

# Rapport de Laboratoire - Control Theory

Nicolas Jurquet (21211) - Xavier Allaud(21151)

March 2024

## 1 Introduction

Le but de ce rapport est d'expliquer le processus de conception d'un régulateur PID avec une boucle de rétroaction en utilisant un kit TCLab. Pour se faire, il faudra identifier la dynamique d'entrée/sortie du système afin de construire un modèle de celui-ci. Sur base de ce modèle, il sera possible d'implémenter un PID discret qu'il faudra ensuite optimiser puis tester en conditions réelles.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Identification de la Dynamique</b>	<b>2</b>
2.1	Processus P(s) . . . . .	2
2.1.1	Approximation graphique du modèle pour MV . . . . .	3
2.1.2	Modèle de Broda (FOPDT) . . . . .	3
2.1.3	Modèle de van der Grinten (SOPDT) . . . . .	4
2.1.4	Modèle de Strejc . . . . .	4
2.1.5	Comparaison des modèles d'approximation . . . . .	5
2.2	Perturbation D(s) . . . . .	6
2.2.1	Comparaison des modèles avec paramètres optimaux . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Régulateur PID</b>	<b>9</b>
3.1	FeedForward . . . . .	9
3.1.1	Délai . . . . .	9
3.1.2	Gain et Lead-Lag . . . . .	10
<b>A</b>	<b>Méthode graphique pour l'obtention des paramètres d'approximation</b>	<b>11</b>

## 2 Identification de la Dynamique

Pour ce qui va être présenté par la suite ait du sens, il est nécessaire de savoir dans quelles conditions nous travaillons.

Nos réponses sont basées sur un point de fonctionnement de  $MV_0 = 50\%$ ,  $DV_0 = 50\%$  et une sortie  $PV_0 = 49.3^\circ\text{C}$ . C'est à dire que la température obtenue sur  $PV$  lorsqu'une puissance de chauffage de 50% est appliquée sur les 2 chauffages est de  $49.3^\circ\text{C}$  en régime établi.

### 2.1 Processus $P(s)$

Appliquons un step  $X(s) = \frac{1}{s}$  autour du point de fonctionnement (de 30% à 70%) lorsque le système se situe en régime établi pour analyser la "step response"  $Y(s) = \frac{P(s)}{s}$ .

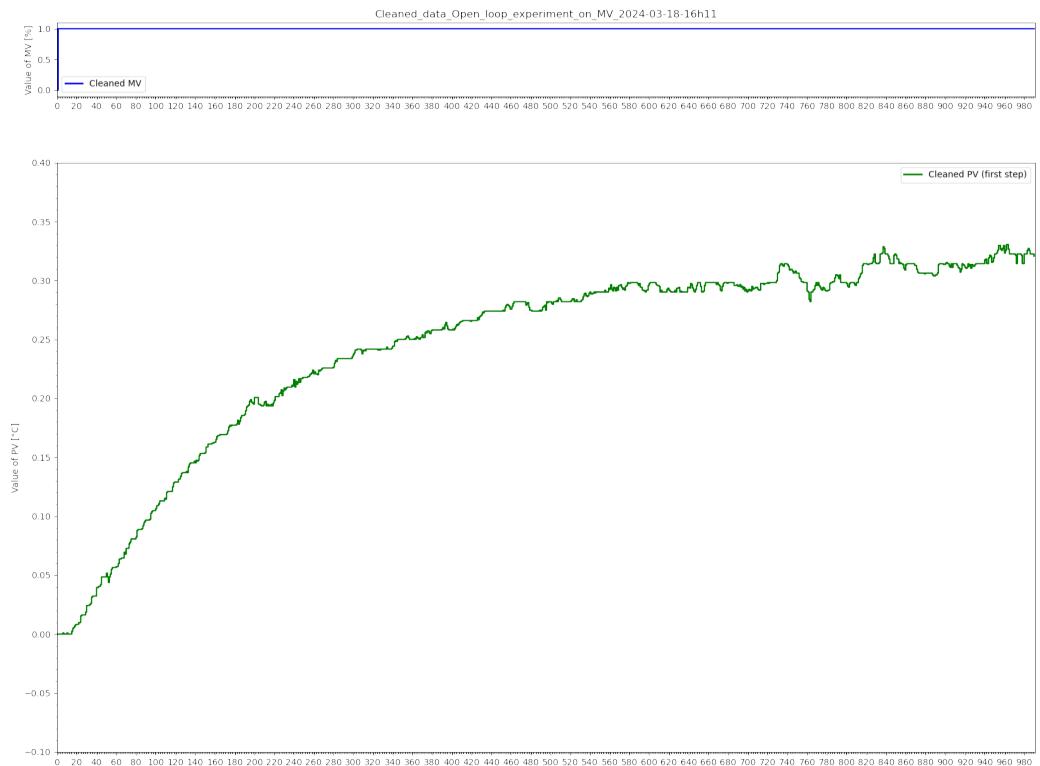


FIGURE 1 – Réponse à un step sur MV

- Le graphique (Figure 1) obtenu permet (presque) d'affirmer que le processus est un système du 1<sup>e</sup> ordre avec un délai. L'allure de la "step response" est donc  $y(t) = K_p(1 - e^{-t/T})u(t)$ .
- Le but est maintenant d'obtenir les paramètres de la fonction de transfert du processus  $P(s)$  ce qui permettra de prédire  $Y(s)$  pour n'importe quel  $X(s)$  puisque  $Y(s) = P(s) \cdot X(s)$  ou  $PV = P(s) \cdot MV$ . Pour se faire, on utilise une fonction de minimisation d'erreur :

```
minimize(FOPDT_cost,
    p0,args=(MVm,PVm,Ts,
    (fig,ax1,l1,l2)),
    method='Powell',
    bounds=bdns,
    options={'maxiter': maxIter})
```

Où  $p0$  contient les points de départ d'optimisation pour les paramètres  $K_p$ ,  $T$  et  $\theta$ . La fonction de minimisation va faire varier ces paramètres afin que la fonction de coût,  $FOPDT\_cost$ , renvoie la valeur la plus basse possible.

$FOPDT\_cost$  :

```

for i in range(0,len(MV)):
    t.append(i*Ts) #calcule le temps correspondant au point actuel
    ↪ de la donnée en se basant sur la période de sample
    MVTemp.append(MV[i]) #itère sur la longueur du vecteur d'entrée

Delay_RT(MVTemp,theta,Ts,MVDelay) #application d'un délai à MV
FO_RT(MVDelay,Kp,T,Ts,PVSim) #On applique un délai au premier ordre via le
↪ délai appliqué à MV puis on calcule un point du vecteur de sortie à
↪ chaque itération
objective = objective + (PV[i] - PVSim[i])**2 #on ajoute le carré de
↪ l'erreur actuel à la somme des carré des erreurs précédentes

```

Le fichier `Identification.ipynb` permet de trouver les valeurs estimées de  $K_P$ ,  $T_{1p}$ ,  $T_{2p}$  et  $\theta_p$  qui vont par après nous servir à modéliser le Processus et la Perturbation de façon optimale, ainsi que les différentes méthodes d'approximations des modèles du 1<sup>e</sup> et 2<sup>e</sup> ordre.

Pour notre réponse du Processus, nous obtenons les valeurs suivantes pour un modèle du 2<sup>e</sup> ordre :

$$\begin{aligned} K_P &= 0.308 \\ T_{1p} &= 183.819 \text{ s} \\ T_{2p} &= 3.292 \cdot 10^{-12} \text{ s} \\ \theta_p &= 20.015 \text{ s} \end{aligned}$$

Et les valeurs suivantes pour un modèle du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\begin{aligned} K_P &= 0.314 \\ T_p &= 206.264 \text{ s} \\ \theta_p &= 12.999 \text{ s} \end{aligned}$$

On remarque directement que  $T_{2p}$  est négligeable par rapport à  $T_{1p}$ , et permet donc de confirmer que le processus agit comme un système du 1<sup>er</sup> ordre avec délai :

$$\hat{P}(s) = \frac{K_P e^{-\theta_p s}}{(T_{1p}s + 1)(T_{2p}s + 1)} \approx \frac{K_P e^{-\theta_p s}}{T_{1p}s + 1} \quad (1)$$

### 2.1.1 Approximation graphique du modèle pour MV

Il est également possible de déterminer la dynamique du Processus graphiquement sur base de la Figure 1. Nous obtenons les paramètres  $K_P$ ,  $T_u$ ,  $T_g$ ,  $t_1$ ,  $t_2$  et  $a$  dont la détermination est expliquée en Annexe A :

$$\begin{aligned} K_P &= 0.305 \\ T_u &= 17 \text{ s} \\ T_g &= 211 \text{ s} \\ t_1 &= 95 \text{ s} \\ t_2 &= 133 \text{ s} \\ a &= 0.1 \end{aligned}$$

Ces paramètres serviront à utiliser les méthodes classiques d'approximation du modèle, à savoir le modèle de **Broida**, **Van Der Grinten** et **Strejc**.

### 2.1.2 Modèle de Broida (FOPDT)

Ce modèle consiste à approximer le Processus par un système du 1<sup>er</sup> ordre avec délai de la forme :

$$P_B(s) = \frac{K_P e^{-\theta s}}{Ts + 1}$$

Le 1<sup>er</sup> modèle de Broida est obtenu en définissant la constante de temps  $T$  et le délai  $\theta$  comme suit :

$$T = T_g = 211 \text{ s} \quad \text{et} \quad \theta = T_u = 17 \text{ s}$$

Le  $2^e$  modèle de Broida est obtenu en définissant la constante de temps  $T$  et le délai  $\theta$  comme suit :

$$T = 5.5(t_2 - t_1) = 209 \text{ s} \quad \text{et} \quad \theta = 2.8t_1 - 1.8t_2 = 26.60 \text{ s}$$

### 2.1.3 Modèle de van der Grinten (SOPDT)

Ce modèle consiste à approximer le Processus par un système du  $2^e$  ordre avec délai de la forme :

$$P_{vdG}(s) = \frac{K_P e^{-\theta s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$T_1$ ,  $T_2$  et  $\theta$  sont obtenus comme suit :

$$\begin{aligned} T_1 &= T_g \frac{3ae - 1}{1 + ae} = -30.61 \text{ s} \\ T_2 &= T_g \frac{1 - ae}{1 + ae} = 120.81 \text{ s} \\ \theta &= T_u - \frac{T_1 T_2}{T_1 + 3T_2} = 28.15 \text{ s} \end{aligned}$$

Nous constatons que la  $1^e$  constante de temps  $T_1$  est négative, ce qui est physiquement impossible ! Il n'est cependant pas étonnant d'obtenir ce résultat étant donné que le Processus est un système du  $1^{er}$  ordre avec délai. Un modèle du  $2^e$  ordre tel que van der Grinten n'est donc pas adapté pour approximer notre Processus et ne sera donc pas représenté par après.

### 2.1.4 Modèle de Strejc

Ce modèle consiste à approximer le Processus par un système du  $n^e$  ordre avec des pôles et constantes de temps identiques de la forme :

$$P_S(s) = \frac{K_P e^{-\theta s}}{(Ts + 1)^n}$$

L'ordre  $n$  est obtenu avec la Table 1 :

Order $n$	$T_{u_{th}}/T_g$	$T_g/T$
	$a_n$	$b_n$
1	0.00	1.00
2	0.10	2.72
3	0.22	3.69
4	0.32	4.46
5	0.41	5.12
6	0.49	5.70
7	0.57	6.23

TABLE 1 – Ordre  $n$  du modèle de Strejc en fonction de  $a_n$  et  $b_n$

Nous avons que  $T_u/T_g = 0.08$  et donc ce situe à  $a_1 \leq 0.08 < a_2$ , ce qui nous donne un ordre  $n = 1$ .  $a_n$  vaut alors 0.00 et  $b_n$  vaut 1.00. La constante de temps  $T$  et le délai  $\theta$  vont être au final trouvés directement avec les valeurs de  $T_g$  et  $T_u$  comme le modèle de Broida :

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_g}{b_n} = T_g = 211 \text{ s} \\ \theta &= T_u - a_n T_g = T_u = 17 \text{ s} \end{aligned}$$

### 2.1.5 Comparaison des modèles d'approximation

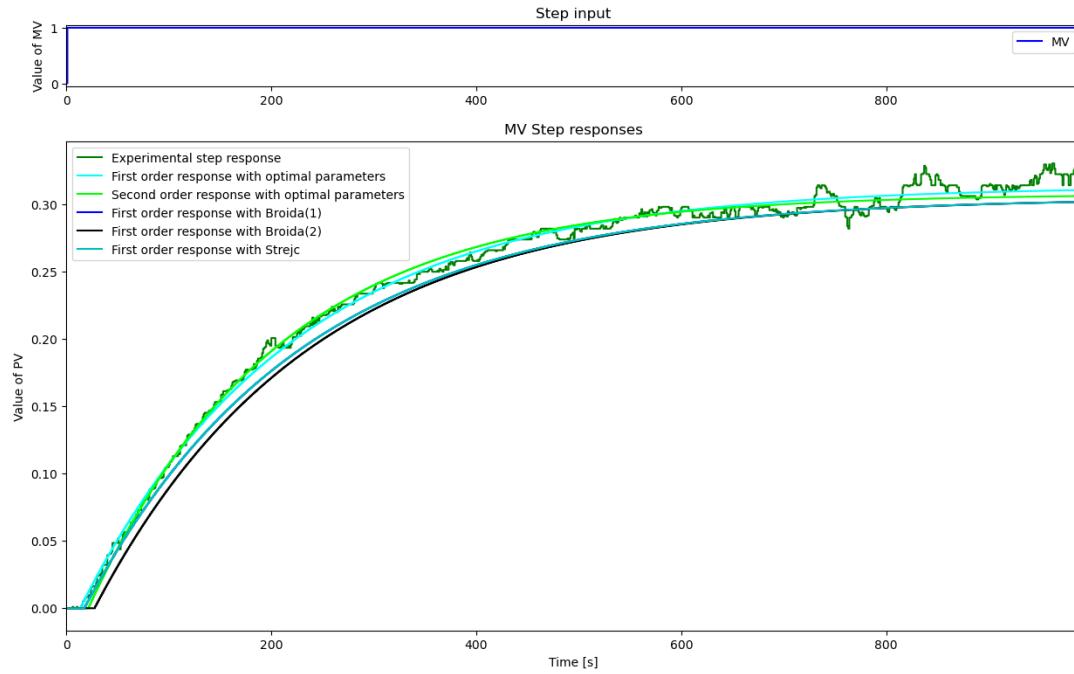


FIGURE 2 – Approximations de la réponse temporelle d'un step sur MV

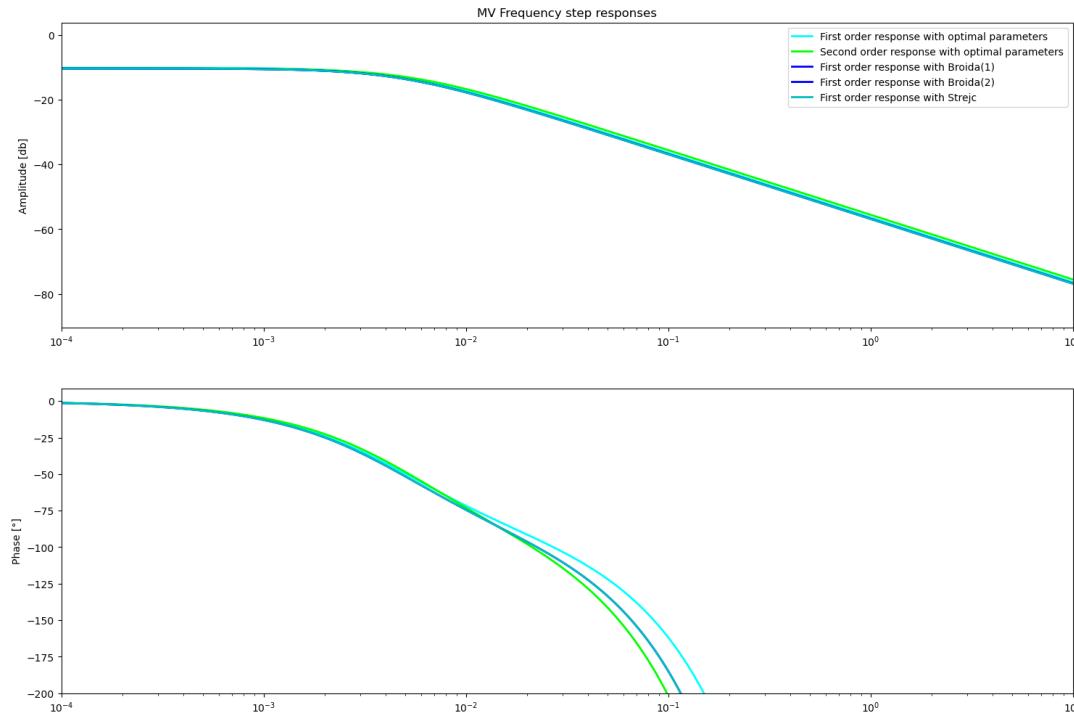


FIGURE 3 – Approximations de la réponse fréquentielle d'un step sur MV

La Figure 2 montre les différentes réponses d'un step sur MV pour chacun des modèles décrits au-dessus (à l'exception du modèle de van der Grinten). Elles représentent toutes bien une réponse du 1<sup>e</sup> ordre avec délai, et restent assez proches les unes des autres. Les modèles commencent tous avec un délai similaire et terminent en régime établi à environ le même gain statique  $K_P$ . Cependant, on distingue tout de même les modèles avec paramètres optimaux des modèles graphiques.

Les paramètres optimaux ont été trouvés par un algorithme de minimisation de l'erreur, tandis que les paramètres graphiques ont été trouvés par une méthode graphique dont la précision est à prendre avec recul.

La Figure 3 nous permet ensuite de comparer les réponses fréquentielles des différents modèles. La première observation est que tous les modèles sont pratiquement superposés en terme de gain. En basses fréquences, ils atteignent bien un gain de  $K_P = -10 \text{ dB} = 0.3$  et en hautes fréquences, ils subissent tous une pente de  $-20 \text{ dB/décade}$ . On peut également confirmer que la réponse du 2<sup>e</sup> ordre avec paramètres optimaux est bien en fait un 1<sup>er</sup> ordre en raison d'une constante de temps négligeable.

En ce qui concerne la phase, on obtient bien une allure à laquelle on s'attendait pour un système du 1<sup>er</sup> ordre avec délai, à savoir une phase qui tends vers l'infini (en négatif) lorsque la fréquence tends vers l'infini. Nous constatons que la courbe bleue (premier ordre optimal) et la courbe verte (second ordre optimal) dévient plus la fréquence augmente. Cela peut être expliqué par la différence entre les deux délais  $\theta_p$  qui sont de 13 et 20 secondes respectivement. En effet, pour atteindre une même phase représentée par  $\theta_s = j\theta\omega$ , il faudra une fréquence plus élevée pour le modèle du 1<sup>er</sup> ordre que pour le modèle du 2<sup>e</sup> ordre.

## 2.2 Perturbation D(s)

Nous appliquons maintenant un step sur DV pour observer la réponse du système à une perturbation.



FIGURE 4 – Réponse à un step sur DV

Étant donné l'allure du graphe (Figure 4), et en particulier le point d'inflexion aux alentours de 80 secondes, nous pouvons estimer que la perturbation se comporte comme un système du 2<sup>e</sup> ordre avec délai de la forme :

$$\hat{D}(s) = \frac{K_D e^{-\theta_d s}}{(T_{1d}s + 1)(T_{2d}s + 1)} \quad (2)$$

En effet, nous obtenons grâce au fichier `Identification.ipynb`, les valeurs optimales suivantes pour un

modèle du 2<sup>e</sup> ordre :

$$\begin{aligned} K_D &= 0.295 \\ T_{1d} &= 182.255 \text{ s} \\ T_{2d} &= 13.184 \text{ s} \\ \theta_d &= 28.999 \text{ s} \end{aligned}$$

Et les valeurs suivantes pour un modèle du 1<sup>er</sup> ordre :

$$\begin{aligned} K_D &= 0.296 \\ T_d &= 184.880 \text{ s} \\ \theta_d &= 40.136 \text{ s} \end{aligned}$$

Les valeurs obtenues pour  $T_{1d}$  et  $T_{2d}$  nous permettent de confirmer que la perturbation peut se comporter comme un système du 2<sup>e</sup> ordre.

### 2.2.1 Comparaison des modèles avec paramètres optimaux



FIGURE 5 – Approximations de la réponse temporelle d'un step sur DV

Il est clair que la Figure 5 montre que les modèles du 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> ordre avec paramètres optimaux sont très proches l'un de l'autre. La seule différence réside en la décomposition du délai du 1<sup>er</sup> ordre en un délai et une constante de temps  $T_{2d}$  pour le 2<sup>e</sup> ordre. L'ajout de cette constante de temps permet de mieux modéliser la réponse expérimentale du système à une perturbation.



FIGURE 6 – Approximations de la réponse fréquentielle d'un step sur DV

Pouvant modéliser la perturbation comme un système du 1<sup>er</sup> ou 2<sup>e</sup> ordre avec délai, la réponse fréquentielle (Figure 6) est différente pour les deux modèles. À hautes fréquences, le modèle du premier ordre possède une pente de  $-20 \text{ dB/décade}$  tandis que le modèle du second ordre possède une pente de  $-40 \text{ dB/décade}$ . Le gain à basses fréquences vaut bien également  $K_P = -10 \text{ dB} = 0.3$ .

La phase, comme pour la partie Processus, tends vers l'infini (en négatif) lorsque la fréquence tends vers l'infini et dévie entre les deux modèles à hautes fréquences. Cela peut être expliqué par la différence entre les deux délais  $\theta_p$  qui sont cette fois de 40 secondes pour le premier ordre et 29 secondes pour le second ordre. Le délai du second ordre étant cette fois plus petit, nous avons le comportement opposé : pour atteindre une même phase représenté par  $\theta s = j\theta\omega$ , il faudra une fréquence plus élevée pour le modèle du 2<sup>e</sup> ordre que pour le modèle du 1<sup>er</sup> ordre.

### 3 Régulateur PID

Afin de réaliser la fonction de régulation PID avec un FeedForward, il est nécessaire de d'abord définir les fonctions Lead-Lag (pour la partie FeedForward) et IMC Tuning (pour le calcul des constantes  $K_c$ ,  $T_i$  et  $T_d$ ).

#### 3.1 FeedForward

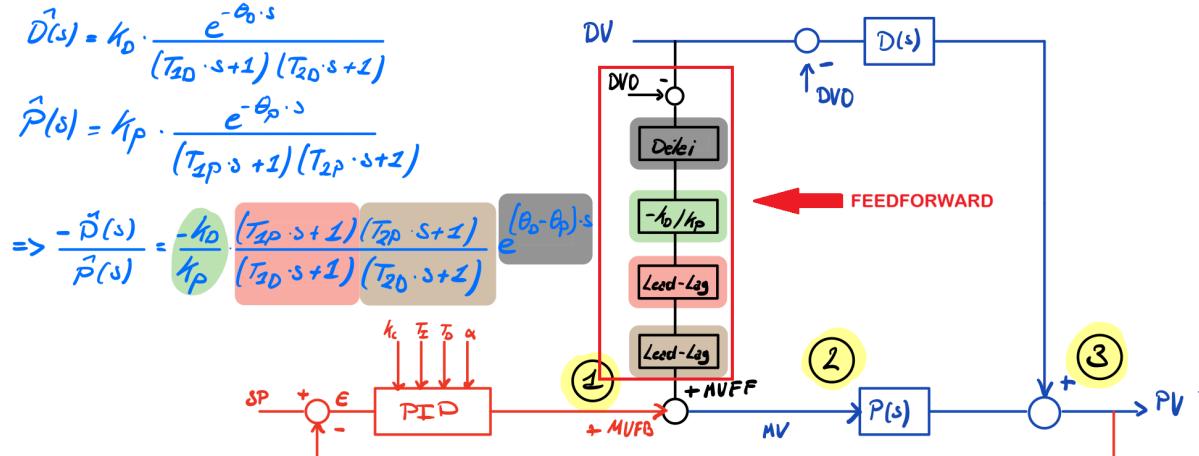


FIGURE 7 – Schema du régulateur PID avec fonction de FeedForward

La fonction de FeedForward est conçue pour anticiper et compenser l'impact des perturbations ( $DV$ ) sur la variable du processus ( $PV$ ), avant que ces dernières n'affectent le système.

Le fonctionnement du FeedForward peut être décrit de manière mathématique comme suit :

- 1 Premièrement, la valeur manipulée en sortie du PID,  $MV_{FB}$ , est ajustée par une valeur  $MV_{FF}$ , calculée pour compenser directement la perturbation :

$$MV_{FF} = K_{FF} \cdot \frac{(T_{1PS} + 1)(T_{2PS} + 1)}{(T_{1DS} + 1)(T_{2DS} + 1)} \cdot e^{-\theta_{FF}} DV = \frac{\hat{D}(s)}{\hat{P}(s)} DV$$

avec :

$$K_{FF} = \frac{K_D}{K_P}, \theta_{FF} = |\theta_D - \theta_P|$$

- 2 Ensuite, après le nœud  $MV = MV_{FB} + MV_{FF}$ , on obtient :

$$P(s) \cdot MV \approx P(s) \cdot MV_{FB} - \hat{D}(s)$$

- 3 Pour enfin arriver au nœud final où l'on additionne la dynamique de la perturbation à celle du processus :

$$P(s) \cdot MV_{FB} - \hat{D}(s) + D(s) \approx P(s) \cdot MV_{FB} = PV$$

#### 3.1.1 Délai

La 1<sup>ère</sup> étape dans la réalisation de la fonction du “FeedForward” est de récupérer la perturbation  $DV$ , de la ramener au point de fonctionnement et de lui appliquer un délai  $\theta_{FF} = |\theta_D - \theta_P|$  qui provient du rapport entre la dynamique de la perturbation  $\hat{D}(s)$  et du processus  $\hat{P}(s)$ . Pour se faire, on utilisera la fonction `Delay_RT` sur le signal  $DV$  recentré via :

```
Delay_RT(self.DV - self.DV0*np.ones_like(self.DV), # On centre DV sur le point de
        fonctionnement
        max(self.theta_ODV_SOPDT-self.theta_OMP_SOPDT, 0), # Calcul du délai
```

```

    self.Ts,
    self.MVFF_Delay)

```

### 3.1.2 Gain et Lead-Lag

Une fois que le délai et la translation appliqués, il faut maintenant passer au gain et au premier Lead-Lag.

Le gain est simplement le rapport du gain de la fonction de transfert décrivant la dynamique de perturbation et celle décrivant la dynamique de processus  $K_{FF} = \frac{K_D}{K_P}$  (la raison du signe négatif sera expliquée plus tard dans le rapport).

Le premier Lead-Lag dont  $T_{Lead} = T_{1D}$  et  $T_{Lag} = T_{1P}$  couplé au gain et au délai permet d'obtenir la fonction de transfert :

$$K_{FF} \cdot \frac{T_{1D}s + 1}{T_{1P}s + 1} \cdot e^{\theta_{FF}}$$

Pour se faire, on utilise la fonction `LL_RT` sur le signal *DV* retardé et centré (*MV\_Delay*) via :

```

LL_RT(self.MVFF_Delay,
      -self.Kp_ODV_SOPDT/self.Kp_OMV_SOPDT, # gain
      self.T1_OMV_SOPDT,
      self.T1_ODV_SOPDT,
      self.Ts,
      self.MVFF_LL1)

```

## A Méthode graphique pour l'obtention des paramètres d'approximation

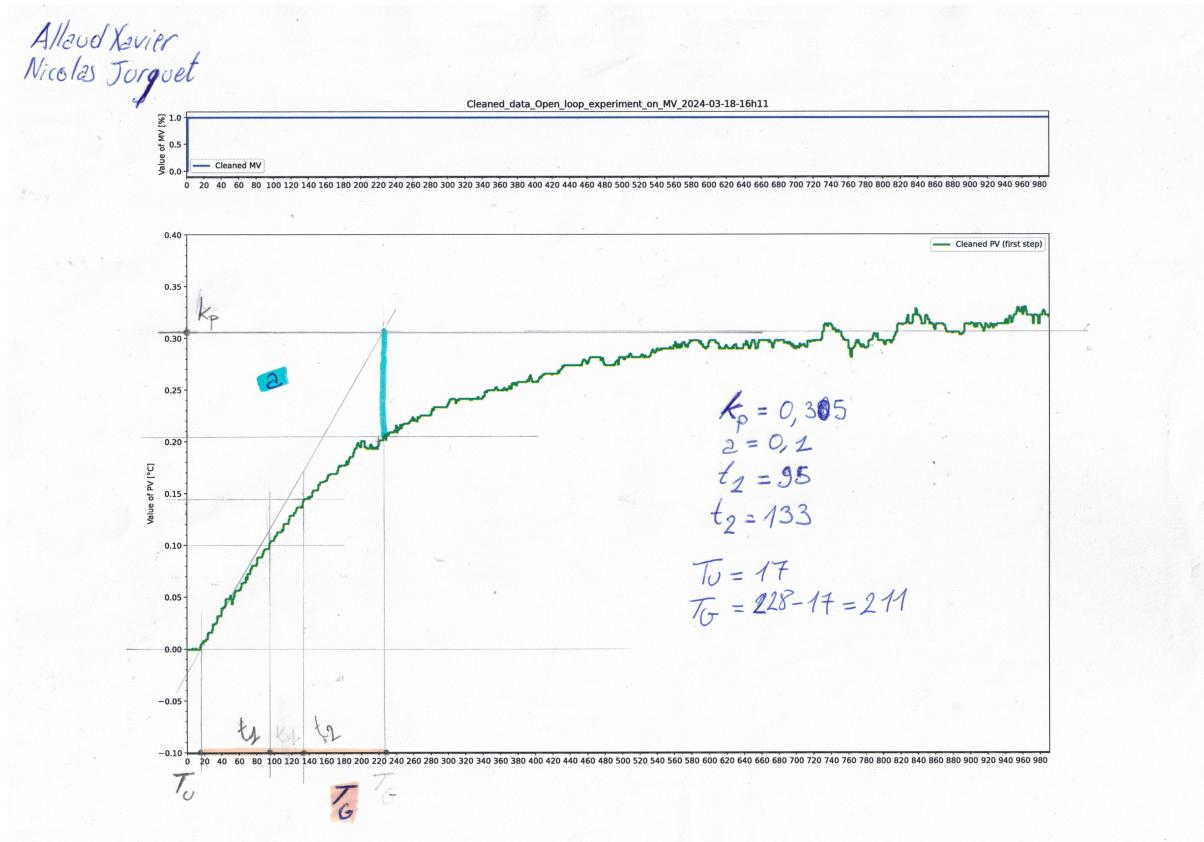


FIGURE 8 – Obtention des paramètres d'approximation pour un step sur MV