

### Цель задания

Дана следующая матричная игра.

8	7	1	7
3	9	-1	1
2	3	-4	1
6	5	7	6

1. Исследуйте игру на равновесие Нэша и решение в чистых стратегиях. Найдите верхнюю и нижнюю цену игры по принципам минимакса и максимина.
2. Выполните доминирование и сведите игру к задаче линейного программирования.
3. Решите игру в смешанных стратегиях с помощью симплекс-метода без использования программирования. Найдите итоговую цену игры, а также распределение вероятностей по стратегиям для каждого из игроков.
4. Решите игру, используя программирование. Найдите итоговую цену игры, а также распределение вероятностей по стратегиям для каждого из игроков.

Перепишу матричную игру в виде, чтобы у каждой строки и каждого столбца стояли метки с именами стратегий для первого и второго игрока соответственно.

	B1	B2	B3	B4
A1	8	7	1	7
A2	3	9	-1	1
A3	2	3	-4	1
A4	6	5	7	6

### Задание 1.

Минимумы по строкам:

- строка 1:  $\min(8, 7, 1, 7) = 1$
- строка 2:  $\min(3, 9, -1, 1) = -1$
- строка 3:  $\min(2, 3, -4, 1) = -4$
- строка 4:  $\min(6, 5, 7, 6) = 5$

Максимум из этих минимумов ( $\maximin$ , нижняя цена игры для игрока 1 достигается на строке 4 и равен значению 5. Это означает, что чистая “защитная” стратегия для игрока 1 — стратегия 4.

Максимумы по столбцам:

- столбец 1:  $\min(8, 3, 2, 6) = 8$
- столбец 2:  $\min(7, 9, 3, 5) = 9$
- столбец 3:  $\min(1, -1, -4, 7) = 7$
- столбец 4:  $\min(7, 1, 1, 6) = 7$

Минимум из этих максимумов (minimax, верхняя цена игры для игрока 1) достигается на столбцах 3 и 4 и равен значению 7. Это означает, что чистые “защитные” стратегии для игрока 2 — это стратегии В3 или В4.

Для того, чтобы существовало равновесие Нэша для решения в чистых стратегиях, необходимо чтобы у матрицы игры существовала седловая точка.

Седловая точка матрицы - это элемент матрицы, являющийся одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце.

В нашем случае видно, что у нас нет элемента в матрице, который бы одновременно являлся минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце.

Поэтому равновесия Нэша для решения в чистых стратегиях для данной игры не существует.

Нижняя цена игры - 5. Игрок номер 1 может всегда ее гарантировать, выбирая стратегию А4.

Верхняя цена - 7. Противник (Игрок номер 2) может не допустить, чтобы игрок номер 1 получил больше 7, играя стратегию В3 или В4.

## Задание 2.

Доминирование - это удаление доминируемых стратегий:

- Для игрока номер 1: стратегия  $i$  доминирует стратегию  $k$ , если все элементы строки  $i$  не меньше соответствующих элементов строки  $k$  и есть элементы строго больше.
- Для игрока номер 2: стратегия  $j$  доминирует стратегию  $k$ , если все элементы столбца  $j$  не больше соответствующих элементов столбца  $k$  (т.к. игрок номер 2 хочет минимизировать выигрыш игрока номер 1).

Сравним строку 4 и строку 3: для каждого значения мы можем записать следующее  $6 > 2, 5 > 3, 7 > -4, 6 > 1$ . Это означает, строка 4 строго доминирует строку 3. Т.о. строка 3 доминируема - ее можно удалить.

Других доминируемых строк нет.

Сравним столбцы 4 и строку 1: для каждого значения мы можем записать следующее  $8 > 7, 3 > 1, 2 > 1, 6 \geq 6$ . Это означает, столбец 4 строго доминирует столбец 1. Т.о. столбец 1 доминируем - его можно удалить.

Других доминируемых столбцов нет.

Матрица (матричная игра) после удаления доминируемых строк и столбцов будет иметь следующий вид:

	В2	В3	В4
А1	7	1	7
А2	9	-1	1
А4	5	7	6

Сведение к задаче линейного программирования.

Игра для первого игрока.

Пусть  $x_1, x_2, x_4$  - вероятность выбора стратегии  $A_1, A_2, A_4$  соответственно.

$$x_1 + x_2 + x_4 = 1, x_1, x_2, x_4 \geq 0$$

Пусть  $v$  — минимальный выигрыш первого игрока. Тогда задача максимизации минимального выигрыша записывается как:

$$v \rightarrow \max$$

при условии, что:

$$\sum_{i=1}^3 x_i a_{ji} \geq v$$

для всех  $j = 1, 2, 3$

Таким образом, исходная матричная игра сводится к следующей задаче линейного программирования:

$$v \rightarrow \max$$

$$7x_1 + 9x_2 + 5x_4 \geq v$$

$$1x_1 - 1x_2 + 7x_4 \geq v$$

$$7x_1 + 1x_2 + 6x_4 \geq v$$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_4 \geq 0$$

Делаю следующую замену переменных:

$$z_1 = x_1/v, z_2 = x_2/v, z_4 = x_4/v$$

Так как нижняя цена игры в чистых стратегиях положительна, то итоговый выигрыш  $v$  можем считать положительным. А значит, каждое из ограничений в системе, включая неравенства, можно поделить на это  $v$ .

$$v \rightarrow \max$$

$$7z_1 + 9z_2 + 5z_4 \geq 1$$

$$1z_1 - 1z_2 + 7z_4 \geq 1$$

$$7z_1 + 1z_2 + 6z_4 \geq 1$$

$$z_1 + z_2 + z_4 = 1/v$$

$$z_1, z_2, z_4 \geq 0$$

Если  $v \rightarrow \max$ , то  $1/v \rightarrow \min$ , а значит можно переписать систему следующим образом:

$$z_1 + z_2 + z_4 \rightarrow \min$$

$$7z_1 + 9z_2 + 5z_4 \geq 1$$

$$1z_1 - 1z_2 + 7z_4 \geq 1$$

$$7z_1 + 1z_2 + 6z_4 \geq 1$$

$$z_1, z_2, z_4 \geq 0$$

Получили задачу линейного программирования для первого игрока

Игра для второго игрока.

Пусть  $y_2, y_3, y_4$  - вероятность выбора стратегии  $B_2, B_3, B_4$  соответственно.

$$y_2 + y_3 + y_4 = 1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Пусть  $w$  — максимальный выигрыш первого игрока. Тогда задача минимизации максимального выигрыша записывается как:

$$w \rightarrow \min$$

при условии, что:

$$\sum_{i=1}^3 y_i a_{ij} \leq w$$

для всех  $j = 1, 2, 3$

Таким образом, исходная матричная игра сводится к следующей задаче линейного программирования:

$$w \rightarrow \min$$

$$7y_2 + 1y_3 + 7y_4 \leq w$$

$$9y_2 - 1y_3 + 1y_4 \leq w$$

$$5y_2 + 7y_3 + 6y_4 \leq w$$

$$y_2 + y_3 + y_4 = 1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Получили задачу линейного программирования для второго игрока.

### Задание 3.

Для простоты будем решать задачу после доминирования, т.е. задачу со следующей матрицей:

	B2	B3	B4
A1	7	1	7
A2	9	-1	1
A4	5	7	6

Пусть эта матрица обозначается буквой A

Для удобства (что все коэффициенты матрицы игры положительные) применяю сдвиг +2; получаю следующую матрицу игры (обозначаю эту матрицу буквой B):

	1 (B2)	B3	B4
1 (A1)	9	3	9
2 (A2)	11	1	3
3 (A4)	7	9	8

Решаю двойственную задачу:

$$Z = u_1 + u_2 + u_3 \rightarrow \max$$

$$9u_1 + 3u_2 + 9u_3 \leq 1$$

$$11u_1 + 1u_2 + 3u_3 \leq 1$$

$$7u_1 + 9u_2 + 8u_3 \leq 1$$

$$u_1, u_2, u_3 \geq 0$$

Ввожу переменные избыточности:  $s_1, s_2, s_3$ .

Начальная таблица.

Базис	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	RHS
$s_1$	9	3	9	1	0	0	1
$s_2$	11	1	3	0	1	0	1
$s_3$	7	9	8	0	0	0	1
Z	-1	-1	-1	0	0	0	0

Здесь RHS - Right Hand Side; правая часть уравнения.

Шаг 1:

- Разрешающим столбцом будет столбец 1 ( $u_1$ ), т.к. строка Z для этого столбца содержит минимальное отрицательное значение, равное  $-1$ .
- Разрешающей строкой будет строка 2 ( $s_2$ ), т.к. правило отношения (RHS / положительный коэффициент в столбце 1) дает минимум  $1/11$  в строке 2 ( $s_2$ ).

Т.о. разрешающий столбец - столбец 1 ( $u_1$ ), разрешающая строка - строка 2 ( $s_2$ ), опорный элемент имеет значение 11.

После деления строки 2 ( $s_2$ ) на значение опорного элемента и сведения остальных значений в столбце 1 ( $u_1$ ) к 0 получаем:

Базис	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	RHS
$s_1$	0	$24/11$	$72/11$	1	$-9/11$	0	$2/11$
$u_1$	1	$1/11$	$3/11$	0	$1/11$	0	$1/11$
$s_3$	0	$92/11$	$67/11$	0	$-7/11$	1	$4/11$
Z	0	$-10/11$	$-8/11$	0	$1/11$	0	$1/11$

Шаг 2:

- Разрешающим столбцом будет столбец 2 ( $u_2$ ), т.к. строка Z для этого столбца содержит минимальное отрицательное значение, равное  $-10/11$ .
- Разрешающей строкой будет строка 3 ( $s_3$ ), т.к. правило отношения (RHS / положительный коэффициент в столбце 2) дает минимум  $1/23$  в строке 3 ( $s_3$ ).

Т.о. разрешающий столбец - столбец 2 ( $u_2$ ), разрешающая строка - строка 3 ( $s_3$ ), опорный элемент имеет значение  $92/11$ .

После деления строки 3 ( $s_3$ ) на значение опорного элемента и сведения остальных значений в столбце 2 ( $u_2$ ) к 0 получаем:

Базис	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	RHS
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-----

$s_1$	0	0	114/23	1	-15/23	-6/23	2/23
$u_1$	1	0	19/92	0	9/92	-1/92	2/23
$u_2$	0	1	67/92	0	-7/92	11/92	1/23
$Z$	0	0	-3/46	0	1/46	5/46	3/23

Шаг 3:

- Разрешающим столбцом будет столбец 3 ( $u_3$ ), т.к. строка  $Z$  только для этого столбца содержит отрицательное значение, равное  $-3/46$ .
- Разрешающей строкой будет строка 1 ( $s_1$ ), т.к. правило отношения (RHS / положительный коэффициент в столбце 3) дает минимум  $1/57$  в строке 1 ( $s_1$ ).

Т.о. разрешающий столбец - столбец 3 ( $u_3$ ), разрешающая строка - строка 1 ( $s_1$ ), опорный элемент имеет значение  $114/23$ .

После деления строки 1 ( $s_1$ ) на значение опорного элемента и сведения остальных значений в столбце 3 ( $u_3$ ) к 0 получаем:

Базис	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	RHS
$u_3$	0	0	1	23/114	-5/38	-1/19	1/57
$u_1$	1	0	0	-1/24	1/8	0	1/12
$u_2$	0	1	0	-67/456	3/152	3/19	7/228
$Z$	0	0	0	1/76	1/76	2/19	5/38

Т.о. получаем следующее:

- $u_1 = 1/12$
- $u_2 = 7/228$
- $u_3 = 1/57$
- $Z = 5/38$
- $u_1 + u_2 + u_3 = Z = 5/38$
- Цена игры для сдвинутой матрицы B:  $v_B = 1/Z = 7.6$
- Цена игры для исходной матрицы A:  $v_A = v_B - 2 = 5.6$

Оптимальная стратегия игрока номер 2.

Нормируем  $u_1, u_2, u_3$  — получаем вероятности  $q_1, q_2, q_3$  для сокращенной матрицы (столбцы 2, 3, 4 исходной матрицы):

$$q_1 = u_1/Z = 19/30, q_2 = u_2/Z = 7/30, q_3 = u_3/Z = 2/15.$$

Вставляем 0 на месте удаленного доминированного столбца 1, получаем полную стратегию игрока номер 2:

- Вероятность выбрать стратегию B1 равна 0;
- Вероятность выбрать стратегию B2 равна  $19/30 = 0.63$ ;
- Вероятность выбрать стратегию B3 равна  $7/30 = 0.23$ ;
- Вероятность выбрать стратегию B4 равна  $2/15 = 0.13$ ;

Оптимальная стратегия игрока номер 1.

Можно получить из нормировки соответствующей переменной при решении двойственной задачи:

- Вероятность выбрать стратегию A1 равна  $1/10 = 0.1$ ;
- Вероятность выбрать стратегию A2 равна  $1/10 = 0.1$ ;
- Вероятность выбрать стратегию A3 равна 0;
- Вероятность выбрать стратегию A4 равна  $4/5 = 0.8$ ;

#### Задание 4.

Игра для первого игрока.

Пусть  $x_1, x_2, x_3, x_4$  - вероятность выбора стратегии  $A_1, A_2, A_3, A_4$  соответственно.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Пусть  $v$  — минимальный выигрыш первого игрока. Тогда задача максимизации минимального выигрыша записывается как:

$$v \rightarrow \max$$

при условии, что:

$$\sum_{i=1}^4 x_i a_{ji} \geq v$$

для всех  $j = 1, 2, 3, 4$

Таким образом, исходная матричная игра сводится к следующей задаче линейного программирования:

$$v \rightarrow \max$$

$$8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 6x_4 \geq v$$

$$7x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 5x_4 \geq v$$

$$1x_1 - 1x_2 - 4x_3 + 7x_4 \geq v$$

$$7x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 6x_4 \geq v$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Делаю следующую замену переменных:

$$z_1 = x_1/v, z_2 = x_2/v, z_3 = x_3/v, z_4 = x_4/v$$

Так как нижняя цена игры в чистых стратегиях положительна, то итоговый выигрыш  $v$  можем считать положительным. А значит, каждое из ограничений в системе, включая неравенства, можно поделить на это  $v$ .

$$v \rightarrow \max$$

$$8z_1 + 3z_2 + 2z_3 + 6z_4 \geq 1$$

$$7z_1 + 9z_2 + 3z_3 + 5z_4 \geq 1$$

$$1z_1 - 1z_2 - 4z_3 + 7z_4 \geq 1$$

$$7z_1 + 1z_2 + 1z_3 + 6z_4 \geq 1$$

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 1/v$$

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \geq 0$$

Если  $v \rightarrow \max$ , то  $1/v \rightarrow \min$ , а значит можно переписать систему следующим образом:

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \rightarrow \min$$

$$8z_1 + 3z_2 + 2z_3 + 6z_4 \geq 1$$

$$7z_1 + 9z_2 + 3z_3 + 5z_4 \geq 1$$

$$1z_1 - 1z_2 - 4z_3 + 7z_4 \geq 1$$

$$7z_1 + 1z_2 + 1z_3 + 6z_4 \geq 1$$

$$z_1, z_2, z_3, z_4 \geq 0$$

Получили задачу линейного программирования для первого игрока

Игра для второго игрока.

Пусть  $y_1, y_2, y_3, y_4$  - вероятность выбора стратегии  $B_1, B_2, B_3, B_4$  соответственно.

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Пусть  $w$  — максимальный выигрыш первого игрока. Тогда задача минимизации максимального выигрыша записывается как:

$$w \rightarrow \min$$

при условии, что:

$$\sum_{i=1}^4 y_i a_{ij} \leq w$$

для всех  $j = 1, 2, 3, 4$

Таким образом, исходная матричная игра сводится к следующей задаче линейного программирования:

$$w \rightarrow \min$$

$$8y_1 + 7y_2 + 1y_3 + 7y_4 \leq w$$

$$3y_1 + 9y_2 - 1y_3 + 1y_4 \leq w$$

$$2y_1 + 3y_2 - 4y_3 + 1y_4 \leq w$$

$$6y_1 + 5y_2 + 7y_3 + 6y_4 \leq w$$

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 1, y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

Получили задачу линейного программирования для второго игрока.

Для решения задачи (игры) с помощью программирования я буду использовать язык python и библиотеку cvxpy.

Код решения задачи линейного программирования для первого игрока:

```
import cvxpy as cp

if __name__ == "__main__":
    z1 = cp.Variable(nonneg=True)
```

```

z2 = cp.Variable(nonneg=True)
z3 = cp.Variable(nonneg=True)
z4 = cp.Variable(nonneg=True)
objective = cp.Minimize(z1 + z2 + z3 + z4)
constraints = [
    8 * z1 + 3 * z2 + 2 * z3 + 6 * z4 >= 1,
    7 * z1 + 9 * z2 + 3 * z3 + 5 * z4 >= 1,
    1 * z1 - 1 * z2 - 4 * z3 + 7 * z4 >= 1,
    7 * z1 + 1 * z2 + 1 * z3 + 6 * z4 >= 1
]
problem = cp.Problem(objective, constraints)
problem.solve()
print(f"Status: {problem.status}")
print(f"Optimal value: {problem.value:.2f}")
print(f"z1: {z1.value:.2f}")
print(f"z2: {z2.value:.2f}")
print(f"z3: {z3.value:.2f}")
print(f"z4: {z4.value:.2f}")
print("Check constraint:")
print(f"8 * z1 + 3 * z2 + 2 * z3 + 6 * z4 = {(8 * z1 + 3 * z2 + 2 * z3 + 6 * z4).value} >= 1")
print(f"7 * z1 + 9 * z2 + 3 * z3 + 5 * z4 = {(7 * z1 + 9 * z2 + 3 * z3 + 5 * z4).value} >= 1")
print(f"1 * z1 - 1 * z2 - 4 * z3 + 7 * z4 = {(1 * z1 - 1 * z2 - 4 * z3 + 7 * z4).value} >= 1")
print(f"7 * z1 + 1 * z2 + 1 * z3 + 6 * z4 = {(7 * z1 + 1 * z2 + 1 * z3 + 6 * z4).value} >= 1")
v = 1 / problem.value
print(f"game score: {v:.2f}")
print(f"x1: {z1.value * v:.2f}")
print(f"x2: {z2.value * v:.2f}")
print(f"x3: {z3.value * v:.2f}")
print(f"x4: {z4.value * v:.2f}")

```

Запускаю этот код на выполнение - получаю следующий результат:

```

Status: optimal
Optimal value: 0.18
z1: 0.02
z2: 0.02
z3: 0.00
z4: 0.14
Check constraint:
8 * z1 + 3 * z2 + 2 * z3 + 6 * z4 = 1.05357142973671 >= 1
7 * z1 + 9 * z2 + 3 * z3 + 5 * z4 = 1.0000000000631353 >= 1
1 * z1 - 1 * z2 - 4 * z3 + 7 * z4 = 1.0000000002273484 >= 1
7 * z1 + 1 * z2 + 1 * z3 + 6 * z4 = 1.0000000012496293 >= 1

```

```
game score: 5.60
x1: 0.10
x2: 0.10
x3: 0.00
x4: 0.80
```

Код решения задачи линейного программирования для второго игрока:

```
import cvxpy as cp

if __name__ == "__main__":
    y1 = cp.Variable(nonneg=True)
    y2 = cp.Variable(nonneg=True)
    y3 = cp.Variable(nonneg=True)
    y4 = cp.Variable(nonneg=True)
    w = cp.Variable(nonneg=True)
    objective = cp.Minimize(w)
    constraints = [
        8 * y1 + 7 * y2 + 1 * y3 + 7 * y4 <= w,
        3 * y1 + 9 * y2 - 1 * y3 + 1 * y4 <= w,
        2 * y1 + 3 * y2 - 4 * y3 + 1 * y4 <= w,
        6 * y1 + 5 * y2 + 7 * y3 + 6 * y4 <= w,
        y1 + y2 + y3 + y4 == 1
    ]
    problem = cp.Problem(objective, constraints)
    problem.solve()
    print(f"Status: {problem.status}")
    print(f"Optimal value: {problem.value:.2f}")
    print(f"y1: {y1.value:.2f}")
    print(f"y2: {y2.value:.2f}")
    print(f"y3: {y3.value:.2f}")
    print(f"y4: {y4.value:.2f}")
    print("Check constraint:")
    print(f"8 * y1 + 7 * y2 + 1 * y3 + 7 * y4 = {(8 * y1 + 7 * y2 + 1 * y3 + 7 * y4).value:.2f} <= {w.value:.2f}")
    print(f"3 * y1 + 9 * y2 - 1 * y3 + 1 * y4 = {(3 * y1 + 9 * y2 - 1 * y3 + 1 * y4).value:.2f} <= {w.value:.2f}")
    print(f"2 * y1 + 3 * y2 - 4 * y3 + 1 * y4 = {(2 * y1 + 3 * y2 - 4 * y3 + 1 * y4).value:.2f} <= {w.value:.2f}")
    print(f"6 * y1 + 5 * y2 + 7 * y3 + 6 * y4 = {(6 * y1 + 5 * y2 + 7 * y3 + 6 * y4).value:.2f} <= {w.value:.2f}")
    print(f"y1 + y2 + y3 + y4 = {(y1 + y2 + y3 + y4).value:.2f} == 1")
```

Запускаю этот код на выполнение - получаю следующий результат:

```
Status: optimal
Optimal value: 5.60
y1: 0.00
```

y2: 0.63

y3: 0.23

y4: 0.13

Check constraint:

$$8 * y1 + 7 * y2 + 1 * y3 + 7 * y4 = 5.60 \leq 5.60$$

$$3 * y1 + 9 * y2 - 1 * y3 + 1 * y4 = 5.60 \leq 5.60$$

$$2 * y1 + 3 * y2 - 4 * y3 + 1 * y4 = 1.10 \leq 5.60$$

$$6 * y1 + 5 * y2 + 7 * y3 + 6 * y4 = 5.60 \leq 5.60$$

$$y1 + y2 + y3 + y4 = 1.00 == 1$$

Как итог, получаю следующие результаты:

- Цена игры 5.6. Ожидаемый выигрыш игрока II равен – 5.6.
- Вероятность выбрать стратегию A1 первым игроком равна 0.1;
- Вероятность выбрать стратегию A2 первым игроком равна 0.1;
- Вероятность выбрать стратегию A3 первым игроком равна 0;
- Вероятность выбрать стратегию A4 первым игроком равна 0.8;
- Вероятность выбрать стратегию B1 вторым игроком равна 0;
- Вероятность выбрать стратегию B2 вторым игроком равна 0.63;
- Вероятность выбрать стратегию B3 вторым игроком равна 0.23;
- Вероятность выбрать стратегию B4 вторым игроком равна 0.13;