# Exemplu de subiect

(1) Dați definiția formală a unei gramatici.

O gramatică este un cvadruplu $G = (N, \Sigma, P, S)$, unde:

$N$ este un alfabet de simboluri neterminale

$\Sigma$ este un alfabet de simboluri terminale

$N \cap \Sigma = \emptyset$

$P \subseteq (N \cup \Sigma)^* N (N \cup \Sigma)^* \times (N \cup \Sigma)^*$ mulțimea regulilor de producție (finită)

$S \in N$ (simbolul de start)

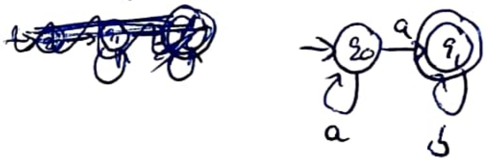
(2) Fie $L$ - limbajul regular corespunzător expresiei regulare $aa^*b^*$.
Fie $w = abb$. Puteți identifica două descompuneri $w = xyz$, cu $y \neq \varepsilon$,
a.î. $xy^iz$ în $L$? (Justificați!)

Se aplică lema de pompare: Dacă $L$ este un limbaj regular, atunci
$(\exists)\ p \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(\forall)\ w \in L$, $|w| \geq p$, există o descompunere de forma
$w = xyz$ a.î. $0 < |y|$, $|xy| \leq p$, $xy^iz \in L\ \forall\ i \in \mathbb{N}$.

Mai știm, de asemenea, că orice expresie regulară peste $\Sigma$ descrie un limbaj regular peste $\Sigma$.

$\Rightarrow$ $L$ este limbaj regular $\Rightarrow$ are loc lema de pompare.

Pentru a determina $p$, construim $M = AF$ a.î. $L(M) = L$.

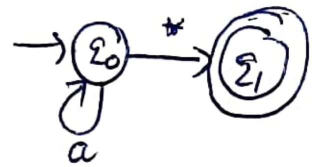



$\Rightarrow p =$ nr de stări ale lui $M = 2$

Pentru $w = abb$ avem $|w| = 3 > p$. Alegem cele două descompuneri pentru care $y$ corespunde etichetelor celor două arce care formează cicluri: $y = a$, $x = \varepsilon$, $z = bb$

$y = b$, $x = a$, $z = b$

③ Dați exemplu de AF cu 2 stări care acceptă limbajul corespunzător expresiei aritmetice : $a^*$.




④ Dată fiind următoarea gramatică:

$S \to abc$

$S \to aSBc$

$cB \to Bc$

$bB \to bb$

Specificați valoarea de adevăr a următoarelor afirmații:

a) gramatica este independentă de context

b) gramatica este dependentă de context

c) gramatica este monotonă

---

Gramaticile dependente de context sunt și monotone! (tip 1)

$\forall\ \alpha \to \beta \in P : |\alpha| \leq |\beta|$ (se verifică pe rând regulile)

$1 = |S| \leq |abc| = 3$ etc.

$\Rightarrow$ G este monotonă $\Rightarrow$ b, c adevărate

G nu este independentă de context (tip 2), deoarece regula $cB \to Bc$ nu are forma "$A \to \alpha$" $\Rightarrow$ a falsă.

⑤ Fie gramatica cu următoarele reguli de producție:

$S \to aS \mid bS \mid c$

Construiți tabelul de analiză LR(1). Gramatica dată este LR(1)?

Îmbogățim gramatica cu simbolul de start S':

$S' \to S$ (1)

$S \to aS$ (2)

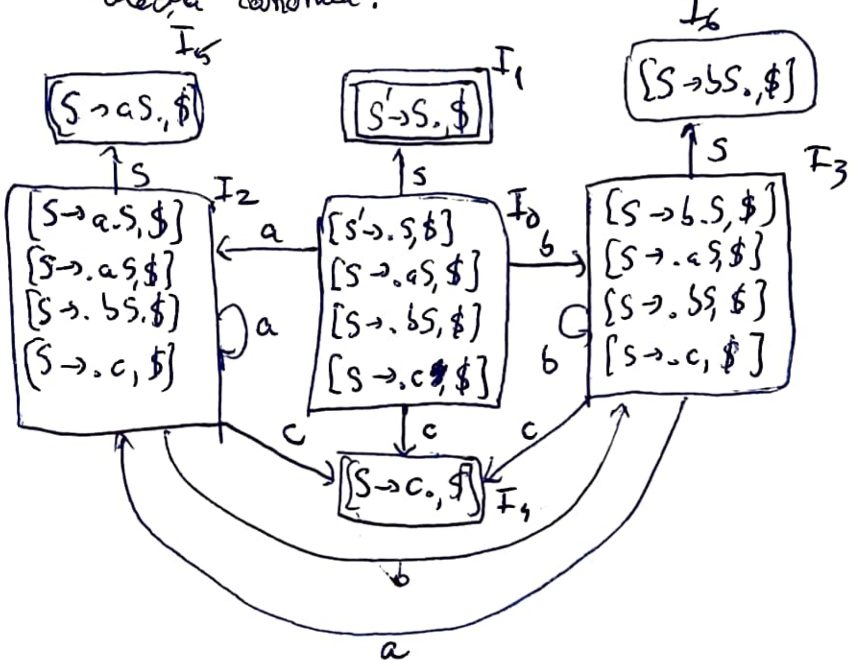
$S \to bS$ (3)

$S \to c$ (4)

Calculăm FIRST1:

| | FIRST$_1$ |
|---|---|
| S' | a, b, c |
| S | a, b, c |

Colecția canonică:




| | S' | S | a | b | c | $ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_0$ | | s1 | s2 | s3 | s4 | |
| $I_1$ | | | | | | acc |
| $I_2$ | | s5 | s2 | s3 | s4 | |
| $I_3$ | | s6 | s2 | s3 | s4 | |
| $I_4$ | | | | | | r4 |
| $I_5$ | | | | | | r2 |
| $I_6$ | | | | | | r3 |

Nu avem conflicte în tabel
=> G este LR(1).

⑥ Fie următoarea instrucțiune Pascal:

if a > b then max := a else max := b

a) Dați o gramatică independentă de context (simplificată) care descrie sintaxa instrucțiunilor din limbajul original, care apar în exemplul dat.

b) Traduceți în cod intermediar cu 3 adrese, repr. cvadruple

a) D → if E then A else A

E → L > L

A → L := L

L → a | b | max

b) Atributarea gramaticii:

D → if E then $A_1$ else $A_2$

D.cod = E.cod || (g(b=), E.cod, D.true, D.elseL…) || $A_1$.cod || (goto, -, -, D.finLab…) || D.elseLabel: || $A_2$.cod || D.finLabel

D.elseLabel = newLabel()
D.finLabel = newLabel()
D.true = const true

E → $L_1 > L_2$ E.varn = newVarn(); E.cod = (ge, $L_1$.varn, $L_2$.varn, E.varn)

A → $L_1 := L_2$ A.varn = $L_1$.varn ; A.cod = (attr, $L_2$.varn, -, $L_1$.varn)

L → a L.varn = a

L → b L.varn = b

L → max L.varn = max

Alte exemple

Pentru următoarea gramatică independentă de context aplicați factorizare la stânga:

$E \to T + E$

$E \to T$

$T \to F * T$

$T \to F$

$F \to (E)$

$F \to a$

---

$E \to T E'$

$E' \to + E$

$E' \to \varepsilon$

$T \to F T'$

$T' \to * T$

$T' \to \varepsilon$

$F \to (E)$

$F \to a$

a) Enunțați: Lema de pompare pt. limbajele independente de context

b) Fie gramatica: $S \to 0A1$

$A \to 0S$

$A \to a$

și secvența 000a11.

Puteți să dați o descompunere a secvenței date care să poată fi „pompată" conform descrierii din lema de pompare?

a) Dacă $L$ este limbaj regular, atunci $(\exists)\, p \in \mathbb{N}^*$ a.î. $(\forall)\, w \in L$, $|w| \geq p$, există o descompunere de forma $w = xyz$ a.î. $|y| > 0$, $|xy| \leq p$,

$xy^iz \in L$, $(\forall)\, i \in \mathbb{N}$

b) Demonstrăm că limbajul nu este regular:

$(\forall)\, p \in \mathbb{N}$ $(\exists)\, w \in L$, $|w| \geq p$, $(\forall)\, x,y,z$: $w = xyz$, $|y| > 0$, $|xy| \leq p$,

a.î. $(\exists)\, i \in \mathbb{N}$ pentru care $xy^iz \notin L$

Pentru $p = 0$, $|xy| \leq 0$, contradicție cu $|y| > 0$

Pentru $p = 1$ alegem $w = 0a1$

$x = \varepsilon,\ y = 0,\ z = a1 \Rightarrow xy^3z = 000a1 \notin L$

$x = 0,\ y = a \Rightarrow |xy| = 2 \nleq 1$

Pentru $p = n$ alegem $w = 0^{n+1}a1^n$

Cum $|xy| \leq p$, găsim $xy = 0^{|xy|} \subset 0^{n+1}$ și atunci $y = 0^k$, $x = 0^q$, $k + q = p$

pentru $i = 2 \Rightarrow$ $xy^2z = \underbrace{0^{n-k}}_{x}\underbrace{(0^k)^2}_{y}\underbrace{0a1^n}_{z}$

$= 0^{n+k+1}a1^n \notin L$ $(L = \{0a1\} \cup \{0^{n-1}a1^n \mid n \in$ …

$\Rightarrow$ Limbajul $L$ nu este regular $\Rightarrow$ nu există descompunerea cerută.

Fie $r$ - o expresie regulară oarecare. Care este valoarea de adevăr a următoarelor afirmații?

a) $(r^+)^* = r^*$

b) $(r+\varepsilon)^* = r^*$

c) $r^* r^* = r^*$

d) $r^+ + \varepsilon = r^*$

$r^* = \{\varepsilon, r, r^2, \ldots\} = \{r^n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\varepsilon\}$

a) Dem $(r^*)^* \subseteq r^*$

Fie $x \in (r^*)^* \Rightarrow x \in y^*, \; y = r^m \Rightarrow x = y^n \Rightarrow x = (r^m)^n = r^{mn} \in r^*$

Dem $r^* \subseteq (r^*)^*$

$\forall x \in r^* \Rightarrow x = \underbrace{r^n}_{\text{ex } r, r, \ldots, r} \in (r^*)^n \subset (r^*)^*$

$\Rightarrow (r^*)^* = r^*$ adevărat

b) Dem că $(r+\varepsilon)^n = \{\varepsilon, r, \ldots, r^n\}$ (inducție)

$n = 0 \Rightarrow (r+\varepsilon)^0 = \{\varepsilon\}$

$(r+\varepsilon)^{n+1} = (r+\varepsilon)^n \cdot (r+\varepsilon) = (r+\varepsilon)^n \cdot r + (r+\varepsilon)^n \cdot \varepsilon$

$= \{\varepsilon, r, \ldots, r^n\} r + \{\varepsilon, r, \ldots, r^n\} \varepsilon$

$= \{r, r^2, \ldots, r^{n+1}\} + \{\varepsilon, r, \ldots, r^n\}$

$= \{\varepsilon, r, \ldots, r^{n+1}\}$

$\Rightarrow (r+\varepsilon)^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} (r+\varepsilon)^n = \bigcup_{n=0}^{\infty} r^n = r^* \Rightarrow$ adevărat

c), d) adevărate, analog.