

**1º**  
Educación Media  
Plan Común

**Curso**

# Matemática

**Guía didáctica  
para docente**

Serie curricular **panambi**

MATERIAL DE  
DISTRIBUCIÓN  
GRATUITA  
PROHIBIDA SU  
COMERCIALIZACIÓN

  
**Paraguay Katupryry**



**TEKOMBO'E  
HA ARANDUPY  
MOTENONDEHA**  
MINISTERIO DE  
EDUCACIÓN  
Y CULTURA

**TETÃ REKUÁI  
GOBIERNO NACIONAL**  
Jajapo ñande rapera ko'ágá guive  
Construyendo el futuro hoy

**Paraguay. Ministerio de Educación y Cultura**  
Guía didáctica para docente.  
Matemática.  
1.º curso - Educación Media  
2016

TODOS LOS DERECHOS RESERVADOS © 2016  
Ministerio de Educación y Cultura

Queda prohibida cualquier forma de reproducción, transmisión o archivo en sistemas recuperables del presente material, ya sea para su uso privado o público, por medios mecánicos, electrónicos, electroestáticos, magnéticos o cualquier otro, total o parcialmente, con o sin finalidad de lucro, salvo expresa autorización del MEC.

**Presidente de la República**

Horacio Manuel Cartes Jara

**Ministra de Educación y Cultura**

Marta Lafuente

**Viceministra de Educación para la Gestión Educativa**

Myrian Mello

**Directora General de Currículum, Evaluación y Orientación**

María Gloria Pereira de Jacquet

**Director General de Educación Media**

Arnaldo Ramón Liuzzi Velázquez

**Silveria Concepción Laguardia Viñales**, Directora de Currículum

**Diana Elena De Giácomi de Silva**, Jefa del Departamento de Apoyo para la Implementación Curricular en Medios Educativos

**Zonia Maricel Centurión Benítez**, Jefa del Departamento de Diseño Curricular

**Maura Graciela López Jara**, Jefa del Departamento de Evaluación Curricular

**María Isabel Roa**, Jefa del Departamento de Enseñanza de Lenguas

**Elaboradores**

Nélida Centurión Acha

María Elena Melgarejo de Acosta

Rutilia Ramírez Sánchez

**Revisión y ajustes**

Zonia Maricel Centurión Benítez

Carmen Susana Benítez Prieto

Sixta María Sosa Araujo

Sonia Raquel Martínez Hermosilla

Dalia Rocio Larrosa de Moreno

**Diseño Editorial**

Víctor Ramón López Amarilla

**Diseño y diagramación**

AGR S.A. Servicios Gráficos



## PRESENTACIÓN

Estimados colegas:

Compartimos con ustedes y las familias el mutuo interés de que los estudiantes de la Educación Media mejoren la calidad de sus aprendizajes. Con el afán de colaborar en el mejor uso posible de los libros de textos, el Ministerio de Educación y Cultura ofrece esta Guía Didáctica, cuyo contenido explica la organización de los mencionados libros y propone actividades para orientar su uso adecuado.

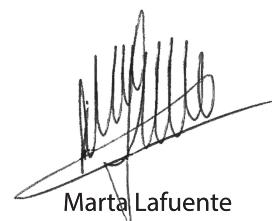
Es importante que esta guía se constituya en una herramienta pedagógica, ya que la misma contempla los lineamientos y las recomendaciones didácticas que orientan la planificación del docente. Por tanto, su uso no limitará la creatividad y el entusiasmo de generar otras propuestas innovadoras.

En el horizonte de la Agenda Educativa 2013 - 2018 se propone el mejoramiento de las condiciones y oportunidades para el aprendizaje, en el marco del aseguramiento de la calidad de la educación. Esta meta educativa se logrará con el compromiso asumido por cada uno de los actores educativos quienes interactúan directamente con los estudiantes en las distintas instituciones educativas del país.

La tarea de enseñar requiere de amor y ciencia, porque estamos educando seres humanos en la integralidad de su ser; a los educadores se nos encomienda la noble y valiosa misión de contribuir al desarrollo personal y social de nuestros estudiantes y de constituirnos en guías y orientadores de sus vidas en formación. Como adultos, somos garantes del cumplimiento de sus derechos y en ese sentido, ofrecerles una educación de calidad es nuestro compromiso.

Les recomiendo utilizar esta guía didáctica de la mejor manera posible y enriquecerla sobre la base de sus experiencias. Deseo que la tarea de educar les sea gratificante y se sientan cada vez más comprometidos con la misión de formar mejores seres humanos y ciudadanos actores de las transformaciones que requiere nuestro país.

Reciban de mi parte el reconocimiento y la admiración por su tarea desafiante, compleja y humanizante. Nda-reíri opavave ñandereko hesápe: mbo'ehára ningó ombaro'apo tesape'arã. Upévare arako'ëre hi'aiténte ñande rapere ñanembojuruvy jahecha rupi hope jera ñane remimbo'ekuéra kerapoty.



Marta Lafuente  
Ministra  
de Educación y Cultura





# Índice

<b>1. Cuadro descriptivo de las Unidades de la Guía «Matemática 1» .....</b>	<b>8</b>
<b>2. Desarrollo de las unidades .....</b>	<b>10</b>
<b>2.1 Unidad 1: Funciones exponenciales .....</b>	<b>10</b>
• Interpreta las principales características de una función exponencial a partir de su expresión analítica y su representación gráfica.	
<b>2.2 Unidad 2: Función logarítmica .....</b>	<b>14</b>
• Interpreta las principales características de una función logarítmica a partir de su expresión analítica y su representación gráfica.	
<b>2.3 Unidad 3: Funciones trigonométricas .....</b>	<b>16</b>
• Formula y resuelve problemas referidos a situaciones de la vida real, en los que se utilicen funciones trigonométricas y/o relaciones entre las mismas en el triángulo rectángulo.	
• Formula y resuelve problemas que involucren la utilización de triángulos oblicuángulos.	
<b>2.4 Unidad 4: Análisis combinatorio .....</b>	<b>22</b>
• Resuelve situaciones problemáticas utilizando los principios del Análisis Combinatorio.	
• Utiliza el Teorema de Newton en el desarrollo de potencias de binomios.	
<b>2.5 Unidad 5: Línea recta (I) .....</b>	<b>26</b>
• Formula y resuelve problemas referidos a situaciones de la vida real, que impliquen cálculos.	
<b>2.6 Unidad 6: Línea recta (II) .....</b>	<b>30</b>
• Resuelve situaciones problemáticas que requieran la utilización de las ecuaciones de la recta.	
<b>3. Estrategias de aprendizaje .....</b>	<b>34</b>
<b>4. El método Heurístico en la resolución de problemas, según George Polya .....</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía sugerida.....</b>	<b>48</b>



## 1 Cuadro descriptivo de las unidades de la Guía «Matemática 1»

COMPETENCIA DEL ÁREA PARA LA EDUCACIÓN MEDIA	• Planteen y resuelvan problemas con actitud crítica y ética, utilizando el pensamiento lógico y el lenguaje matemático para formular, deducir y realizar inferencias que contribuyan al desarrollo personal y social.
UNIDAD	CAPACIDADES
<b>1. Funciones exponenciales</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>Interpreta las principales características de una función exponencial a partir de su expresión analítica y su representación gráfica.</li></ul>
<b>2. Función logarítmica</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>Interpreta las principales características de una función logarítmica a partir de su expresión analítica y su representación gráfica.</li></ul>
<b>3. Funciones trigonométricas</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>Utiliza la relación existente entre los sistemas de medidas de ángulos según se requiera.</li><li>Formula y resuelve problemas referidos a situaciones de la vida real, en los que se utilicen funciones trigonométricas y/o relaciones entre las mismas en el triángulo rectángulo.</li><li>Formula y resuelve problemas referidos a situaciones de la vida real, en los que se utilicen funciones trigonométricas y/o relaciones entre las mismas en el triángulo rectángulo.</li><li>Formula y resuelve problemas que involucren la utilización de triángulos oblicuángulos.</li></ul>
<b>4. Análisis combinatorio</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>Resuelve situaciones problemáticas utilizando los principios del Análisis Combinatorio.</li><li>Utiliza el teorema de Newton en el desarrollo de potencias de binomios.</li></ul>
<b>5. Línea recta (I)</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>Formula y resuelve problemas referidos a situaciones de la vida real, que impliquen cálculos.</li></ul>
<b>6. Línea recta (II)</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>Resuelve situaciones problemáticas que requieran la utilización de las ecuaciones de la recta.</li></ul>



<b>COMPETENCIA ESPECÍFICA DE LA DISCIPLINA</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Formula y resuelve situaciones problemáticas que involucren la utilización de conceptos, operaciones, teoremas y propiedades matemáticas del Álgebra, la Trigonometría, la Geometría Analítica y el Cálculo, aplicadas a la modelización de situaciones de la vida real.</li> </ul>	
TEMAS	<b>Articulación con otros temas matemáticos</b>	<b>Articulación con otras disciplinas</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Función exponencial. Concepto. Gráfica de una función exponencial.</li> <li>Aplicación de las funciones exponenciales.</li> <li>Representación analítica de funciones exponenciales.</li> <li>Gráfico de una función exponencial.</li> <li>Características de una función exponencial: dominio, rango o recorrido, intervalos de crecimiento, extremos, paridad, continuidad.</li> </ul>	Números racionales e irracionales. Potencias con exponente positivo y negativo. Funciones.	Economía. Biología.
<ul style="list-style-type: none"> <li>Representación analítica de funciones logarítmicas.</li> <li>Gráfico de una función logarítmica.</li> <li>Características de una función logarítmica: dominio, rango o recorrido, intervalos de crecimiento, extremos, paridad, continuidad</li> </ul>	Expresiones algebraicas. Potenciación. Conversión de medidas.	Economía. Demografía. Biología.
<ul style="list-style-type: none"> <li>Sistema sexagesimal.</li> <li>Sistema circular o radián.</li> <li>Funciones y cofunciones trigonométricas.</li> <li>Fórmulas trigonométricas fundamentales y derivadas.</li> <li>Valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables.</li> <li>Signos de las funciones trigonométricas en la reducción de ángulos al primer cuadrante.</li> <li>Teorema del seno.</li> <li>Teorema del coseno.</li> </ul>	Teoremas de geometría. Perímetro y área de figuras planas. Longitud de la circunferencia. Ángulos complementarios y suplementarios. Regla de tres. Números reales. Propiedad distributiva. Expresiones algebraicas. Teorema de Pitágoras. Área lateral y total de cuerpos geométricos. Proporcionalidad. Ecuaciones de segundo grado.	Física.
<ul style="list-style-type: none"> <li>Factorial de un número, variaciones, permutaciones, combinaciones.</li> <li>Números combinatorios, teorema del Binomio.</li> </ul>	Teoría de números. Números factoriales.	Estadística y Probabilidad Educación Física
<ul style="list-style-type: none"> <li>Distancia entre dos puntos.</li> <li>Punto medio de un segmento.</li> </ul>	Expresiones algebraicas. Conceptos geométricos varios como: ángulo, bisectriz, mediatrix, mediana, perímetro y área de polígonos convexos. Teorema de Pitágoras. Sistemas de ecuaciones.	Estadística y Probabilidad Educación Física
<ul style="list-style-type: none"> <li>Ecuación de la recta: general o implícita; explícita, segmentaria, ecuación punto - pendiente.</li> <li>Representación gráfica de la recta. Puntos de intersección con los ejes coordinados.</li> </ul>	Expresiones algebraicas. Conceptos geométricos varios como: ángulo, bisectriz, mediatrix, mediana, paralelismo y perpendicularidad, perímetro y área de polígonos convexos. Teorema de Pitágoras. Sistemas de ecuaciones.	Economía y Gestión



## 2 Desarrollo de las unidades

### UNIDAD 1

#### 2.1

## Funciones exponenciales

### 2.1.1. Capacidades

- Interpreta las principales características de una función exponencial a partir de su expresión analítica y su representación gráfica.

### 2.1.2. Temas

- Concepto de función exponencial.
- Representación analítica de funciones exponenciales.
- Gráfico de una función exponencial.
- Características de una función exponencial: dominio, rango o recorrido, intervalos de crecimiento, extremos, paridad, continuidad.

### 2.1.3. Evaluación diagnóstica

Como prueba diagnóstica sugerimos algunas actividades sobre: resolución de problemas, representación de una función, propiedades de la potenciación, por considerarlas como base para el inicio de esta unidad.

### 2.1.4. Sugerencias didácticas

#### 2.1.4.1. Página de apertura

El problema con que se inicia esta unidad, habla sobre «contar chistes», una de las formas más frecuentes de hacer de un momento, una experiencia agradable. Sería interesante compartir opiniones sobre la influencia de la risa, manifestación de la alegría, en la conducta de las personas.

Proponemos hacer con los estudiantes, una actividad similar a la mencionada en el problema que se adecue a la situación de aula y sacar conclusiones. Disfrutarán de un momento agradable.

#### 2.1.4.2. Abordaje de los temas

En esta unidad partimos de una situación de la vida real para llegar al concepto de una función exponencial, siguiendo estos pasos:

- Planteamos el problema.
- Construimos una tabla que nos ayude a encontrar una ecuación para resolver el problema.
- Observamos el comportamiento de la tabla y generalizamos escribiendo la función exponencial.
- Concluimos con el concepto de función exponencial.

En el gráfico de dos o más funciones exponenciales, es importante compararlas a fin de analizar y comprender el comportamiento de las mismas para luego extraer conclusiones sobre cualquier función exponencial.

Presentamos varias situaciones en las que se aplican las funciones exponenciales en otras ciencias como la Economía, Cien-

cias Naturales e Historia. Se promueve de esta forma el trabajo integrado entre las distintas disciplinas.

Estas permiten la realización de trabajos de investigación sobre:

- Intereses que pagan los Bancos, Financieras y Cooperativas en la actualidad.
- La población indígena de la Región Oriental y de la comunidad si las hubiera.
- Caracteres morfológicos y fisiológicos que forman las bacterias.

Algunos ejemplos están resueltos, siguiendo los pasos de Polya en los que se formulan estas u otras preguntas al alumno: ¿De qué otra manera se puede resolver este problema? ¿Qué procesos hemos seguido?; ¿Es coherente la respuesta con el enunciado del problema?; ¿Es correcto el resultado obtenido? ¿Por qué favorece la metacognición?

#### Orientaciones para facilitar la metacognición

Para que el estudiante incorpore y use eficientemente la metacognición, es importante observarlo y retroalimentarlo durante el proceso de resolver problemas.

La discusión entre grupos pequeños de estudiantes al resolver problemas puede ayudar al desarrollo de la competencia.

Schoenfeld recomienda que el docente monitoree el trabajo de cada uno de los grupos y los haga reflexionar con preguntas tales como: ¿Qué están haciendo? ¿Por qué lo están haciendo? ¿Qué harán con los resultados cuando los obtengan?

Además, es importante que los integrantes del grupo respeten las ideas de cada participante y que al final, ellos mismos realicen la metacognición, es decir:

- describan el proceso seguido,
- fundamenten cada paso y
- reflexionen.

Algunas preguntas que servirán para la metacognición son:

- ¿Cómo llegué al resultado?
- ¿Cómo sé que la solución que obtuve es correcta?
- ¿Puedo encontrar otra forma o método para resolver este problema?
- ¿Qué aspecto no me quedó bien claro?
- ¿Qué estrategia utilicé para resolver el problema?
- ¿En qué me puede ayudar la solución de este problema?
- ¿Cuál es el camino más viable?

Las actividades de retroalimentación se pueden realizar en grupos utilizando la estrategia del aprendizaje cooperativo.

### Orientaciones para el trabajo cooperativo

Para utilizar esta estrategia que nos permite el desarrollo de capacidades que interactúan en la resolución de problemas debemos:

- Organizar los grupos que deben ser heterogéneos y pequeños.
- Elaborar guías de trabajo que respondan a las capacidades que se desea lograr.
- Distribuir las actividades por grupos. Es importante que el grupo realice el trabajo en colaboración con todos los miembros teniendo presente la actitud de escucha entre ellos.
- Presentar los trabajos de cada grupo al grupo-curso en la modalidad concertada por los mismos.
- Evaluar el trabajo realizado de acuerdo a los indicadores establecidos por el docente.

#### 2.1.4.3. Algunos indicadores de evaluación

- Representa gráficamente una función exponencial.
- Identifica gráficamente si la función exponencial es creciente (o decreciente).
- Identifica sin graficar si una función exponencial es creciente (o decreciente).
- Estudia el comportamiento del gráfico de una función exponencial.
- Identifica los datos de un problema que involucra la utilización de una función exponencial.
- Reconoce la incógnita de una situación problemática que involucra la utilización de una función exponencial.
- Aplica la función exponencial en la resolución de problemas.
- Colabora sin decir la solución del problema.
- Demuestra esfuerzo para llegar a la solución de un problema

#### 2.1.4.4. Actividades complementarias

Las siguientes actividades pueden servir para retroalimentar los temas desarrollados en esta unidad.

### A 1 Propuesta de actividad

**TEMA** Funciones exponenciales.

**OBJETIVO** Interpreto el gráfico de la función exponencial.

**DESARROLLO** Planteamos como situación de aprendizaje el siguiente problema que está asociado a las Ciencias Naturales:

- Hallamos la función exponencial de un cultivo de 3 000 bacterias cuya población aumenta 1,5 veces cada 15 minutos. Calculamos también cuántas bacterias habrá en 5 horas.

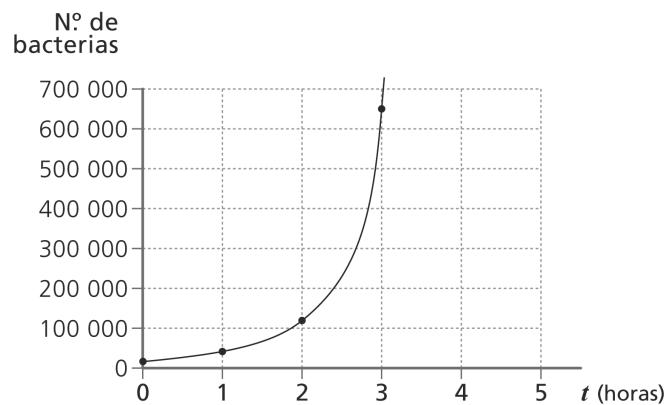
Como en una hora hay 4 veces 15 minutos, multiplicamos por 1,5:  $1,5 \times 4 = 6$ , que será la base de la función exponencial

• Construimos la tabla.

t (horas)	Cálculo	Nº de bacterias
1	$3\ 000 \cdot 6^1$	18 000
2	$3\ 000 \cdot 6^2$	108 000
3	$3\ 000 \cdot 6^3$	648 000
4	$3\ 000 \cdot 6^4$	3 888 000
5	$3\ 000 \cdot 6^5$	23 328 000

Teniendo en cuenta el comportamiento de la tabla escribimos la función:  $N(t) = 3\ 000 \cdot 6^t$

• Graficamos la función.



Una vez graficada la función proponemos al alumno y alumna formular y contestar preguntas tales como:

- ¿Cuál sería la población de bacterias al cabo de 2 horas aproximadamente?
- ¿Para qué valor de  $t$  la población es de aproximadamente 700 000 bacterias?
- ¿Qué sucede a medida que aumentan las horas?

### A 2 Propuesta de actividad

**TEMA** Deducción e interpretación geométrica de la función exponencial.

**OBJETIVO** Deduzco la función exponencial a través del área de figuras geométricas planas.

**MATERIALES** Papel cuadriculado, regla, lápiz.  
En la computadora se puede usar el Software «Power Point».



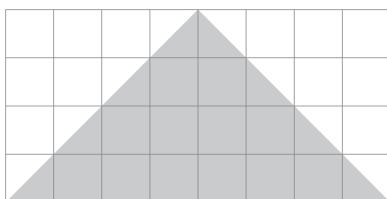
**DESARROLLO** a. Teniendo en cuenta las gráficas siguientes, calculamos las áreas pintadas en cada triángulo:



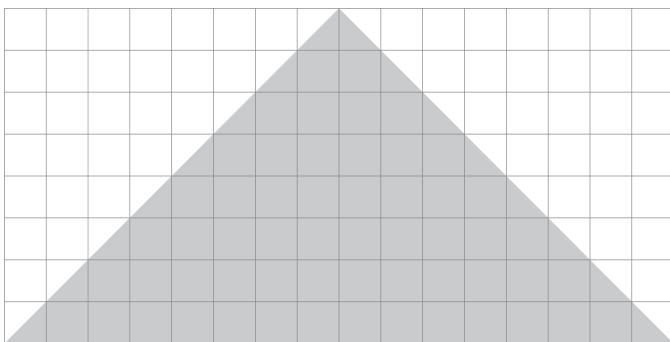
1.  $2^1 = 2$  y su mitad 1. (Parte pintada)



2.  $2^3 = 8$  y su mitad 4. (Parte pintada)



3.  $2^5 = 32$  y su mitad 16. (Parte pintada)



4.  $2^7 = 128$  y su mitad 64. (Parte pintada)

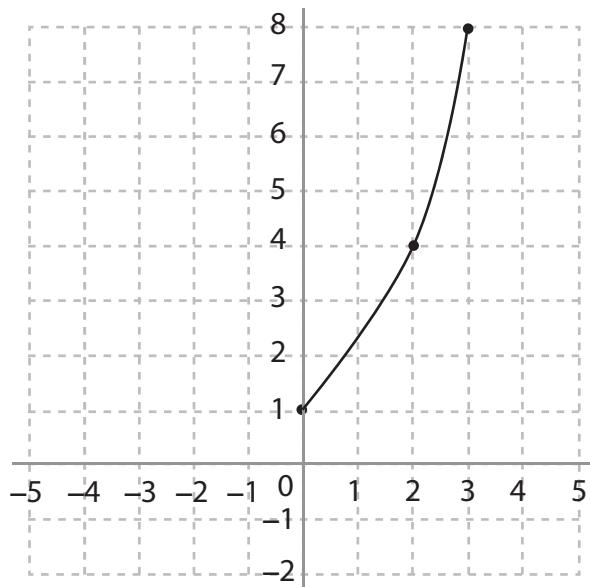
b. Construimos una tabla con los datos obtenidos:

Número de orden	Área pintada de cada triángulo	
1	1	$2^0$
2	4	$2^2$
3	16	$2^4$
4	64	$2^6$

c. Generalizamos escribiendo la función área.

$$y = 2^n; n > 0$$

d. Graficamos.



e. Analizamos la función:

- Es una función exponencial creciente.
- La función se desplaza en los cuadrantes I y II.
- Intercepta el eje «y» en el punto (0, 1).
- Para valores negativos de x, se aproxima al eje «x» sin tocarlo; en cambio, para valores positivos de x la función crece indefinidamente.

f. Respondemos:

- ¿Por qué es necesario restringir los valores de n?
- ¿Cuáles serían las representaciones cuando n = 2 y n = 4?

### A 3

### Propuesta de actividad

**TEMA** Funciones exponenciales.

**OBJETIVO** Deducir la función exponencial en situaciones problemáticas.

Analizar el gráfico de una función exponencial.

**DESARROLLO** En el laboratorio Omega se experimentó la masa de una sustancia radioactiva que pierde el 1,5% de su masa por día. Dicha sustancia tenía inicialmente una masa de 2 kg.

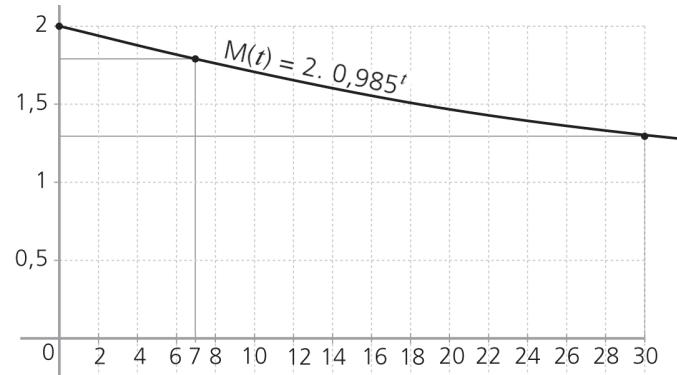
1. Calculamos el valor de la masa en kilogramos y en gramos.
2. Escribimos la función que representa el comportamiento de dicha sustancia y expresamos en forma general.
3. Graficamos la función.
4. Analizamos el gráfico.

- a. La sustancia radioactiva pierde el valor de su masa por día, por semana, por mes, por año, o sea, va cambiando a medida que pasa el tiempo. El porcentaje es:  $100\% - 1,5\% = 98,5\%$ ; o sea 0,985.

En una tabla expresamos el comportamiento de la sustancia.

Tiempo (días)	Masa en kilogramos M(t)	Masa en gramos
0	2	2 000
1	$2 \cdot 0,985 = 1,97$	1 970
7 (1 semana)	$2 \cdot 0,985^7 = 1,79$	1 790
30 (4 semanas)	$2 \cdot 0,985^{30} = 1,270$	1 270
365 (52 semanas)	$2 \cdot 0,985^{365} = 0,008$	8

- b. La función es:  $2 \cdot 0,985^t$  o sea  $M(t) = 2 \cdot 0,985^t$  que en términos generales es:  $f(x) = k \cdot a^x$  donde  $a > 0$ .
- c. Graficamos.



- d. Concluimos que la función exponencial va decreciendo porque la masa va disminuyendo a medida que pasa el tiempo.



## 2.2

## UNIDAD 2

## Función logarítmica

## 2.2.1. Capacidades

- Interpreta las principales características de una función logarítmica a partir de su expresión analítica y su representación gráfica.

## 2.2.2. Temas

- Concepto de función logarítmica.
- Representación analítica de funciones logarítmicas.
- Gráfico de una función logarítmica.
- Características de una función logarítmica: dominio, rango o recorrido, intervalos de crecimiento, extremos, paridad, continuidad.

## 2.2.3. Página de apertura

Se presenta al inicio de esta unidad una información sobre «La situación socioeconómica del Paraguay» para que a partir de ella se trabaje sobre situaciones problemáticas referentes al tema. Luego de la lectura de la información sería oportuno analizar y establecer los factores que hacen al crecimiento de la población y la relación de ésta con el desarrollo socioeconómico.

## 2.2.4. Abordaje de los temas

Proponemos un trabajo de investigación bibliográfica sobre la tasa de crecimiento del Paraguay de acuerdo a los datos del Censo de Población y Vivienda de los años 1982, 1992 y 2002. Causas que influyen en la disminución de la tasa de crecimiento de la población paraguaya.

Se puede visitar la página Web de la Dirección General de Estadística, Encuestas y Censos: <http://www.dgeec.gov.py>

Para una mejor comprensión de las funciones logarítmicas, sugerimos trabajar con tablas, gráficos y un análisis del comportamiento de la función graficada determinando las características de la curva.

Para retroalimentar los conceptos y algoritmos aprendidos proponemos la solución de las actividades; las mismas pueden realizarse en pequeños grupos.

## 2.2.5. Algunos indicadores de evaluación

- Determina los datos de un problema que involucre la aplicación de funciones logarítmicas.
- Identifica la incógnita de un problema que involucre la aplicación de funciones logarítmicas.

- Determina la función logarítmica a partir de los datos del problema.
- Reconoce situaciones reales que pueden modelizarse mediante funciones logarítmicas.
- Demuestra interés en el trabajo de clase.

## 2.2.6. Actividades complementarias

## A 1

## Propuesta de actividad

**TEMA** Comparación de funciones logarítmicas.

**OBJETIVO** Grafico funciones logarítmicas.

Analizo las funciones graficadas.

**DESARROLLO** Dadas las siguientes funciones:  $y = \log_8 x$  e  $y = \log_{1/8} x$ , graficamos las funciones y analizamos comparando el comportamiento de cada una de ellas.

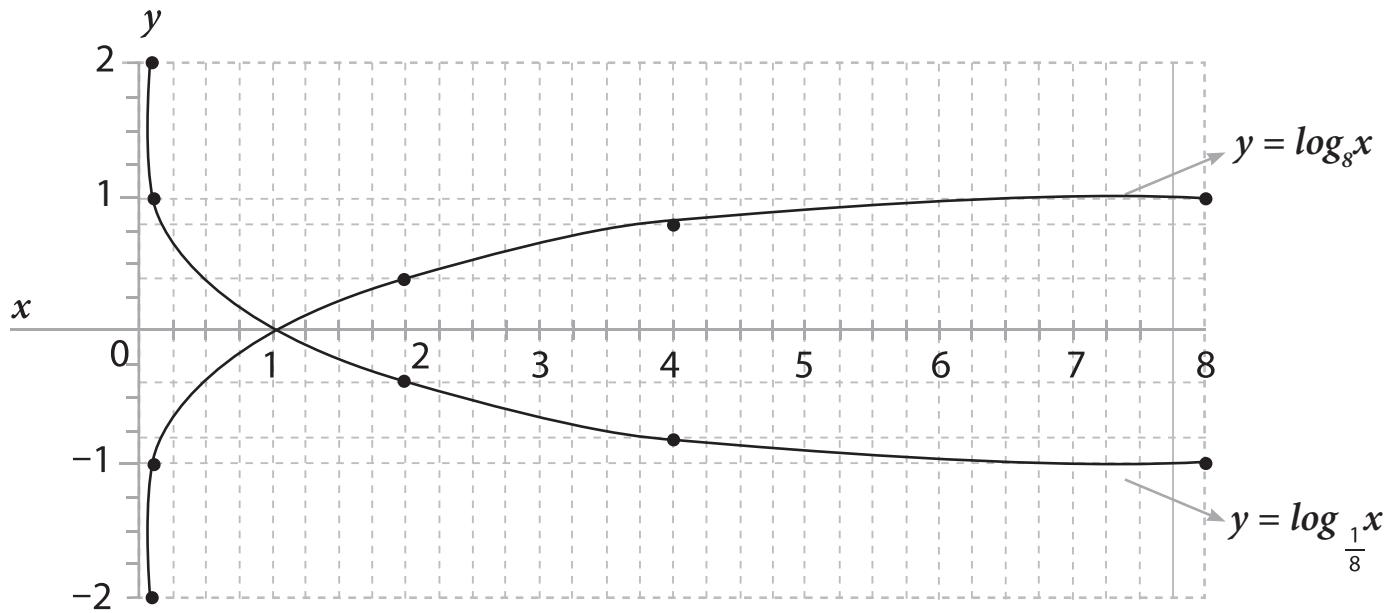
Para completar la tabla damos valores a la variable  $x$  en  $y = \log_8 x$ ; recurrimos al uso de la calculadora para obtener los valores.

x	y
2	1/3
4	2/3
8	1
1/8	-1
1/4	-2/3

Completamos los valores de la tabla de la función  $y = \log_{1/8} x$

x	y
2	-1/3
4	-2/3
8	-1
1/8	1
1/4	2/3

Graficamos ambas funciones.



Analizamos el comportamiento de las funciones, contestando las siguientes preguntas:

- ¿Cuál de las funciones es creciente y cuál es decreciente?

$y = \log_8 x$  es una función creciente e  $y = \log_{\frac{1}{8}} x$  es decreciente.

- ¿En qué cuadrantes se desplaza la función creciente?

Se desplaza en el primero y cuarto cuadrante.

- ¿En qué punto se cortan ambas funciones?  
En el punto  $(1, 0)$ .
- La función creciente, ¿está definida para valores negativos de  $x$ ?  
No, porque ella se desplaza en el primero y cuarto cuadrante.

**2.3****UNIDAD 3****Funciones trigonométricas****2.3.1. Capacidades**

- Formula y resuelve problemas referidos a situaciones de la vida real, en los que se utilicen funciones trigonométricas y/o relaciones entre las mismas en el triángulo rectángulo.
- Formula y resuelve problemas que involucren la utilización de triángulos oblicuángulos.

**2.3.2. Temas**

- Valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables.
- Signos de las funciones trigonométricas en la reducción de ángulos al primer cuadrante.
- Teorema del seno.
- Teorema del coseno.

**2.3.3. Página de apertura**

En esta unidad se presenta una información histórica sobre cómo la Matemática comenzó a desarrollarse en forma organizada alrededor del siglo IV a.C. Sugerimos a partir de esta información, investigar más en la biblioteca o Internet sobre el proceso de desarrollo de esta ciencia, dándole un tiempo preferencial, pues la historia proporciona una visión diferente al enfoque de la Matemática convencional y permite verla en su verdadera perspectiva.

**2.3.4. Abordaje de los temas**

Se sugiere comenzar la unidad con el estudio de los números reales, partiendo del cálculo de perímetros y áreas donde se visualiza el uso de los números racionales e irracionales, con el propósito de que los estudiantes comprendan la importancia del tema y su aplicación práctica en otras ramas de la Matemática como la Geometría y la Trigonometría.

Antes de iniciar el estudio de la Trigonometría proponemos la realización de actividades de retroalimentación sobre el tema Radicales.

Presentamos en forma breve y sencilla la fundamentación teórica, utilizando los recursos gráficos para introducir y desarrollar los contenidos, permitiendo así justificar el porqué de cada regla o fórmula.

El tema funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo desarrollamos a través de una situación problemática.

Analizando la misma determinamos la semejanza de los triángulos rectángulos trazados con relación a un ángulo agudo, escribimos la proporcionalidad de los lados y deducimos el concepto de funciones trigonométricas de un ángulo: seno, coseno, tangente y sus respectivas cofunciones, cotangente, secante y cosecante.

La resolución de triángulos está planteada en el texto en una gran cantidad de ejercicios y problemas de diferentes tipos y se desarrollan siguiendo un proceso claro y explicativo de cada paso que se da.

**Material didáctico sugerido**

Para la medición de ángulos de elevación sugerimos la construcción y utilización de un instrumento denominado astrolabio.

Antiguamente el astrolabio era utilizado para observar la altura de los astros, construiremos uno muy parecido.

**Materiales necesarios**

- Cartulina de 30 x 30 cm.
- Un tubo delgado de 30 cm de largo que puede ser de cartulina, cartón o plástico.
- Un hilo de ferretería o un cordón.
- Transportador de 180°.
- Plastilina.

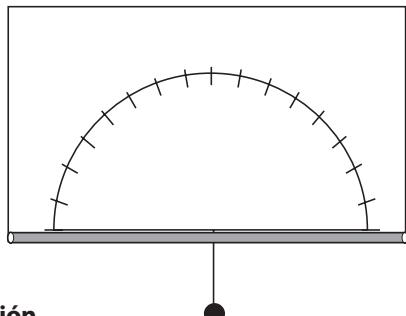
**Construcción**

Marcamos sobre la cartulina una línea a 1 cm del borde y señalamos el punto medio (a los 15 cm).

Colocamos el transportador sobre la línea trazada haciendo coincidir el centro del mismo con el punto medio. Los ángulos 0° y 180° deben quedar sobre la línea. Dibujamos el transportador en la cartulina marcando todos los ángulos.

Atamos el hilo o cordón en el punto medio del tubo y lo pegamos a la cartulina por debajo de la línea, de manera que el centro del transportador coincida con la mitad del mismo.

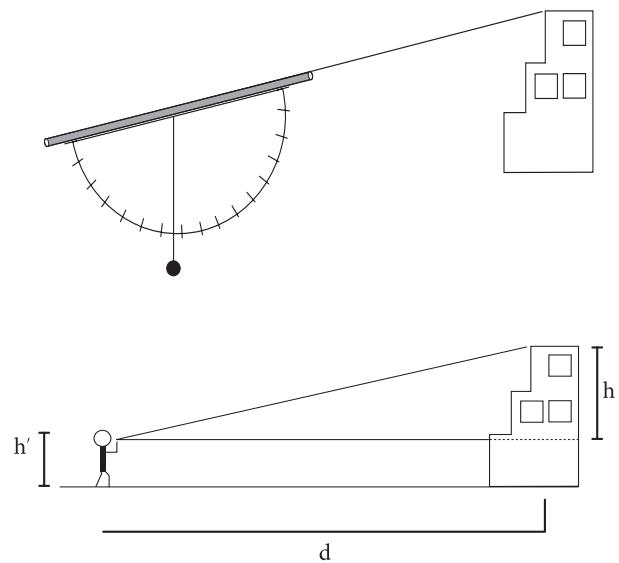
En el extremo del hilo o cordón atamos una pelotita de plastilina.



### Utilización

Seleccionamos el objeto como un edificio, un árbol, una columna, etc. cuya altura queremos medir. Para ello nos ubicamos a una determinada distancia del objeto y mirando a través del tubo enfocamos el astrolabio a la punta del objeto. En ese momento el hilo o cordón con la pelotita de plastilina se moverá y marcará un ángulo en el transportador. Anotamos el valor de ese ángulo y medimos la distancia ( $d$ ) a la que estamos del objeto, con estos datos podemos calcular la altura ( $h$ ) del objeto utilizando la función trigonométrica:  $\operatorname{tg} \theta = \frac{h}{d}$

Para hallar la altura real del objeto debemos sumar la altura de la persona que observa al valor  $h$  obtenido



En esta unidad los estudiantes deben formular y resolver problemas sobre el tema: Resolución de triángulo rectángulo.

La utilización del astrolabio puede emplearse para trabajar la capacidad «formula problemas», pues los alumnos y las alumnas podrán tomar los datos y luego elaborar el enunciado del problema.

### Una propuesta para trabajar la capacidad

«Formular problemas que involucren el empleo de funciones y/o relaciones entre funciones trigonométricas»

1. Utilizar la técnica «lluvia de ideas» para hacer un listado en qué circunstancias o cuándo se presentan en la vida real «triángulos rectángulos».
2. Recordar con los alumnos y alumnas las nociones básicas como: ¿Qué es un triángulo rectángulo? ¿Cuáles son sus características? ¿Qué relación hay entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo?
3. Proponerles elegir la situación que plantear, determinar los datos y la incógnita, para luego formular el problema.
4. Analizar el problema formulado para ver si la información que proporciona es relevante, si contiene todos los datos necesarios, investigar los que faltan, desechar los que están de más; asimismo ver si la pregunta formulada es pertinente.

Presentamos las funciones trigonométricas en el sistema de coordenadas cartesianas y ejemplificamos el cálculo de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo, graficamos y determinamos sus signos según el cuadrante en que se encuentran. Por último, trabajamos la circunferencia trigonométrica.

Proponemos la realización de investigación bibliográfica con estas actividades:

- Averiguamos en textos del CRA qué efectos causa en las personas vivir bajo el tendido de cables de alta tensión.
- Averiguamos en diferentes fuentes en qué cerros de nuestro país se encuentran imágenes, monumentos o capillas.

Consideramos oportuna una retroalimentación de lo desarrollado hasta este punto, la misma puede darse completando una ficha de trabajo en forma individual o grupal. También se podrían utilizar las «Actividades de retroalimentación» propuestas.

### 2.3.5. Algunos indicadores de evaluación

- Calcula la función seno (o coseno o tangente) de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo
- Halla la función seno (o coseno o tangente) de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo cuyos lados se expresan con radicales
- Determina los datos necesarios para formular un problema que involucra el empleo de la función seno (u otra función).
- Establece la incógnita para formular un problema que involucra el empleo de la función seno (u otra función).
- Elabora el enunciado de la situación problemática que involucra el empleo de la función seno (u otra función).
- Examina el problema formulado para comprobar si la información es relevante.
- Halla la solución de la situación planteada.
- Verifica el resultado obtenido.
- Calcula las funciones trigonométricas conociendo el valor de una de ellas y el cuadrante al que pertenece el ángulo.



- Respetá normas de una convivencia democrática en actividades realizadas en el aula.

### 2.3.6. Actividades complementarias

En este apartado sugerimos algunas actividades, además de las propuestas en el texto.

#### A 1 Propuesta de actividad

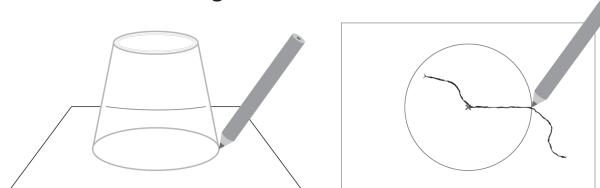
**TEMA** Sistema circular o radián.

**OBJETIVO** Adquiero el concepto de radián.

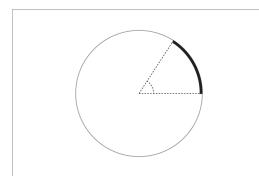
**DESARROLLO** La enseñanza de la unidad de amplitud de ángulo «radián», se puede presentar con un modelo similar al presentado más abajo.

Materiales que vamos a utilizar: papel, lápiz, hilo de lana, compás, vaso. Con dichos materiales solicitamos a los estudiantes que realicen las siguientes actividades:

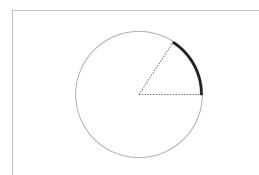
- Con el vaso dibujamos sobre un papel una circunferencia. Retiramos el vaso, marcamos su centro y sobre un hilo señalamos la longitud del radio.



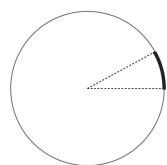
- Sobre la circunferencia llevamos la medida del radio obtenido con el hilo. A esta medida llamamos «radián».



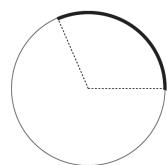
- Trazamos los radios correspondientes a los extremos del arco y obtenemos un ángulo aproximadamente de  $57^\circ$ .



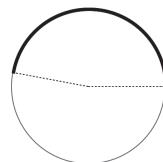
- Repetimos la experiencia para  $1/2$  rad, 2 rad, 3 rad y 6 rad.



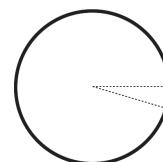
$$\frac{1}{2} \text{ rad} \cong 28^{\circ}39'44''$$



$$2 \text{ rad} \cong 114^{\circ}38'59''$$



$$3 \text{ rad} \cong 171^{\circ}58'29''$$



$$6 \text{ rad} \cong 343^{\circ}56'56''$$

Esta experiencia nos permite visualizar mejor la relación entre el sistema radián y el sexagesimal.

#### A 2 Propuesta de actividad

Presentamos una actividad para realizar en una hoja de cálculo

**TEMA** Crecimiento y decrecimiento de la función  $y = \sin x$ .

**OBJETIVO** Analizo el comportamiento de la función seno en los cuatro cuadrantes.

**DESARROLLO** Para representar gráficamente la función  $y = \sin x$  en la computadora seguimos estos pasos:

#### PRIMERO:

Construimos y copiamos la siguiente tabla en una hoja de cálculo.

	A	B	C
1	X (en sexagesimal)	X (en radianes)	Y
2	0	= A2 * PI() / 180	= seno (B2)
3	90	= A3 * PI() / 180	= seno (B3)
4	180	= A4 * PI() / 180	= seno (B4)

#### Observación:

PI() es una función que devuelve el valor de  $\pi$  con 15 dígitos, se encuentra en la categoría «Matemáticas y trigonométricas». También seno() es una función de esta categoría, en la que pide el número que es el ángulo convertido en radianes que se observa en cada celda de la columna B.

Es necesario ocultar la columna B, luego de realizar los cálculos de X (en radianes) para graficar solamente los valores de X (en sexagesimal) e Y de la función  $y = \sin x$ .

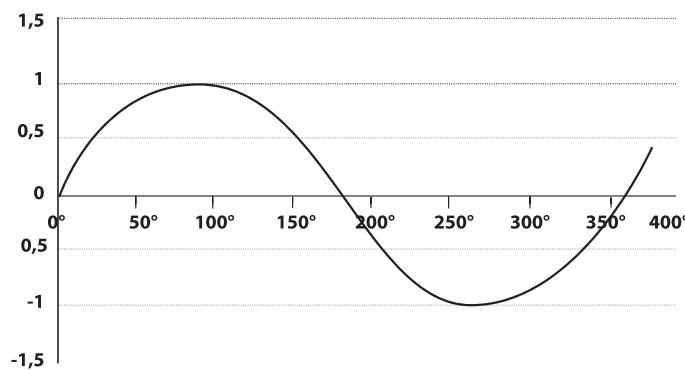
Atendiendo la facilidad para la obtención de los valores en la tabla se sugiere considerar los ángulos desde  $0^\circ$  hasta  $360^\circ$ .

#### SEGUNDO:

Seleccionamos de la tabla anterior las columnas A y C, ocultando previamente la columna B y luego insertamos un gráfico de dispersión de la siguiente manera:

- Hacemos clic en Insertar en la barra de menú y en Gráfico.
- Seleccionamos el tipo y subtipo de gráfico (dispersión-con líneas suavizadas y sin marcadores de datos).
- Finalizamos.

La gráfica en la pantalla será similar a la siguiente:

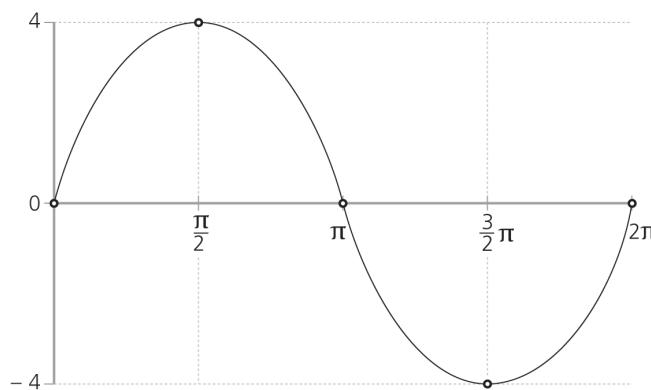


Hallamos la amplitud y el período: Amplitud = 1 Período =  $2\pi$   
Proponemos a la clase que transforme la función dada  $y = \operatorname{sen} x$  en otra y compare con la misma, para ello se puede agregar a la función una constante.

Por ejemplo:  $y = \operatorname{sen} 4x$

Para representar gráficamente  $y = \operatorname{sen} 4x$  seguimos los mismos pasos mencionados anteriormente.

La gráfica de esta función será similar a la siguiente:



Al comparar realizamos las siguientes preguntas:

¿En qué puntos corta al eje de abscisa?

¿Cuáles son los puntos máximos y mínimos? Expresamos los mismos en forma de coordenadas.

### 2.3.7. Abordaje de los temas

Continuamos con el estudio de la variación de las funciones trigonométricas, utilizando recursos gráficos, lo que permitirá a los estudiantes visualizar el comportamiento de las funciones, sus valores máximos y mínimos y la variación de sus valores en los diferentes cuadrantes.

Sugerimos que al término del análisis de las funciones, los estudiantes realicen un resumen de los valores que puede tomar cada función trigonométrica.

Planteamos varias situaciones de reducción de un ángulo al

primer cuadrante, para luego calcular las funciones de dicho ángulo y determinar sus signos.

Las actividades propuestas bajo el título Actividades de fijación tienen por objeto intensificar las capacidades desarrolladas.

Es importante justificar el uso de reglas y fórmulas demostrando las mismas y no la simple aplicación de ellas. Esto podemos ver en todos los temas trabajados en la unidad.

Iniciamos el estudio del triángulo oblicuángulo con la construcción de los mismos de acuerdo a los datos que disponemos, usando regla y transportador de ángulo.

Los teoremas del seno y del coseno son presentados a partir de una situación problemática, se analizan los datos de la misma para luego enunciar y demostrar ambos teoremas. Presentamos una variedad de problemas de aplicación de los teoremas estudiados.

En esta unidad sugerimos actividades que permiten trabajar los trasversales.

- **Educación democrática.** Leemos el artículo 91 de la Constitución Nacional y opinamos sobre las jornadas de trabajo y el descanso establecido en la misma).
- **Educación familiar y desarrollo personal.** En qué medida el ejercicio físico es un factor decisivo para el mantenimiento de una buena salud. Averiguamos en qué consisten los rayos ultravioletas, cómo pueden afectar a la salud de las personas y cuáles son los cuidados de la piel al exponerse al sol .
- **Educación ambiental.** Indagamos en diferentes fuentes sobre la época de «veda» en los principales ríos del país y los motivos por los que se establece. Averiguamos sobre los pantanales que existen en nuestro país y sobre las características de su ecosistema.

### 2.3.8. Algunos indicadores de evaluación

- Deduces el valor exacto de las funciones trigonométricas de un ángulo de  $30^\circ$ .
- Halla la equivalencia entre una función trigonométrica dada con otra del primer cuadrante.
- Identifica los datos del problema.
- Identifica el teorema a aplicar para resolver el problema.
- Calcula la incógnita mediante la fórmula del teorema del seno (o coseno).
- Verifica la solución obtenida en el problema.
- Asume con responsabilidad el trabajo realizado en aula.

### 2.3.9. Actividades complementarias

En este apartado sugerimos algunas actividades, además de las propuestas en el texto que servirán para retroalimentar lo aprendido, las mismas pueden realizarse como un trabajo en equipo.



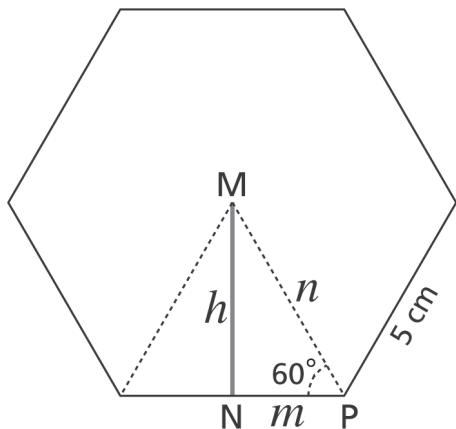
A 3

## Propuesta de actividad

**TEMA** Deducción de los valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables.

**OBJETIVO** Deduzco los valores de las funciones trigonométricas de ángulos notables, usando polígonos regulares.

**DESARROLLO** Graficamos un hexágono regular de lado 5 cm, como indica la figura:



Calculamos la altura por la fórmula:  $h = 1 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Como en el triángulo equilátero los ángulos miden  $60^\circ$ , por tanto, en el triángulo rectángulo trazado MMP, el ángulo  $P = 60^\circ$

Por definición de:  $\operatorname{sen} P = \frac{h}{n}$

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{n}$$

$$\operatorname{Calculamos} \cos 60^\circ \text{ partiendo de su definición: } n = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\operatorname{sen} 60^\circ} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{m}{n} = \frac{\frac{5}{2}}{5} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Calculamos} \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{h}{m} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = \sqrt{3}$$

Para el cálculo de los ángulos de  $30^\circ$  se procede de la misma manera. Por último, completamos la tabla con los valores correspondientes:

$\alpha$	$\operatorname{sen} \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	—

A 4

## Propuesta de actividad

**TEMA** Resolución de triángulos oblicuángulos.

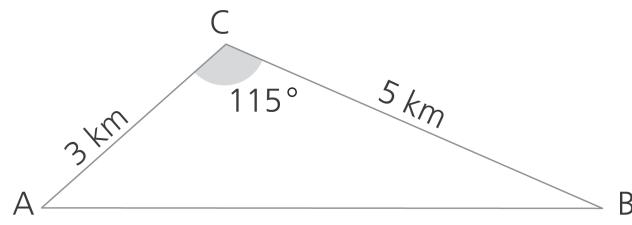
**OBJETIVO** Resuelvo problemas sobre triángulos oblicuángulos utilizando dos procedimientos.

**DESARROLLO** La Municipalidad de una ciudad desea construir un túnel entre dos puntos A y B. Para medir la distancia AB el topógrafo se sitúa en un punto C del terreno, distante 3 km de A y 5 km de B y mide con el teodolito el ángulo  $ACB = 115^\circ$ .

¿Cuál es la longitud aproximada del túnel?

Resolvemos:

- Los datos relevantes del problema son:  
Los lados  $\overline{AC} = 3 \text{ km}$  y  $\overline{BC} = 5 \text{ km}$ ;  $\angle ACB = 115^\circ$
- ¿Qué nos pide el problema? Nos pide calcular la longitud del túnel.
- Para resolver vamos a utilizar el teorema del coseno, pues conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.



Partimos de la Fórmula:  $c^2 = b^2 + a^2 - 2.a.b.\cos C$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{CB} \cdot \cos C$$

$$\overline{AB}^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 115^\circ$$

$$\overline{AB}^2 = 9 + 25 - 30 \cos 115^\circ = 46,07$$

$$\overline{AB} \approx 6,8 \text{ km}$$

La longitud del túnel es aproximadamente de 6,8

## A 5 Propuesta de actividad

**TEMA** Variación de la función  $y = a \sen x$ . Puntos de corte con el eje x. Puntos máximos y mínimos

**OBJETIVO** Construyo la función seno en el plano cartesiano, utilizando la técnica del hilorama.

Señalo los puntos de corte en el eje x.

Identifico en el plano los puntos máximos y mínimos.

**MATERIALES** Isopor, papel cuadriculado, alfileres, hilos de bordar de diferentes colores.

### DESARROLLO

#### PRIMERO

Preparamos los materiales de la siguiente manera:

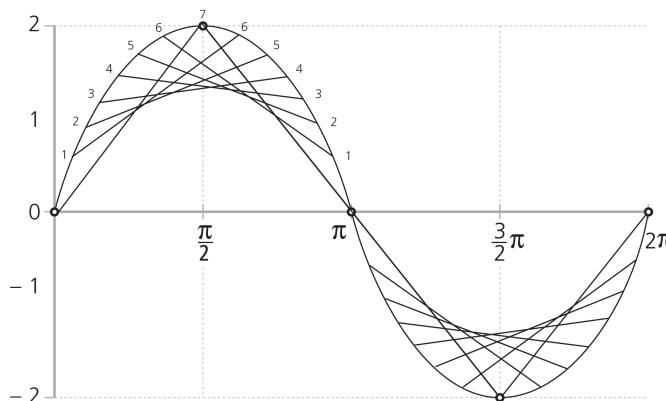
- Cortamos el isopor en forma rectangular y forramos con papel cuadriculado.
- Trazamos el plano cartesiano y dividimos en cuadrantes a la izquierda y derecha del  $P(0,0)$  que es el origen del sistema.
- Nombramos los puntos del eje x en radianes  $(-2\pi, -3\pi, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}, 2\pi)$ .
- En el eje y señalamos las amplitudes de las funciones  $y = a \sen x$ ;  $y = 2 \sen x$  y  $y = 3 \sen x$ , recordando que la amplitud de una función trigonométrica es el valor absoluto del coeficiente "a"; es decir  $|a|$  = amplitud.

#### SEGUNDO

Trazamos las tres funciones y luego colocamos a una misma distancia los alfileres sobre el trazado de las funciones con períodos  $2\pi$  cada una.

#### TERCERO

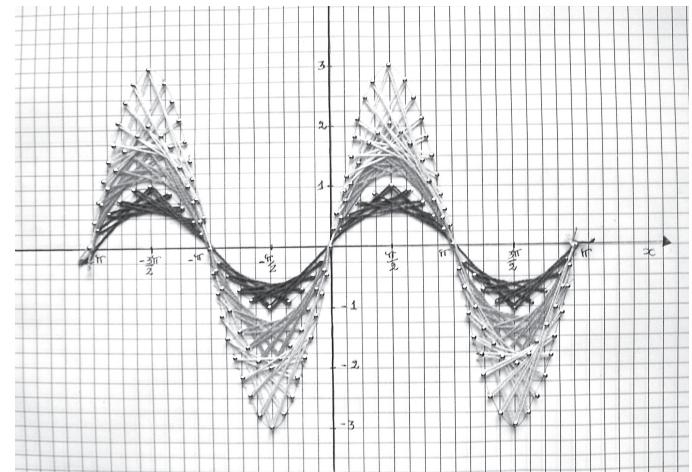
Utilizamos el método del sastre para entrelazar los hilos como se muestra en la siguiente figura que representa la función  $y = a \sen x$ , en el período de  $[0, 2\pi]$ :



- Numeramos los alfileres del 0 al 7.
- Unimos los puntos de manera que siempre sumen 7. Por ejemplo: el 0 y el 7, el 1 y el 6, el 2 y el 5 y así sucesivamente hasta completar el primer período  $[0, \pi]$ .

#### CUARTO

Procedemos de misma manera para los demás períodos, utilizando distintos colores de hilo para cada función.



#### QUINTO

Entresacamos los puntos de corte de las funciones con el eje x, observando el gráfico.

$P_1(-2\pi, 0), P_2(-\pi, 0), P_3(0, 0), P_4(\pi, 0)$  y  $P_5(2\pi, 0)$

#### SEXTO

Estudiamos la variación de las tres funciones en los cuadrantes dados y resumimos en una tabla.

Ángulos en radianes	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	$-2\pi$
$y = \sen x$	0	1	0	-1	0	-1	0	1	0
$y = 2 \sen x$	0	2	0	-2	0	-2	0	2	0
$y = 3 \sen x$	0	3	0	-3	0	-3	0	3	0

#### SÉPTIMO

Entresacamos los puntos máximos y mínimos de la función  $y = 3 \sen x$

$P_1(\frac{\pi}{2}, 3)$  punto máximo  $P_3(\frac{3\pi}{2}, -3)$  punto mínimo

$P_2(-\frac{3\pi}{2}, 3)$  punto máximo  $P_4(-\frac{\pi}{2}, -3)$  punto mínimo

#### OCTAVO

Concluimos que este trabajo facilitará la comprensión de los alumnos y las alumnas al experimentar con esta técnica de hilorama la construcción de su propio aprendizaje.



## 2.4

## UNIDAD 4

## Análisis combinatorio

## 2.4.1. Capacidades

- Resuelve situaciones problemáticas utilizando los principios del Análisis Combinatorio.
- Utiliza el Teorema de Newton en el desarrollo de potencias de binomios.

## 2.4.2. Temas

- Factorial de un número, variaciones, permutaciones, combinaciones.
- Números combinatorios, teorema del Binomio.

## 2.4.3. Página de apertura

Proponemos la lectura de la biografía de Blas Pascal. A través de ella se darán cuenta de que uno de sus mayores aportes fue la máquina de calcular de gran utilidad en esa época y actualmente. Así mismo su aporte al cálculo de probabilidades y al «Análisis Combinatorio» resultó valioso. También se puede ampliar esta biografía consultando los materiales del CRA o en Internet.

## 2.4.4. Abordaje de los temas

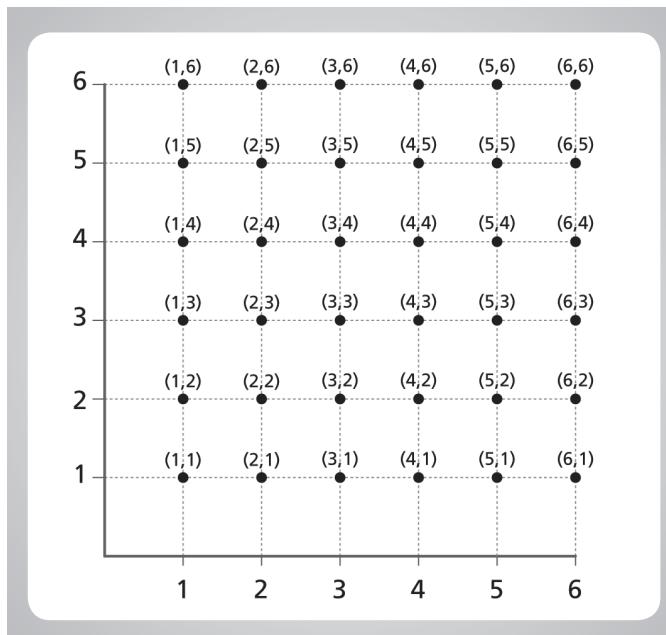
El concepto de Análisis Combinatorio está muy ligado al de Probabilidades, pues consiste en procedimientos y fórmulas que permiten determinar el número total de posibilidades que pueden ocurrir en una situación dada. Proponemos poner al alumno y alumna en situaciones que puedan experimentar para determinar las posibilidades de sucesos de cada situación. Así presentamos el concepto a partir de un problema de la vida real, utilizando el «diagrama de árbol» que permite visualizar todas las alternativas posibles de solución.

Proponemos esta actividad que coloca al estudiante en situación de descubrimiento.

## Un experimento aleatorio

Lanzamos dos dados y determinamos el número de veces que aparecen los números pares, los números impares y los elementos de la diagonal principal.

Construimos el plano cartesiano y ubicamos los pares de números que aparecen en el experimento.



**Números pares:** (2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6),  
(6, 2), (6, 4), (6, 6)

**Números impares:** (1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 5), (3, 1), (3, 3),  
(3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)

Pares de números ubicados sobre la diagonal principal:  
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)

Basándose en este conteo sugerimos que sigan encontrando otras situaciones creadas por ellos mismos. Por ejemplo: pares de números que suman 6; pares de números que se encuentran en la diagonal secundaria; pares de números que suman más de 12, etc.

Para el cálculo de variaciones, permutaciones y combinaciones partimos de una situación problemática para luego llegar al concepto de cada una de ellas y determinar sus fórmulas.

El texto presenta varios ejemplos resueltos sobre variación con y sin repetición, permutación, permutación circular, combinación con y sin repetición y además propone otros para sus soluciones.

Estas actividades nos permiten trabajar las áreas trasversales:

- Desarrollo del pensamiento crítico y productivo.
- Educación democrática. Conversamos sobre el uso adecuado del teléfono, respetando todas las opiniones.
- Educación familiar.

El texto les propone en un cuadro al final de la unidad un resumen de cómo distinguir variaciones, permutaciones y combinaciones.

Se podría proponer a la clase que investigue cuál es el mayor factorial que puede hallar con sus calculadoras.

### Orientación importante

Es importante que el alumno y la alumna descubran que por el método del conteo pueden resolver problemas de variación, permutación y combinación; siempre que el número de elementos sea pequeño, en caso contrario las fórmulas resultan más prácticas. Así mismo, para la aplicación de las fórmulas deben tener una idea clara del concepto de variaciones, permutaciones y combinaciones.

La utilización de la calculadora en el cálculo de Análisis combinatorio

Las calculadoras científicas son herramientas que facilitan el cálculo de los temas tratados, en sus manuales se especifican cómo utilizarlas. El cálculo de factorial sin calculadora sería muy tedioso, pero gracias a esta herramienta encontramos con facilidad con solo digitar las teclas shift x!

Para el cálculo de variaciones, permutaciones y combinaciones exemplificamos cómo hallarlas.

$V_{7,4}$  → Presionamos las teclas 7 shift nPr 4 = 840

$C_{4,2}$  → Presionamos las teclas 4 nCr 2 = 6

$P_5$  → Presionamos las teclas 5 shift x! 120

### 2.4.5. Algunos indicadores de evaluación

- Calcula factorial de un número.
- Utiliza el diagrama de árbol como una estrategia de solución.
- Determina los datos de un problema sobre variación con (o sin) repetición (o combinación o permutación).
- Identifica las incógnitas de un problema sobre variación con (o sin) repetición (o combinación o permutación).
- Utiliza la fórmula de variación con (o sin) repetición (o combinación o permutación), según corresponda en la resolución de problemas.
- Demuestra interés para encontrar la solución del problema.
- Comparte con los compañeros y las compañeras lo aprendido.

### 2.4.6. Actividades complementarias

En este apartado presentamos actividades que pueden trabajarse en grupo.

#### A 1 Propuesta de actividad

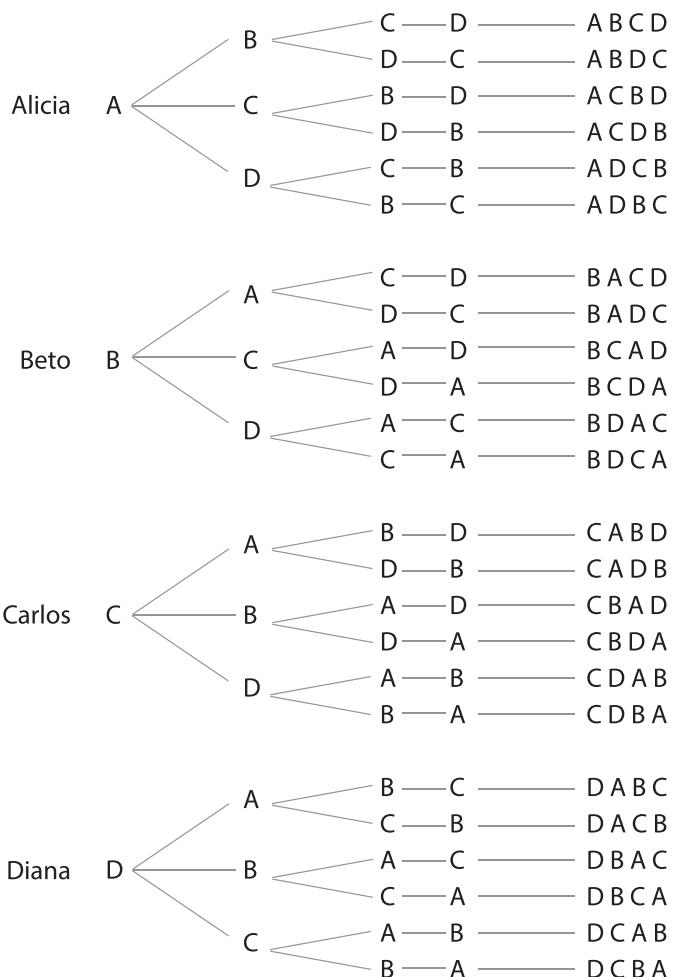
**TEMA** Permutación. Aplicación en problemas.

**OBJETIVO** Resuelvo problemas aplicando el concepto de permutación.

**DESARROLLO** ¿De cuántas maneras diferentes pueden sentarse en un banco, Alicia, Beto, Carlos y Diana? ¿Cuántas veces aparecen juntos Alicia y Beto?

El problema nos propone hallar las posibles posiciones en que pueden sentarse en un banco 4 jóvenes y cuándo coinciden Alicia y Beto juntos.

Vamos a resolver utilizando el método de árbol:



Vemos que hay 24 posibles permutaciones de cómo sentarse los jóvenes en un banco.

12 veces aparecen juntos Alicia y Beto.



Verificamos utilizando fórmulas y la calculadora.

$$P_m = m! \rightarrow P_5 = 5! \rightarrow \text{Insertamos en la calculadora}$$

$$5 \text{ SHIFT } x! 24 \rightarrow 24 \text{ posibilidades}$$

Para saber cuántas veces coinciden Alicia y Beto, estamos ante un caso de variación de 4 elementos tomados de a 2

$$V_{4,2} = \frac{m!}{(n-p)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

Usando la calculadora: 4 SHIFT nPr 2 = 12

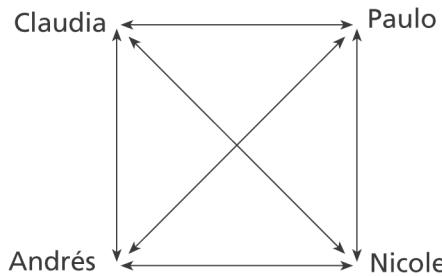
## A 2 Propuesta de actividad

**TEMA** Combinación.

**OBJETIVO** Resuelvo problemas de combinación, utilizando varios procedimientos.

**DESARROLLO** Cuatro amigos: Paulo, Andrés, Claudia y Nicole están conectados entre sí mediante una línea telefónica directa. ¿Cuántas líneas telefónicas directas habrá que instalar si son 20 personas?

**PRIMER PROCEDIMIENTO** Utilizamos la estrategia de calcular primero con cuatro personas, usando grafos.



Encontramos 6 formas de comunicarse como indican las flechas.

Utilizando la fórmula comprobamos nuestros resultados:

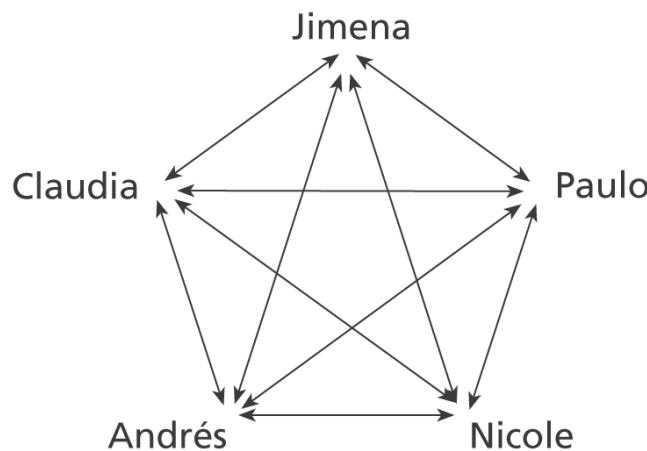
$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ formas de comunicarse.}$$

### RECORDAMOS

La fórmula para calcular el número de diagonales de un polígono de  $n$  lados es:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

Calculamos la comunicación entre 5 personas, usando un pentágono, colocando en cada vértice a una persona.:



Existen 10 posibilidades según las flechas.

$$\text{Verificamos utilizando la fórmula: } C_{n,p} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$$

La comunicación entre 20 personas ya amerita el uso de la fórmula.

$$C_{n,p} = \frac{20!}{2!(20-2)!} = 190 \text{ formas de comunicarse}$$

En la calculadora científica, marca:

$$5 \text{ nCr } 2 = 10$$

**SEGUNDO PROCEDIMIENTO** Si ubicamos a cada persona en los vértices de un polígono de 20 lados; para hallar el número de líneas telefónicas necesarias, sumamos el número de diagonales más el número de lados del polígono.

$$d = \frac{n(n-3)}{2} + n \text{ donde } n = \text{número de lados del polígono}$$

$$d = \frac{20(20-3)}{2} + 20 = 20 \cdot 17 + 20 = 170 + 20 = 190 \text{ comunicaciones.}$$

Por lo tanto: deberán instalarse 190 líneas telefónicas.

Verificamos usando la calculadora:  $C_{20,2}$

Presionamos las teclas

$$2 \text{ 0 nCr } 2 = 190$$

### A 3 Propuesta de actividad

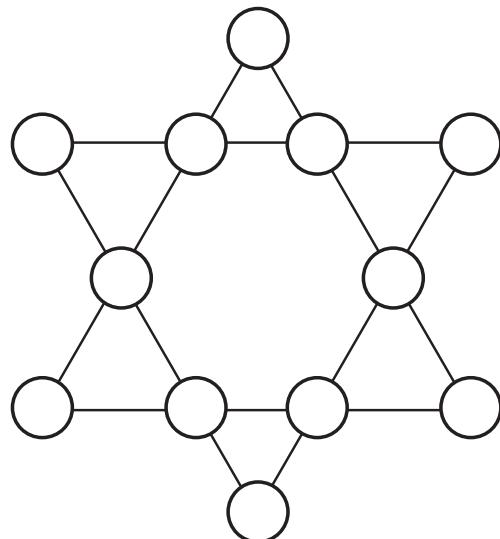
**TEMA** Problema de ingenio sobre combinatoria.

**OBJETIVO** Resuelvo problemas utilizando el pensamiento lógico.

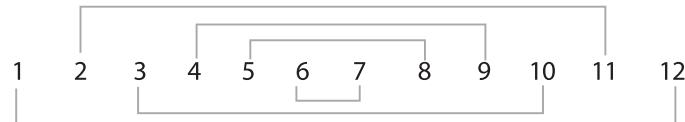
**DESARROLLO** En cada vértice de la estrella de David, colocar los números del 1 al 12, de manera que la suma de los cuatro números en cada segmento sea siempre 26. (Machicao, M., 2003)

#### Resolvemos

- Dibujamos la estrella de David y colocamos un círculo en cada vértice y en las intersecciones de los lados.



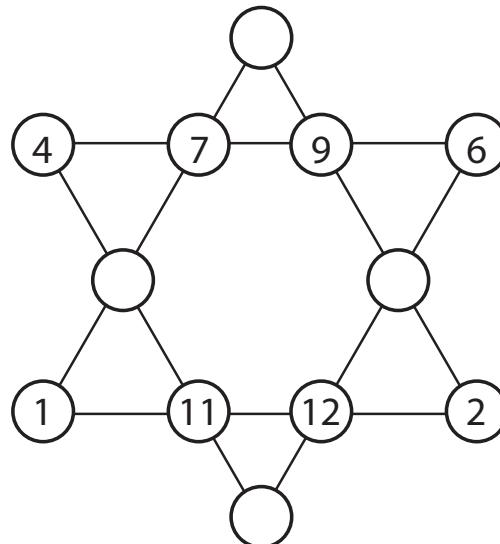
- Escribimos los números en fila y vemos que los equidistantes suman 13.



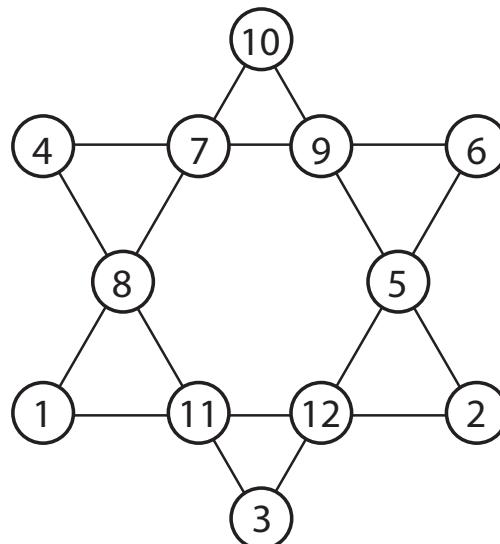
- Formamos con los mismos, grupos de 4 elementos y sumamos; por ejemplo:

$1+12+2+11=26 \rightarrow$  colocamos en la primera fila horizontal.

$4+9+6+7=26 \rightarrow$  colocamos en la segunda fila horizontal.



- $3+10+5+8=26 \rightarrow$  colocamos en los espacios vacíos, utilizando la estrategia «Tentativa y error organizado», vamos moviendo de lugar los números hasta llegar al siguiente resultado:



- Pedimos a los alumnos y las alumnas que busquen otras combinaciones posibles.



## 2.5

## UNIDAD 5

## Línea recta (I)

## 2.5.1. Capacidades

- Formula y resuelve problemas referidos a situaciones de la vida real, que impliquen cálculos.

## 2.5.2. Temas

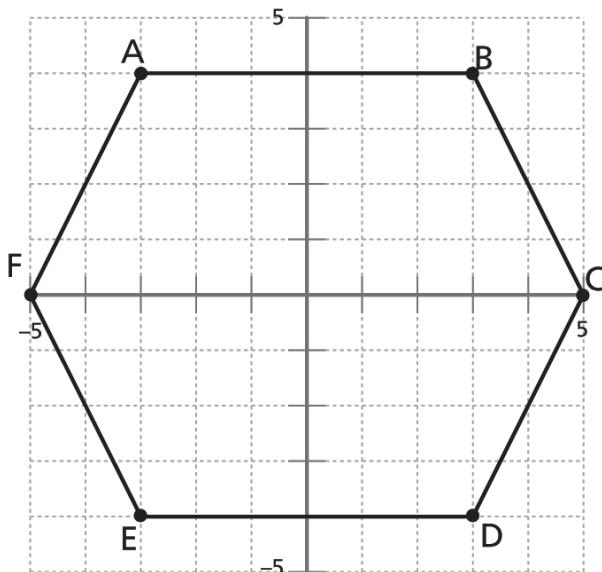
- Distancia entre dos puntos.
- Punto medio de un segmento.

## 2.5.3. Evaluación diagnóstica

Consideramos oportuno realizar una evaluación diagnóstica sobre los conocimientos geométricos y algebraicos adquiridos en la EEB que servirán de base para el desarrollo de la Geometría Analítica. A continuación les proponemos algunos ítems.

## Propuesta de evaluación diagnóstica

1. En el siguiente hexágono escribo las coordenadas de los vértices A, B, C, D, E y F.



**Respuesta:** A(-3, 4); B(3, 4); C(5, 0); D(3, -4); E(-3, -4); F(-5, 0)

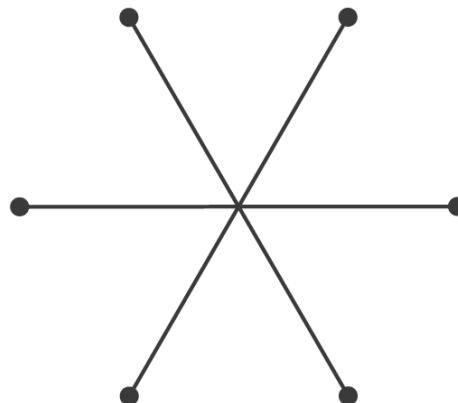
2. Grafico en el plano cartesiano las rectas y encuentro el punto de intersección de las mismas resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$$

**Respuesta:** (3, 1)

**Resuelvo las siguientes situaciones y marco la opción correcta en cada una.**

3. La cantidad de triángulos que se pueden formar uniendo los vértices de los puntos de la figura es:
- |       |       |
|-------|-------|
| a. 20 | c. 12 |
| b. 16 | d. 10 |



**Respuesta:** d

4. Grafico un triángulo dados los siguientes puntos: A (-2, -1) B (1, -4) y C (4, 5). ¿Qué triángulo es?
- |               |               |
|---------------|---------------|
| a. rectángulo | c. escaleno   |
| b. isósceles  | d. equilátero |

**Respuesta:** d

5. Elaboro una gráfica en el sistema cartesiano con los siguientes puntos (0, 5) (10, 25) (15, 35) (20, 45). ¿Qué curva observo?
- |             |                   |
|-------------|-------------------|
| a. parábola | c. curva          |
| b. recta    | d. circunferencia |

**Respuesta:** b

6. Dados los puntos  $P_1 (-2, 2)$  y  $P_2 (2, 4)$  de una recta y otra recta cuyos puntos son  $P_3 (1, -1)$  y  $P_4 (5, 1)$ , ¿cómo son las rectas?
- |                    |              |
|--------------------|--------------|
| a. perpendiculares | c. paralelas |
| b. oblicuas        | d. secantes  |

**Respuesta:** c

## 2.5.4. Sugerencias didácticas

### 2.5.4.1. Proceso de desarrollo de capacidades

A modo de ejemplo se presentan las siguientes:

Interpreta analíticamente y críticamente la información que proporciona la representación gráfica de lugares geométricos y establece conjeturas.

1. Analizar la situación concreta presentada.
2. Seleccionar los elementos y las condiciones que cumplen los puntos de un gráfico.
3. Argumentar las condiciones seleccionadas del gráfico.
4. Explicar el significado de los elementos y condiciones seleccionadas.
5. Elaborar una conclusión sobre la situación presentada.
6. Establecer conjeturas al interpretar la información que proporciona un gráfico.
7. Demostrar creatividad en los trabajos matemáticos.

Formula y resuelve problemas que requieran el empleo del concepto de distancia entre dos puntos, punto medio de un segmento y área de un polígono, en un plano cartesiano.

1. Conocer el concepto que será aplicado.
2. Seleccionar el tema.
3. Determinar los datos y la incógnita en el plano cartesiano.
4. Elaborar el enunciado de la situación problemática.
5. Analizar el problema formulado para verificar si la información es relevante y si la pregunta formulada es pertinente.
6. Hallar la solución de la situación planteada.
7. Verificar el resultado y los procedimientos seguidos.
8. Aceptar opiniones de sus pares al formular un problema.

### 2.5.4.2. Página de apertura

Consideramos conveniente presentar en dos unidades el tema de Línea recta debido a su amplitud. Como recurso didáctico proponemos un artículo que nos permite conocer la evolución histórica de la Geometría Analítica cuyo estudio iniciamos en esta unidad. Para analizar el artículo se pueden realizar las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los matemáticos nombrados?
- ¿A qué época de la historia pertenecen?
- ¿Cuáles son los términos o expresiones matemáticas encontrados en el artículo que son conocidos?
- ¿En qué siglo aparece la disciplina matemática conocida como Geometría Analítica?
- ¿A quién se atribuye la invención de la Geometría Analítica?

### 2.5.4.3. Abordaje de los temas

Partimos de una situación problemática para establecer la relación entre la Geometría, el Álgebra y la Geometría Analítica, porque de esta manera los estudiantes tendrán una visión clara de lo que ya han estudiado en grados anteriores sobre el tema la recta y la nueva propuesta matemática que amplía su estudio ubicándola en el plano, y lo expresa en relación al mismo.

La fórmula de distancia entre dos puntos de un plano, deducimos a partir del Teorema de Pitágoras. El texto presenta varios ejemplos de su aplicación en situaciones problemáticas.

Los Ejercicios de fijación del tema distancia entre dos puntos están enunciados en guaraní. En ellos se proponen dos ítems para formular problemas; recordamos que ésta es una capacidad correspondiente a la unidad. Por ser la primera actividad que corresponde a la capacidad, les damos los datos y les pedimos que formulen un problema con los mismos.

### Orientaciones importantes

Para la formulación de problemas debemos tener presente, que los estudiantes manejen el concepto matemático, asocien los mismos a su realidad, seleccionen los datos, formulen preguntas y elaboren un enunciado.

En el proceso de construcción de problemas se pueden considerar las siguientes variables:

- Formulación de un problema similar a uno dado.
- Formulación de problemas donde el alumno debe seleccionar la información adecuada.
- Reformulación de un problema con la información mínima e indispensable a partir de otro con exceso de información.
- Formulación de un problema a partir de otro modificando los datos e incorporando incógnitas.

Es importante que el estudiante deduzca las fórmulas de punto medio de un segmento y el área de un polígono siguiendo procedimientos geométricos y con la ayuda de gráficas..

Presentamos su aplicación en el campo de la Geometría con actividades como calcular la intersección de las diagonales de un paralelogramo, las coordenadas de los vértices del triángulo formado por los puntos medios de los lados de otro triángulo, el área y el perímetro.

Las Actividades de fijación propuestas se pueden utilizar como trabajo individual para intensificar los temas abordados.



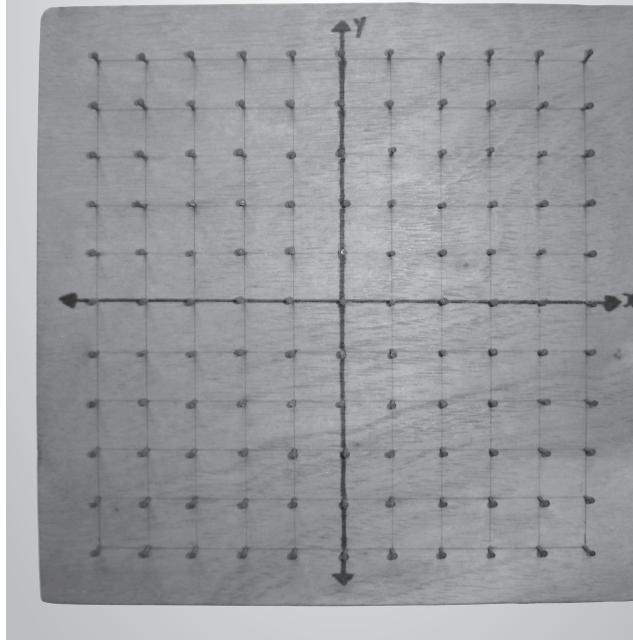
Las Actividades de Retroalimentación, de esta unidad, proponemos realizar en grupo. Para la formación de los mismos recordamos tener en cuenta la diversidad, es decir, que el grupo sea heterogéneo, formado por alumnos aventajados junto con los menos aventajados en la materia, de diferentes círculos económicos y sociales, evitando la discriminación. Esto permitirá proporcionar la integración del curso, compartir información desde diversas perspectivas y lograr superar el aprendizaje individual tan común en nuestras aulas.

### Material didáctico sugerido

Proponemos el geoplano o geotabla, utilizado en la Geometría plana, que transformado resultaría útil para la representación de puntos en el plano cartesiano.

¿Cómo se construye el geoplano?

- Necesitamos una tabla de madera cuadrada de 30 x 30 cm<sup>2</sup>
- Dividimos en cuadraditos de 2 cm de lado.
- Trazamos el sistema de ejes coordenados, a los 15 cm de cada lado
- En cada vértice de los cuadraditos colocamos un clavo.
- Para indicar los vértices se podrían utilizar arandelas pequeñas o argollitas de plástico recicladas y para trazar los lados de los polígonos se puede utilizar un hilo elástico o de tejer.



### 2.5.5. Algunos indicadores de evaluación

- Determina la distancia entre dos puntos conociendo sus coordenadas.
- Calcula el punto medio de un segmento en el plano.
- Calcula el área de polígonos en el plano conociendo sus vértices.
- Enuncia un problema sobre distancia entre dos puntos (o punto medio o área de un polígono) dados algunos de los datos.
- Plantea un problema sobre distancia entre dos puntos (o punto medio o área de un polígono) seleccionando la información adecuada.
- Rehace el planteamiento de un problema que no reúne los datos necesarios.
- Aporta ideas al grupo curso.

### 2.5.6. Actividades complementarias

Presentamos dos propuestas de actividades para trabajar en grupo, las mismas pueden servir para retroalimentar los temas tratados en esta unidad en otro contexto.

A 1

#### Propuesta de actividad

**TEMA** Distancia entre dos puntos.

**OBJETIVO** Reconozco que los temas en estudio se relacionan con la razón áurea.

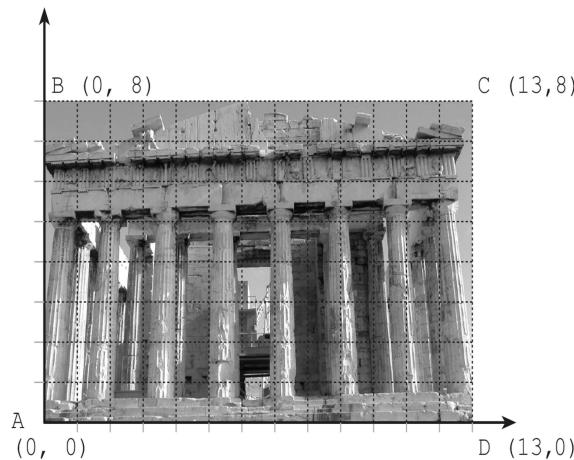
**DESARROLLO** Leemos el siguiente artículo:



#### El Partenón y la razón áurea

Lo fundamental de la Arquitectura griega fueron los templos. En la ilustración, las ruinas del Partenón situado en la Acrópolis de Atenas, hemos rodeado de un rectángulo muy especial puesto que es un ejemplo de lo que los Griegos llamaban la razón áurea ( $\phi$ ). Este rectángulo puede tener cualquier ancho, pero su largo debe ser un poco más de  $\frac{6}{10}$  más grande que el ancho.

Ubicamos en el plano cartesiano una fotografía del Partenón y escribimos los pares ordenados A(0,0), B(0,8), C(13,8) y D(13,0) correspondientes al rectángulo donde está encuadrado.



Las dimensiones del rectángulo verificamos contando los segmentos de los cuadraditos unidad.

Para verificar la relación entre el ancho y largo del rectángulo consideraremos la información del artículo:

Largo del rectángulo

$$= \text{ancho} + \frac{6}{10} \text{ del ancho} = 8 + \frac{6}{10} \cdot 8 = 8 + 4,8 = 12,8 \cong 13.$$

Con este ejemplo tratamos de relacionar, la imagen presentada en el artículo con el tema distancia entre dos puntos y fundamentalmente con la razón áurea.

Hallamos la distancia  $\overline{BC}$  (largo) y  $\overline{CD}$  (ancho):

$$\overline{BC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(13 - 0)^2 + (8 - 8)^2} = \sqrt{169} = 13\text{u}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(13 - 13)^2 + (0 - 8)^2} = \sqrt{64} = 8\text{u}$$

Hallamos el número áureo  $\phi$  o razón áurea teniendo en cuenta las medidas obtenidas del gráfico.

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\text{ancho}}{\text{largo}} = \frac{8}{13} = 0,615 \quad \text{valor aproximado de la razón áurea que es } \phi = 0,618$$



## 2.6

## UNIDAD 6

## Línea recta (II)

## 2.6.1. Capacidades

- Resuelve situaciones problemáticas que requieran la utilización de las ecuaciones de la recta.

## 2.6.2. Temas

- Ecuación de la recta: general o implícita; explícita, segmentaria, ecuación punto-pendiente.
- Representación gráfica de la recta.
- Puntos de intersección con los ejes coordinados.

## 2.6.3. Evaluación diagnóstica

Elaboramos la siguiente prueba diagnóstica en base a las capacidades desarrolladas en la unidad anterior.

## Propuesta de evaluación diagnóstica

- Determino gráficamente si los puntos A (1, 0), B (5, 2) y C (3, 1) están alineados.

**Respuesta:** Sí

- Utilizo el Teorema de Pitágoras y demuestro analíticamente que el triángulo formado por los vértices A (4, -2), B (-6, 2) y C (4, 6) es rectángulo. Grafico.

**Respuesta:** ABC es un triángulo rectángulo porque  
 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$   $164 = 100 + 64$

- Ubico los siguientes puntos A (0,0), B (5, 4), C (11, 4) y D (6, 0) en el sistema de ejes cartesianos y contesto:
  - ¿Qué tipo de cuadrilátero se forma al unir dichos puntos?
  - ¿Cuánto mide la diagonal  $\overline{AC}$ ?
  - ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio de la diagonal  $\overline{AC}$ ?

**Respuestas:** a. Es un paralelogramo  
b.  $\sqrt{137} = 11,7$   
c. M (11, 2)

- El área del cuadrilátero de vértices A (1, 2), B (4, 2), C (4, 3) y D (-2, -4) es:

a. $8 u^2$	c. $-18 u^2$
b. $18 u^2$	d. $56 u^2$

**Respuesta:** A =  $18 u^2$

## 2.6.4. Sugerencias didácticas

## 2.6.4.1. Proceso de desarrollo de capacidades

A modo de ejemplo se presenta la siguiente:

Formula y resuelve problemas que requieran la aplicación de funciones lineales en contextos varios.

- Conocer el concepto de funciones lineales.
- Seleccionar el tema del problema a partir de su realidad.
- Identificar los datos y la incógnita del problema.
- Elaborar el enunciado de la situación problemática.
- Analizar el problema formulado para verificar si la información es relevante, si contiene todos los datos necesarios y si la pregunta formulada es pertinente.
- Hallar la solución de la situación planteada.
- Verificar el resultado.
- Examinar el razonamiento seguido.
- Colaborar en la solución de los problemas formulados.

## 2.6.4.2. Página de apertura

Nos valemos de una fotografía para incentivar el estudio de esta unidad ubicando el tema en nuestro entorno cotidiano como escaleras, rampas, viaductos y así introducimos la idea de pendiente. Observando la fotografía pueden surgir preguntas tales como:

- ¿Dónde se encuentra ubicado este edificio?
- ¿Han subido alguna vez esta rampa?
- ¿Cómo son las calles de tu ciudad?
- ¿Existen en tu comunidad rampas para personas con discapacidad?
- ¿Existe alguna ordenanza municipal que obligue a colocar rampas para personas con discapacidad, en ciertos lugares? ¿Cuáles?

## 2.6.4.3. Abordaje de los temas

Luego de contestar estas preguntas entramos a estudiar la pendiente de una recta, para ello presentamos una situación problemática utilizando una rampa similar a la de la fotografía donde planteamos la relación entre el desplazamiento vertical y horizontal de un vehículo cuando asciende o desciende por la misma. Resolvemos el problema hallando la constante de proporcionalidad, la función de proporcionalidad y concluimos con la definición de pendiente de una recta.

El cálculo de pendiente de la recta obtuvimos por la definición de tangente y a través de ejemplos estudiamos las distintas posiciones de la recta en el plano y los valores que va asumiendo la pendiente en cada caso.

En el estudio de rectas paralelas y perpendiculares determinamos sus pendientes para luego compararlas y establecer

las condiciones de paralelismo y perpendicularidad. Consideramos oportuno incluir el estudio de ángulo entre dos rectas, que permite aplicar el concepto de pendiente en otras situaciones.

Partimos de una situación problemática que utiliza una función lineal, graficamos la misma y presentamos las distintas formas de escribir la ecuación de la recta; para luego establecer las características de la ecuación, como la pendiente, la ordenada al origen y la abscisa al origen.

### La utilización de la computadora

Proponemos la utilización de la computadora para graficar la función  $y = -4x - 5$ , en la misma consignamos los pasos que seguir:

- 1 En una hoja de cálculo, copiamos la siguiente tabla con sus correspondientes fórmulas
- 2 Escribimos bajo la letra Y la fórmula que graficar de la siguiente manera  
 $= -4*(x) - 5$  donde x representa la celda que contiene los valores de X.
3. Seleccionamos la tabla anterior e insertamos un gráfico de dispersión con puntos de datos conectados por líneas para la misma:
  - a. Hacemos clic en Insertar en la barra de menús y en Gráfico...
  - b. Seleccionamos el tipo y subtipo de gráfico (dispersión- con puntos de datos conectados por líneas).
  - c. Finalizamos.

	A	B
1	X	Y
2	-2	$= -4 * (A2) - 5$
3	0	$= -4 * (A3) - 5$
4	1	$= -4 * (A4) - 5$

### Orientaciones importantes

#### La tecnología y la resolución de problemas

El uso de la tecnología en la educación matemática y en especial en la resolución de problemas es actualmente un factor importante para mejorar la comunicación y permitir la interacción de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, porque les resulta muy fácil el manejo y la operación. También es importante el uso de software o programas educativos sobre diferentes temas. Es necesario desarrollar una cultura tecnológica entre docente y estudiante.

El texto presenta las aplicaciones de la función lineal en la Administración y en la Geometría lo que propicia la interdisciplinariedad y de esta manera las clases resultarán más significativas.

Las Actividades de fijación propuestas contienen una variedad de ejercicios y situaciones problemáticas que llevan al estudiante a apropiarse de los conceptos aprendidos.

Se propone una investigación bibliográfica sobre la situación en que se encuentra la empresa «Ferrocarriles del Paraguay S.A.».

En los ejercicios, se puede pedir a los alumnos y alumnas consultar o trabajar con el docente de Química sobre la elaboración de jabones que conlleva el trabajo interdisciplinario.

Las Actividades de Retroalimentación de esta unidad, proponemos realizar en grupo, fomentando el trabajo cooperativo.

#### 2.6.5. Algunos indicadores de evaluación

- Calcula la pendiente de una recta conociendo dos puntos de ella.
- Calcula el ángulo de inclinación de una recta a partir de su pendiente.
- Calcula el ángulo de inclinación de una recta a partir de su ecuación.
- Identifica rectas perpendiculares a partir de sus pendientes.
- Halla la ecuación de la recta conociendo dos puntos de la misma.
- Enuncia un problema sobre ecuaciones lineales dados algunos de los datos.
- Plantea un problema sobre ecuaciones lineales seleccionando la información adecuada.
- Interpreta el gráfico de una función lineal.
- Rehace el planteamiento de un problema que no reúne los datos necesarios.
- Escucha los comentarios de los demás sobre el planteamiento presentado.

#### 2.6.6. Actividades complementarias

Presentamos dos propuestas de actividades para trabajar en grupo, las mismas pueden servir para retroalimentar los temas tratados en esta unidad en otro contexto.



A 1

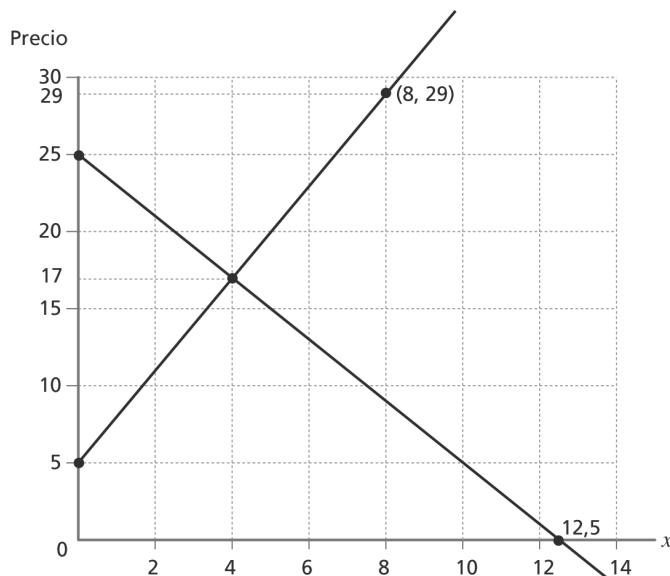
## Propuesta de actividad

**TEMA** Función lineal. Aplicación.**OBJETIVO** Aplico el concepto de la función lineal en la resolución de problemas relacionados con la Administración.

Analizo gráficos de funciones lineales.

**DESARROLLO** Proponemos la siguiente situación problemática:

- El siguiente gráfico representa la ecuación de la oferta y de la demanda de cierto producto.



1. Observando las rectas determinamos, ¿cuál de ellas representa la ecuación de la oferta y cuál la de la demanda?
2. Hallamos las ecuaciones de las rectas, teniendo en cuenta dos puntos de ellas.
3. Teniendo en cuenta cada una de las ecuaciones determinamos sus pendientes.
4. Calculamos el punto de equilibrio del mercado y explicamos qué representan los valores de x y P.

**Solucionamos**

La recta que representa la ecuación de la demanda es la que tiene pendiente negativa, es decir, la que tiene una inclinación que baja hacia la derecha del eje de abscisas. La otra recta representa la oferta y su pendiente es positiva, se inclina hacia la izquierda del eje de abscisas.

Calculamos la ecuación de la oferta tomando los puntos (0, 5) y (8, 29).

1. Hallamos la pendiente de la recta

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{29 - 5}{8 - 0} = \frac{24}{8} = 3$$

Aplicamos la fórmula de la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad y - 5 = 3(x - 0) \quad y - 5 = 3x \\ y = 3x + 5$$

2. Hallamos la ecuación de la demanda tomando los puntos de la recta (12,5 ; 0) y (0, 25)

Hallamos la pendiente de la recta:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} ; \quad m = \frac{25 - 0}{0 - 12,5} = \frac{25}{-12,5} = -2$$

Aplicamos la fórmula de la ecuación punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad y - 0 = -2(x - 12,5) \\ y = -2x + 25$$

3. En la ecuación de la oferta la pendiente es:  $m = 3$

4. En la ecuación de la demanda la pendiente es:  $m = -2$

Calculamos el punto de equilibrio.

El punto de equilibrio se da cuando la ecuación de la oferta es igual a la ecuación de la demanda, para calcularlo igualamos ambas ecuaciones:

$$3x + 5 = -2x + 25$$

oferta      demanda

Pasamos x al primer miembro

$$3x + 2x = 25 - 5$$

$$5x = 20$$

 $x = 4$  Abscisa del punto de equilibrio

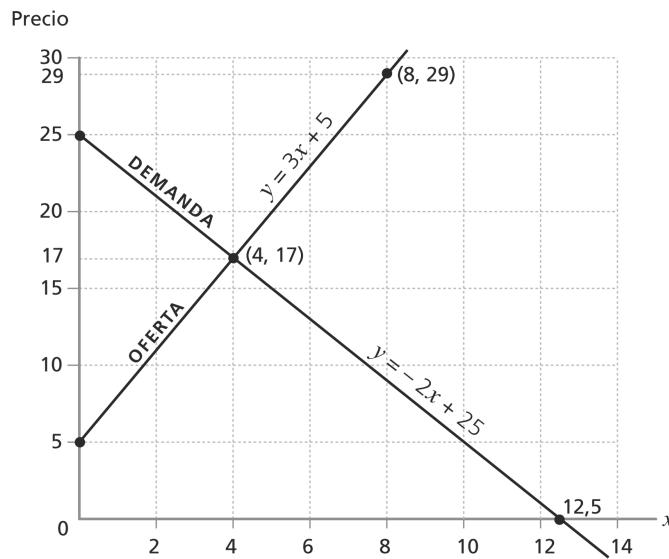
Para obtener la ordenada, reemplazamos en la ecuación de la oferta x por su igual 4:

$$y = 3x + 5 = 3 \cdot 4 + 5 = 12 + 5 = 17$$

Luego, el punto de equilibrio es (4, 17).

Donde 4 es la cantidad de equilibrio y 17 es el precio de equilibrio.

- Por último, completamos nuestra gráfica.



El proceso seguido para resolver esta actividad fue:

- Identificar en el gráfico las rectas que representan la ecuación de la oferta y de la demanda, por la inclinación de las mismas, sabiendo que la pendiente positiva corresponde a la ecuación de la oferta y la que tiene pendiente negativa a la demanda.
- Determinar las ecuaciones de la oferta y luego la de la demanda, hallando primero sus pendientes y luego aplicando la fórmula de la ecuación punto-pendiente.
- Verificar que la pendiente de la oferta es positiva y el de la demanda negativa.
- Para hallar el punto de equilibrio igualamos las ecuaciones de la oferta y de la demanda, resolvemos la ecuación y obtenemos la abscisa  $x$  del punto de equilibrio. Llevamos este valor a una de las ecuaciones, el de la oferta o la demanda para obtener la ordenada del punto de equilibrio.
- Completar la gráfica.



### 3 Estrategias de aprendizaje

Inicialmente es importante considerar la implicancia de los términos ESTRATEGIA y APRENDIZAJE, a fin de precisar una definición del tema a tratar en este apartado.

El término estrategia puede emplearse en distintos ámbitos como sinónimo de un proceso basado en una serie de premisas que buscan obtener un resultado específico, por lo general beneficioso. La misma constituye los principios y las rutas fundamentales que orientarán el proceso para alcanzar los objetivos a los que se desea llegar. En el contexto pedagógico, la estrategia, es una puesta en práctica de la inteligencia y el raciocinio por medio de la implementación de una serie de técnicas para el desarrollo de la enseñanza.

El aprendizaje es la adquisición de nuevas conductas de un ser vivo a partir de experiencias previas, con el fin de conseguir una mejor adaptación al medio físico y social en el que se desenvuelve. Es el proceso a través del cual se adquieren o modifican habilidades, destrezas, conocimientos, conductas o valores como resultado del estudio, la experiencia, la instrucción, el razonamiento y la observación. El aprendizaje se define como el cambio de la conducta de una persona a partir de una experiencia, es la consecuencia de aprender a aprender.

Las estrategias de aprendizaje son el modo en que enseñamos a nuestros estudiantes, es decir, la forma de aprovechar al máximo sus posibilidades de una manera

constructiva y eficiente. Está demostrado que las mismas juegan un papel muy importante en todo el proceso de enseñanza aprendizaje.

Podemos afirmar que las estrategias de aprendizaje constituyen el proceso mediante el cual se interiorizan mejor los conocimientos, son guías de las acciones a seguir que ayudan a tomar una decisión consciente sobre el procedimiento que hay que utilizar, a fin de lograr el objetivo de aprendizaje.

Se puede definir a la estrategia de aprendizaje como el proceso por el cual el docente o el estudiante elige, observa, piensa y aplica los procedimientos adecuados para conseguir un fin. "Son procedimientos flexibles que pueden incluir técnicas... Su aplicación es intencionada, consciente y controlada... requiere la aplicación de conocimientos metacognitivos, de lo contrario se confundirá con las técnicas" (Díaz Barriga Areco. p.179).

Como docentes debemos aprovechar al máximo no solo las posibilidades del estudiante sino también las nuestras. En estos últimos años han ido surgiendo diferentes formas de aprender y de enseñar, es decir diferentes estrategias, es importante conocerlas y ponerlas en práctica. Procedimientos de las estrategias de aprendizaje.

Durante el proceso de aprendizaje es esencial ver lo que realiza el estudiante, su progreso se debe considerar no sólo por los resultados sino como lo está consiguiendo,

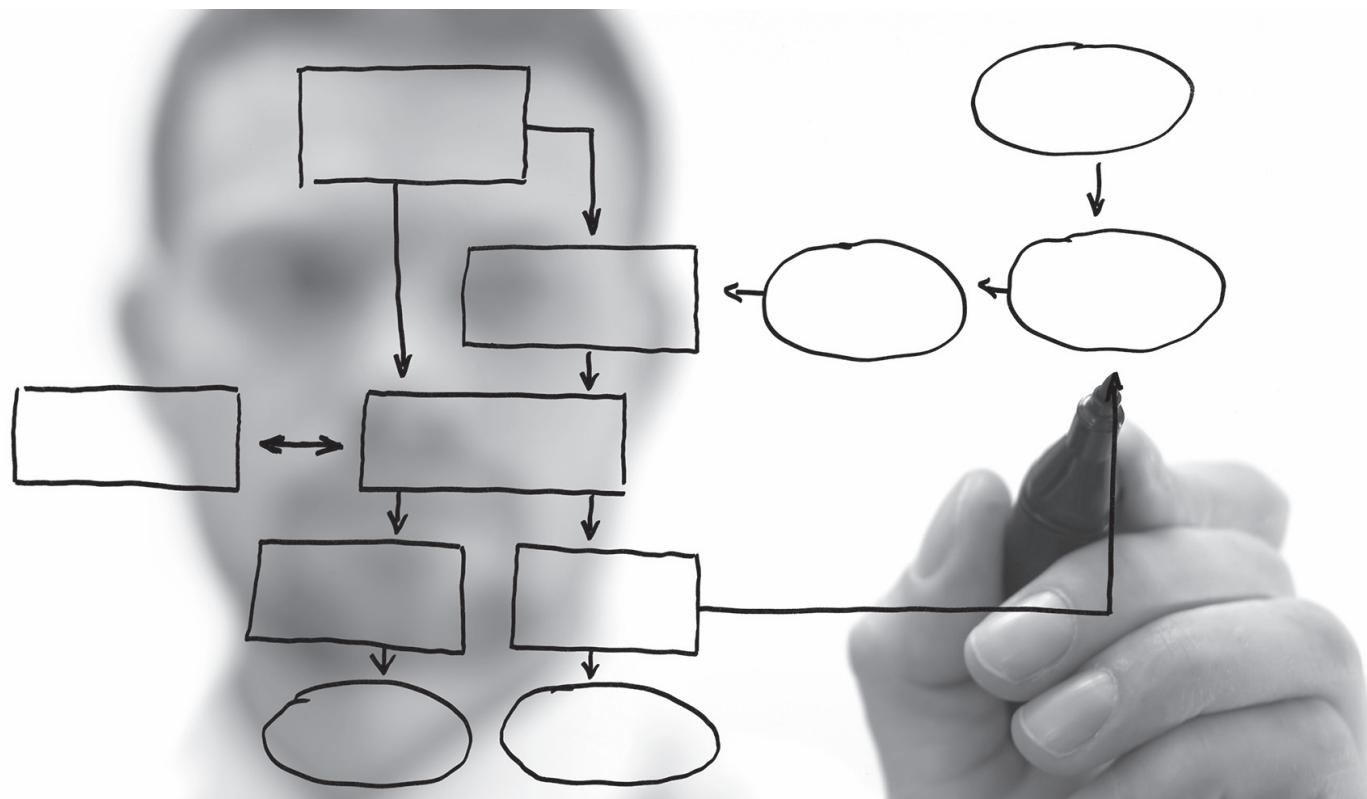
o sea el "durante". Cuando un estudiante emplea una estrategia es capaz de ajustar su comportamiento a una actividad y así lograr el objetivo. Para que la actividad de un estudiante sea considerada como estrategia el mismo debe seguir básicamente los siguientes pasos:

- Realizar una reflexión sobre la tarea.
- Planificar para saber lo que va a hacer (el estudiante debe de tener una serie de recursos previos).
- Ser capaz de realizarla.
- Evaluar su actuación.

Las estrategias de aprendizaje deberán ser evaluadas lógicamente por el profesor, el cual valorará la autonomía que tiene el alumno de realizar las tareas en la clase como las de extra clase.



### 3.1 Técnicas de aprendizaje



Las estrategias de aprendizaje son las responsables de guiar, de ayudar, de establecer el modo de aprender. En cambio, las técnicas de estudio son las herramientas encargadas de realizar las estrategias mediante procedimientos concretos para cada una. Estas deben aplicarse y ajustarse al objetivo planteado, al contenido y a las características de los estudiantes.

La diferencia tanto de la técnica como de la estrategia es muy sencilla, por ejemplo, si pensamos en un equipo de fútbol podemos ver a un equipo con buen manejo de la pelota, he ahí la técnica, pero este equipo también necesita una estrategia de juego o jugadas, es decir las posiciones y movimientos de los jugadores en defensa y ataque, generalmente definidas por el entrenador y que se deben aplicar durante el juego. Si un jugador dejara de jugar y de entrenar por mucha estrategia y calidad que tenga, acabaría siendo un mal jugador. La técnica sin la estrategia no funciona, pero tampoco podemos crear una estrategia efectiva si no se cuenta con el dominio de la técnica.

En el proceso de enseñanza aprendizaje las técnicas son las actividades que realizan los estudiantes cuando apren-

den: repetir, subrayar, esquematizar, realizar preguntas, etc. Cuanto el estudiante más se conozca a sí mismo y conozca las distintas técnicas de estudio que tiene a su disposición, más fácil le será seleccionar las adecuadas a cada situación para crear sus propias estrategias y construir su aprendizaje.

Aprender a estudiar sacándole provecho a las capacidades personales es muy parecido a un entrenamiento físico: hace falta voluntad, un buen entrenador y constancia. Si no se conoce la manera de hacerlo es difícil tener buenos resultados, hay que querer, pero también saber. Los pasos a seguir son casi siempre los mismos a la hora de estudiar, lo que varía es la elección de la técnica en cada uno de estos pasos. El objetivo final será que el estudiante sepa autorregularse y ser autónomo en su aprendizaje.

Ante todo lo expuesto, vemos que las técnicas didácticas ocupan un lugar fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje, son las actividades que el docente planea y ejecuta para facilitar la construcción del conocimiento de sus estudiantes.

Posteriormente, estaremos explicitando algunas técnicas innovadoras que facilitan el aprendizaje de los estudiantes.



## 3.2 Clasificación y finalidad de las estrategias de aprendizaje

### Clasificación de las estrategias de acuerdo con su función cognitiva

Entre las estrategias que cumplen funciones cognitivas se encuentran: las de Adquisición de información, que incluyen la observación, la búsqueda de información con manejo de fuentes, selección de información, el repaso y retención. La de Interpretación entre las que se encuentra la decodificación o traducción, la aplicación de modelos para interpretar situaciones, el uso de analogías y metáforas. Las de análisis y razonamiento; que aborda obviamente el análisis y comparación de modelos, el razonamiento y la realización de inferencias, la investigación y solución de problemas. Las de comprensión y organización que incluyen la comprensión del discurso oral y escrito, el establecimiento de relaciones conceptuales y la organización conceptual. Las estrategias de comunicación que desarrollan la expresión oral y escrita, al igual que la expresión a través de la información gráfica, numérica, icónica entre otros. (Pozo, citado en Díaz Barriga Areco).

### Otras estrategias y sus finalidades

Además de las anteriormente técnicas de aprendizaje mencionadas, existen otras que no son de menor importancia, las que presentamos a continuación:

**Recirculación:** Tiene como finalidad el repaso simple o el apoyo al repaso. Supone un aprendizaje superficial y es



empleada para conseguir un aprendizaje "al pie de la letra". Se fundamenta en un aprendizaje memorístico asociativo basado en la práctica reiterada, (recircular) repetir una y otra vez la información. Esta técnica resultaría útil para el aprendizaje de materiales que poseen escasa significatividad para el estudiante. El apoyo al repaso puede incluir, por ejemplo, tomar notas, subrayar, copiar, etc.

**Elaboración:** Tiene como finalidad el procesamiento simple y el procesamiento complejo de la información. Supone básicamente integrar y relacionar la nueva información que se va a aprender con los conocimientos previos. El procesamiento simple incluye el uso de mnemotecnias, identificación de palabras - clave, rimas, imágenes mentales y parafaseo, las que seguirían siendo eficaz sobre todo para el aprendizaje memorístico; mientras que el procesamiento complejo abordará habilidades como elaboración de inferencias, resúmenes, analogías y la elaboración conceptual nos dirigirá a un aprendizaje más significativo.

**Organización:** Tiene como primera finalidad, la clasificación de la información, la que utiliza como habilidad el uso de categorías. La segunda finalidad es la jerarquización y la organización de la información, la misma utiliza habilidades y técnicas como las redes semánticas, mapas conceptuales y el uso de estructuras textuales. Permite realizar una reorganización constructiva de la información por aprender. A través de esta técnica, se intenta lograr una representación correcta de la información, aprovechando al máximo las relaciones entre las partes, así como las formas de organización esquemática internalizadas por el estudiante. Se trata de descubrir y construir significados para encontrarle sentido a la información. También las destrezas de pensamiento y solución de problemas podrían incluirse en esta categoría. (Pozo, citado en Díaz Barriga Areco).

De acuerdo con Flavell, estas estrategias tratan un proceso de interiorización muy similar al concepto vygotskiano de «zona de desarrollo próximo», basado en la ley de doble formación. Según esta idea, para que los estudiantes adquieran las estrategias es preciso que las apliquen primero bajo un control externo para más adelante ser capaces de interiorizar ese control, que pasaría al propio estudiante. Este hecho condiciona, sin duda, la forma en que debe de abordarse la enseñanza de estrategias de aprendizaje y el lugar que éstas deben ocupar en el diseño curricular. (Pozo).

### 3.3 Rol del docente frente a las estrategias didácticas



Las interrogantes que podemos plantearnos como faro de este apartado son: ¿de qué hablamos cuando nos referimos a “enseñar”? , ¿qué supone para el docente facilitar estrategias de aprendizajes significativas? , ¿qué tipo de capacidades requerimos como docentes para influir en el proceso de formación de nuestros estudiantes, de tal manera a que estos transfieran sus aprendizajes en diversos contextos? Estos cuestionamientos, por simple que parezcan, no lo son en absoluto, y subyacen en cualquier planificación didáctica que deseamos desarrollar como pedagogos.

Por ello, conviene destacar la importancia de la actividad docente en la formación de los estudiantes, considerando que la enseñanza ejerce una influencia significativa y que, por consiguiente, los resultados de aprendizajes dependen en buena medida del tipo de proceso de formación que se haya seguido, aun manteniendo dependencias importantes con las condiciones sociales y personales de entrada.

Desde esta perspectiva, puntualizaremos, a continuación, sobre algunos aspectos fundamentales que como docentes debemos considerar en todo proceso de enseñanza y aprendizaje:

#### 1. Planificar el proceso enseñanza – aprendizaje

En palabras sencillas podríamos decir que para elaborar planificaciones significativas es imprescindible tener conocimientos sobre la disciplina y sobre la propia planificación, y tener ideas claras acerca de las capacidades que deseamos desarrollos los estudiantes. En este sentido, lo importante es tomar conciencia que cuando diseñamos nuestra planificación lo que hacemos es situarnos en un espacio de toma de decisiones, en las que influyen nuestras ideas pedagógicas, nuestros conocimientos científicos y nuestra experiencia didáctica.

Una de las estructuras más conocida de planificación didáctica se caracteriza por comprender los siguientes elementos: objetivos, contenidos, estrategias metodológicas y evaluación. Sin embargo, en la actualidad ese esquema se ha enriquecido con la incorporación de otras dimensiones importantes como la contextualización de la planificación (se la sitúa en el marco de circunstancias y condiciones que le dan sentido: el perfil profesional, el Plan de Estudios, las características de la institución y de los estudiantes al que va dirigido, el trabajo del docente, las normas de convivencia, entre otros), las estrategias de apoyo a los estudiantes, que pueden incluir desde el establecimiento de diversos niveles de exigencia hasta la elaboración de guías didácticas, la incorporación de fases de recuperación y la figura de mentores, entre otros, los dispositivos para evaluar el desarrollo de la planificación que implica la puesta en marcha de algún sistema de recogida, análisis y procesamiento de los datos recogidos para regular los procesos didácticos aplicados y los mecanismos de articulación entre las planificaciones de los docentes de la institución educativa.

#### 2. Seleccionar y preparar los contenidos de aprendizaje

Esta competencia se vincula con la anterior y podría formar parte de ella, pero es necesario independizarla por su importancia fundamental, tanto desde el punto de vista científico (seleccionar los contenidos) como didáctico (prepararlos para ser enseñados y aprendidos).

Seleccionar contenidos que sean relevantes y significativos para los estudiantes significa escoger lo más importante de ese ámbito disciplinar, adaptarlos a las necesidades de formación de los estudiantes (al perfil de salida para el que se están formando), adecuarlos a las condiciones de tiempo y de recursos con que contamos, y organizarlos de tal modo que resulten accesibles a nuestros estudiantes y que les abran las puertas para nuevos aprendizajes. Esto exige del docente la experticia en su campo disciplinar, porque ha de tener una visión de conjunto de todos los saberes que este ofrece y ha de saber entrar en la profundidad de la disciplina para saber identificar con solvencia los diversos niveles de relevancia de los contenidos que en ella se abordan, a fin de lograr determinados aprendizajes en los estudiantes.

Otro aspecto a considerar tiene que ver con la secuenciación de los contenidos, esto implica, el orden en que se los abordan y la relación que se establece entre ellos, pues condiciona de manera clara la forma en que los estudiantes podrán aprenderlos. Al respecto, generalmente solemos observar que uno de los problemas más frecuentes de la didáctica es propiciar que los estudiantes vayan



construyendo esquemas conceptuales bien enlazados internamente y que les resulten significativos, es decir, que entiendan bien su sentido y aplicabilidad. La manera en que ordenemos los temas y las conexiones que establezcamos con nuestra planificación e, incluso, con contenidos de otras disciplinas así como con situaciones o problemas de la vida real, servirán de orientación y modelo a la forma en que los estudiantes construyen sus aprendizajes.

Un último aspecto a tener en cuenta es la explicación clara de los contenidos a los estudiantes, es necesario sumergirlos en la situación, ajustar la explicación en función del feedback que se va percibiendo de sus caras, gestos, preguntas, etc. La trascendencia y la transferencia personal que se produce entre los docentes y sus estudiantes en el proceso didáctico son insustituibles por bueno que sea el material o el recurso alternativo que se les otorgue.

### 3. Ofrecer informaciones y explicaciones comprensibles

Los docentes seleccionamos las ideas que deseamos transmitir y las codificamos convirtiéndolas en un mensaje que se hace llegar a los estudiantes a través del canal correspondiente. El estudiante recibe nuestro mensaje y vuelve a decodificarlo (lo reinterpreta utilizando algunos códigos de que dispone) para quedarse a su vez con la idea que extrae de dicho mensaje.

En este contexto, con frecuencia nuestras explicaciones se convierten en procesos enunciativos y discursivos densos y de alto nivel de abstracción cuando hay que explicar una operación, una fórmula, una teoría, una ley o un concepto que resultan difíciles de decodificar y demandan, en cualquier situación, un elevado nivel de concentración mental. Por ello, suele ser beneficiosa la incorporación de elementos narrativos, es decir, recurrir a anécdotas, episodios o sucesos relacionados con el tema abordado, pues permitirá a los estudiantes utilizar esas anécdotas como punto de referencia para recordar los aspectos más conceptuales estudiados en conexión con ellas.

Los docentes podemos reforzar la comprensibilidad a través de varios mecanismos comunicacionales como el manejo de la redundancia y el acondicionamiento de los propios mensajes.

La redundancia se contrapone a la novedad. Los mensajes redundantes son aquellos que repiten el mensaje, vuelven a decir lo mismo de otra manera, se ofrece el mismo mensaje a través de códigos diferentes (por ejemplo, con palabras e imágenes, etc.). El acondicionamiento de los propios mensajes está relacionado con la simplicidad, el orden, la brevedad y la estimulación suplementaria. Tanto un buen manejo de la redundancia como una correcta gestión de los mensajes, ayuda a incrementar la posibilidad de que

nuestras informaciones no solamente lleguen en buenas condiciones a los estudiantes, sino que, además las interpreten en el sentido que nosotros pretendíamos. En síntesis, que entiendan bien lo que deseábamos explicar.

Reforzar la organización de los mensajes tiene que ver, además, con la posibilidad de incorporar una estructura global que permita identificar no solo cada uno de los elementos de la explicación sino de poder relacionarlos.

En síntesis, suele decirse que los buenos comunicadores deben decir, primero, lo que piensan decir, después deben decirlo y deben acabar diciendo lo que han dicho. Así por ejemplo, como docentes primeramente podemos expresar los temas más importantes a tratar, luego los analizamos uno a uno y finalizamos haciendo un resumen de lo que hemos dicho.

### 4. Diseñar estrategias didácticas pertinentes

Las modalidades metodológicas en las que puede desarrollarse la enseñanza son múltiples (magistral, autónomo o individual, grupal, otros). Según se vayan combinando ciertas particularidades de la actuación de docentes y estudiantes tendremos un formato de estrategias metodológicas diferentes. No existe el mejor método, sino aquel que se ajusta mejor a las condiciones de nuestros objetivos formativos, al contenido que hayamos de trabajar, a las características de nuestros estudiantes, a las particularidades del tiempo, espacios y recursos en la que nos podamos mover.

Como docentes nos debemos preocupar de dar con el método o la estrategia didáctica que resulte más conveniente para propiciar un aprendizaje efectivo en el triple sentido, en el que los métodos influyen: aprendizajes de competencias personales (valores y actitudes), aprendi-



zaje de competencias de tipo funcional (capacidad reflexiva y crítica, capacidad de autoevaluación y evaluación, habilidades operativas (esquematizar, resumir, sintetizar, integrar partes, etc.) y manejo de fuentes de diferentes signos, aprendizaje de contenidos de la disciplina.

## 5. Manejar las nuevas tecnologías

En un mundo tecnológico como el actual, el empleo de las nuevas tecnologías constituye un plus de valor en el quehacer pedagógico del docente. Exige de los docentes (aparte del dominio de la didáctica genérica) nuevas competencias tanto en la preparación de la información y las guías del aprendizaje como en el mantenimiento de una relación tutorial a través de red. Exige de los estudiantes, junto a la competencia técnica básica para el manejo de los dispositivos técnicos, la capacidad y actitudes necesarias para llevar a cabo un proceso de aprendizaje autónomo y para mantener una relación fluida con el docente.

El rol del docente para ayudar a los estudiantes a navegar en el inmenso océano de información disponible, es enseñarles a buscar lo más pertinente, orientando su búsqueda y aportando criterios para la selección. Hay una sobreabundancia de información en todas las disciplinas. El problema es que los estudiantes no saben qué hacer con ella, ni discriminan "entre lo que vale y no vale". Los docentes seguimos transmitiendo información pero lo que los estudiantes precisan son criterios para saber integrarla en estructuras conceptuales que les sean útiles en su proceso de aprendizaje. Necesitan decodificadores para interpretarla, entenderla y poder construir su propio conocimiento.

Además, las nuevas tecnologías exigen del docente la utilización de nuevos canales de comunicación (email, internet, chat, videoconferencia, otros). Por ejemplo, la realización de tutorías a través del correo electrónico, la realización de un debate a través de un chat o estableciendo un foro de debate en la red en el que los estudiantes van dejando sus opiniones en torno a la lectura de un texto, la solución de un problema o de cualquier otra situación que se acerque a la realidad u objeto de estudio. En fin, las posibilidades son múltiples y variadas.



## 6. Comunicarse efectivamente con los estudiantes

La habilidad para manejarse de manera adecuada en el contexto de las relaciones interpersonales en que se produce la interacción docente-alumnos es un importante componente del perfil profesional de los docentes. Desde el punto de vista de la formación no se trata tanto de dotarse de unas técnicas relacionales (aprender técnicas para saber diseñar formas de relación y resolver problemas que surjan) cuanto de estar en disposición de someter a análisis permanente los procesos interactivos en los que estamos implicados. Aprender técnicas está bien y ayuda en algunos aspectos (saber dirigir una reunión, saber desarrollar una mediación formal en conflicto, etc.), pero





como las relaciones se construyen con elementos no solo racionales sino también emocionales (que generalmente ni siquiera son conscientes), la pura técnica es insuficiente y se precisa de esa revisión permanente.

## 7. Evaluar

El docente es la persona mejor situada para generar el cambio de la cultura evaluadora, en el día a día del aula, por su preparación, por su compromiso a favor de la formación de los estudiantes y por la posibilidad que tiene de actuar en el proceso de enseñanza – aprendizaje, en suma, es la persona idónea para ejercer el papel preponderante de evaluador.

El proceso de evaluación demanda del docente la capacidad de observar, recoger datos significativos y analizarlos para percibir, lo antes posible, las capacidades de los estudiantes y las disfunciones de la acción educativa, a fin de tomar decisiones que conduzcan a alcanzar altos niveles de aprendizajes.

Los docentes sabemos que el estudiante aprende mucho más de lo que se puede comprobar en una prueba. Como también, que la prueba no garantiza que aquello que se pregunta sea lo más relevante. Sin embargo, el docente puede recoger información acerca de lo que no sabe el estudiante. La corrección de pruebas, de producciones escritas y prácticas, las observaciones realizadas y las entrevistas, etc, son indispensables para comprender y superar los errores o contrastar los diferentes puntos de vista. En este sentido, la tarea prioritaria del docente

es orientar el aprendizaje y asegurar que aquello que se aprende es valioso y merece dedicarle tiempo y esfuerzo.

El docente tiene que actuar como crítico reflexivo y no solo como calificador. Su función es la enseñanza de la auto-evaluación. La corrección informada y comentada de un trabajo o una prueba ayuda a aprender. Al respecto, es importante que la corrección tenga como base e intención la información para la formación del estudiante, que no es lo mismo que una evaluación sobre el estudiante. Lo más relevante de la actuación del docente en el proceso de evaluación es su interacción con el estudiante, pues lo realiza desde y junto al mismo mientras este construye su aprendizaje. Por consiguiente:

- Debemos conocer cuál es la situación de partida del estudiante para ajustarnos a ella, y así poder adaptar las estrategias de enseñanza-aprendizaje y continuar el proceso en el punto desde el cual éste pueda avanzar.
- Evaluar el proceso de aprendizaje de tal modo a reconducirlo, en el caso de que se presenten dificultades, introduciendo medidas correctoras desde los ámbitos pedagógicos.
- Evaluar el proceso de aprendizaje al término de un proceso didáctico, del desarrollo de una unidad o etapa para apreciar el grado de desarrollo de las capacidades establecidas en la disciplina. Esta situación posterior se convierte, a su vez, en la situación inicial de una futura fase de aprendizaje.

## 3.4 Técnicas activas de aprendizajes

### 3.4.1 NOTICIERO

Consiste en la creación de un programa de televisión Tipo Noticiero al cual debe escribirse un nombre creativo. Es una dramatización de la presentación de noticias. Los estudiantes divididos en pequeños grupos (5 o 6 integrantes) elaboran "cables periodísticos" (noticias) de lo que conocen sobre un determinado tema, de acuerdo a las áreas académicas o de acuerdo a sub temas de una disciplina en particular. Para ello, el docente selecciona previamente las **Capacidades**, y el **eje temático** a ser abordados por los estudiantes.

#### Procedimiento:

1. Se piden voluntarios por temas de interés.
2. El grupo de estudiantes divididos en 5 o 6 integrantes.
3. El docente les pide a los estudiantes que redacten cables noticiosos sobre hechos concretos en relación a determinado tema.

Pueden ser obtenidos de una investigación, información ver-

dadera que guarde relación con el tema, o de materiales ya proveídos por el docente o incluso transformar la información del libro de texto que poseen en formato de noticia.

4. Una vez que concluyen se pasa al plenario donde se colectivizan todos los cables informativos (noticias) en forma de noticiero.
  - Cada grupo anota si hay información que ellos no conocían.
  - Si hay alguna información que el plenario juzga que no es correcta, la discute y se decide si se acepta o no.
5. Se prepara el ambiente, es necesaria una mesa, un logo atrás de los presentadores, una vestimenta que asemeje al de los presentadores de televisión.
6. Los alumnos pueden memorizar o leer sus informaciones. (Se puede solo dramatizar en vivo o grabar con celular o filmadora para luego ser proyectado).

**Observaciones:** Puede haber bloque de entrevistas, donde se presentan opiniones de las personas respecto al tema o respecto

a sucesos ocurridos en alguna localidad. Puede ser serio o humorístico. Queda a creatividad de los estudiantes.

7. Se evalúa el dominio del tema del estudiante, además de valorar el esfuerzo en la puesta en escena. La evaluación puede darse repitiendo la aplicación de la técnica pero con la variante del "Noticiero con corte de energía".

**Nota:** El "Noticiero con corte de energía", consiste en que la noticia que presenta un primer grupo, es interrumpida por un corte de energía (el docente indica el momento del corte), y debe ser continuada por el siguiente grupo indicado. Esto favorece la atención en la presentación de los compañeros. La continuación debe ser coherente con respecto al mensaje trasmítido.

### 3.4.2 CONFERENCIA

Es una técnica de exposición oral y gráfica, preparada y expuesta por un alumno(a). También se suele hacer de manera grupal, después de haber realizado una investigación.

Para la presentación de la conferencia los alumnos deberán complementar su trabajo de investigación con materiales de apoyo, tales como: mapas, dibujos, gráficos, transparencias, maquetas registros de audio, etc., y con demostraciones, juegos, dramatizaciones y otros recursos que el o los expositores decidan emplear.

#### Habilidades que desarrolla

1. Manejo de información.
2. Expresión oral.
3. Confianza y seguridad en sí mismo.

#### Materiales

Los materiales son variados, así tenemos:

1. Papelógrafos, marcadores, paneles, retroproyector, todo aquello que haya decidido usar el expositor.
2. Una sala que se pueda adaptar para una conferencia si el

colegio dispone de ella. En caso contrario se puede hacer uso del aula de clase.

#### Procedimiento

1. Elaborar un esquema para guiar la conferencia. Es necesario que los alumnos conviertan las preguntas de la investigación en títulos y las escriban en un papelote. El docente verifica que haya correspondencia entre las preguntas y los títulos.
2. Se establecen criterios para evaluar la conferencia. Es necesario establecer los en grupo.
3. Elaboración y/o acopio de material ilustrativo que complemente e ilustre la conferencia para hacerla más ágil y clara (fotos, mapas, objetos, recortes de periódico). Es recomendable que las ilustraciones enfoquen los temas de mayor dificultad.
4. Diseño y creación con ayuda del docente de una actividad que pueda ser realizada por los participantes, orientada a clarificar y puntualizar las ideas fuerza del mismo (sociodrama, juego, crucigrama, acróstico, experimento, etc.).
5. Ensayo de la conferencia. El docente evalúa el ensayo reforzando los aspectos positivos, ayudándolos en las dificultades.
6. Presentación de la Conferencia.
7. Los asistentes formularán preguntas al ponente. Cada pregunta se anotará en una tarjeta que recibirá al término de la conferencia. Las respuestas pueden darse una a una o agrupando las similares. Ocasionalmente, el docente participa respondiendo preguntas para las cuales los conferencistas no tienen respuestas.
8. La evaluación de la conferencia se hace con la participación de todos los alumnos teniendo en cuenta los criterios establecidos y haciéndoles llegar recomendaciones pertinentes. Para evaluar la conferencia se puede hacer uso de una ficha (ver anexo 1), pedir a los alumnos que realicen un organizador visual, etc.

#### ANEXO 1

Nuestra conferencia	
Alumno:	L/ANL
Fecha:	
Se expresa con vocabulario pertinente	
Emplea palabras propias	
Explica con claridad las ideas	
Utiliza ejemplos concretos	
Emplea adecuadamente el material auxiliar	
Relaciona el tema con otros	
Responde acertadamente las preguntas de sus compañeros	



### 3.4.3 APRENDIZAJE BASADO EN PROBLEMAS (ABP)

#### Concepto

Es una técnica didáctica centrada en el estudiante que promueve el aprendizaje a través de un proceso sistemático que comienza con el planteamiento de un problema complejo (para el nivel en el que se va a aplicar) que se busca solucionar y a través de esto aprender los contenidos curriculares. Se originó en escuelas de medicina y pronto se extendió a un gran número de disciplinas y materias distintas.

#### Propósitos del ABP

Desencadenar, mediante el uso de situaciones problemáticas reales y desestructuradas, preguntas en el estudiante que le provoquen la necesidad de investigar con el fin de construir sus conocimientos y desarrollar habilidades.

Primero se detecta el problema en el proceso de aprendizaje y éste sirve como foco y estímulo para la aplicación de habilidades de solución de problemas o de razonamiento, así como para la búsqueda o el estudio de la información o conocimientos necesarios para comprenderlos mecanismos responsables del problema y el modo de resolverse.

A continuación se presenta un cuadro comparativo entre un aprendizaje con técnicas tradicionales y la técnica del ABP.

Aprendizaje Tradicional	Aprendizaje Basado en Problemas
El profesor asume el rol de experto o autoridad formal.	Los profesores tienen el rol de facilitador, tutor, guía, co-aprendiz, mentor o asesor.
Los profesores transmiten la información a los alumnos.	Los alumnos toman la responsabilidad de aprender y crear alianzas entre alumnos y profesor.
Los profesores organizan el contenido en exposiciones de acuerdo a su disciplina.	Los profesores diseñan su curso basado en problemas abiertos e incrementan la motivación de los estudiantes presentando problemas reales.
Los alumnos son vistos como "recipientes vacíos" o receptores pasivos de información.	Los profesores buscan mejorar la iniciativa de los alumnos y motivarlos. Los alumnos son vistos como sujetos que pueden aprender por cuenta propia.
Las exposiciones del profesor son basadas en comunicación unidireccional: la información es transmitida a un grupo de alumnos.	Los alumnos trabajan en equipos para resolver problemas, adquieren y aplican el conocimiento en una variedad de contextos. Los alumnos localizan recursos y los profesores los guían en este proceso.
Los alumnos trabajan por separado.	Los alumnos conformados en pequeños grupos interactúan con los profesores quienes les ofrecen retroalimentación.

#### Pasos a seguir para aplicar la técnica del ABP

##### PASO 1. Lectura y análisis del escenario del problema.

Se pretende en este momento que el estudiante verifique si comprende el escenario en el que se desenvolverá.

Si fuese un texto, este paso necesita la lectura del mismo varias veces con el fin de disipar cualquier duda.

##### PASO 2. Definición del problema.

Se busca en este paso identificar el problema al cual nos enfrentamos, reconocer el escenario en el que trabajará y cuáles son los retos que deben enfrentarse.

No debe obsesionarse uno con la solución del problema, cuando hay tantos problemas en la vida que no tienen solución.

##### PASO 3. Lluvia de ideas.

Este paso pretende que el alumno se plantee qué es lo que debe conocer para encontrar la solución, partiendo de la toma de conciencia entre lo que se sabe y lo que no.

Se busca responder a las preguntas: qué, cómo, quién, dónde, cuándo, por qué, para qué, etc.

##### PASO 4. Clasificación de las ideas.

Como en el paso anterior surgieron ideas de manera espontánea, hasta a veces desordenada, este paso pretende ordenarlas y organizarlas según la intención dada.

Las ideas quedan jerarquizadas y normalmente esta estructura es la que se sigue para la solución del problema.

## PASO 5. Formulación de los objetivos del aprendizaje.

Uno de los momentos más importantes del ABP, que demanda del estudiante mucha responsabilidad y compromiso.

Los objetivos serán los que guíen la acción posterior, es decir, la investigación. El fin último será el desarrollo de capacidades

## PASO 6. Investigación.

Investigar no es igual a buscar en fuentes bibliográficas. Investigar implica:

- Buscar hasta encontrar, pero buscar con una intención.
- Indagar en el lugar preciso.
- Manejar fuentes adecuadas.

- Leer comprensivamente la información.
- Interpretar la información.

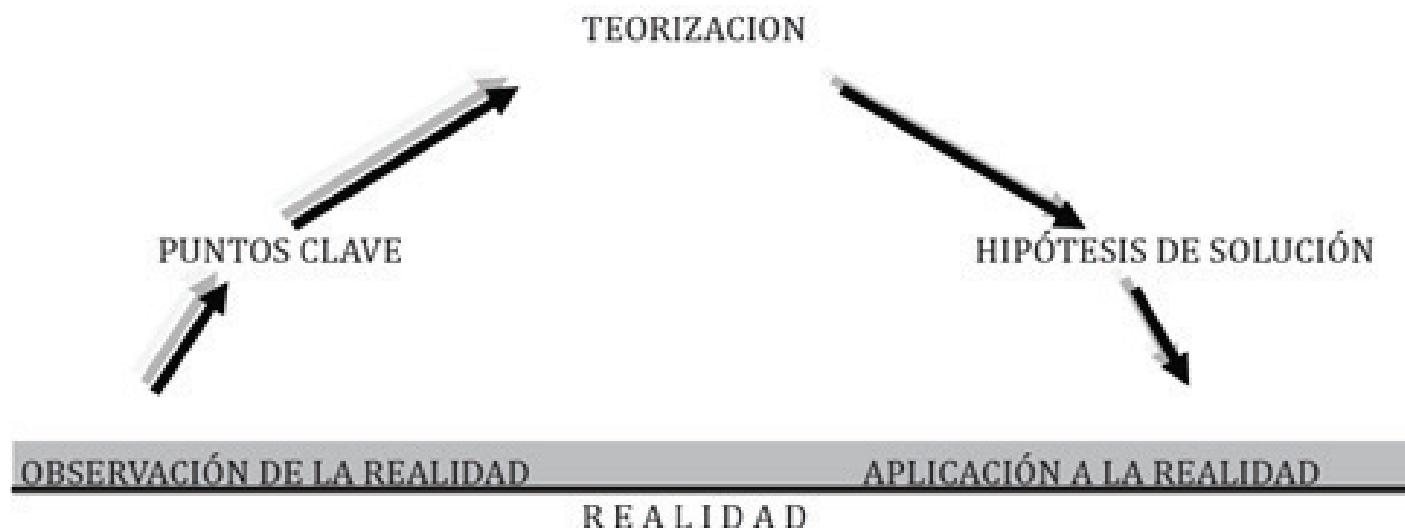
## PASO 7. Presentación y discusión de los resultados.

Este es un momento fundamental. Todo lo anterior no tendrá demasiado significado si la comunicación de los resultados falla.

La manera en la que los alumnos presentan los resultados obtenidos no es demasiado importante pero siempre teniendo cuidado en el fondo y la forma de hacerlo.

**NOTA.** Es muy conveniente que los casos de ABP queden documentados para su uso posterior o para que otros docentes los utilicen.

### 3.4.4 El Arco



### Los procesos y procedimientos:

#### 1. Observación de la Realidad:

La capacidad buscada es la percepción de hechos reales relevantes a la disciplina, de un modo global y sincrético, un tanto impresionista e ingenuo por constituir una primera aproximación a la realidad. Se busca también promover la expresión de lo observado y sentido por los alumnos.

Las siguientes técnicas pudieran utilizarse en esta etapa, entre otras:

- a. Visita a lugares relevantes
- b. Visita a museos de ciencias.
- c. Entrevista con exponentes del área, o tema en cuestión, etc.
- d. Lectura de casos.

#### 2. Puntos Clave:

La capacidad buscada en esta etapa es la identificación, por los estudiantes, de las variables más importantes asociadas a lo que observaron en la realidad. Es decir, distinguir los aspectos más determinantes de los aspectos puramente circunstanciales y secundarios.

Técnicas utilizables en esta etapa incluyen:

- a. Trabajo en grupos
- b. Lluvia de ideas
- c. Simposio
- d. Dramatización, sociodrama, etc.
- e. Consulta a Banco de Datos



### 3. Teorización:

La capacidad a desarrollar es localizar la estructura del problema, es decir, a partir de observar la realidad e identificar los Puntos Claves analizar las relaciones entre dichos Puntos Claves y, a través de la comprensión del problema, por el grupo identificando las causas y posibles consecuencias del problema. Teorizar no significa aprender teorías ajenas sino formular la propia teoría del grupo, sobre el problema. Naturalmente, el conocimiento de otras teorías puede ayudar significativamente.

Técnicas posibles:

- Consulta con científicos o expertos en el tema.
- Invitación a expertos externos a disertar sobre la materia
- Consulta bibliográfica
- Seminario

### 4. Hipótesis de Solución:

Habiendo observado la realidad y reflexionado sobre ella en la Teorización, los estudiantes están listos para desarrollar una capacidad muy importante, cual es la de ofrecer alternativas de solución. Esto implica el desarrollo de la creatividad, la innovación, la visión prospectiva.

Se puede utilizar las siguientes técnicas, entre otras:

- Lluvia de ideas
- Trabajo en grupos
- Mesa redonda
- Panel de oposición
- Consulta a expertos
- Lectura de informes
- Consulta con organizaciones

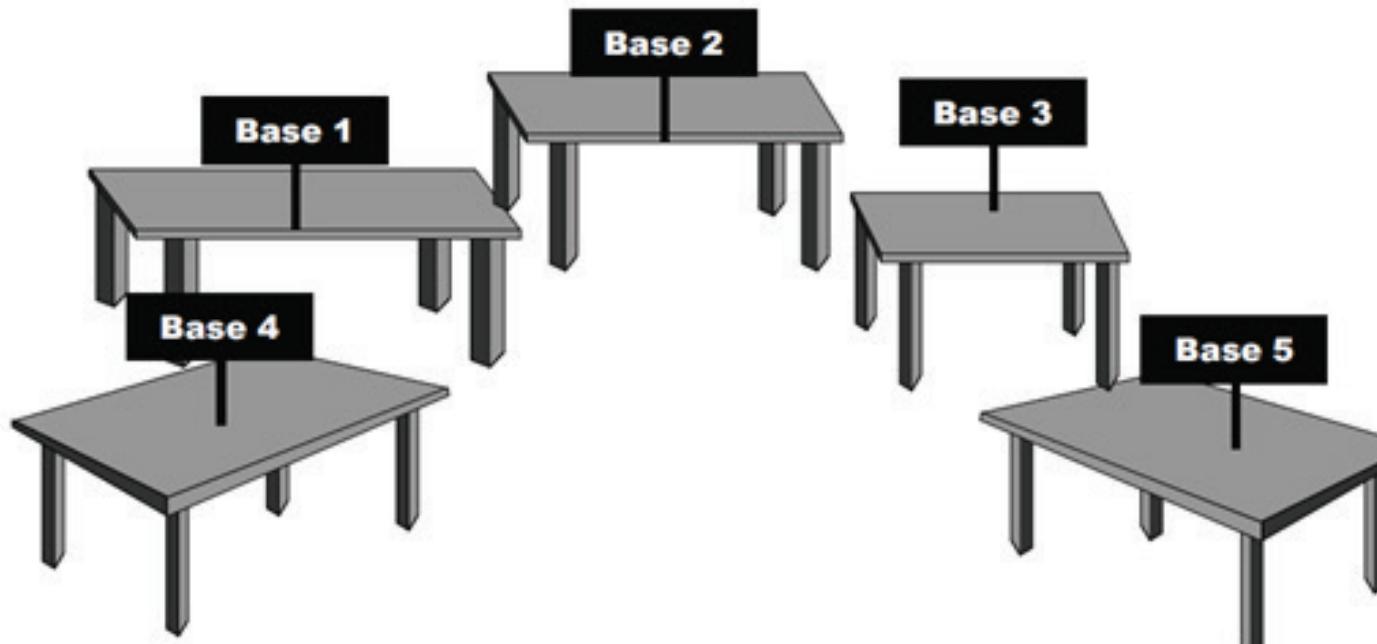
### 5. Aplicación a la Realidad:

En esta etapa se busca desarrollar la capacidad de ejecutar las soluciones consideradas más relevantes y viables por los alumnos y el profesor. Esto puede exigir el ejercicio y la práctica de habilidades y destrezas.

Posibles técnicas:

- Taller
- Método de proyectos
- Participación en proyectos comunitarios
- Propuesta de acciones comunitarias
- Participación en programas de Radio, otros.
- Elaboración de recomendaciones

#### 3.4.5 Tour de bases



Es una estrategia de enseñanza-aprendizaje, que permite a los estudiantes recoger y organizar información a fin de cumplir con los retos que el docente propone en las

distintas bases. Se espera que al término, obtengan la construcción de los aprendizajes y habilidades deseadas por el docente.

### 3.4.6 Tarea

Con esta estrategia, el docente realmente cumple con la función de estratega en el sentido de preparar su clase, disponer los procesos y cómo se utilizarán los recursos, dar las orientaciones y luego realizar un acompañamiento, ofreciendo la ayuda que se requiera (si se requiere).

El profesor deja de exponer los conocimientos para dejar que los alumnos sean los verdaderos protagonistas de la clase. Sin embargo, no por eso su rol pierde relevancia. Al contrario, es el estratega, el que piensa en su clase, el que propone actividades y tareas creativas que consigan movilizar a los alumnos para que aprendan haciendo, aplicando conocimientos.

### 3.4.7 WebQuest

La webquest es una herramienta utilizada como recurso didáctico por los profesores, forma parte de un proceso de aprendizaje guiado, con recursos principalmente procedentes de Internet, que promueve la utilización de habilidades cognitivas superiores, el trabajo cooperativo, la autonomía de los estudiantes e incluye una evaluación auténtica.

#### Proceso:

Una webquest se compone de seis partes esenciales: introducción, tarea, proceso, recursos, evaluación y conclusión.

- Introducción:** contiene una información muy sintética del tema en torno a la cual va a desarrollarse la webquest, con el fin de despertar el interés y la motivación del estudiante sobre dicho tema.
- Tareas:** explican en forma detallada las actividades que los estudiantes deberán llevar a cabo.
- Proceso:** describe los pasos que el estudiante debe seguir para llevar a cabo la tarea propuesta, incluyendo una serie de enlaces necesarios para realizar cada paso.
- Recursos:** consiste en una lista de sitios web que como profesor de la disciplina ha ido preparando o delimitando para guiar al estudiante a realizar la tarea. Estos deben haber sido seleccionados previamente para que el estudiante pueda enfocar su atención en el tema, ser actuales de manera que sean atractivos y motivantes para los mismos. Podrán consultar otras fuentes, incluso contrastar la información con fuentes impresas. Se debe evitar el “vagabundeo” en la web, por eso es imprescindible incluir de antemano unas páginas web que se deben consultar y donde existe información relevante y de calidad para resolver el problema o la tarea.

- Evaluación:** contiene criterios claros, consistentes y específicos para evaluar las producciones o los resultados. Pueden incluirse criterios sobre el proceso.
- Conclusión:** expone sintéticamente las capacidades que se espera que hayan alcanzado los estudiantes de tal forma que les ofrezca información de las pretensiones y objetivos últimos a los que se pretende llegar.

### 3.4.8 Investigación

Es toda actividad humana orientada a descubrir algo desconocido, pero esta actividad se basa en “huellas” que el investigador tiene que identificar para llegar a la solución de un problema. Ésta palabra deriva etimológicamente de los términos latinos *in* (en, hacia) y *vestigum* (huella, pista).

El proceso de investigación puede aplicarse en todos los niveles educativos, pero debe adaptarse didácticamente el nivel de exigencia y complejidad a las características de los estudiantes, respetando el proceso de investigación, a su vez pueden tener variaciones de acuerdo a la teoría en la que se basa. En el Nivel Medio puede profundizarse cada parte del proceso de investigación.

La investigación incluye los siguientes procesos integrados: Preguntas referidas al problema. Objetivos de investigación. Metodología (Métodos y técnicas utilizados). Hipótesis (respuesta tentativa al problema). Recopilación de información (teórica o de campo donde se aplica los métodos y técnicas). Análisis de informaciones. Elaboración de conclusiones.

Muy importante es consignar la fuente de información utilizada en el desarrollo del trabajo.

- En cuanto a la Bibliografía, se presenta de manera alfabética los libros, por apellido del autor y nombre (Año). Nombre del libro. Editorial.
- Para los sitios Web, aparte de los datos de autor y el título del artículo, también se consigna el sitio web donde está disponible la información y la fecha de acceso al mismo.

### 3.4.9 Seis sombreros para pensar

El método es simple. Se tiene seis sombreros, cada uno de un color diferente. En cualquier momento un pensador puede escoger ponerse uno de los sombreros o se le puede pedir que se lo quite. Todas las personas de la reunión pueden usar un sombrero de un color concreto durante un tiempo en un momento determinado. Los sombreros involucran a los participantes en una especie de juego de rol mental.



Una mirada objetiva a los datos y a la información. “Los hechos son los hechos”.



Significa la crítica, lógica negativa, juicio y prudencia. El por qué algo puede ir mal.



## CREATIVIDAD

La oportunidad para expresar nuevos conceptos, ideas, posibilidades, percepciones y usar el pensamiento creativo.

SENTIMIENTOS,  
INTUICIÓN

Legitimiza los sentimientos, presentimientos y la intuición, sin necesidad de justificarse.

BUSCA LADO  
POSITIVO

Simboliza el optimismo, lógica positiva, factibilidad y beneficios.



## FACILITADOR

Control y gestión del proceso del pensamiento.

El método puede parecer extremadamente simple e incluso infantil, pero funciona. He aquí algunos beneficios del método:

- Es fácil de aprender y utilizar y tiene un atractivo inmediato. La visualización de los sombreros y de los colores ayuda a ello.
- Da tiempo disponible para el esfuerzo creativo deliberado. Tu puedes pedir "tres minutos de pensamiento de sombrero verde".
- Permite la expresión legítima de sentimientos e intuiciones en una reunión - sin justificaciones ni disculpas. "Esto es lo que siento".
- Proporciona una manera simple y directa de conmutar el pensamiento sin ofender. "Qué tal un poco de pensamiento de sombrero amarillo sobre este punto?"
- Requiere que todos los pensadores sean capaces de utilizar cada uno de los sombreros en vez de quedarse cerrados en sólo un tipo de pensamiento.
- Separa el ego del rendimiento en el pensar. Libera las mentes capaces para poder examinar un tema más completamente.
- Proporciona un método práctico de pensar para utilizar diferentes aspectos del pensamiento en la mejor secuencia posible.
- Se escapa de los argumentos en pro y en contra y permite a los participantes colaborar en una exploración constructiva.
- Hace las reuniones mucho más productivas.

Los sombreros son más efectivos usados a ratos, utilizando un sombrero en cada momento para obtener un determinado tipo de pensamiento. Cuando es necesario explorar un tema completamente y de manera efectiva, se puede crear una secuencia de sombreros y después usarlos cada uno por turnos: "Sugiero que empecemos con el blanco y después cambiemos al verde y ..." El sombrero azul se utiliza para componer estas secuencias, para comentar sobre el tipo de pensamiento que se está produciendo, para resumir lo que se ha pensado y llegar a conclusiones.

En Matemática, la técnica podría utilizarse para la dinamización de la resolución de problemas, de manera grupal.

Los sombreros estarían distribuidos de la siguiente manera:

- **Sombrero negro:** los que porten este color de sombrero serán los encargados de analizar el problema y decir si falta algún dato para poder resolverlo, si hay algún dato inútil, de comentar las dificultades que podrían tener en el momento de resolverlo y las atenciones que deben ser prestadas.
- **Sombrero blanco:** los que porten este color de sombrero serán los encargados de comentar cuáles son los datos con los que se cuenta, cuál podría ser la utilidad de resolver situaciones como esa, compararlas con situaciones del vivir cotidiano, etc.
- **Sombrero rojo:** los que porten este color de sombrero estarán encargados de representar de alguna manera más sencilla la situación problemática, ya sea con gráficos, esquemas, comparación con algún problema más sencillo, si se utilizarán fórmulas, etc.
- **Sombrero amarillo:** los que porten este color de sombrero estarán encargados de dar opciones de solución, sin analizar cuál es la más sencilla o la más corta, simplemente deberán exponer las distintas maneras de encarar el problema y resolverlo.
- **Sombrero verde:** las personas que tengan este color de sombrero deberán poner en práctica las ideas expresadas por los compañeros. No emite opinión sobre la dificultad de ninguno de los procedimientos, simplemente se limita a realizarlos.
- **Sombrero azul:** por último, estos estudiantes se encargarán de evaluar las distintas estrategias de solución implementadas y decidir cuál es la que optimiza el tiempo y el esfuerzo y fundamentar por qué opinan eso.

## 4 El método heurístico en la resolución de problemas, según George Polya

Para la resolución de problemas, George Polya en 1957, sugirió el importante método que consta de los siguientes pasos:

### PRIMERO · COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA

Corresponde analizar minuciosamente el enunciado o planteamiento del problema con la intención de reconocer la incógnita, la información o los datos presentados.

Algunas preguntas que podrían ayudar a la comprensión son:

- ¿Cuál es la información que proporciona el problema?
- ¿Hay información irrelevante?
- ¿Qué pide el problema?
- ¿Cuáles son las condiciones que relacionan los datos en el problema?
- ¿Es posible hacer un gráfico, un esquema o un diagrama?
- ¿Es posible estimar la respuesta?

### SEGUNDO · DISEÑO DE UN PLAN

En esta etapa se debe establecer un plan para resolver el problema. Para ello se recomienda pensar en problemas conocidos que tengan una estructura análoga a la del que se quiere resolver.

Contestar preguntas como:

- ¿Recuerdo alguna situación parecida que me ayude a resolver ésta?
- ¿Puedo resolver el problema por partes?

- ¿Necesito información adicional para resolver el problema?
- ¿Qué estrategia utilizaré para resolver el problema?
- ¿Puedo organizar los datos en tablas o gráficos?

### TERCERO · EJECUCIÓN DEL PLAN

En esta etapa se aplica el plan seleccionado y se resuelve el problema, monitoreando todo el proceso de solución.

### CUARTO · EVALUACIÓN DEL PLAN

Aquí se debe hacer una revisión crítica del proceso seguido. Cerciorarse si la solución es correcta. Encontrar otros caminos de solución.

También es importante establecer conexiones y extensiones del problema original en otros contextos.

Se puede orientar esta etapa utilizando las siguientes preguntas:

- ¿Es correcta la solución obtenida?
- ¿Puedo describir el razonamiento seguido?
- ¿Existe otra manera de resolver el problema?
- ¿Es posible usar el método empleado para resolver problemas semejantes?



**George Polya**

**Matemático norteamericano de origen húngaro (1887-1985).**

Polya proporciona el método heurístico para solucionar los problemas de todas las clases, no simplemente los matemáticos, y describir cómo la solución de problemas debe ser enseñada y ser aprendida. Trabajó además en teoría del número, análisis combinatorio y probabilidad



## Bibliografía sugerida

- ABDALA, C. Carpeta de matemática 2 / C. Abdala, L. Garaventa, M. Real. - - Buenos Aires: Aique, 2000.
- ALTMAN, S. M. Matemática polimodal / S. M. Altman, C. R. Comparatore, L. E. Kurzrok. - - Buenos Aires: Longseller, 2003. - - v. 8.
- ÁLVAREZ, F. Fractal 4 / F. Álvarez, A. Arribas, A. Ruiz. - - Madrid: Vicens Vives, 1997.
- ARDILA GUTIÉRREZ, V. H. Enciclopedia Nova matemática. - - Bogotá: Voluntad, 1998. - - v. 6.
- AVOLIO DE COLS, Susana. Evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje / Susana Avolio de Cols. - - Buenos Aires: Marymar, 1994. - - 303 p.
- \_\_\_\_\_. Evaluación de proyecto en aula / Susana Avolio de Cols. - - Buenos Aires: Marymar. - - [199\_?]
- Beta 1 / F. Corbalán Yuste... [et al.]. - - Barcelona: Vicens Vives, 2003.
- BERENGUER, L. Problemas propuestos en los 10 años de la olimpiada matemática Thales/ L. BERENGUER. - - España: Proyecto Sur de Ediciones, 1995.
- BONGIOVANI, V. Matemática e vida / V. Bongiovani, O. R. Vissoto, J. L. Laureano. - - San Pablo: Ática, 1993.
- BONJORNO, J. R. Matemática fundamental / J. R. Bonjorno, J. R. Giovanni. - - [s.l.]: FTD, 1998.
- \_\_\_\_\_. Matemática 3 / J. R. Bonjorno, J. R. Giovanni. - - [s.l.]: FTD, 1990.
- CASTELNUOVO, L. Didáctica de la matemática moderna. - - México: Trillas, 2004.
- CORBALÁN, F. La matemática aplicada a la vida cotidiana / F. Corbalán. - - [s.l.]: Grao, 1998.
- DANTE, L. R. Didáctica de resolución de problemas de matemáticas / L. R. Dante. - - San Pablo: Ática, 1997.
- \_\_\_\_\_. Matemática 1/ L. R. Dante. - - San Pablo: Ática, 2002.
- \_\_\_\_\_. Matemática 2/ L. R. Dante. - - San Pablo: Ática, 2002.
- \_\_\_\_\_. Matemática 3/ L. R. Dante. - - San Pablo: Ática, 2002.
- FLORES CASTILLO, René. Metodología de la matemática / René Flores Castillo. - - Valparaíso.
- FLOREZ OCHOA, Rafael. Evaluación pedagógica y cognición / Rafael Florez Ochoa. - - Bogotá: Mc Graw Hill, 2000. - - (Docente del siglo XXI cómo desarrollar una práctica docente competitiva).
- GARCÍA, A. M. Fracciones y problemas / A. M. García, G. Zorzoli. - - En: Lápiz y papel: Matemática 1º ciclo EGB (set. 1997). - - 2º. ed. - - Buenos Aires: Tiempos, 1997.
- GARCÍA, A. M. Matemática / A. M. García, G. Zorzoli. - - En: Lápiz y papel: Matemática 1º ciclo (mar. 1996). - - Buenos Aires: Tiempos, 1996.
- \_\_\_\_\_. Las medidas / A. M. García, G. Zorzoli. - - En: Lápiz y papel: Matemática 2º ciclo EGB (dic. 1998). - - Buenos Aires: Tiempos, 1998.
- GONZÁLEZ, M. Matemática práctica / M. González, F. León, M. Villegas. - - Bogotá: Voluntad, 1995. - - v. 6.
- GUASCH, Antonio. El idioma guaraní: gramática y antología de prosa y verso. - - 7ª ed. - - Asunción: CEPAG, 1996.
- GUZMÁN, M. Matemáticas / M. Guzmán, J. Colera, A. Salvador. - - Madrid: Anaya, 1992.
- \_\_\_\_\_. Para pensar mejor / M. Guzmán, J. Colera, A. Salvador. - - Madrid: Pirámide, 2004.
- HERNÁNDEZ, F. Para enseñar no basta con saber la asignatura/ F. Hernández, J. Sancho.- Barcelona: Paidós, 1993.
- LEHMANN, C. H. Álgebra / C. H. Lehmann. - - [s.l.]: Limusa, 1999. El libro de texto en la escuela: textos y lecturas / Graciela M. Carbone, directora. - - Buenos Aires: Miño y Dávila, 2001. - - 253 P.
- MACHICAO R., Marcelo. Fascinantes desafíos al ingenio. 2003. La Paz. Bolivia.
- Matemática 2000: enciclopedia / Departamento de Investigación Educativa. - - [s.l.]: Voluntad, 1995. - - v. 6.
- Matemática 3 / J. Colera... [et al.]. - - [s.l.]: Anaya, 1998.
- MEDINA, A. Didáctica general/ A. Medina, F. Mata.- Madrid: Prentice Hall, 2003.
- MELIÀ, B. Elogio de la lengua guaraní: contexto para una educación bilingüe en el Paraguay / B. Melià. - - Asunción: CEPAG, 1995.
- Números enteros / A. M. García... [et al.]. - - En: Lápiz



y papel: Matemática 3º ciclo EGB. - - Buenos Aires: Tiempos, 1996.

- PAENZA, A. Matemática... ¿estás ahí?: sobre números, personajes, problemas y curiosidades / A. Paenza. - - Buenos Aires: Siglo XXI, 2006.
- PARAGUAY. Ministerio de Educación y Cultura. El currículum en la educación media y los transversales / Ministerio de Educación y Cultura. - - Asunción: MEC, 2002.
- \_\_\_\_\_. Campaña Nacional de Capacitación Docente: Técnicas Activas de Aprendizaje, Módulos I, II y III. - - Asunción: MEC, 2015.
- \_\_\_\_\_. Actualización Curricular del Bachillerato Científico. Educación Media/ Ministerio de Educación y Cultura.—Asunción: MEC, 2015.
- \_\_\_\_\_. Del currículum nacional al institucional / Ministerio de Educación y Cultura. - - Asunción: MEC, 2002.
- \_\_\_\_\_. Diseño curricular nacional para la enseñanza media / Ministerio de Educación y Cultura. - - Asunción: MEC, 2000.
- \_\_\_\_\_. La educación bilingüe en la reforma educativa paraguaya / Ministerio de Educación y Cultura. - - Asunción: MEC, [200-?].
- \_\_\_\_\_. Matemática y sus tecnologías: Programa de Estudios para el 1º curso de la Educación Media, Plan Común / Ministerio de Educación y Cultura. - - Asunción: MEC, 2001.
- \_\_\_\_\_. Orientaciones para la gestión pedagógica en el área de Matemática y sus Tecnologías 1º curso de la educación media, plan común / Ministerio de Educación y Cultura. - - Asunción: MEC, 2005.
- \_\_\_\_\_. PSC Proyecto Socio Comunitario = ñamopuã haigua ñane komunida: manual del alumno versión preliminar / Ministerio de Educación y Cultura. - - Asunción: MEC, 2005. -- 40 p.
- PIATTI DE VAZQUEZ, Lilia. Evaluación del aprendizaje: texto para docentes de Ciencias de la Educación y Formación docente / Lilia Piatti de Vazquez. - - 3ª ed. - - Asunción, 2001. -- 210 p.
- POZO, J. I. El aprendizaje estratégico / J. I. Pozo, C. Moreno. - - Madrid: Aula XXI, Santillana, 2000.
- RUIZ, A. Límite 2 / A. Ruiz. - - [s.l.]: Vicens Vives, 1999.
- SADOSKY, M. Elementos de cálculo diferencial e

integral / M. Sadosky, R. C. de Guber. - - Buenos Aires: Alsina, 1975.

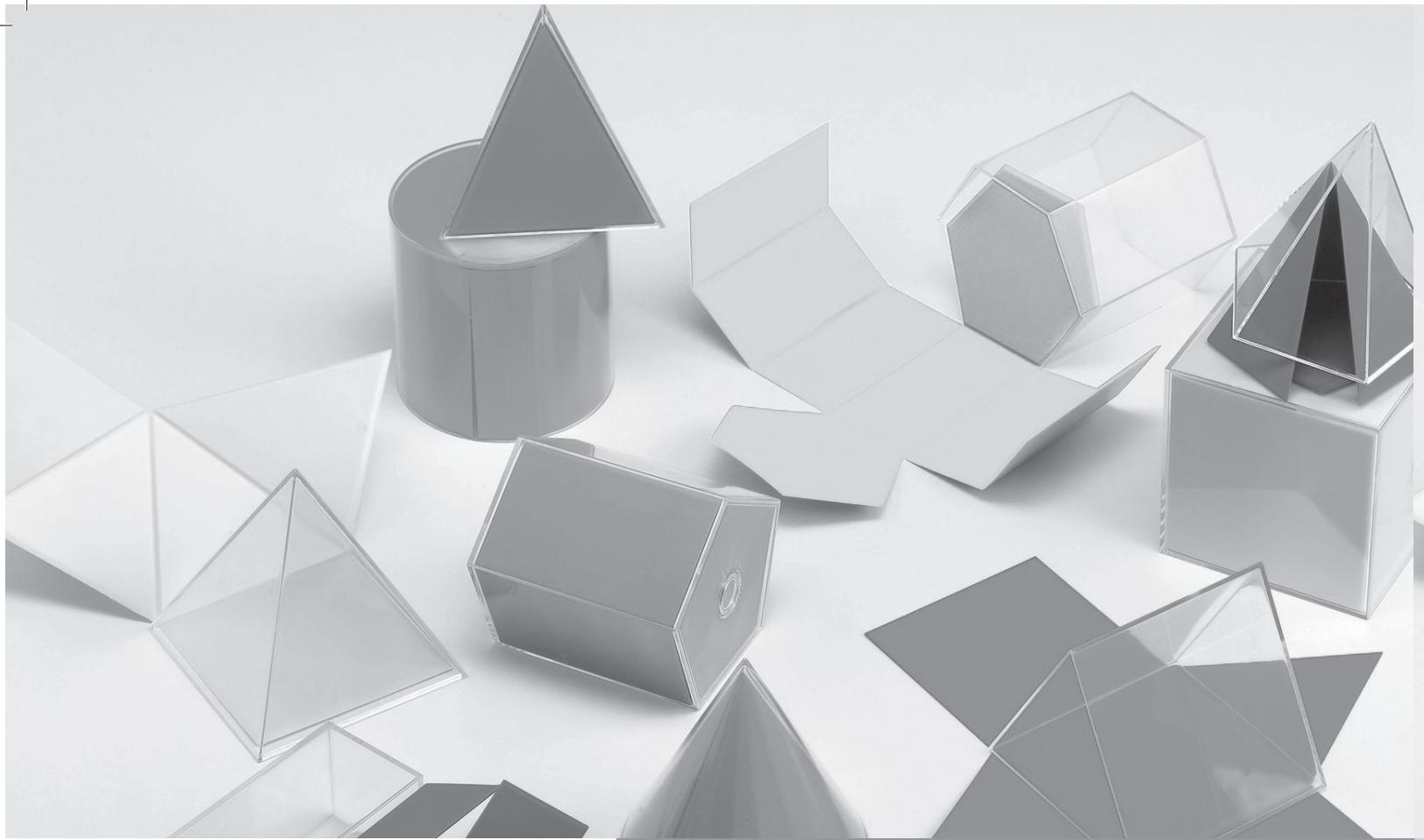
- SANTOS TRIGO, L. M. Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de la matemática / L. M. Santos Trigo. - - 2ª ed. - - México: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, 1999. -- (Didáctica- lecturas).
- SEGARRA, L. Problemates: colección de problemas matemáticos para todas las edades / Lluis Segarra. - - Barcelona: Grao, 2001. - - (Didáctica de las matemáticas, 156).
- STACEY, K. Resolver problemas: estrategias / K. Stacey, S. Groves. - - Madrid: Narcea, 2001.
- STERNBERG, R. J. Enseñar a pensar / R. J. Sternberg, L. Spear- Swerling. - - Madrid: Aula XXI, Santillana, 2000.
- VIZMANOS BUELTA, J. Algoritmo 1 / José Ramón Vizmanos, M. Anzola. - - Madrid: SM, 1992.
- \_\_\_\_\_. Matemática 4 / José Ramón Vizmanos, M. Anzola. - - Madrid: SM, 1995.
- YUS RAMOS, R. Temas transversales: hacia una nueva escuela / R. Yus Ramos. - - 2ª ed. - - Barcelona: Grao, 1998. - - 218 p. - - (Transversalidad, 106).



## Bibliografía de fuentes en línea

- Biografías y vida 2004. Colin Maclaurin [En línea]. Disponible en: <http://www.biografiasyvidas.com/biografia/m/macraurin.html> [Consulta: 8 de setiembre de 2006]
- Galileo Galilei. [En línea]: Wikipedia la enciclopedia libre, 2006. Disponible en: [http://es.wikipedia.org/wiki/Galileo\\_Galilei#Obra\\_científica](http://es.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei#Obra_científica) [Consulta: 8 de setiembre de 2006].
- George Pólya [En línea]: Wikipedia la enciclopedia libre, 2006. Disponible en: [http://es.wikipedia.org/wiki/George\\_Polya](http://es.wikipedia.org/wiki/George_Polya) [Consulta: 15 de setiembre de 2006]
- Isaac Newton [En línea]: Wikipedia la enciclopedia libre, 2006. Disponible en: [http://es.wikipedia.org/wiki/Isaac\\_Newton](http://es.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton) [Consulta: 8 de setiembre de 2006].
- Los matemáticos más famosos de todos los tiempos. Arthur Cayley [En línea]: Universidad Central de Venezuela. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas, 2000. Disponible en: <http://euler.ciens.ucv.ve/matematicos/cayley.html> [Consulta: 7 de setiembre de 2006].
- Los matemáticos y su historia. Blas Pascal [En línea]: Universidad de Santiago de Chile, 1997. Disponible en: <http://www.mat.usach.cl/histmat/html/pasc.html> [Consulta: 8 de setiembre de 2006].
- Mora, Marisol de. Matemáticos. Gottfried W. Leibniz [En línea]:DivulgaMAT: Portal de la Real Sociedad Matemática Española. Disponible en: <http://www.divulgamat.net/weborriak/Historia/MateOspetsuak/Leibniz.asp> [Consulta: 8 de setiembre de 2006].
- Niccolò Fontana Tartaglia [En línea]: Wikipedia la enciclopedia libre, 2006. Disponible en: [http://es.wikipedia.org/wiki/Niccolò\\_Tartaglia](http://es.wikipedia.org/wiki/Niccolò_Tartaglia) [Consulta: 8 de setiembre de 2006].
- Pierre de Fermat [En línea]: Wikipedia la enciclopedia libre, 2006. Disponible en: [http://es.wikipedia.org/wiki/Pierre\\_de\\_Fermat](http://es.wikipedia.org/wiki/Pierre_de_Fermat) [Consulta: 8 de setiembre de 2006]
- Rene Descartes [En línea]: Universidad de Santiago de Chile, 1997. Disponible en: <http://www.mat.usach.cl/histmat/html/desc.html> [Consulta: 8 de setiembre de 2006].

Impresión - 2016  
Asunción Paraguay



# Matemática

1º

Educación Media  
Plan Común

Curso

Guía didáctica  
para docente