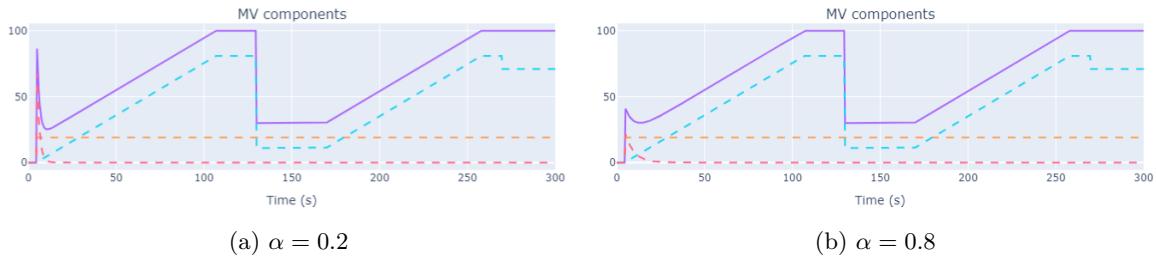


FIGURE 13 – Influence de α sur la réponse indicielle du PID

Le coefficient α est tout bonnement ce qui va permettre de limiter le gain en hautes fréquences, donc en somme, le pic initial sur l'action dérivée. Le déivateur est en fait $MV_D = T_D s$ qui est impropre, puisqu'à hautes fréquences, s tend vers l'infini. Un filtre du 1^{er} ordre est alors appliqué avec un ratio de la constante de temps T_D .

$$\begin{aligned} MV_D &= K_C E (T_D s) \\ \implies MV_D &= K_C E \frac{T_D s}{\alpha T_D s + 1} \rightarrow \frac{K_C E}{\alpha} \end{aligned}$$

Nous voyons sur la Figure 13 que le pic est effectivement plus grand pour un α plus petit, et vice-versa.

4.4 FeedForward

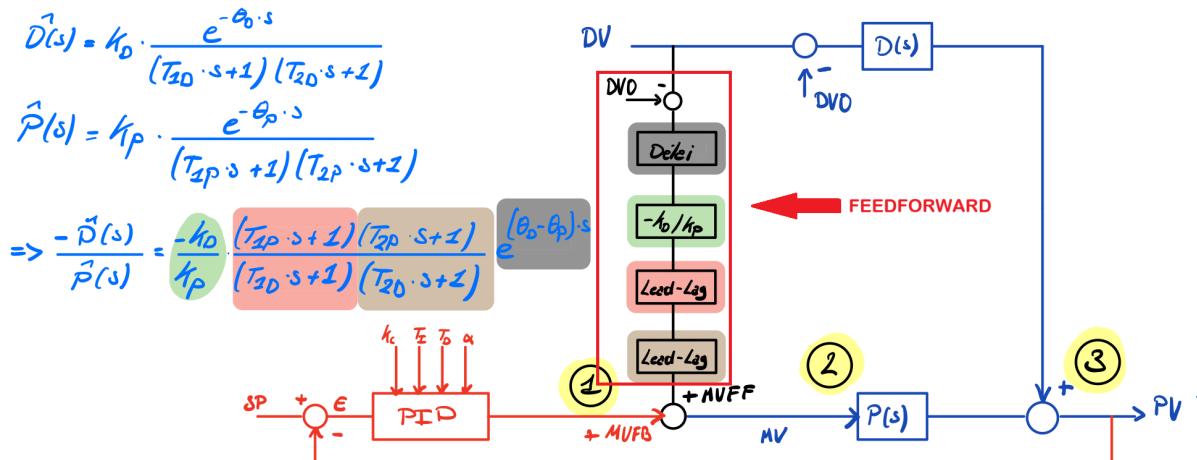


FIGURE 14 – Schéma du régulateur PID avec fonction de FeedForward

La fonction de FeedForward est conçue pour anticiper et compenser l'impact des perturbations (DV) sur la variable du processus (PV), avant que ces dernières n'affectent le système.

Le fonctionnement du FeedForward peut être décrit de manière mathématique comme suit :

- 1 Premièrement, la valeur manipulée en sortie du PID, MV_{FB} , est ajustée par une valeur MV_{FF} , calculée pour compenser directement la perturbation :

$$MV_{FF} = K_{FF} \cdot \frac{(T_{1P}s + 1)(T_{2P}s + 1)}{(T_{1D}s + 1)(T_{2D}s + 1)} \cdot e^{-\theta_{FF}} DV = \frac{\hat{D}(s)}{\hat{P}(s)} DV \quad (6)$$

où :

$$K_{FF} = \frac{K_D}{K_P}, \quad (7)$$

$$\theta_{FF} = |\theta_D - \theta_P| \quad (8)$$

- 2 Ensuite, après la sortie du nœud $MV = MV_{FB} - MV_{FF}$, on obtient :

$$P(s) \cdot MV \approx P(s) \cdot MV_{FB} - \hat{D}(s) \quad (9)$$

- 3 Pour enfin arriver au nœud final où l'on additionne la dynamique de la perturbation $D(s)$ à celle du processus :

$$P(s) \cdot MV_{FB} - \hat{D}(s) + D(s) \approx P(s) \cdot MV_{FB} = PV \quad (10)$$

4.4.1 Délai

La 1^{ère} étape dans la réalisation de la fonction du FeedForward est de récupérer la perturbation DV , de la ramener au point de fonctionnement et de lui appliquer un délai θ_{FF} (8). L'application de ce délai se fait à l'aide de la fonction `Delay_RT` :

```
Delay_RT(self.DV - self.DV0*np.ones_like(self.DV), # On recentre DV sur le point de
         fonctionnement
         max(self.theta_ODV_SOPDT-self.theta_0MV_SOPDT, 0), # Calcul du délai
         self.Ts,
         self.MVFF_Delay)
```

4.4.2 Gain et Lead-Lag

Après avoir appliqué le délai à la perturbation et l'avoir recentrée pour la ramener au point de fonctionnement, l'étape suivante consiste à appliquer le gain (7) et le premier Lead-Lag.

Ajouter un signe négatif au gain puis additionner le MV_{FF} au MV_{FB} ou laisser le gain positif et soustraire MV_{FF} au MV_{FB} est sans conséquences sur le système.

Le premier Lead-Lag dont $T_{Lead} = T_{1P}$ et $T_{Lag} = T_{1D}$ couplé au gain et au délai permet d'obtenir la fonction de transfert :

$$K_{FF} \frac{T_{1P}s + 1}{T_{1D}s + 1} e^{\theta_{FF}}$$

Pour se faire, on utilise la fonction `LL_RT` sur le signal DV retardé et centré (`MV_Delay`) via :

```
LL_RT(self.MVFF_Delay,
      -self.Kp_ODV_SOPDT/self.Kp_0MV_SOPDT, # gain
      self.T1_0MV_SOPDT, #TLead
      self.T1_ODV_SOPDT, #TLag
      self.Ts,
      self.MVFF_LL1)
```

On applique ensuite un second Lead-Lag afin d'obtenir la fonction de transfert complète (6) dont la constante $T_{Lead} = T_{2P}$ et $T_{Lag} = T_{2D}$.

Dans le cas où le FeedForward est désactivé, on applique un gain nul au second Lead-Lag donc $MV_{FF} = 0$:

```
if self.FF == True:  
    LL_RT(self.MVFF_LL1,  
           1, # Gain unitaire quand le FeedForward est activé  
           self.T2_0MV_SOPDT, #TLead  
           self.T2_0DV_SOPDT, #TLag  
           self.Ts,  
           self.MVFF  
    )  
else:  
    LL_RT(self.MVFF_LL1,  
           0, # Gain nul quand le FeedForward est désactivé  
           self.T2_0MV_SOPDT,  
           self.T2_0DV_SOPDT,  
           self.Ts,  
           self.MVFF  
    )
```

5 Simulation du système

Nous nous intéresserons maintenant au système complet afin de simuler les différentes réponses aux événements tels que step sur DV , step sur SP ou activation du feedforward, et ce, dans les conditions réelles des futures réponses expérimentales.

Il est bon de rappeler que tout ce qui va être simulé sera fait autour d'un point de fonctionnement, et valable uniquement aux alentours de ce point. Dans notre cas, nous avons la puissance de chauffe du premier radiateur $MV_0 = 50\%$, la puissance de chauffe du deuxième radiateur $DV_0 = 50\%$ et la sortie du système en régime permanent $PV_0 = 49.3^\circ\text{C}$.

Pour l'instant, le paramètre α sera fixé à $\alpha = 1$ par simplicité et γ sera fixé à $\gamma = 0.7$ pour éviter une réponse du régulateur trop aggressive. On utilisera les paramètres optimaux du second ordre trouvés à la Section 2 *Identification de la Dynamique* pour simuler le Processus et la Perturbation.

Nous allons ici analyser les scénarios suivants :

1. Réponse en mode manuel (boucle ouverte) sans FeedForward
2. Réponse en mode manuel (boucle ouverte) avec FeedForward
3. Réponse en mode automatique (boucle fermée) sans FeedForward
4. Réponse en mode automatique (boucle fermée) avec FeedForward

5.1 Réponse à une perturbation DV en mode manuel sans FF

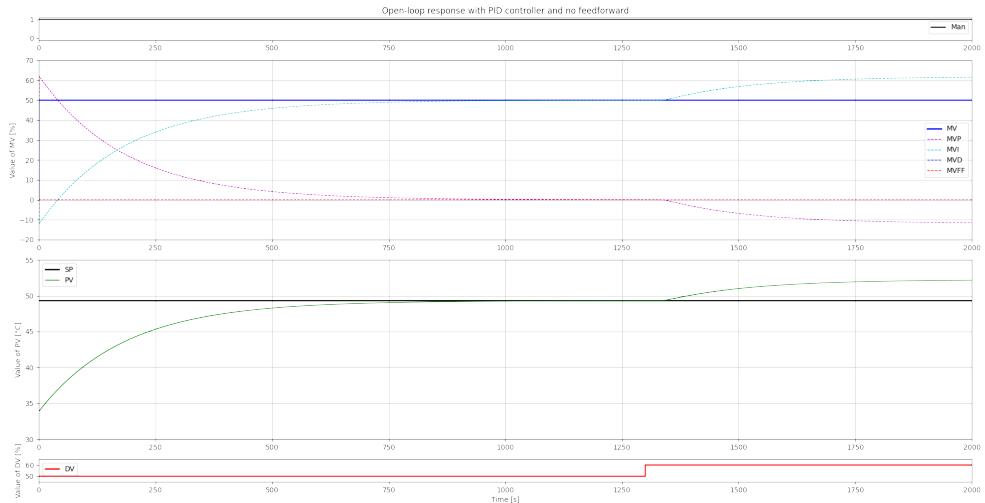


FIGURE 15 – Réponse à boucle ouverte sans FeedForward

La Figure 15 confirme bien que l'on est en mode manuel en imposant une valeur de $MV = MV_0$. Il est dès lors logique de voir l'action intégrale MV_I s'adapter tout le long de la simulation en raison du Reset de l'Action Intégrale.

Nous constatons que l'action dérivée MV_D est nulle, ce qui est normal étant donné que la constante de temps T_D est nulle. Notre processus agit comme un premier ordre et donc notre régulateur est assimilé à un régulateur PI.

L'action proportionnelle MV_P fait un pic au début de la simulation. Cela est dû à la différence entre la consigne et la sortie du système, donc l'erreur. En effet, la composante proportionnelle est directement proportionnelle à l'erreur et au gain statique : $MV_P = K_C E \approx 4 \cdot 15\% = 60\%$.

La sortie de processus PV met alors un certain temps à se stabiliser autour de la valeur de consigne $SP = PV_0$ (temps d'établissement).

Une perturbation est alors appliquée. Le feedforward étant désactivé, elle se trouve répercutée sur PV . Comme attendu, cette variation introduit une erreur négative que l'on voit sur MV_P . Le reset de l'action intégrale fait son travail en venant augmenter MV_I afin de conserver la valeur manuelle de MV .

Il est également intéressant de retrouver le délai en regardant la différence entre le moment où la perturbation est appliquée et le moment où PV réagit.

5.2 Réponse à une perturbation DV en mode manuel avec FF

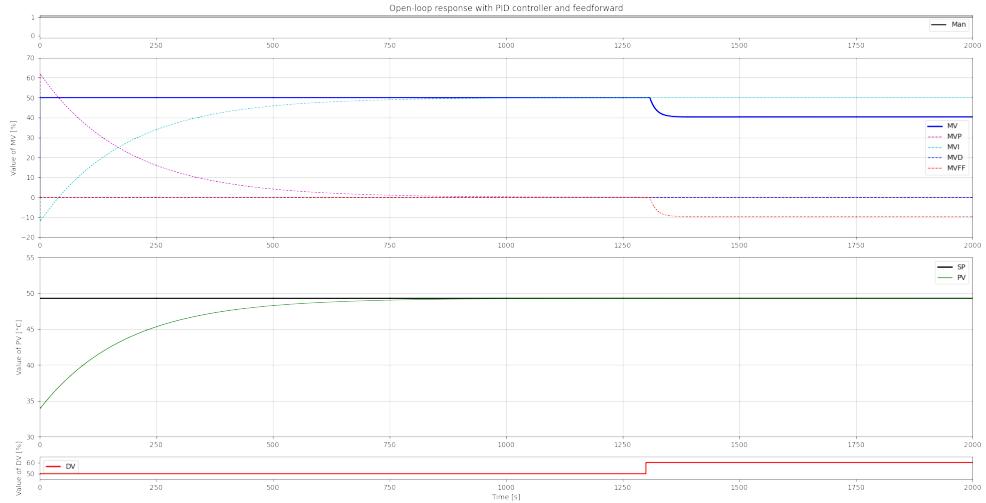


FIGURE 16 – Réponse à boucle ouverte avec FeedForward

Dans ce scénario, le feedforward est activé. La perturbation DV est donc prise en compte anticipativement. Nous constatons que la composante MV_{FF} réagit bien comme attendu à la perturbation. MV est donc lui même ajusté pour compenser la perturbation et ainsi conserver $PV = SP = PV_0$. Encore une fois, nous pouvons nous intéresser au délai qui se trouve maintenant réduit puisqu'il s'agit du délai du feedforward $\theta_{FF} = \theta_D - \theta_P = 29 - 20 = 9\text{ s}$.

5.3 Réponse à une perturbation DV & changement de consigne SP en mode automatique sans FF

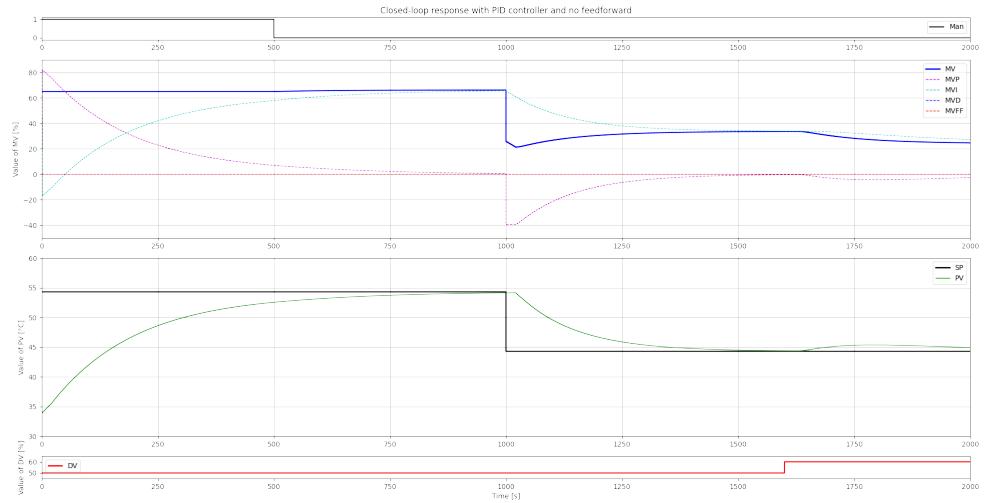


FIGURE 17 – Réponse à boucle fermée sans FeedForward

La Figure 17 utilise le mode manuel les quelques 500 premières secondes le temps d'amener PV suffisement proche de SP , le mode automatique se charge de stabiliser PV .

On remarque tout de suite la réponse de MV sur le step de SP , qui forme un pic avec un angle. Nous pouvons enfaire expliquer cela par la présence notable du délai $\theta_P = 20 s$ entre SP et PV . En introduisant une erreur négative, l'action proportionnelle $MV_P = K_C E$ diminue mais l'erreur ne commencera à être compensée que après un délai θ_P . L'action intégrale MV_I , elle, diminue progressivement dès lors qu'elle accumule une erreur négative, faisant apparaître cette forme particulière sur MV .

Sans feedforward et comme mentionné précédemment, une perturbation est bien refletée sur PV . MV_P va suivre l'erreur introduite et automatiquement diminuer MV . Encore une fois, l'action intégrale accumule cette erreur négative permettant à MV de se stabiliser à une puissance de chauffe et ainsi faire retourner petit à petit PV à la consigne SP .

5.4 Réponse à une perturbation DV & changement de consigne SP en mode automatique avec FF

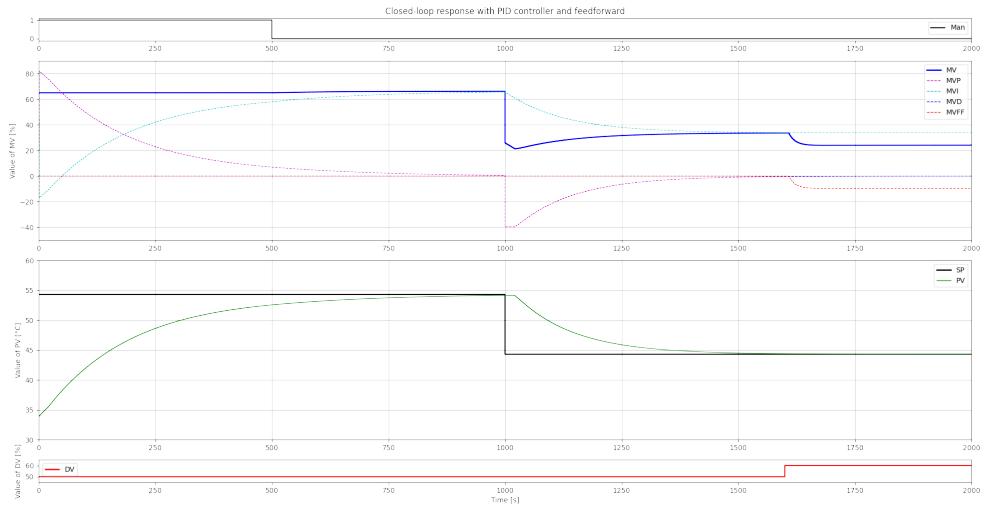


FIGURE 18 – Réponse à boucle fermée avec FeedForward

Sur la Figure 18 est représenté tout ce qui a été dit précédemment notamment l'anticipation de la perturbation par le feedforward lorsque MV_{FF} est diminué. Encore une fois, le délai entre perturbation DV et le feedforward MV_{FF} est réduit à $\theta_{FF} = 9 s$.

5.5 Influence de α et γ

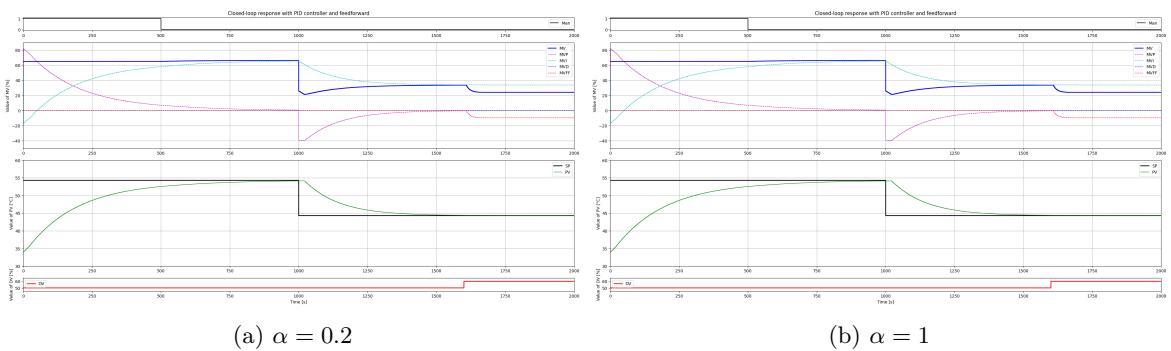


FIGURE 19 – Influence de α sur la boucle fermée

La Figure 19 permet de montrer que, pour notre système, α n'a aucune influence. Il n'intervient que dans la limitation du gain haute fréquence de l'action dérivée. Or notre régulateur agit comme un régulateur PI, donc l'action dérivée reste nulle tout le long de la simulation.

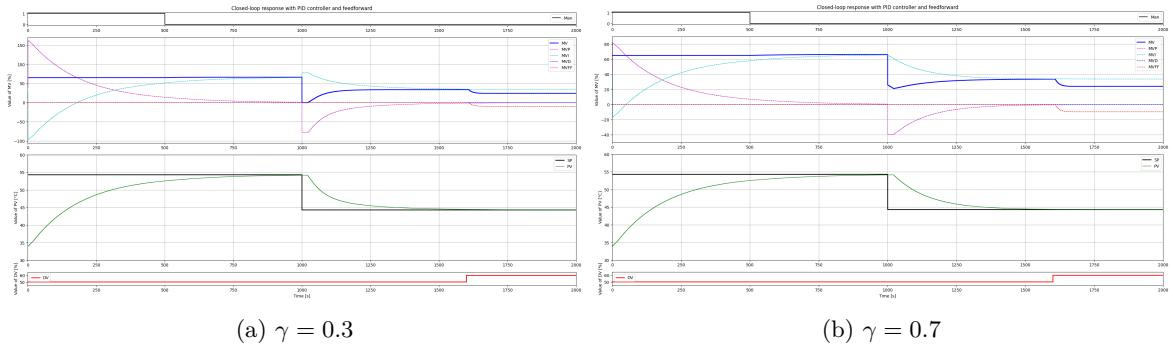


FIGURE 20 – Influence de γ sur la boucle fermée

Le paramètre γ est utilisé dans l'optimisation IMC et fait par ce biais varier le gain du régulateur K_C .

$$K_C = \frac{1}{K_P} \frac{T_{1p} + T_{2p}}{\gamma T_{1p} + \theta}$$

Nous voyons effectivement sur la Figure 20 (a), qu'un γ plus petit vient amplifier toutes les composantes de MV . Il est alors également intéressant d'observer que l'action proportionnelle est plus grande et donc vient amener MV à saturer lors du step sur la consigne. L'action intégrale doit s'ajuster en augmentant sa valeur.

En se focalisant sur la phase transitoire de PV lorsque le step est appliqué sur SP , nous pouvons noter une différence de temps de montée entre les deux simulations. Le γ plus petit arrive plus rapidement à 90% de la valeur en régime établi. Cela permet de confirmer le caractère plus aggressif du régulateur lorsque γ est plus petit.

6 Données Expérimentales

Nous allons maintenant tester notre régulateur PID sur la plateforme afin de comparer son comportement en simulation à son comportement réel. Nous avons donc mis en place 4 scénarios qui permettront de comparer tous les cas de figure :

1. Le 1^{er} scénario permet de tester le fonctionnement du régulateur en boucle ouverte (mode manuel) sans FeedForward en observant sa réponse à un step de 10% sur *DV*.

```
SPPath = {0: PVO}
ManPath = {0: True, TSim: True} # Mode manuel actif toute la simulation
MVManPath = {0: MVO, TSim: MVO} # MV manuel reste constant
DVPath = {0: DVO, 1300: DVO + 10} # Step de 10% après 1300 secondes
FF = False # Pas de FeedForward
ManFF = False # Pas de prise en compte du FeedForward
```

2. Le 2^{ème} scénario permet de tester le fonctionnement du régulateur en boucle ouverte et avec FeedForward en observant sa réponse à un step de 10% sur *DV*.

```
SPPath = {0: PVO}
ManPath = {0: True, TSim: True} #Mode manuel actif toute la simulation
MVManPath = {0: MVO, TSim: MVO} # MV manuel reste constant
DVPath = {0: DVO, 1300: DVO + 10} # Step de 10% après 1300 secondes
FF = True # FeedForward activé
ManFF = True # Prise en compte du FeedForward
```

3. Le 3^{ème} scénario permet de tester le fonctionnement du régulateur en boucle fermée (mode automatique) sans FeedForward en observant sa réponse à un step de -10% sur *SP* puis un step de 10% sur *DV*.

```
SPPath = {0: PVO + 5, 1000: PVO - 5} # Step de -10% après 1000 secondes
ManPath = {0: True, 500: False, TSim: False}
MVManPath = {0: MVO+15, TSim: MVO+15}
DVPath = {0: DVO, 1600: DVO + 10} # Step de 10% après 1600 secondes
FF = False # Pas de FeedForward
ManFF = False
```

4. Le 4^{ème} scénario permet de compléter le scénario précédent en testant le fonctionnement du régulateur en boucle fermée FeedForward en observant sa réponse à un step de -10% sur *SP* puis à un step de 10% sur *DV*.

```
SPPath = {0: PVO + 5, 1000: PVO - 5} #Step de -10% après 1000 secondes
ManPath = {0: True, 500: False, TSim: False} # Mode automatique après 500
    ↵ secondes
MVManPath = {0: MVO+15, TSim: MVO+15}
DVPath = {0: DVO, 1600: DVO + 10} # Step de 10% après 1600 secondes
FF = True # FeedForward activé
ManFF = False
```

6.1 Scénario 1

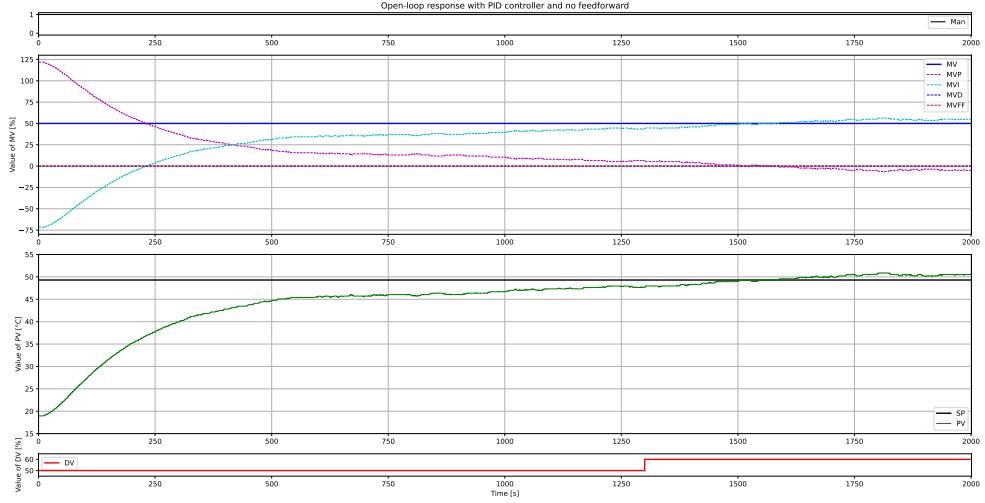


FIGURE 21 – Données expérimentales du 1^{er} scénario

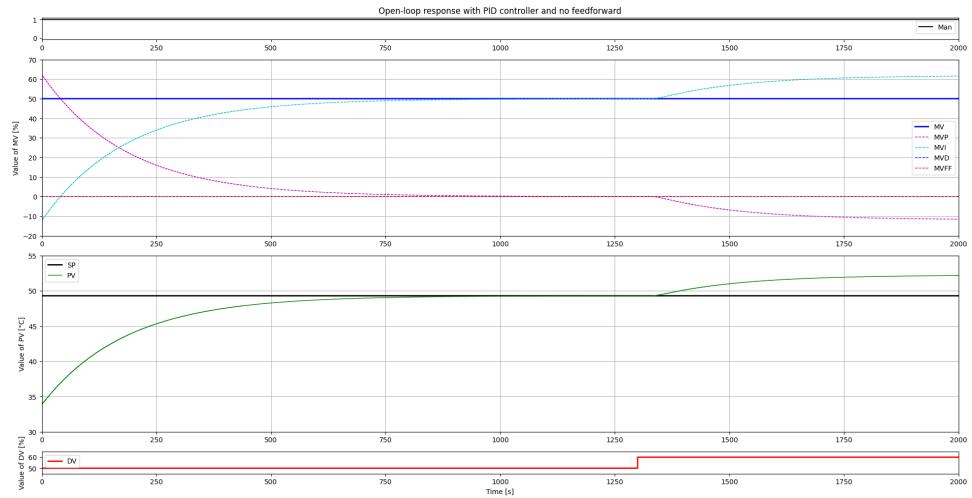


FIGURE 22 – Données de la simulation du 1^{er} scénario

On peut observer que le *PV* n'a pas atteint la valeur de consigne (*SP*) avant le step de 10% sur *DV*. Cela est dû au fait que, pour l'expérience, la valeur du *PV* à $t = 0s$ est de $\sim 18^{\circ}\text{C}$ tandis que pour la simulation, il est de $\sim 34^{\circ}\text{C}$. Néanmoins, une fois le step de 10% sur *DV* effectué, la valeur du *PV* converge jusqu'à la valeur de consigne et la dépasse à $t = 1500s$ ce qui correspond à un retard par rapport à la simulation $\sim \Delta t = 75s$.

Une autre observation importante concerne la forme de la courbe *PV* qui suggère un comportement typique d'un système du second ordre. Cependant, l'analyse des dynamiques du système avait révélé une seconde constante de temps très faible, $T_2P \sim 10^{-12}$, négligeable, ce qui a conduit à la conclusion que notre système se comportait plutôt comme un système du première ordre en réponse à un changement sur *MV*. Selon nous, une des causes serait la température plus basse de la pièce qui affecterait l'inertie thermique du capteur de température. L'humidité de la pièce pourrait aussi être facteur puisque celle-ci affecte la conductivité thermique de l'air ambiant et donc pourrait aussi impacter l'inertie thermique du capteur.

6.2 Scénario 2

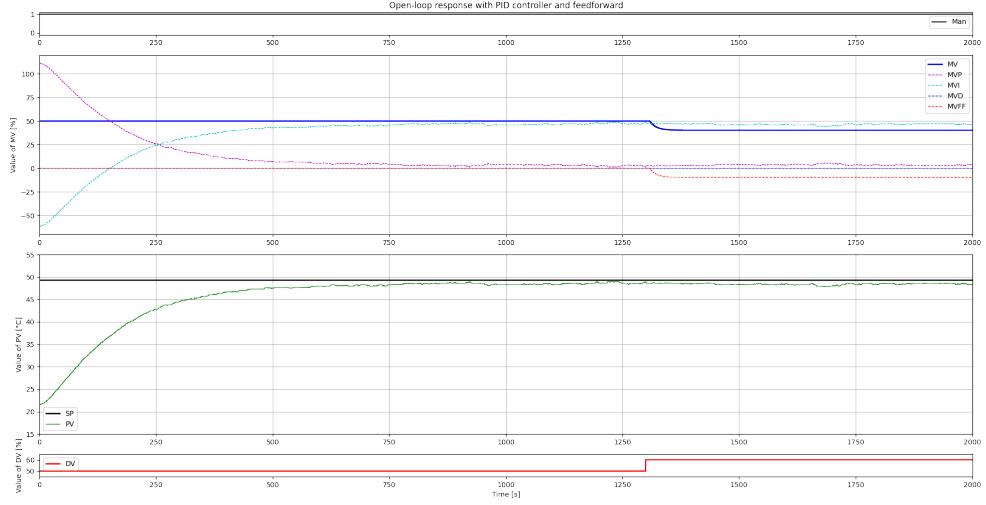


FIGURE 23 – Données expérimentales du 2^{ème} scénario

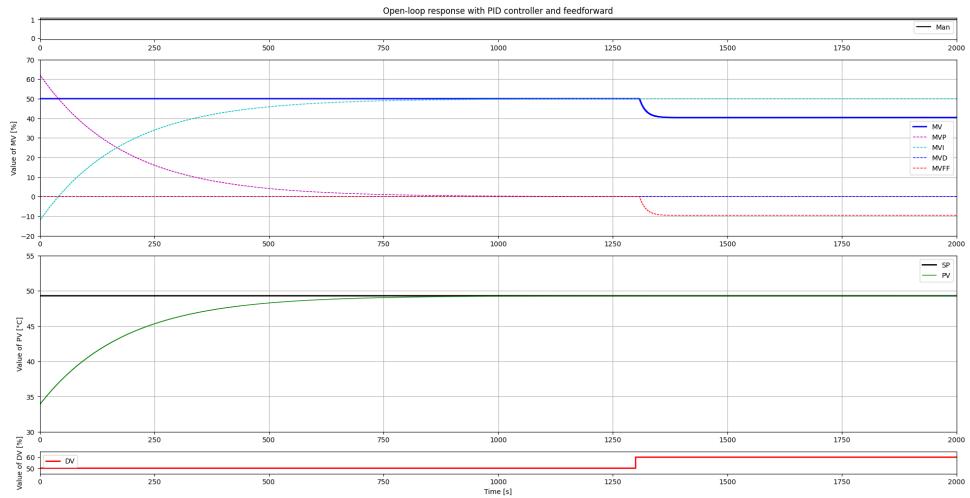


FIGURE 24 – Données de la simulation du 2^{ème} scénario

Comme pour le scénario précédent (21), on peut voir que le système régit plutôt comme un système du second ordre.

Cependant, contrairement à l'exemple précédent, la valeur du *PV* atteint à peu près au même moment la valeur de consigne (*SP*) que pour la simulation. Ceci est dû au fait que la température du capteur n'a pas suffisamment pu redescendre entre les deux scénarios. En effet, la valeur de *PV* à $t = 0s$ est de $\sim 22^{\circ}C$ ce qui correspond à $4^{\circ}C$ de plus que pour le scénario précédent.

À part cela, le système réagit bien à la perturbation grâce au FeedForward qui permet de compenser entièrement le step de 10% sur *DV*.

6.3 Scénario 3

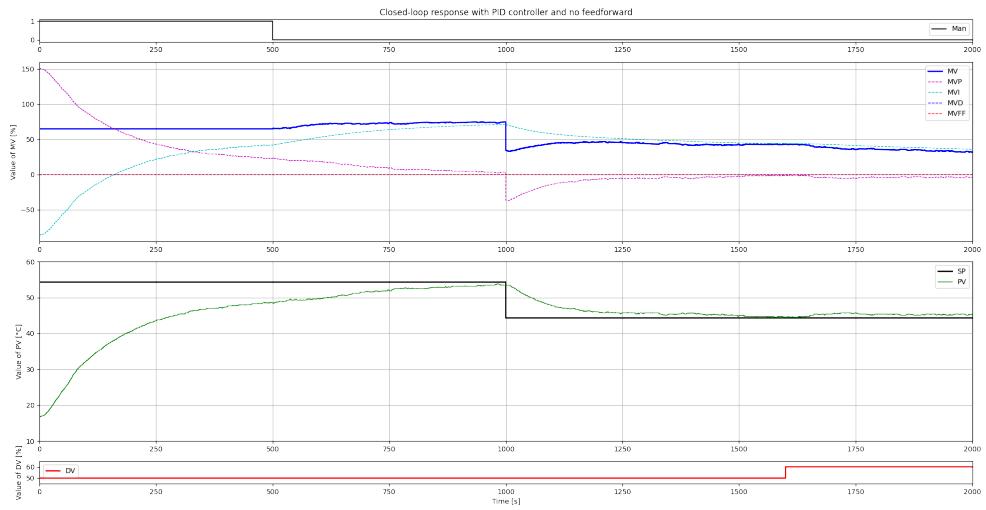


FIGURE 25 – Données expérimentales du 3^{ème} scénario

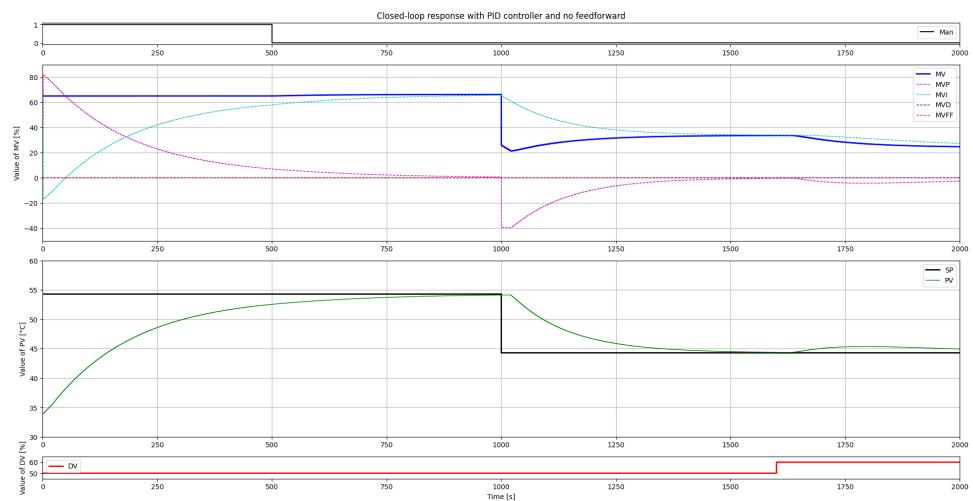


FIGURE 26 – Données de la simulation du 3^{ème} scénario

A Méthode graphique pour l'obtention des paramètres d'approximation

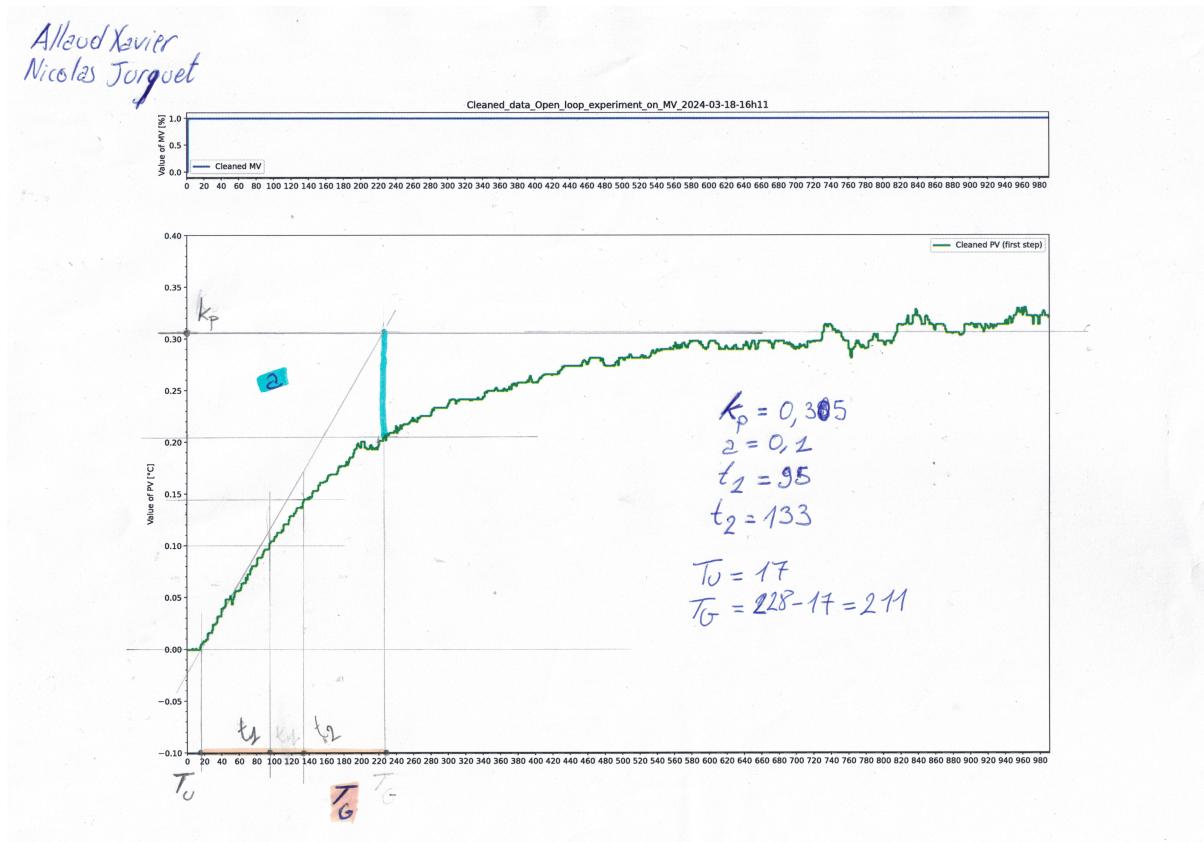


FIGURE 27 – Obtention des paramètres d'approximation pour un step sur MV