Случайные процессы. ДЗ 9-10.

Прохоров Юрий, 776

Задача 9.1

Пусть ОДМЦ $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ задана матрицей переходов P и начальным распределением $p(0)$. Найти

(a) $\mathbb{P}\{X_n = j\}$

(b) $\mathbb{P}\{X_{n+1} = j \mid X_{n-1} = i\}$

(c) $\mathbb{P}\{X_{n+m} = j \mid X_n = i\}$

Решение:

Из формулы полной вероятности следует, что вероятность перехода из i-го состояния в j-ое за m шагов:

$$p_{i,j}(m) = (P^m)_{ij}$$

(a) По формуле полной вероятности,

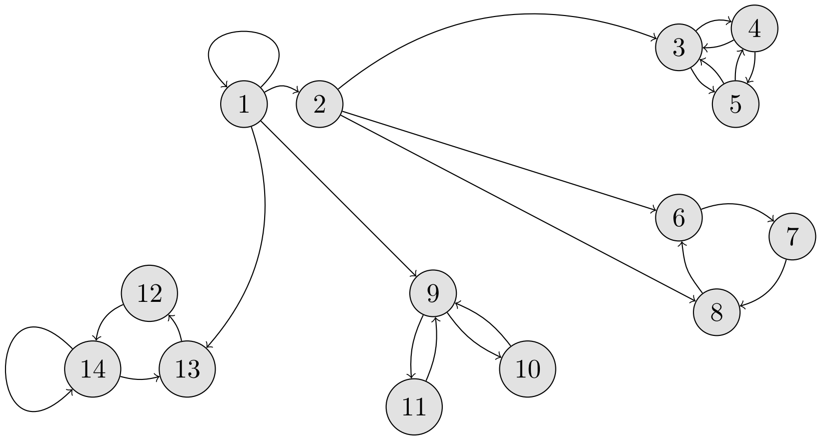
$$\mathbb{P}\{X_n = j\} = \sum_{i \in E} \mathbb{P}\{X_n = j \mid X_0 = i\}\, \mathbb{P}\{X_0 = i\} = \sum_{i \in E} p_{i,j}(n)\, p_i(0) = \sum_{i \in E} (P^n)_{ij}\, p_i(0) = \left[P^n\, p(0)\right]_j$$

(b) $\mathbb{P}\{X_{n+1} = j \mid X_{n-1} = i\} = p_{i,j}(2) = (P^2)_{ij}$.

(c) $\mathbb{P}\{X_{n+m} = j \mid X_n = i\} = p_{i,j}(m) = (P^m)_{ij}$.

Задача 9.2

Для ОДМЦ, заданной графом



(a) Выделить классы эквивалентности.

(b) Для замкнутых классов определить период или показать апериодичность.

Решение:

Классы эквивалентности — это компоненты сильной связности стохастического графа:

1. $\{1\}$ — открытый класс.

2. $\{2\}$ — открытый класс.
3. $\{3, 4, 5\}$ — замкнутый класс.

   Рассмотрим этот класс как отдельную неразложимую подцепь. Для состояния 3:

   $$\{n \geq 1 \mid p_{3,3}(n) > 0\} = \{2, 3, 4, \ldots\}$$

   НОД этого множества равен 1, поэтому данное состояние апериодично. По теореме солидарности, это распространяется на весь класс.
4. $\{6, 7, 8\}$ — замкнутый класс.

   $$\text{НОД}\{n \geq 1 \mid p_{6,6}(n) > 0\} = \text{НОД}\{3, 6, 9, \ldots\} = 3$$

   Значит, период данного класса равен 3.
5. $\{9, 10, 11\}$ — замкнутый класс.

   $$\text{НОД}\{n \geq 1 \mid p_{9,9}(n) > 0\} = \text{НОД}\{2, 4, 6, \ldots\} = 2$$

   Значит, период данного класса равен 2.
6. $\{12, 13, 14\}$ — замкнутый класс.

   $$\text{НОД}\{n \geq 1 \mid p_{14,14}(n) > 0\} = \text{НОД}\{1, 2, 3, \ldots\} = 1$$

   Значит, данный класс апериодичен.

Задача 9.3

(a) Доказать, что для апериодичности неразложимой ОДМЦ достаточно наличие ненулевого элемента на диагонали матрицы P (т.е. наличие петли в графе этой цепи).

(b) Показать, что это условие не является необходимым.

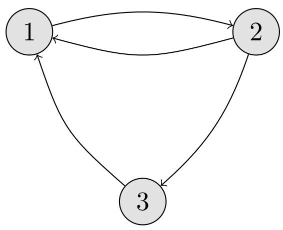
Решение:

(a) Если существует состояние i, такое, что $p_{i,i} = p_{i,i}(1) > 0$, то

$$\text{НОД}\{n \geq 1 \mid p_{i,i}(n) > 0\} = \text{НОД}\{1, \ldots\} = 1$$

Значит, это состояние апериодично. По теореме солидарности, все состояния в цепи апериодичны.

(b) Для апериодичности достаточно, чтобы во множестве, от которого берется НОД, были два последовательных числа. Например, для цепи



$\text{НОД}\{n \geq 1 \mid p_{i,i}(n) > 0\} = \text{НОД}\{2, 3, \ldots\} = 1$, поэтому эта цепь апериодична.

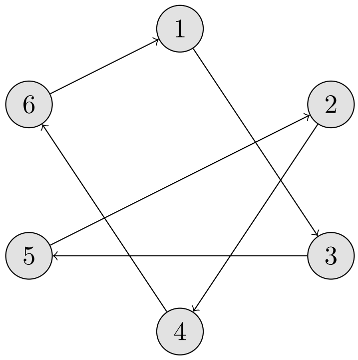
Задача 9.4

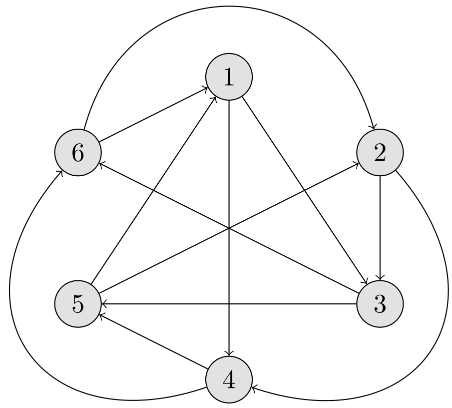
Для ОДМЦ, заданных графами (см. ниже)

(a) Определить период d.

(b) Выделить циклические подклассы $C_0, \ldots, C_{d-1}$.

(c) Показать блочную структуру матрицы P.





Решение:

В обоих случаях дана неразложимая ОДМЦ, поэтому по теореме солидарности, период цепи — период любого ее состояния.

1. НОД$\{n \geq 1 \mid p_{1,1}(n) > 0\} =$ НОД$\{6, 12, 18, \ldots\} = 6$, значит, период этой цепи $d = 6$.

   Циклические подклассы:

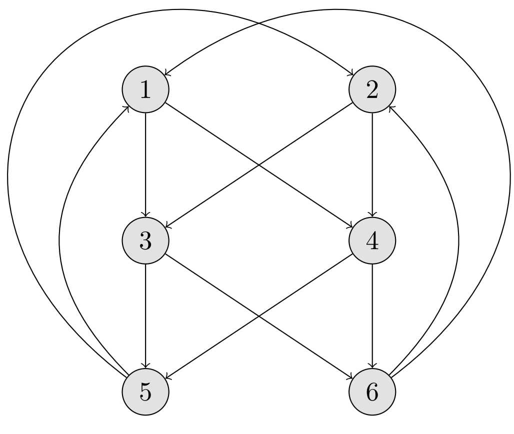
$$C_0 = \{1\}, \qquad C_1 = \{3\}, \qquad C_2 = \{5\}, \qquad C_3 = \{2\}, \qquad C_4 = \{4\}, \qquad C_5 = \{6\}$$

   Если в матрице P поменять местами соответствующие строки и столбцы (то есть переименовать состояния), то она будет иметь блочную структуру:

$$P = \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{array} \begin{bmatrix} & \boxed{p_{1,3}} & & & & \\ & & \boxed{p_{3,5}} & & & \\ & & & \boxed{p_{5,2}} & & \\ & & & & \boxed{p_{2,4}} & \\ & & & & & \boxed{p_{4,6}} \\ \boxed{p_{6,1}} & & & & & \end{bmatrix}$$

   Цифры слева обозначают новую нумерацию вершин.

2. Перерисуем граф цепи в следующем виде:



   Теперь видно, что

$$\text{НОД}\{n \geq 1 \mid p_{1,1}(n) > 0\} = \text{НОД}\{3, 6, 9, \ldots\} = 3,$$

значит, период этой цепи $d = 3$.

Циклические подклассы:

$$C_0 = \{1, 2\}, \qquad C_1 = \{3, 4\}, \qquad C_2 = \{5, 6\}$$

Матрица P имеет блочный вид:

$$P = \begin{bmatrix} & & p_{1,3} & p_{1,4} & & \\ & & p_{2,3} & p_{2,4} & & \\ & & & & p_{3,5} & p_{3,6} \\ & & & & p_{4,5} & p_{4,6} \\ p_{5,1} & p_{5,2} & & & & \\ p_{6,1} & p_{6,2} & & & & \end{bmatrix}$$

Задача 10.1

Доказать, что если в ОДМЦ состояние j невозвратно, то для любого состояния i выполнено

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{i,j}(n) < +\infty,$$

а, значит, и $p_{i,j}(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Решение:

Обозначим $f_{i,j}(n)$ — вероятность первый раз придти в j из i за n шагов:

$$f_{i,j}(n) = \mathbb{P}\big\{X_n = j,\ X_k \neq j,\ k = \overline{1, n-1} \bigm| X_0 = i\big\}$$

Тогда по формуле полной вероятности:

$$p_{i,j}(n) = \sum_{k=1}^{n} f_{i,j}(k) p_{j,j}(n-k)$$

Суммируем это равенство от $n = 1$ до ∞ (суммирование и перестановка местами сумм будут корректными, если все ряды сходятся):

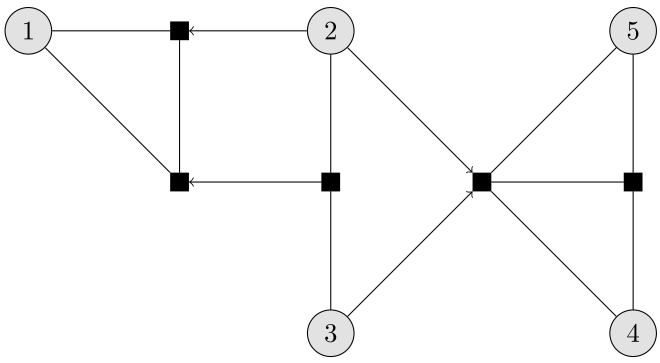
$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{i,j}(n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} f_{i,j}(k) p_{j,j}(n-k) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i,j}(k) \sum_{n=k}^{\infty} p_{j,j}(n-k) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i,j}(k) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} p_{j,j}(n)}_{\substack{P_j < \infty,\ \text{т.к.} \\ j\ \text{невозвратно}}} =$$

$$= P_j \sum_{k=1}^{\infty} f_{i,j}(k) = P_j \cdot F_{i,j} < +\infty,$$

где $F_{i,j} \leq 1$ — вероятность дойти из i в j за конечное число шагов. Все ряды сходятся, значит, перестановка суммирований местами обоснована.

Задача 10.2

Крыса бегает по лабиринту из 5 клеток.

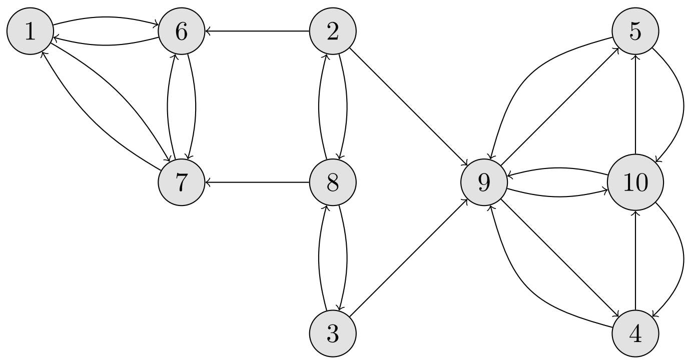


Стрелками указаны односторонние проходы, линиями — двусторонние, ■ — перекрестки. Дойдя до клетки или перекрестка, крыса выбирает случайный выход (включая тот, по которому прибежала).

Найти матрицу P, состоящую из переходных вероятностей между клетками. Классифицировать состояния (клетка — состояние).

Решение:

Составим марковскую цепь, состоящую из всех клеток и перекрестков:



Матрица переходов этой цепи:

$$Q = \begin{bmatrix} & & & & & 1/2 & 1/2 & & & \\ & & & & & 1/3 & & 1/3 & 1/3 & \\ & & & & & & & 1/2 & 1/2 & \\ & & & & & & & & 1/2 & 1/2 \\ & & & & & & & & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & & & & & & 1/2 & & & \\ 1/2 & & & & & 1/2 & & & & \\ & 1/3 & 1/3 & & & 1/3 & & & & \\ & & & 1/3 & 1/3 & & & & & 1/3 \\ & & & 1/3 & 1/3 & & & & 1/3 & \end{bmatrix}$$

Нас интересует матрица P, элементами которой являются числа $p_{i,j}$ — вероятности того, что следующая **клетка**, в которую придет крыса, стартуя из **клетки** $i \in \{1, \ldots, 5\}$, будет под номером $j \in \{1, \ldots, 5\}$.

Отметим, что так как данная цепь конечна, то если состояние j возвратно ($\equiv$ существенно), то вероятность, что мы дойдем туда за конечное время равна 1 (см. предыдущую задачу), поэтому вероятности $p_{i,j}$ существуют.

Обозначим $\widetilde{p}_{i,j}$ — вероятность, того, что следующая **клетка**, в которую придет крыса, стартуя из **перекрестка** $i \in \{6, \ldots, 10\}$, будет под номером $j \in \{1, \ldots, 5\}$. Обозначим

$$p_j = \begin{bmatrix} p_{1,j} \\ \vdots \\ p_{5,j} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{p}_j = \begin{bmatrix} \widetilde{p}_{6,j} \\ \vdots \\ \widetilde{p}_{10,j} \end{bmatrix}$$

Тогда легко видеть, что по формуле полной вероятности (первое равенство):

$$\begin{bmatrix} p_j \\ \widetilde{p}_j \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} e_j \\ \widetilde{p}_j \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} Q_{11} & Q_{12} \\ \hline Q_{21} & Q_{22} \end{array}\right] \begin{bmatrix} e_j \\ \widetilde{p}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}e_j + Q_{12}\widetilde{p}_j \\ Q_{21}e_j + Q_{22}\widetilde{p}_j \end{bmatrix}$$

Тут Q_{11} — матрица вероятностей переходов между клетками (в нашей задаче она нулевая), Q_{12} — между клетками и перекрестками, Q_{21} — между перекрестками и клетками, Q_{22} — между перекрестками.

Из второго уравнения находим

$$\widetilde{p}_j = (I - Q_{22})^{-1} Q_{21} e_j$$

и подставляем в первое. В итоге

$$p_j = \big(Q_{11} + Q_{12}(I - Q_{22})^{-1} Q_{21}\big) e_j$$

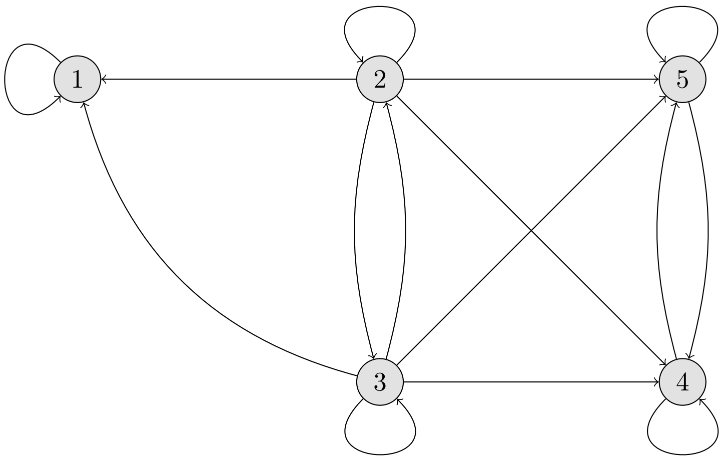
Тогда искомая матрица P:

$$P = Q_{11} + Q_{12}(I - Q_{22})^{-1}Q_{21}$$

В нашей задаче получается после вычислений

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4/9 & 1/9 & 1/9 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Соответствующий граф:



Классификация состояний:

1. $\{1\}$ — замкнутый класс. Состоит из положительного возвратного состояния (= существенного).
2. $\{2, 3\}$ — открытый класс. Состоит из нулевых невозвратных состояний (= несущественных).
3. $\{4, 5\}$ — замкнутый класс. Состоит из положительных возвратных состояний (= существенных).

Задача 10.3(a)

Рассмотрим простое случайное симметричное блуждание на d-мерной решетке $\mathbb{Z}^d$. Находясь в состоянии $a = (a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d$ цепь может равновероятно перейти в одну из 2^d вершин куба $\|x - a\|_1 = 1$.

Доказать, что при $d \leq 2$ такое блуждание возвратно, а при $d \geq 3$ — невозвратно.

Решение:

Пусть $\mathbf{X_n}$ — данная (векторная) ОДМЦ.

Сделаем поворот системы координат с помощью ортогональной матрицы A, состоящей из столбцов

$$A = \left[h_1, \ldots, h_d\right]$$

Для любого n определим случайные процессы $X_n^k,\ k = \overline{1, d}$ как коэффициенты разложения $A\mathbf{X}_n$ по базису $h_1, \ldots, h_d$:

$$A\mathbf{X}_n = X_n^1 h_1 + \ldots + X_n^d h_d$$

Идея состоит в том, чтобы при таком значение X_{n+1}^k зависело только от X_n^k и не зависело от X_n^i при $i \neq k$.

В исходном базисе:

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \xi_n,$$

где случайные величины $\{\xi_n\}$ независимы и равновероятно принимают значения в одной из 2^d вершин куба $\|x\|_1 = 1$. Выберем матрицу A такой, чтобы при действии ее на этот куб его ребра стали параллельны координатным осям.

Итак, при умножении последнего равенства на матрицу A имеем:

$$A\mathbf{X}_{n+1} = A\mathbf{X}_n + A\xi_n, \tag{$*$}$$

где случайная величина $A\xi_n$ теперь принимает случайное значение в вершинах куба

$$A\big\{\|x\|_1 = 1\big\} = \left\{\|x\|_\infty = \frac{1}{2}\sqrt[d]{V_d}\right\} = \left\{\|x\|_\infty = \frac{1}{\sqrt[d]{d!}}\right\},$$

где $V_d = \dfrac{2^d}{d!}$ — объем d-мерного куба $\|x\|_1 = 1$.

Координаты вершин повернутого куба задаются векторами $\left[\pm\dfrac{1}{\sqrt[d]{d!}}, \ldots, \pm\dfrac{1}{\sqrt[d]{d!}}\right]^T$. Среди этих 2^d векторов есть векторы $h_1, \ldots, h_d$, так как $Ae_k = h_k$, и векторы e_k задавали вершины исходного куба. В итоге получаем, что

$$A\xi_n = \eta_1 h_1 + \ldots \eta_n h_n,$$

где случайные величины $\eta_k \in \{-1, +1\}$ равновероятно, и все η_k независимы. Подставляя это равенство в $(*)$ и приравнивая коэффициенты при базисных векторах h_k, получаем

$$X^k_{n+1} = X^k_n + \eta_k, \qquad \eta_k \in \{-1, +1\}, \qquad k = \overline{1, d}$$

Это равенство означает, что X^k_n — независимые одномерные симметричные случайные блуждания.

В случае $d = 2$ имеем обычный поворот системы координат на 45 градусов:

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \qquad h_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Итак, мы показали, что *d-мерное симметричное случайное блуждание распадается на d независимых одномерных блужданий.*

Рассмотрим теперь одномерное симметричное блуждание X_n. Для нулевого состояния вероятность вернуться после фиксированного числа шагов:

$$p_{0,0}(2n) = C^n_{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}, \qquad p_{0,0}(2n+1) = 0$$

По формуле Стирлинга, $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$:

$$p_{0,0}(2n) \sim \frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n}}{e^{2n}}\,\frac{e^{2n}}{2\pi n\, n^{2n}}\,\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \qquad n \to \infty$$

Поэтому для d-мерного блуждания в силу независимости компонент X^k_n: каждое из d блужданий должно вернуться в начало, значит,

$$p_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(2n) = \big[p_{0,0}(2n)\big]^d \sim \frac{1}{(\pi n)^{d/2}} \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty$$

Значит, любое состояние в d-мерном блуждании является нулевым. Исследуем возвратность. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(k) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{\mathbf{0},\mathbf{0}}(2n) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^{d/2}}$$

- при $d \leq 2$: расходится, значит, состояния в цепи нуль возвратные;
- при $d \geq 3$: сходится, значит, состояния в цепи невозвратные.

Задача 10.3(б)

Рассмотрим произвольное симметричное блуждание на $\mathbb{Z}$:

$$X_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n,$$

где ξ_k — i.i.d, симметричные (т.е. $\xi \overset{d}{=} -\xi$), целочисленные и с конечным матожиданием $\mathbb{E}\xi_k = 0$.

Доказать, что $\{X_n\}$ — нуль возвратная ОДМЦ.

Решение:

Сначала покажем, что это ОДМЦ, проверив свойство марковости:

$$\mathbb{P}\big\{X_{n+1} = j \mid X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n\big\} = \mathbb{P}\big\{\xi_1 + \ldots + \xi_{n+1} = j \mid \xi_1 = i_1,\ \ldots,\ \xi_n = i_n - i_{n-1}\big\} =$$
$$= \mathbb{P}\big\{\xi_{n+1} = j - i_n \mid \xi_1 = i_1,\ \ldots,\ \xi_n = i_n - i_{n-1}\big\} = \mathbb{P}\big\{\xi_{n+1} = j - i_n\big\} = \mathbb{P}\big\{X_{n+1} = j \mid X_n = i_n\big\}$$

Однородность следует из одинаковой распределенности ξ_k:

$$\mathbb{P}\big\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\big\} = \mathbb{P}\big\{\xi_{n+1} = j - i\big\} = \mathbb{P}\big\{\xi_2 = j - 1\big\} = \mathbb{P}\big\{X_2 = j \mid X_1 = i\big\}$$

Найдем вероятность $p_{0,0}(n)$ вернуться в нулевое состояние через n шагов:

$$p_{0,0}(n) = \mathbb{P}\{X_n = 0\}$$

Пусть $\Phi_\xi(z) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}\{\xi = k\} z^k$ — производящая функция ξ. Она представлена в виде своего ряда Лорана в окрестности нуля. Тогда в силу независимости ξ_k $\big[\Phi_\xi(z)\big]^n$ — производящая функция X_n.

Искомая вероятность $\mathbb{P}\{X_n = 0\}$ является свободным членом в разложении $\big[\Phi_\xi(z)\big]^n$ в ряд Лорана. Из комплексного анализа мы знаем, что этот коэффициент находится по формуле Коши

$$p_{0,0}(n) = \mathbb{P}\{X_n = 0\} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{\big[\Phi_\xi(z)\big]^n}{z}\, dz \qquad (*)$$

Так как $\Phi_\xi(z) < 1$ при $|z| = 1$ (за исключением, быть может, конечного числа точек), то

$$\big[\Phi_\xi(z)\big]^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p_{0,0}(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Отсюда следует, что все состояния в цепи нулевые. Покажем, что они возвратные. Просуммируем равенство $(*)$ по n от 0 до ∞. Ряд из подынтегральных функций сходится равномерно, поэтому можно переставить местами сумму и интеграл:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \big[\Phi_\xi(z)\big]^n\, dz = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{z\big[1 - \Phi_\xi(z)\big]} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - \Phi_\xi(e^{i\varphi})}$$

Так как $\mathbb{E}\xi = 0$, то можно разложить Φ_ξ в окрестности $\varphi = 0$ и получить при малом φ_0:

$$0 \le 1 - \Phi_\xi(e^{i\varphi}) \le \varphi, \qquad \varphi \in [0, \varphi_0]$$

Отсюда следует оценка

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{0,0}(n) \ge \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\varphi} = \infty$$

Это означает, что состояния цепи нуль возвратные.

Теорема солидарности (формулировка из пособия)
Для неразложимой ОДМЦ справедливо, что

(1) Если хотя бы одно состояние возвратное, то все состояния возвратные.

(2) Если хотя бы одно состояние нулевое, то все состояния нулевые.

(3) Если хотя бы одно состояние имеет период d, то все состояния имеют период d.

Если хотя бы одно состояние апериодично, то все состояния апериодичны.

Вопросы:

1. Почему теорема солидарности формулируется только для замкнутых классов эквивалентности? Будет ли она неверна для открытых классов? Поэтому ли в задаче 9.2 требовалось найти период или доказать апериодичность только для замкнутых классов?

2. В теореме солидарности говорится о следствиях

$$\text{хотя бы 1 возвратное} \implies \text{все возвратные}, \qquad \text{хотя бы 1 нулевое} \implies \text{все нулевые}$$

Будут ли для замкнутых классов верны следующие следствия?

$$\text{хотя бы 1 невозвратное} \implies \text{все невозвратные}, \qquad \text{хотя бы 1 ненулевое} \implies \text{все ненулевые}$$

3. На семинаре мы говорили, что если $\mu_i = \mathbb{E}\sigma_i$, где σ_i — число шагов до первого возвращения в i-ое состояние, то
$$\lim_{n\to\infty} p_{i,i}(n) = \frac{1}{\mu_i},$$
если предел слева существует. А если он не существует, то пишем предел по Чезаро:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{i,i}(k) = \frac{1}{\mu_i}$$
Для любых ли состояний существует предел по Чезаро?