

Содержание задания:

Н разбойников делят добычу. У каждого из них свое мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем $1/N$ долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками, чтобы каждый остался доволен.

1. Решите задачу для $N = 2$.

Пусть у нас два разбойника — А и В. Каждый оценивает доли добычи по-своему, но оба хотят получить не меньше, чем $1/2$ ценности всей добычи по своей субъективной оценке.

Тогда:

- Разбойник А делит добычу на две равные части (по его мнению): для него обе эти части имеют одинаковую ценность (по $1/2$).
- Разбойник В выбирает ту часть, которая ему нравится больше (которую он считает более ценной).
- Разбойник А забирает оставшуюся часть

Обоснование:

- Разбойник А доволен, т.к. разделил добычу на две равные части (по его мнению).
- Разбойник В доволен, т.к. выбрал лучшую часть по его мнению.
- По факту, оба разбойника получили примерно по $1/2$ всей добычи.

2. Придумайте (и обоснуйте) алгоритм для $N = 3$, основанный на том, что первым шагом первый разбойник справедливо (на его взгляд) делит добычу на три части.

Пусть у нас три разбойника — А, В и С.

Тогда:

- Разбойник А делит добычу на три равные части (по его мнению): для него обе эти части имеют одинаковую ценность (по $1/3$).
- Разбойник В выбирает ту часть (из 3 оставшихся), которая ему нравится больше (которую он считает более ценной).
- Разбойник С выбирает ту часть (из 2 оставшихся), которая ему нравится больше (которую он считает более ценной).
- Разбойник А забирает оставшуюся часть

Обоснование:

- Разбойник А доволен, т.к. разделил добычу на три равные части (по его мнению).
- Разбойник В доволен, т.к. выбрал лучшую часть из трех оставшихся по его мнению.
- Разбойник С доволен, т.к. выбрал лучшую часть из двух оставшихся по его мнению.
- По факту, все три разбойника получили примерно по $1/3$ всей добычи.

Примечание: На самом деле позиции разбойников В и С не совсем равнозначные: разбойник В выбирает свою часть из трех оставшихся частей, а разбойник С - из двух оставшихся (т.е. после выбора разбойника В). Это означает, что разбойник В находится в более привилегированном положении по отношению к разбойнику С.

3. Обоснуйте, что следующий алгоритм решает проблему и для троих участников.

Двое делят всю добычу между собой. Затем третий делит долю каждого из первых двух разбойников на три части. Двое первых выбирают по меньшей части из своих трех частей и отдают третьему.

Проверка:

- 1) Пусть разбойники А и В справедливо поделили добычу между собой - т.е. каждый получил по $1/2$ части добычи.
- 2) Разбойник С делит долю разбойника А на 3 части (размер каждой части - $1/6$ от исходной добычи).
- 3) Разбойник С делит долю разбойника В на 3 части (размер каждой части - $1/6$ от исходной добычи).
- 4) Разбойник А выбирает одну из трех частей своей добычи и отдает ее разбойнику С
- 5) Разбойник В выбирает одну из трех частей своей добычи и отдает ее разбойнику С
- 6) У разбойника А остается $2/6$ от от исходной добычи; или $1/3$.
- 7) У разбойника В остается $2/6$ от от исходной добычи; или $1/3$.
- 8) Разбойник С получает $2/6$ от от исходной добычи; или $1/3$.
- 9) У каждого из разбойников по итогу получается $1/3$ от исходной добычи - т.е. предложенный алгоритм решает проблему трех участников.

Обоснование:

- 1) Разбойник С поделил добычу разбойника А на три равные по его мнению части.
- 2) Разбойник С поделил добычу разбойника В на три равные по его мнению части.
- 3) Разбойник А из трех частей своей добычи отдал наименее привлекательную для него часть разбойнику С.
- 4) Разбойник В из трех частей своей добычи отдал наименее привлекательную для него часть разбойнику С.
- 5) Как итог, все разбойники довольны; алгоритм справедлив.

4. Проверьте, работает ли такой алгоритм для четверых?

Сначала трое делят все между собой, затем каждый из них делит свою порцию на четыре части, после чего последний разбойник забирает по лучшему куску у каждого.

Проверка:

- 1) Трое разбойников А, В, С справедливо делят добычу на три равные части с помощью одного из алгоритмов, приведенных выше.
- 2) После этого, каждый из разбойников А, В, С делит свою часть добычи на 4 равные по его мнению части (размер каждой части - $1/12$ от исходной добычи).
- 3) Разбойник D выбирает из 4 частей добычи разбойника А лучшую для него часть.
- 4) Разбойник D выбирает из 4 частей добычи разбойника В лучшую для него часть.
- 5) Разбойник D выбирает из 4 частей добычи разбойника С лучшую для него часть.
- 6) У разбойника А остается $3/12$ от от исходной добычи; или $1/4$.
- 7) У разбойника В остается $3/12$ от от исходной добычи; или $1/4$.
- 8) У разбойника С остается $3/12$ от от исходной добычи; или $1/4$.
- 9) Разбойник D получает $3/12$ от от исходной добычи; или $1/4$.
- 10) У каждого из разбойников по итогу получается $1/4$ от исходной добычи - т.е. предложенный алгоритм решает проблему четырех участников.

Обоснование:

- 1) Разбойник А поделил свою добычу на четыре равные по его мнению части.
- 2) Разбойник В поделил свою добычу на четыре равные по его мнению части.

- 3) Разбойник С поделил свою добычу на четыре равные по его мнению части.
- 4) Разбойник D взял из четырех частей добычи разбойника A лучшую по его мнению часть.
- 5) Разбойник D взял из четырех частей добычи разбойника B лучшую по его мнению часть.
- 6) Разбойник D взял из четырех частей добычи разбойника C лучшую по его мнению часть.
- 7) Как итог, все разбойники довольны; алгоритм справедлив.

5. Сформулируйте с обоснованиями алгоритм для N разбойников на основе идей из предыдущих пунктов.

Алгоритм:

Нерекурсивная часть:

- 1) Единственный разбойник забирает всю добычу себе

Рекурсивная часть:

- 1) Первые N-1 разбойников делят справедливо добычу между собой (с помощью данного алгоритма)
- 2) Затем каждый из этих (первых N-1 разбойников) разбойников делит полученную им добычу на N равных по его мнению частей.
- 3) Последний разбойник выбирает из каждого деления каждого разбойника самую привлекательную для него часть.
- 4) Остаток остается у тех кто делил.

Проверка:

- 1) Каждый из первых N-1 разбойников делит свою часть добычи на N равных по его мнению частей. Размер каждой такой части будет $1/(N(N-1))$ от исходной добычи.
- 2) Последний разбойник забирает себе N-1 часть (у каждого из первых N-1 разбойников) размером $1/(N(N-1))$ от исходной добычи. Т.е. у последнего разбойника будет в итоге доля размером $(N-1)/(N(N-1))$; или $1/N$.
- 3) У каждого из первых N-1 разбойников, после того как последний разбойник забрал себе одну часть остается доля размером $(N-1)/(N(N-1))$; или $1/N$.
- 4) У каждого из разбойников по итогу получается $1/N$ от исходной добычи - т.е. предложенный алгоритм решает проблему N участников.

Обоснование:

- 1) Каждый из первых N-1 разбойников делит свою часть добычи на N равных по его мнению частей.
- 2) Последний разбойник выбирает по одной из частей после деления у каждого из первых N-1 разбойников, которая лучшая по его мнению.
- 3) Как итог, все разбойники довольны; алгоритм справедлив.

6. Можно ли переложить эту задачу на язык теории игр? Если да, к какому типу игр из обсуждаемых нами в этом модуле относится данная задача? Существует ли равновесие Нэша в этой игре?

Тип игры: Задача относится к играм с кооперацией и справедливым распределением ресурсов, также называемым играми справедливого деления (fair division games). Каждый игрок (разбойник) — рациональный участник, стремящийся максимизировать свою субъективную выгоду.

Наличие равновесия Нэша:

Да, равновесие Нэша существует:

- Никто из разбойников не заинтересован односторонне менять результат (например, переделывать делёж), если другие придерживаются правил алгоритма.
- Любая попытка изменить делёж может привести к потере части добычи.

Следовательно, описанные алгоритмы обеспечивают равновесие Нэша и справедливое (пропорциональное) распределение.