PS. Seminar 3

(1) Un patron deține 3 magazine, m_1, m_2, m_3, care au 50, 75, respectiv 100 de angajați, din care 50%, 60%, respectiv 70% sunt femei. Patronul alege aleator un angajat pentru un bonus la salariu. Care este probabilitatea ca angajatul norocos să lucreze la magazinul m_3, știind că acesta este bărbat?

Soluție:

Definim evenimentele:

M_3 : angajatul lucrează la magazinul m_3

B : angajatul este bărbat

Se aplică formula probabilității condiționate:

$$P(M_3|B) = \frac{P(M_3 \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \left(50 \cdot \frac{1}{2} + 75 \cdot \frac{6}{10} + 100 \cdot \frac{7}{10}\right) / (50+75+100)$$

$$= 1 - \frac{25 + 45 + 70}{225} = \frac{85}{225}$$

$$P(M_3 \cap B) = \frac{100 \cdot \frac{3}{10}}{225} = \frac{30}{225}$$

$$\Rightarrow P(M_3|B) = \frac{30}{85}.$$

(2) O persoană are în buzunar 2 zaruri roșii și 3 zaruri albastre, dintre care alege aleator unul. Dacă a ales un zar roșu, atunci aruncă zarul de 3 ori, iar dacă a ales un zar albastru, atunci aruncă zarul ales de 2 ori. Calculați probabilitatea ca suma punctelor obținute în urma aruncărilor să fie 10.

Soluție:

Definim evenimentele:

R - zarul ales este roșu

$A = \bar{R}$ - zarul ales este albastru

S - suma aruncărilor este 10.

Se aplică formula probabilității totale:

$$P(S) = P(S|R) \cdot P(R) + P(S|\bar{R}) P(\bar{R}).$$

$$P(R) = \frac{2}{5}, \quad P(\bar{R}) = \frac{3}{5}$$

Calculăm

$P(S|\bar{R})$ = probabilitatea de a obține suma 10 când a fost ales un zar albastru $\Leftrightarrow$ zarul a fost aruncat de 2 ori.

Cazuri favorabile: $4+6, 5+5, 6+4 \Rightarrow 3$

Cazuri posibile: $6^2 = 36$.

$$P(S|\bar{R}) = \frac{3}{36}.$$

Calculăm

$P(S|R)$ = probabilitatea de a obține suma 10 când zarul roșu ales a fost aruncat de 3 ori.

Cazuri favorabile: $6+1+3, 6+2+2, 6+3+1, 5+1+4, 5+2+3, 5+3+2, 5+4+1, 4+1+5, 4+2+4, 4+3+3, 4+4+2, 4+5+1, 3+1+6, 3+2+5, 3+3+4, 3+4+3, 3+5+2, 3+6+1, 2+2+6, 2+3+5, 2+4+4, 2+5+3, 2+6+2, 1+3+6, 1+4+5, 1+5+4, 1+6+3 \Rightarrow 27 \Rightarrow P(S|R) = \frac{27}{216}$

Cazuri posibile: $6^3 = 216$

$$\Rightarrow P(S) = \frac{27}{216} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{36} \cdot \frac{3}{5}$$

3. Se aruncă un zar. Fie N numărul care a apărut. Apoi, zarul este aruncat de N ori. Care este probabilitatea ca $N=3$, știind că:
a) numerele obținute în urma celor N aruncări sunt diferite?
b) numerele obținute în urma celor N aruncări sunt egale?

Soluție:

Se aplică teorema lui Bayes.
Definim evenimentele:
D = "nr. obținute sunt diferite"
E = "nr. obținute sunt egale"
$N=i$: "zarul aruncat a dat numărul $i=1..6$"

a) $$P(N=3 \mid D) = \frac{P(D \mid N=3) \cdot P(N=3)}{P(D)}$$

Formula probabilității totale pentru $P(D)$:

$$P(D) = \sum_{i=1}^{6} P(D \mid N=i) \cdot P(N=i)$$

$$P(N=i) = \frac{1}{6} \quad (\forall)\ i = \overline{1,6}$$

$$P(D \mid N=i) = \frac{A_6^i}{6^i}$$ (alegem i nr. din 6, ordonate)

$$\Rightarrow P(N=3 \mid D) = \frac{\frac{A_6^3}{6^3} \cdot \frac{1}{6}}{\sum_{i=1}^{6} \frac{A_6^i}{6^i} \cdot \frac{1}{6}}.$$

b) Similar,

$$P(N=3|E)=\frac{P(E|N=3)\cdot P(N=3)}{P(E)}$$

$$P(E)=\sum_{i=1}^{6} P(E/N=i)\cdot P(N=i)$$

$$P(E|N=i)=\frac{6}{6^{i}} \quad (11\_1,\ 22\_2,\ \_,\ 66\_\_6)$$

(4) Probabilitatea ca un cip, de un anumit tip, să fie defect este 0,06. O componentă pentru calculator are instalate 12 astfel de cipuri. Componenta este funcțională dacă cel puțin 11 sunt operaționale.

1) Calculați probabilitatea ca:

1a) 12 astfel de cipuri să fie funcționale

1b) componenta să fie funcțională.

2) Dacă un calculator are instalate 4 astfel de componente, care este probabilitatea p ca cel puțin 3 dintre ele să fie funcționale?

3) Dacă un calculator are instalate 3 astfel de componente, care este probabilitatea ca în total mai mult de 30 de cipuri să fie funcționale?

Soluție: Se folosește modelul binomial. $b(k,n)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$.

1a) $n=k=12, \quad 1-p_0=0,06.$

$$P(E)=b(12,12)=C_{12}^{12}\cdot p_0^{12}=p_0^{12}=0,94^{12}$$

1b) Definim evenimentele

C - componenta e funcțională

C_{11} - componenta are exact 11 cipuri funcționale

C_{12} - componenta are exact 12 cipuri funcționale

$$\left.\begin{array}{l} C_{11} \cap C_{12} = \emptyset \\ C_{11} \cup C_{12} = C \end{array}\right| \Rightarrow P(C) = P(C_{11}) + P(C_{12})$$

$$P(C_{11}) = b(11,12) = C_{12}^{11} \cdot p_0^{11}(1-p_0)$$

$$P(C_{12}) = b(12,12) = p_0^{12}$$

$$P(C) = 12\, p_0^{11}(1-p_0) + p_0^{12}$$

2) Formula binomială pentru ≥ 3 componente funcționale din 4, rata de succes este $\underline{P(C)}$:

$$p_{3/4} = b(3,4) = C_4^3 \cdot (P(C))^3 (1-P(C))^1.$$

$$p_{4/4} = b(4,4) = C_4^4 \, (P(C))^4$$

$$\Rightarrow \quad p = p_{3/4} + p_{4/4} = 4\,(P(C))^3(1-P(C)) + (P(C))^4.$$

3) 3 componente a câte 12 cipuri $\Rightarrow$ 36 cipuri

C_i : exact i cipuri sunt funcționale $i = 1..36$

E : > 30 cipuri funcționale

$$P(E) = P(C_{31}) + P(C_{32}) + \dots + P(C_{36})$$

$$= b(31,36) + b(32,36) + \dots + b(36,36)$$

$$= C_{36}^{31}\, p_0^{31}(1-p_0)^5 + \dots + p_0^{36}.$$

(5) O persoană tastează aleator 11 litere minuscule pe o tastatură în engleză. Care este probabilitatea ca literele tastate să poată fi permutate astfel încât să se obțină cuvântul "abracadabra"?

Soluție: Modelul urnei cu r culori și bilă returnată

$b(k_1 \ldots k_r; m)$ = probabilitatea de a obține k_i bile cu culoarea i, $i=\overline{1,r}$ din m extrageri cu returnarea bilei extrase:

$$= \frac{m!}{k_1! \ldots k_r!} p_1^{k_1} \ldots p_r^{k_r}$$

Cuvântul abracadabra are – 5 x "a"
2 x "b"
2 x "r"
1 x "c"
1 x "d"

} probabilitatea de a extrage o literă din alfabetul de 26 este 1/26 ∀ literă

$$b(5,2,2,1;11) = \frac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} \cdot p_a^5 \cdot p_b^2 \cdot p_r^2 \cdot p_c \cdot p_d$$

$$= \frac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{26}\right)^{5+2+2+1+1}.$$

(6) Un zar este aruncat de 5 ori. Calculați probabilitățile următoarelor evenimente:

a) A: "exact 2 numere sunt pare"

b) B: "1 apare de 3 ori, 3 apare o dată, 6 apare de 2 ori"

c) C: "exact 2 nr. sunt prime, un nr. este egal cu 1, iar celelalte 2 sunt egale cu 4".

Soluție:

a) 2 numere sunt pare => celelalte 3 sunt impare

Probabilitatea de a obține un nr par este $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$$b(2;3;5) = \frac{5!}{2!\cdot 3!} \cdot p^2 \cdot \bar{p}^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!}\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

b)

$$b(2,1,2;5) = \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!} \cdot (p_1)^2 \cdot (p_3)^1 \cdot (p_6)^2.$$

$p_1 = p_3 = p_6 = \frac{1}{6}$ (prob. de a obține 1, 3, 6)

c) $b(2,1,2) = \frac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!} \cdot (p_{prim})^2 \cdot (p_1)^1 \cdot (p_4)^1$

$p_{prim} = \frac{3}{6}$ (2, 3, 5 prime)

7) O persoană întârzie la serviciu într-o zi ploioasă cu probabilitatea 0,2, iar într-o zi senină cu probabilitatea 0,1. Conform prognozei meteo, în următoarea zi va ploua cu probabilitate 0,8. Care este probabilitatea ca:

a) persoana să ajungă ziua următoare la timp la serviciu?

b) ziua următoare să fie ploioasă, știind că persoana ajunge la timp la serviciu?

Soluție:

Definim evenimentele:

I : persoana întârzie

S : afară e senin

Cunoaștem:

$P(I|\bar{S}) = 0,2$

$P(I|S) = 0,1$

$P(\bar{S}) = 0,8.$

a) Vrem să aflăm $P(\bar{I})$.

Formula probabilității totale:

$$P(I) = P(I|S)\,P(S) + P(I|\bar{S})\,P(\bar{S})$$
$$= P(I|S)(1-P(\bar{S})) + P(I|\bar{S})\,P(\bar{S})$$
$$= 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}18$$
$$P(\bar{I}) = 1 - P(I) = 0{,}82$$

b) Vrem să aflăm $P(\bar{S}|\bar{I})$.

Teorema lui Bayes:

$$P(\bar{S}|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|\bar{S}) \cdot P(\bar{S})}{P(\bar{I})}$$

$$= \frac{(1-P(I|\bar{S}))\,P(\bar{S})}{P(\bar{I})} = \frac{(1-0{,}2)\,(0{,}8)}{0{,}82} = \frac{64}{82}.$$

8) O pereche de zaruri - unul alb și unul roșu - se aruncă o dată și apoi încă o dată. Calculați probabilitatea ca numerele apărute la cea de-a doua aruncare să fie aceleași ca la prima aruncare. (Exemplu de caz favorabil: la prima aruncare zarul alb indică 2 și zarul roșu indică 4, iar la a doua aruncare zarul alb indică 2 și zarul roșu indică 4).