PS - Seminar 2

1. Un cub de sticlă este vopsit pe fiecare față, apoi este împărțit în 1000 de cubulețe de aceleași dimensiuni. Un cubuleț este ales aleator. Calculați probabilitățile următoarelor evenimente:

a) A: "cubulețul are exact 3 fețe vopsite"

b) B: "cubulețul are exact 2 fețe vopsite"

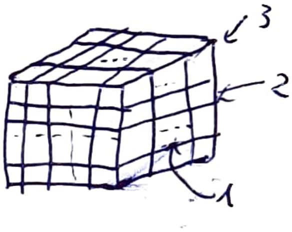
c) C: "cubulețul are exact o față vopsită"

d) D: "cubulețul nu are nicio față vopsită"

Soluție:

$1000 = 10 \times 10 \times 10 \Rightarrow$ 10 cubulețe lungime, 10 lățime, 10 înălțime.

Cubulețe vopsite cu 3 culori → colțurile (8)



$$P(A) = \frac{8}{1000}$$

Cubulețe vopsite cu 2 culori → muchiile, fără colțuri.

Avem 12 muchii, pe fiecare muchie câte 8 cubulețe

$$P(B) = \frac{12 \cdot 8}{1000}$$

Cubulețe vopsite cu 1 culoare → fețele, fără margini

Zona de 8×8 cubulețe din interiorul fiecărei fețe

$$P(C) = \frac{6 \cdot 8 \cdot 8}{1000}$$

Cubulețe vopsite cu 0 culori → interiorul cubului

$P(D) = \dfrac{8 \cdot 8 \cdot 8}{1000}$, alternativ $1 - P(A) - P(B) - P(C)$.

2. Un agent de vânzări trimite 10 emailuri distincte cu reclame alegând aleator pentru fiecare email un destinatar dintr-o listă de 20 de persoane. Care este probabilitatea ca prima persoană din listă să primească 5 emailuri?

Soluție:

Considerăm funcțiile $f : E = \{e_1, \dots, e_{10}\} \to D = \{d_1, \dots, d_{20}\}$ care atribuie fiecărui email câte un destinatar. Numărul lor este

$$N_f = |D|^{|E|} = 20^{10}.$$

Fie f' subsetul funcțiilor f care mapează exact 5 emailuri la destinatarul d_1. Cele 5 emailuri pot fi alese în C_{10}^5 moduri. Rămâne să numărăm modurile în care cele 5 emailuri rămase pot fi trimise celorlalți 19 destinatari. Numărul lor este egal cu numărul de funcții $g : \{e_1', \dots, e_5'\} \to \{d_2, \dots, d_{20}\}$, adică 19^5.
Prin urmare,

$$N_{f'} = C_{10}^5 \cdot 19^5,$$

iar probabilitatea este

$$P = \frac{N_{f'}}{N_f} = \frac{C_{10}^5 \cdot 19^5}{20^{10}}.$$

3. Presupunem în continuare că data nașterii unei persoane alese aleator este în oricare dintre lunile anului cu aceleași șanse (i.e., probabilitatea ca o persoană aleasă aleator să aibă data nașterii într-o anumită lună este $\frac{1}{12}$). Care este probabilitatea ca

a) într-un grup de 5 persoane să fie cel puțin 2 persoane care își serbează zilele de naștere în aceeași lună?

b) într-un grup de 5 persoane zilele de naștere sunt serbate toate în cel mult două luni?

Soluție:

a) Numim evenimentul

A: "minim două persoane sunt născute în aceeași lună"

și formulăm evenimentul contrar

A': "toate persoanele sunt născute în luni diferite".

$$\left.\begin{array}{l} A \cap A' = \emptyset \\ A \cup A' = \Omega \end{array}\right\} \Rightarrow P(A) + P(A') = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(A')$$

Pentru $P(A')$:

- nr. cazurilor favorabile este $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$

 (prima persoană poate fi născută în oricare dintre cele 12 luni;

 a doua persoană în orice lună în care nu e născută prima, deci 11, etc)

- nr. cazurilor posibile este 12^5

$$\Rightarrow P(A') = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{12^5} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{12^5}.$$

b) Definim evenimentul

B: "zilele de naștere sunt serbate în cel mult două luni"

și, de asemenea,

B_1: "zilele de naștere sunt serbate în exact o lună",

B_2: "zilele de naștere sunt serbate în exact două luni"

Observăm
$$\left.\begin{array}{l} B_1 \cap B_2 = \emptyset \\ B_1 \cup B_2 = B \end{array}\right\} \Rightarrow P(B) = P(B_1) + P(B_2).$$

Pentru B_1:

- nr. cazurilor favorabile este 12 (toate persoanele sunt născute în aceeași lună)

- nr. cazurilor posibile este 12^5

$$\Rightarrow P(B_1) = \frac{12}{12^5}$$

Pentru B_2:

- nr. cazurilor favorabile
  - Alegem 2 luni din cele 12 în C_{12}^2 moduri.
  - Să notăm lunile cu 0 și 1. Ne interesează numărul de șiruri binare de lungime 5 care conțin atât biți de 0 cât și biți de 1. Acest număr este $2^5 - 1_{(00000)} - 1_{(11111)} = 30$.
    Pentru un șir binar $b_1 b_2 b_3 b_4 b_5$, semnificația este că persoana i este născută în luna 1 dacă $b_i = 0$, respectiv în luna 2 dacă $b_i = 1$.
  - N.C.Fav. $= 30 \cdot C_{12}^2$
- nr cazurilor total posibile este $12^5 \Rightarrow P(B_2) = \frac{30 \cdot C_{12}^2}{12^5}$

În final,

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{12 + 30 \cdot C_{12}^2}{12^5}.$$

4. La un concurs de șah participă 5 băieți și 5 fete. Se formează aleator 5 perechi de jucători. Care este probabilitatea ca fiecare băiat să joace împotriva unei fete?

<u>Soluție</u>:

- Numărul cazurilor favorabile.

  Pentru rundele 1..5 definim funcția $f: \mathbb{N}^* \to B = \{b_1, \ldots, b_5\} \times F = \{f_1, \ldots, f_5\}$,
  $f(i) = (b_x, f_y)$ înseamnă că în runda i au jucat băiatul b_x și fata f_y.

  $f(1)$ poate fi ales în 5^2 moduri (oricare dintre cei 5 băieți joacă cu oricare dintre cele 5 fete)

  $f(2)$ poate fi ales în 4^2 moduri (oricare dintre cei 4 băieți rămași joacă cu oricare dintre cele 4 fete rămase)

  $f(3)$ poate fi ales în 3^2 moduri

  $f(2)$ poate fi ales în 2^2 moduri

  $f(1)$ poate fi ales în 1^2 moduri.

$\Rightarrow$ N.C. Fav $= 5^2\cdot 4^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 1^2 = (5!)^2$.

• Numărul cazurilor posibile

Pentru prima rundă alegem 2 dintre cei 10 participanți în C_{10}^2 moduri.
Pentru runda 2 alegem 2 dintre cei 8 participanți rămași, în C_8^2 moduri
etc.

NC Posibil $= C_{10}^2\cdot C_8^2\cdot C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^2$

$$\Rightarrow P = \frac{(5!)^2}{C_{10}^2\cdot C_8^2\cdot C_6^2 C_4^2\cdot C_2^2}.$$

5. Cinci bile numerotate de la 1 la 5 sunt așezate orizontal în mod arbitrar. Determinați:

a) prob. ca prima și ultima bilă să aibă numere pare.

b) prob. ca primele două bile să aibă numere impare.

c) prob. ca bilele cu numere pare să fie alăturate

d) prob. ca cel puțin 2 bile alăturate să aibă aceeași paritate.

Soluție:

Nr. cazurilor posibile este mereu 5!.

a)

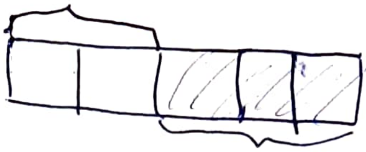
aici sunt 2 și 4 permutate în 2! moduri

Aici sunt 1, 3, 5 permutate în 3! moduri

$$P(A) = \frac{2!\cdot 3!}{5!}$$

b)

aici sunt 2 din cele 3 nr impare, nr total de posibilități este A_3^2



Aici e celălalt nr impar
+ cele 2 nr. pare,
permutate în 3! moduri.

$$P(B) = \frac{3! \cdot A_3^2}{5!}$$

c)

$$\left(\boxed{2/4} \quad \boxed{1} \quad \boxed{3} \quad \boxed{5} \right) \Rightarrow 4! \text{ permutări}$$

o singură entitate

$\boxed{24}$ reprezintă $(2\ 4)$ sau $(4\ 2) \Rightarrow 2$ posibilități $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{2 \cdot 4!}{5!}$$

d) Definim evenimentul

D : "cel puțin două bile alăturate au aceeași paritate"

și evenimentul contrar

D' : "toate bilele alăturate au parități diferite"

$D \cap D' = \emptyset$, $D \cup D' = \Omega \Rightarrow P(D) = 1 - P(D')$

Pentru $P(D')$: singura amplasare de paritate este

i	p	i	p	i

Nr impare sunt permutate în 3! moduri
Nr pare sunt permutate în 2! moduri

$$\Rightarrow P(D') = \frac{2! \cdot 3!}{5!} \Rightarrow P(D) = 1 - \frac{2! \cdot 3!}{5!}$$

6. 9 persoane se îmbarcă aleatoriu într-un tren cu 3 vagoane. Calculați probabilitatea ca

a) în primul vagon să fie exact 3 persoane

b) în fiecare vagon să fie 3 persoane.

c) într-un vagon să fie 1 persoană, iar în celelalte 2 să fie câte 4 persoane.

Temă d) în fiecare vagon să fie cel puțin 1 persoană.

<u>Soluție:</u>

NC Posibile $= 3^9$ (fiecare persoană poate ocupa vagonul 1, 2 sau 3).

a) Alegem cele 3 persoane din primul vagon în C_9^3 moduri.
În câte moduri putem distribui celelalte 6 persoane rămase în 2 vagoane? $- 2^6$ moduri.

$$P(A) = \frac{C_9^3 \cdot 2^6}{3^9}.$$

b) Alegem 3 persoane din 9 pentru primul vagon în C_9^3 moduri.
Alegem 3 persoane din cele 6 rămase pentru al doilea vagon în C_6^3 moduri.
Ultimele 3 persoane merg în al treilea vagon: C_3^3.

$$P(B) = \frac{C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3}{3^9}$$

c) Într-un vagon de 4 persoane punem pasageri în C_9^4 moduri.
În celălalt vagon de 4 persoane punem pasageri în C_5^4 moduri.
Ultima persoană merge în ultimul vagon.
Dacă contează ordinea vagoanelor ($\boxed{4}-\boxed{4}-\boxed{1} \neq \boxed{4}-\boxed{1}-\boxed{4}$) înmulțim rezultatul cu 3 (144, 414, 441)

$$P(C) = \frac{C_9^4 \cdot C_5^4 \cdot C_1^1}{3^9}.$$

7. Un alfabet are 21 consoane și 5 vocale (se vor considera doar minuscule). În câte moduri se pot alege 6 litere astfel încât să fie alese 4 consoane distincte și 2 vocale distincte, dacă:

a) nu se ia în considerare ordinea lor?

b) se ia în considerare ordinea lor?

<u>Soluție</u>:

a) Alegem consoanele în C_{21}^4 moduri și vocalele în C_5^2 moduri.

$N = C_{21}^4 \cdot C_5^2$.

b). Alegem un șir de 4 consoane în A_{21}^4 moduri.

Dintre cele 2 vocale alese în C_5^2 moduri, pe prima o putem adăuga șirului în 5 moduri (început, sfârșit sau între consoane), iar a doua o adăugăm noului șir de 5 litere în 6 moduri.

$N = A_{21}^4 \cdot C_5^2 \cdot 6 \cdot 5$.

8. La o petrecere sunt 8 femei și 8 bărbați. Ana și Vlad sunt în acest grup de prieteni. Cele 16 persoane se așează aleator pe 16 fotolii într-un rând.

a) Care este probabilitatea ca doi bărbați și două femei să nu stea alături?

b) Care este probabilitatea ca doi bărbați și două femei să nu stea alături și Ana și Vlad să stea unul lângă altul?

<u>Soluție</u>:

a) Nr. Posibile $= 16!$

Nr. cazuri favorabile: $\left\{\begin{matrix} B\ F\ B\ F\ B\ F \ldots\ B\ F \\ F\ B\ F\ B\ F\ B - F\ B \end{matrix}\right\} 2$ cazuri

$B_1 \ldots B_8$ permută în $8!$ moduri

$F_1 \ldots F_8$ permută în $8!$ moduri

$\Rightarrow NCFav = 2 \cdot 8! \cdot 8!$

$\Rightarrow P(A) = \dfrac{2 \cdot (8!)^2}{16!}$

b) Pentru $BFBF \ldots BF$

- dacă Vlad este primul băiat
  - $\Rightarrow$ Ana e prima fată
  - $\Rightarrow$ restul B se permută în 7! moduri
  - $\Rightarrow$ restul fetelor se permută în 7! moduri

  $\Rightarrow NCFav = 7! \cdot 7!$

- dacă Vlad nu e primul băiat
  - $\Rightarrow$ primul băiat e oricare din ceilalți 7 băieți
  - $\Rightarrow$ Vlad și restul de 6 băieți se permută în 7! moduri
  - $\Rightarrow$ Ana poate sta în stânga sau în dreapta lui Vlad (2 moduri)
  - $\Rightarrow$ restul fetelor permută în 7! moduri

  $\Rightarrow NCFav = 2 \cdot 7 \cdot 7! \cdot 7!$

Pentru $FBFB \ldots FB$

- același raționament, doar discutăm dacă Ana e prima fată sau nu

$\Rightarrow 7! 7! + 2 \cdot 7 \cdot 7! \cdot 7!$

$\Rightarrow P(B) = \dfrac{2 \cdot (7! \cdot 7! + 2 \cdot 7 \cdot 7! \cdot 7!)}{16!}$

Temă 9. Determinați în câte moduri se pot împărți următoarele fructe la 3 copii:

a) o banană, o portocală, o pară, un măr și un kiwi
b) cinci banane
c) cinci banane și 3 portocale
d) cinci banane, 3 portocale și 4 pere