① Mulțimea U este formată din 2 elemente alese aleator din mulțimea $\{4,5,6,7\}$, iar mulțimea V este formată din 4 elemente din $\{1,2,3,8,9,10\}$. Fie mulțimea $W = U \cup V$ (U și V fără returnare).

a) nr. total de mulțimi posibile pentru W.

<u>Sol:</u> $U \cap V = \emptyset \Rightarrow W = \{u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$u_1, u_2 \in U$, $v_1, \dots, v_4 \in V$.

u_1, u_2 pot fi alese din U în C_4^2 moduri

$v_1, \dots, v_4$ pot fi alese din V în C_6^4 moduri

Nr. de mulțimi W este $C_4^2 \cdot C_6^4$.

b) P(„W conține cel puțin un nr. impar")

Def. evenimentele:

C: W conține cel puțin un nr. impar

~~$\bar{C}$: W conține doar numere pare.~~

În $\{1,2,3,8,9,10\}$ avem 3 nr. pare și 3 nr. impare. Oricum am alege 4 numere dintre acestea, cel puțin unul va fi impar $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ V conține cel puțin un nr impar $\Rightarrow$ W conține cel puțin un nr. impar $\Rightarrow$ $P(C) = 1$.

c) P(„W conține nr. ≤ 8")

În $\{1,2,3,8,9,10\}$ avem o singură posibilitate de a selecta 4 nr. ≤ 8.

Aceasta este mulțimea $V = \{1,2,3,8\}$. $\Rightarrow N_V = 1$

Orice mulțime U are elementele ≤ 8. $\Rightarrow N_U = C_4^2$

Nr. total de mulțimi W este $N_W = N_U \cdot N_V = C_4^2 \cdot 1 = C_4^2$.

Pentru evenimentul C: „W conține nr. ≤ 8", avem

$$P(C) = \frac{N_W}{C_4^2 \cdot C_6^4} = \frac{C_4^2}{C_4^2 \cdot C_6^4} = \frac{1}{C_6^4}.$$

d) P("W conține cel puțin 2 nr impare")

Definim evenimentele :

U_i : "U conține exact i nr. impare"
V_i : "V conține exact i nr. impare"
D : "W conține cel puțin 2 nr. impare"
$\bar{D}$: "W conține cel mult un nr. impar"

$P(D) = 1 - P(\bar{D})$

$P(\bar{D}) = P(U_0 \wedge V_0) + P(U_0 \wedge V_1) + P(U_1 \wedge V_0)$
(putem avea fie toate nr. pare în W, fie o mulțime cu exact un nr. impar)
$P(U_0 \wedge V_0) = 0$ (v. b): V conține cel puțin un nr. impar)
$P(U_1 \wedge V_0) = 0$ (idem)
$P(V_1) = 1 \Rightarrow V_1 = \Omega \Rightarrow P(U_0 \wedge V_1) = P(U_0 \wedge \Omega) = P(U_0)$

$P(U_0) = P($"U conține doar nr. pare"$) = \dfrac{\#\{\{4,6\}\}}{C_4^2} = \dfrac{1}{C_4^2}$

$\Rightarrow P(\bar{D}) = \dfrac{1}{C_4^2} \Rightarrow P(D) = 1 - \dfrac{1}{C_4^2}$

e) P("{1,7} inclus în W") $\overset{not.}{=}$ P(E)
$7 \in U \Rightarrow U = \{7, u\}$
$1 \in V \Rightarrow V = \{1, v_1, v_2, v_3\}$
Nr. cazurilor favorabile implică alegerea submulțimilor
$\{u\} \subset \{4,5,6\}$ în C_3^1 moduri și $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \{2,3,8,9,10\}$ în C_5^3 moduri
$\Rightarrow P(\{1,7\} \subset W) = \dfrac{C_3^1 \cdot C_5^3}{C_4^2 \cdot C_6^4}$.

f) P("{1,7} ⊂ W știind că sunt cel puțin 2 nr. impare")
Folosim P(D) de la d) și P(E) de la e)
Obs. $P(D|E) = 1$ (1,7 sunt impare și incluse în W)
Bayes: $P(E|D) = \dfrac{P(D|E)\cdot P(E)}{P(D)} = \dfrac{P(E)}{P(D)} = \dfrac{C_3^1 \cdot C_5^3}{C_4^2 \cdot C_6^4} \cdot \dfrac{C_4^2}{C_4^2 - 1}$.

② Se dă distrib. $Y = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} & \frac{4}{10} \end{pmatrix}$. Să se calculeze $E(Y)$ și $Std(Y)$.

Sol.

$$E(Y) = \sum_{i \in I} y_i \cdot P(Y = y_i) = -2 \cdot \frac{3}{10} - 1 \cdot \frac{2}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{4}{10} = \frac{4-6-2}{10} = -\frac{2}{5}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y)$$

$$E(Y^2) = \sum_{i \in I} y_i^2 P(Y = y_i) = 4 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{4}{10} = \frac{12+2+4}{10} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

$$V(Y) = \frac{9}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{45-4}{25} = \frac{41}{25}$$

$$Std(Y) = \sqrt{V(Y)} = \frac{\sqrt{41}}{5}.$$

③ Se dă fct. de repartiție $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^\theta, & x \in (0,1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

a) Să se calculeze θ știind că $P(S > \frac{1}{4}) = \frac{15}{16}$

Sol.

$$P(S > \tfrac{1}{4}) = 1 - P(S \leq \tfrac{1}{4}) = 1 - F(\tfrac{1}{4}) = \frac{15}{16} \Rightarrow F(\tfrac{1}{4}) = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^\theta = \frac{1}{16} \Rightarrow \theta = 2$$

b) Știind că $\overline{x_m} = \frac{1}{2}$, să se aproximeze valoarea lui θ folosind metoda momentelor.

Avem $n = 1$, $f(x) = \begin{cases} \theta \cdot x^{\theta - 1}, & x \in (0,1) \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (0,1) \end{cases}$

$$E(X) = \int_0^1 x f(x) dx = \int_0^1 \theta x^\theta dx = \frac{x^{\theta+1}}{\theta+1} \cdot \theta \Big|_0^1 = \frac{\theta}{\theta+1}$$

Rezolvăm ec. $E(X) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} X_i = \overline{X_m} \Rightarrow \frac{\theta}{\theta+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{\theta} = 1.$