Функан. ДЗ 5.

Прохоров Юрий, 776

---

1. Компактность в топологических пространствах

Опр. Пусть (X, τ) — ТП. Множество $S \subset X$ называется *компактным*, если любое открытое покрытие S содержит конечное подпокрытие.

Опр. Пусть (X, τ) — ТП. Множество $S \subset X$ называется *секвенциально компактным*, если любая последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ содержит сходящуюся в S по топологии τ подпоследовательность.

Опр. Топологическое пространство (X, τ) называется *(секвенциально) компактным*, если X — (секвенциальный) компакт.

Опр. ТП (X, τ) удовлетворяет *первой аксиоме отделимости* (T_1), если

$$\forall x, y \in X \quad \exists U(x), U(y) \in \tau : \quad x \notin U(y), \quad y \notin U(x)$$

Опр. ТП (X, τ) называется *хаусдорфовым*, если оно удовлетворяет *второй аксиоме отделимости* (T_2):

$$\forall x, y \in X \quad \exists U(x), U(y) \in \tau : \quad U(x) \cap U(y) = \varnothing$$

Утв. 1.1 ТП (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости тогда и только тогда, когда любое его одноточечное подмножество замкнуто.

Утв. 1.2 Пусть (X, τ) — хаусдорфово ТП. Тогда

- любое компактное множество $S \subset X$ замкнуто;
- любое секвенциально компактное множество $S \subset X$ секвенциально замкнуто.

Утв. 1.3 (X, τ) — компактное ТП $\iff$ любое собственное замкнутое подмножество X компактно.
$S \subset X$ — собственное подмножество, если $S \neq \varnothing$ и $S \neq X$.

Утв. 1.4 Замкнутое подмножество компакта — компакт.

Утв. 1.5 Пусть $A, B \subset X$ — компакты. Тогда $A \cup B$ — компакт.

Теорема Тихонова. Произведение компактных топологических пространств компактно в топологии произведения.

Утв. 1.6 Пусть $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$ — ТП, отображение $f : X \to Y$ топологически непрерывно, $S \subset X$ — компакт. Тогда $f(S)$ — компакт.

Доказательство.
Пусть $f(S) \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$ — открытое покрытие S. Тогда $S \subset \bigcup\limits_{\alpha} f^{-1}(U_\alpha)$. В силу непрерывности f, все $f^{-1}(U_\alpha) \in \tau_1$. S компактно $\implies$ $\exists$ конечное подпокрытие $S \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} f^{-1}(U_k)$. Значит, $f(S) \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} U_k$. □

Теорема Вейерштрасса. Пусть (X, τ) — компактное ТП, отображение $f : X \to \mathbb{R}$ непрерывно. Тогда f достигает на X значений $\sup\limits_X f$ и $\inf\limits_X f$.

Доказательство.
По утв. 1.6, $f(X) \subset \mathbb{R}$ — компакт. Значит, $f(X)$ ограничено и замкнуто в $\mathbb{R}$ $\implies$ $\sup\limits_X f, \ \inf\limits_X f \in f(X)$. □

---

2. Компактность в метрических пространствах

Опр. Пусть (X, ρ) — МП, $S \subset X$. Множество $\{x_i\}_{i=1}^N \subset S$ называется *конечной ε-сетью* множества S, если

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_\varepsilon(x_i), \qquad B_\varepsilon(x_i) \ \text{— замкнутые шары}$$

Опр. Пусть (X, ρ) — МП. Множество $S \subset X$ называется *вполне ограниченным*, если $\forall \varepsilon > 0$ в S существует конечная ε-сеть.

Опр. Пусть (X, ρ) — МП. Множество $S \subset X$ называется *ограниченным*, если

$$\exists x \in X, \ \ \exists R > 0: \quad S \subset O_R(x)$$

Утв. 2.1 S вполне ограничено $\implies$ S ограничено.

Утв. 2.2 S вполне ограничено $\implies$

- $[S]$ вполне ограничено;
- любое подмножество S вполне ограничено.

Первое следует из замкнутости элементов конечной ε-сети, а для доказательства второго достаточно из $\frac{\varepsilon}{2}$-сети для S выделить ε-сеть для подмножества S.

Утв. 2.3 $S \subset \mathbb{R}^n$ ограничено $\implies$ S вполне ограничено.
В общих метрических пространствах это неверно.

Чтобы показать, что некоторое множество S не является вполне ограниченным нужно построить бесконечное ε_0-дырявое множество в S (для некоторого $\varepsilon_0 > 0$).

Критерий компактности Фреше. Пусть (X, ρ) — МП, $S \subset X$. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) S — компакт;

(2) (S, ρ) — полное МП и S вполне ограничено;

(3) S — секвенциальный компакт.

Если X — полное МП, то в утверждении (2) требование полноты можно заменить на замкнутость.

Следствие. S компактно $\implies$ S вполне ограничено.

Следствие. $S \subset \mathbb{R}^n$ компактно $\iff$ S ограничено и замкнуто. (верно в $\forall$ конечномерном пр-ве)

Утв. 2.4 (X, ρ) — компактное МП $\implies$ (X, ρ) сепарабельно.

Утв. 2.5 МП (X, ρ) компактно $\iff$ любая последовательность вложенных замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

Критерии вполне ограниченности в стандартных пространствах:

Утв. 2.6 Пусть в МП $(l_p, \rho_p) : M \subset l_p$. Тогда

$$M \text{ — вполне ограничено} \quad \iff \quad \begin{cases} M \text{ ограничено} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N: \ \ \forall x \in M \quad \to \quad \displaystyle\sum_{k=N+1}^{\infty} |x(k)|^p < \varepsilon \end{cases}$$

Утв. 2.7 Пусть в МП $(c_0, \rho_\infty) : M \subset c_0$. Тогда

$$M \text{ — вполне ограничено} \quad \iff \quad \begin{cases} M \text{ ограничено} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N: \ \ \forall x \in M \quad \to \quad \sup\limits_{k>N} |x(k)| < \varepsilon \end{cases}$$

Утв. 2.8 Пусть в МП $(c, \rho_\infty) : M \subset c$. Тогда

$$M \text{ — вполне ограничено} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} M \text{ ограничено} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N : \ \ \forall x \in M \quad \to \quad \sup\limits_{k>N} |x(k) - x(\infty)| < \varepsilon \end{cases}$$

Опр. Множество $M \subset C[a, b]$ называется *равностепенно непрерывным*, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall f \in M \quad \forall x_1, x_2 : (|x_1 - x_2| < \delta) \quad \to \quad \big| f(x_1) - f(x_2) \big| < \varepsilon$$

Утв. 2.9 (*Теорема Арцела-Асколи*) Пусть в МП $(C[a, b], \rho_c) : M \subset C[a, b]$. Тогда

$$M \text{ — вполне ограничено} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} M \text{ ограничено} \\ M \text{ равностепенно непрерывно} \end{cases}$$

Опр. Пусть (T, ρ) — компактное метрическое пространство. Пространством $(C(T), d)$ назовем множество всех непрерывных функций $f : T \to \mathbb{R}$ с метрикой

$$d(f, g) = \sup_{t \in T} \big| f(t) - g(t) \big|$$

Теорема Арцела-Асколи обобщается на случай пространства $(C(T), d)$.

Утв. 2.10 Пусть (T, ρ) — компактное МП. Тогда $(C(T), d)$ — полное МП.

Опр. Пусть (T, ρ) — МП. Функция $f : T \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* на T, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad \forall t_1, t_2 \in T : \quad (\rho(t_1, t_2) < \delta) \quad \to \quad \big| f(t_1) - f(t_2) \big| < \varepsilon$$

Теорема Кантора. Пусть (T, ρ) — компактное МП. Тогда любая функция $f \in C(T)$ равномерно непрерывна на T.

3. Тихоновская топология (топология произведения)

Опр. Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства. *Тихоновской топологией* или *топологией произведения* на $X_1 \times X_2$ называется слабейшая (наименьшая) топология, относительно которой проекции

$$\pi_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1, \qquad \pi_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_2$$

топологически непрерывны.

Аналогично определяется топология на произведении произвольного числа пространств (не обязательно конечного числа).

Опр. Пусть (X_α, τ_α), $\alpha \in I$ — топологические пространства. *Тихоновской топологией* или *топологией произведения* на декартовом произведении $X = \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ называется слабейшая топология τ_T, относительно которой $\forall \alpha \in I$ проекции

$$\pi_\alpha : X \to X_\alpha, \qquad \pi_\alpha : x \mapsto x_\alpha$$

топологически непрерывны.

Например,

$$F = \{f : [0, 1] \to [0, 1]\} = \prod_{\alpha \in [0,1]} [0, 1] = [0, 1]^{[0,1]}.$$

В этом случае топология произведения τ такова, что $\forall x \in [0, 1]$ отображение

$$\pi_x : F \to \mathbb{R}, \qquad \pi_x : f \mapsto f(x)$$

топологически непрерывно.

Утв. 3.1 Предбаза топологии произведения τ_T задается множествами вида $\prod\limits_{\alpha \in I} U_\alpha$, где

- $\forall \alpha \in I \quad U_\alpha \in \tau_\alpha$;
- для всех α, кроме, быть может, одного, выполнено $U_\alpha = X_\alpha$.

Доказательство.
Проекция π_α непрерывна тогда и только тогда, когда прообразы открытых в τ_α множеств открыты в τ_T:

$$\forall \alpha \in I \quad \forall U_\alpha \in \tau_\alpha \quad \to \quad \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \left(\prod_{\beta \neq \alpha} X_\beta \right) \times U_\alpha \in \tau_T$$

Значит, все проекции непрерывны тогда и только тогда, когда множества, описанные в утверждении, лежат в топологии произведения.

Слабейшей (наименьшей) топологией, содержащей их, является топология, порожденная предбазой из этих множеств. □

Утв. 3.2 Пусть τ — тихоновская топология в $\mathbb{R}^E,\ E \subset \mathbb{R}$. Тогда

$$f_n \longrightarrow f \text{ поточечно на } E \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_n \xrightarrow{\tau} f \text{ (по топологии)},$$

то есть τ — топология поточечной сходимости.

Предбаза топологии τ состоит из множеств вида

$$V(x, c, \varepsilon) = \left\{ f : E \to \mathbb{R} \;\Big|\; \big|f(x) - c\big| < \varepsilon \right\}$$

В частности, если $E = \mathbb{N}$, то $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ — пространство всех числовых последовательностей, а если $E = \mathbb{R}$ — все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Теорема Тихонова. Произведение компактных топологических пространств компактно в топологии произведения.

Верно и обратное: если произведение компактно, то все производимые пространства компактны.

Доказательство есть в книге Engelsen, “General Topology”, стр. 138, теорема 3.2.4 или в книге Рудин, “Функциональный анализ”, стр. 413, приложение A3.

Следствие. Произведение компактных подмножеств произвольных ТП компактно в топологии произведения.

Доказательство.
Пусть $(X_\alpha, \tau_\alpha),\ \alpha \in I$ — ТП, множества $S_\alpha \subset X_\alpha$ компактны. Обозначим $S = \prod_\alpha S_\alpha \subset X$, где $X = \prod_\alpha X_\alpha$ — декартово произведение.
Определим $\tau'_\alpha = \{U \cap S_\alpha \mid U \in \tau_\alpha\}$ — топологии на S_α (легко проверяются свойства).

1. Покажем, что (S_α, τ'_α) — компактные ТП ($\forall \alpha \in I$).
   Далее в этом пункте индекс α будем опускать, считая его фиксированным.
   Пусть $S = \bigcup_\beta V_\beta,\ V_\beta \in \tau'$ — открытое (в τ') покрытие S. Так как $V_\beta \in \tau'$, то $V_\beta = U_\beta \cap S$. Тогда $S \subset \bigcup_\beta U_\beta$ — открытое (в τ) покрытие S. В силу компактности S в (X, τ), существует конечное подпокрытие $S \subset \bigcup_{k=1}^N U_k$.
   Тогда $S \subset \bigcup_{k=1}^N (U_k \cap S) = \bigcup_{k=1}^N V_k \implies (S, \tau')$ — компактное ТП.
2. По теореме Тихонова, $S = \prod_\alpha S_\alpha$ компактно в топологии произведения τ'.
3. Покажем, что если τ — топология произведения X, то $\forall U \in \tau \quad \to \quad U \cap S \in \tau'$.
   Докажем это сначала для элементов предбазы τ. Они имеют вид $V = \prod_\alpha U_\alpha$, где все $U_\alpha = X_\alpha$, кроме одного. Тогда $V \cap S = \left(\prod_\alpha U_\alpha\right) \cap \left(\prod_\alpha S_\alpha\right) = \prod_\alpha (U_\alpha \cap S_\alpha)$. Тогда для всех α, кроме одного, $U_\alpha \cap S_\alpha = S_\alpha$, а для оставшегося α_0: $U_{\alpha_0} \cap S_{\alpha_0} \in \tau_{\alpha_0}$. Значит, $V \cap S$ лежит в предбазе τ' (так как имеет нужный вид).

   Так утверждение верно для всех элементов предбазы, то легко показать, что оно верно для всех элементов базы, а потом для всех элементов топологии.
4. Покажем, что S компактно в (X, τ).
   Пусть $S \subset \bigcup_\beta U_\beta$ — открытое (в τ) покрытие S. Тогда $S \subset \bigcup_\beta (U_\beta \cap S)$ — открытое (в τ') покрытие S. В силу компактности (S, τ'), выделяется конечное подпокрытие:

$$S \subset \bigcup_{k=1}^N (U_k \cap S) \qquad \Longrightarrow \qquad S \subset \bigcup_{k=1}^N U_k \qquad \Longrightarrow \qquad S \text{ — компакт}$$

□

Утв. 3.3 Пусть

- $\{(X_k, \tau_k)\}_{k=1}^{\infty}$ — топологические пространства;
- топологии τ_k метризуемы, ρ_k — соответствующие метрики.

Тогда топология декартового произведения $\prod_{k=1}^{\infty} X_k$ метризуема и порождается метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(x_k, y_k)}{1 + \rho_k(x_k, y_k)}$$

Доказательство есть в книге Engelsen, “General Topology”, стр. 259, теорема 4.2.2.

Следствие. Пространство последовательностей $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (с топологией поточечной сходимости) метризуемо с метрикой

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

Прямое доказательство есть в книге Константинов Р.В., “Функциональный анализ”, стр. 31, пример 1.2.1.

Утв. 3.4 Пусть (X_k, ρ_k), $k = \overline{1, n}$ — метрические пространства. Тогда топологию декартового произведения можно породить метрикой (для любого $p \in [1, +\infty]$, в случае $p = +\infty$ — максимум из метрик):

$$\rho_p(x, y) = \Big\| \big(\rho_1(x_1, y_1), \ldots, \rho_n(x_n, y_n)\big) \Big\|_p = \left[\sum_{k=1}^{n} \big(\rho_k(x_k, y_k)\big)^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Все эти метрики эквивалентны метрике из утв. 3.3, то есть они порождают одну и ту же топологию произведения.

Утв. 3.5 Декартово произведение хаусдорфовых топологических пространств — хаусдорфово ТП.

То же верно и для пространств, удовлетворяющих первой аксиоме отделимости.

Доказательство есть в книге Engelsen, “General Topology”, стр. 80, теорема 2.3.11.

4. Линейные нормированные пространства

Опр. Пусть X — комплексное линейное пространство. Функция $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ называется *нормой* в X, если выполнены условия:

(1) $\|x\| \geq 0 \ \ \forall x \in X, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0;$

(2) $\|tx\| = |t| \cdot \|x\| \ \ \forall x \in X, \ \forall t \in \mathbb{C};$

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \ \forall x, y \in X.$

Опр. Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется *линейным нормированным пространством (ЛНП)*.

В ЛНП $(X, \|\cdot\|)$ используется *сумма Минковского* двух множеств:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, \ b \in B\}$$

и произведение множества на скаляр $t \in \mathbb{C}$:

$$tA = \{ta \mid a \in A\}$$

Как и в метрическом пространстве, $O_R(x)$ — открытый шар, $B_R(x)$ — замкнутый шар.

Утв. 4.1 Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Тогда $\forall x \in X, \ \forall R > 0$ справедливо

$$O_R(x) = x + R\,O_1(0), \qquad B_R(x) = x + R\,B_1(0)$$

Утв. 4.2 Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Тогда $\forall x_1, x_2 \in X, \ \forall R_1, R_2 > 0$ справедливо

$$O_{R_1}(x_1) + O_{R_2}(x_2) = O_{R_1 + R_2}(x_1 + x_2)$$

$$B_{R_1}(x_1) + B_{R_2}(x_2) = B_{R_1+R_2}(x_1 + x_2)$$

Утв. 4.3 Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП, $S \subset X$. Тогда для замыкания S справедливо

$$[S] = \bigcap_{\varepsilon>0} \Big(S + O_\varepsilon(0)\Big) = \bigcap_{\varepsilon>0} \Big(S + B_\varepsilon(0)\Big)$$

Утв. 4.4 Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП, $A, B \subset X$, $t \neq 0$ — скаляр. Тогда

$$[A] + [B] \subset [A + B], \qquad t[A] = [tA]$$

Утв. 4.5 Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Тогда $\forall x \in X$, $\forall R > 0$ шары $O_R(x)$ и $B_R(x)$ выпуклы.

Утв. 4.6 Пусть X — ЛП, функция $d : X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $(1), (2)$ нормы, и множество $\big\{x \in X \;\big|\; d(x) < 1\big\}$ выпукло. Тогда функция d является нормой на X.

То есть свойство (3) в определении нормы можно заменить на выпуклость единичного шара.

Опр. Пусть X — ЛП. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на X называются *эквивалентными*, если

$$\exists C_1, C_2 > 0 : \quad \forall x \in X \quad \to \quad C_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le C_2|x\|_1$$

Утв. 4.7 Пусть X — ЛП, $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — нормы на X. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(a) нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны;

(b) сходимости по нормам $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны;

(c) топологии, порожденные нормами $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ совпадают.

Так как любая норма $\|\cdot\|$ порождает метрику $\rho(x, y) = \|x - y\|$, то под сходимостью по норме подразумевается сходимость по метрике ρ, то есть по метрической топологии. Эта метрическая топология и является топологией, порожденной нормой.

Теорема 4.1 В конечномерном линейном пространстве любые две нормы эквивалентны.

В конечномерном пространстве X есть конечный базис $\{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда можно ввести норму

$$\|x\|_e = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|, \quad \text{где } x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i,$$

то есть α_i — координаты вектора x по базису e. Идея доказательства теоремы заключается в доказательстве эквивалентности произвольной нормы на X и нормы $\|\cdot\|_e$.

Доказательство есть в книге “Лекции по функциональному анализу”, Р.В. Константинов, теорема 3.1.1, стр. 99.

Следствие. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП, $L \subset X$ — конечномерное подпространство. Тогда

- $(L, \|\cdot\|)$ — полное ЛНП (банахово пространство);
- любое замкнутое ограниченное подмножество L является компактом.

Теорема 4.2 *(Рисса)* Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — бесконечномерное ЛНП. Тогда единичная сфера $S = \big\{x \;\big|\; \|x\| = 1\big\}$ не является компактом.

Опр. Полное ЛНП $(X, \|\cdot\|)$ называется *банаховым* пространством.

Теорема 4.3 ЛНП $(X, \|\cdot\|)$ — банахово $\iff$ $\forall$ абсолютно сходящийся ряд из X сходится в X, т.е.

$$\forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X : \left(\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < +\infty\right) \; \exists y \in X : \quad \lim_{N\to\infty} \left\|\sum_{n=1}^N x_n - y\right\| = 0$$

При этом обозначается $y = \sum_{n=1}^\infty x_n$.

Утв. 4.8 Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Тогда операции сложения и умножения на скаляр непрерывны.

Под непрерывностью можно понимаются следующие эквивалентные определения:

- непрерывность по метрической топологии (для метрики $\rho(x, y) = \|x - y\|$). В случае операции сложения имеется в виду топология произведения.
- эквивалентное определение из матанализа (для операции сложения) (см. утв. 3.4 при $p = 2$):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \ \ \forall x, y \in X \ \ \left(\sqrt{\|x - x_0\|^2 + \|y - y_0\|^2} < \delta\right) \ \ \to \ \ |(x + y) - (x_0 + y_0)| < \varepsilon$$

5. Гильбертовы пространства

Опр. Пусть X — комплексное ЛП. Отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{C}$ называется *скалярным произведением* на X, если выполнены условия:

(1) $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}, \ \langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X$
$\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

(2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}, \quad \forall x, y \in X$

(3) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in X, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

Опр. Пара $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ называется *евклидовым пространством* (ЕП).

Утв. 5.1 Пусть $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — ЕП. Тогда функция $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ является нормой на X.
Часто евклидово пространство $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ считается линейным нормированным с порожденной нормой.

Утв. 5.2 *Неравенство Коши-Буняковского*: $\big|\langle x, y \rangle\big| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Часто бывает полезна запись $\langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle$.

Утв. 5.3 Пусть X — ЕП. Тогда $\forall x, y \in X$ выполнено *равенство параллелограмма*:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Обратное тоже верно: если в ЛНП X для любых векторов выполнено правило параллелограмма (polarization identity), то норма порождается скалярным произведением:

- Если X — вещественное ЛНП, то
$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4}$$
- Если X — комплексное ЛНП, то
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \|x + i^k y\|^2$$

Эта теорема фон Неймана-Фреше. Доказательство есть здесь.

Опр. Пусть X — ЕП. Векторы $x, y \in X$ называются *ортогональными* ($x \perp y$), если $\langle x, y \rangle = 0$.

Опр. Полное (относительно порожденной нормы) евклидово пространство называется *гильбертовым пространством* (ГП).

Опр. Пусть H — ГП, $L \subset H$ — подпространство. *Ортогональным дополнением* L называется множество

$$L^\perp = \left\{ y \in H \ \middle| \ \langle x, y \rangle = 0 \ \ \forall x \in L \right\}$$

Свойства ортогонального дополнения:

1. $H^\perp = \{0\}, \quad \{0\}^\perp = H$;
2. $L \cap L^\perp = \{0\}$;
3. $L^\perp$ — подпространство H;
4. $L^\perp$ замкнуто;
5. $L^\perp = [L]^\perp$.

Теорема Рисса. (*об ортогональном дополнении*) Пусть H — ГП, $L \subset H$ — замкнутое подпространство. Тогда $H = L \oplus L^\perp$, т.е.

$$\forall z \in H \ \ \exists! \ x \in L, \ y \in L^\perp : \quad z = x + y$$

Не любое подпространство ЛП является замкнутым. Пример: многочлены в $C[a, b]$.

Следствие. $\left(L^{\perp}\right)^{\perp} = [L]$.

Опр. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП, $S \subset X,\ x \in X$. Вектор $y \in S$ называется *метрической проекцией* вектора x на множество S, если

$$\|x - y\| = \rho(x, S) = \inf_{z \in S} \|x - z\|$$

Теорема Рисса. (*о проекции*) Пусть H — ГП, $S \subset H$ — выпуклое замкнутое подмножество. Тогда для $\forall x \in H$ существует единственная метрическая проекция x на S.

6. Полные системы и базис

Опр. Пусть X — линейное пространство. Множество $\Gamma \subset X$ называется *базисом Гамеля*, если $\forall x \in X$ единственным образом раскладывается в конечную линейную комбинацию элементов Γ.

Свойства:

- Набор Γ линейно независим, т.е. линейно независима любая конечная подсистема Γ;
- В любом ЛП X существование базиса Гамеля следует из леммы Цорна.

Опр. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n,\ x_n \in X$ *сходится* к элементу $x \in X$ и писать $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = x$, если $\lim\limits_{N \to \infty} \left\| \sum\limits_{n=1}^{N} x_n - x \right\| = 0$.

Опр. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Счетная система $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ называется *базисом (Шаудера)* в X, если

$$\forall x \in X \ \ \exists\, !\ \{\alpha_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} : \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n = x$$

То есть для любого $x \in X$ существует единственное разложение в ряд в системе $\{f_n\}$.

Базис Гамеля и базис Шаудера — различные понятия. Базис Шаудера существует не в любом ЛНП.

Далее под базисом по умолчанию будем понимать базис Шаудера.

Опр. Пусть X — линейное пространство, $E \subset X$. *Линейной оболочкой* E называется множество всех конечных линейных комбинаций элементов E:

$$\operatorname{lin} E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \ \middle|\ n \in \mathbb{N},\ x_k \in E,\ \alpha_k \in \mathbb{C} \right\}$$

Опр. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Множество $E \subset X$ называется *полной системой*, если его линейная оболочка всюду плотна в X, т.е. $\left[\operatorname{lin} E\right] = X$.

Базис в X является полной системой в X. Обратное неверно.

Задача §3.4

Пусть (X, ρ) — МП, такое что любая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ ограничена. Доказать, что X — компакт.

Решение:

Допустим противное и построим непрерывную функцию, которая будет неограничена.

Пусть X — не компакт, значит X — не секвенциальный компакт. Значит, существует последовательность, из которой нельзя выделить сходящуюся. Обозначим ее подпоследовательность $A = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящую из различных элементов (она существует, так как иначе есть стационарная подпоследовательность).

Покажем, что $\forall x_n \in A \;\; \exists r_n > 0 : \;\; B_{r_n}(x_n) \cap A = \{x_n\}$. Допустим противное, тогда $\forall \varepsilon > 0$ в $B_\varepsilon(x_n)$ есть другие элементы A. Это означает, что из A можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к x_n. Это противоречие, так как из A нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность.

Итак, мы построили последовательность непересекающихся замкнутых шаров $B_{r_n/2}(x_n)$. Поделим их радиусы на n, чтобы они стремились к 0 (это понадобится потом). Обозначим

$$R_n = \frac{r_n}{2n} \to 0, \qquad B_n = B_{R_n}(x_n), \qquad O_n = O_{R_n}(x_n)$$

Для каждого из них определим функцию

$$f_n(x) = \begin{cases} n\left[1 - \dfrac{\rho(x, x_n)}{R_n}\right] & , \; x \in O_n; \\ \qquad 0 & , \; x \notin O_n. \end{cases}$$

Она непрерывна*, и для нее выполнены свойства:

$$f_n(x_n) \geq n, \qquad f_n(x)\Big|_{x \notin B_n} = 0$$

Докажем первое. Пусть $f_n(x_n) < n$, значит $\exists y \notin B_n : \rho(x_n, y) < R_n$ — противоречие. Второе свойство выполнено по построению.

$*$ Покажем непрерывность f_n.

- Пусть $x \in O_n$. Существует открытый шар $O_\delta(x) \subset O_n$, в котором f_n совпадает с $n\left[1 - \frac{\rho(x,x_n)}{R_n}\right]$. Функция $\rho(x, x_n)$ непрерывна (см. задачу §1.5), значит, f_n непрерывна в x.
- Пусть $x \notin B_n$. Так как $X \setminus B_n$ открыто, то $\exists\; O_\delta(x) \subset X \setminus B_n$, такой что $f_n\Big|_{O_\delta(x)} \equiv 0 \implies f_n$ непрерывна в x.
- Пусть $x \in B_n \setminus O_n$, т.е. $\rho(x, x_n) = R_n$. Покажем секвенциальную непрерывность. Пусть $A = \{a_k\}$ и $a_k \xrightarrow{\rho} x$ при $k \to \infty$. Пусть $A' = A \cap O_n = \{a'_k\}$ — все элементы A, лежащие в O_n, и $A'' = A \setminus A' = \{a''_k\}$.

  $$a'_k \to x \qquad \implies \qquad \rho(a'_k, x_n) \to \rho(x, x_n) = R_n \qquad \implies \qquad f(a'_k) \to 0$$

  $$f(a''_k) \equiv 0$$

  Так как $A' \cup A'' = A$, то $f(a_k) \to 0 = f(x)$ при $k \to \infty$.

Теперь построим функцию

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \begin{cases} n\left[1 - \dfrac{\rho(x, x_n)}{R_n}\right] & , \; x \in O_n; \\ \qquad 0 & , \; x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n. \end{cases}$$

Она неограничена: $f(x_n) = f_n(x_n) \geq n$. Остается показать, что f непрерывна.

Покажем, что множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ замкнуто. Пусть S — его дополнение, $x \in S$. Так как x — не предельная точка $\{x_n\}$, то $\exists R \;\; \forall n \;\; \rho(x, x_n) \geq R$. Так как $R_n \to 0$, то $\exists N : \; \forall n > N \;\; \to \;\; B_n \cap B_{R/2}(x) = \varnothing$. Возьмем

$$\delta = \min\left\{\frac{R - \rho(x, B_1)}{2}, \ldots, \frac{R - \rho(x, B_n)}{2}\right\} > 0$$

и тогда $O_\delta(x) \subset S$. Значит, S открыто, а $\bigcup_{n=1}^\infty B_n$ замкнуто.

Покажем непрерывность:

- Пусть $x \in O_n$. Тогда в силы открытости O_n в какой-то окрестности $O_\delta(x) \subset O_n$ f в совпадает с f_n, поэтому тоже непрерывна.
- Пусть $x \in S = X \setminus \bigcup_{n=1}^\infty B_n$. Аналогично, в силу открытости этого множества, f непрерывна.
- Пусть $x \in B_n \setminus O_n$. Аналогично док-ву открытости множества S, $\exists \delta > 0 : \ O_\delta(x) \cap B_k = \varnothing \ \forall k \neq n$. Поэтому в этой окрестности f совпадает с f_n.

Задача §3.10

Пусть (X, ρ) — компактное МП, $S \subset X$ — собственное подмножество. Доказать, что (X, ρ) нельзя изометрично отобразить на (S, ρ).

Решение:

Допустим, существует изометрия $\varphi : X \to S$. Так как изометрия сохраняет свойство компактности, то S — компакт. По условию, $S \subsetneq X$, значит $\exists x_0 \in X \setminus S$.

Рассмотрим функцию $\rho(x_0, y)$ при $y \in S$. На семинаре мы показывали (задача §1.5), что такая функция непрерывна. S — компакт, значит, по теореме Вейерштрасса, достигается инфимум в точке $y_0 \in S$:

$$\rho(x_0, S) = \inf_{y \in S} \rho(x_0, y) = \rho(x_0, y_0) = d > 0$$

Покажем, что мощность произвольного d-дырявого множества $G \subset X$ ограничена сверху. X — компакт, значит, X вполне ограничено. Рассмотрим конечную $\frac{d}{3}$-сеть $\{e_k\}_{k=1}^m$ в X. Значит, выполнено

$$G \subset X \subset \bigcup_{k=1}^m B_{d/3}(e_k)$$

Если в G более m элементов, то, по принципу Дирихле, какие-то два лежат в одном шаре $B_{d/3}(e_k)$, и расстояние между ними $\leq \frac{2d}{3}$, что противоречит определению d-дырявого множества. Итак, $|G| \leq m$.
Конечность произвольного d-дырявого множества в X сразу следует из сепарабельности X (что следует из компактности X), но его мощность, вообще говоря, может быть неограничена.

Так как мощности всех d-дырявых множеств ограничены сверху, то можно выбрать наибольшее (по числу элементов). Обозначим его как G. Так как φ — изометрия, то $\varphi(G) \subset S$ — тоже d-дырявое множество. Однако $\varphi(G) \cup \{x_0\}$ — еще большее d-дырявое множество, чем G. Это противоречие, так как мы выбрали максимальное по числу элементов.

Значит, не существует изометрии компакта на свое собственное подмножество.

Задача §4.3

Исследовать множество $M \subset C[a, b]$ на компактность:

$$M = \left\{ p(x) \;\middle|\; p(x) \text{ — полином степени } \leq 10, \ \int_a^b |p(x)| dx \leq 10 \right\}$$

Решение:

1. Покажем, что M **замкнуто**.

   Пусть $\{P_n(x)\} \subset M$ — равномерно сходящаяся к $f(x) \in C[a, b]$ последовательность полиномов (степени не выше $d = 10$), т.е. f — точка прикосновения M. Покажем, что $f \in M$.

   Возьмем $d + 1$ различных точек $x_0, \ldots, x_d \in [a, b]$ и возьмем $d + 1$ (интерполяционных) полиномов степени d (они определяются однозначно):

$$q_i(x): \quad q_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Они образуют базис в подпространстве полиномов степени не выше d. Поэтому любой полином из $\{P_n\}$ раскладывается по этому базису с коэффициентами $P_n(x_0), \ldots, P_n(x_d)$:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{d} P_n(x_k)\, q_k(x)$$

$\{P_n(x)\}$ равномерно сходится на $[a, b]$. По критерию Коши равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N: \quad \forall n, m \geq N \quad \to \quad \max_{[a,b]} |P_n(x) - P_m(x)| = \max_{[a,b]} \left| \sum_{k=0}^{d} \big[P_n(x_k) - P_m(x_k)\big]\, q_k(x) \right| < \varepsilon$$

Подставляя в последнее неравенство $x = x_j, \ \forall j = \overline{0, d}$, получаем:

$$\left| \sum_{k=0}^{d} \big[P_n(x_k) - P_m(x_k)\big]\, q_k(x_j) \right| = \Big| P_n(x_j) - P_m(x_j) \Big| < \varepsilon$$

Это означает, что числовая последовательность $\big\{P_n(x_j)\big\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна $\forall j = \overline{0, d}$, а значит, и сходится. Обозначим $\alpha_0, \ldots, \alpha_d$ — пределы этих последовательностей.

Теперь покажем, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k\, q_k(x)$$

Достаточно проверить, что $\{P_n\}$ равномерно сходится к этому выражению:

$$\max_{[a,b]} \big| P_n(x) - f(x) \big| = \max_{[a,b]} \left| \sum_{k=0}^{d} \big[P_n(x_k) - \alpha_k\big]\, q_k(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{d} \big| P_n(x_k) - \alpha_k \big| \cdot \max_{[a,b]} \big| q_k(x) \big| \longrightarrow 0,$$

так как $P_n(x_k) \to \alpha_k$, а $q_k(x)$ — фиксированные полиномы (их максимумы — фиксированные числа).

Итак, мы доказали, что $f(x)$ — полином степени не выше d. Осталось показать, что $\|f\|_1 \leq 10$, если $\|P_n\|_1 \leq 10 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Так как $\{P_n\}$ равномерно сходится к f, то $\big\{|P_n|\big\}$ равномерно сходится к $|f|$ (это, например, следует из неравенства $\big||\xi| - |\eta|\big| \leq |\xi - \eta|$ для $\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}$). Тогда знаки предела и интеграла можно менять:

$$\int_a^b |f(x)|\, dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} |P_n(x)|\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b |P_n(x)|\, dx \leq 10$$

2. Покажем, что M **ограничено**.

   M — подмножество $(d+1)$-мерного линейного нормированного пространства (многочленов степени не выше d), а в конечномерных пространствах любые две нормы эквивалентны. Значит,

$$\exists C > 0: \quad \forall f \in M \quad \to \quad \|f\|_\infty \leq C \|f\|_1 \leq 10\, C.$$

3. В конечномерных пространствах компактность эквивалентна ограниченности и замкнутости, поэтому из пунктов 1 и 2 следует, что M **компактно**.

Приведу прямое доказательство **равностепенной непрерывности** M, которое мне показалось интересным.

- Сначала покажем, что коэффициенты всех многочленов из M ограничены. Рассмотрим базис $\{x^k\}_{k=0}^d$ в пространстве многочленов степени не выше d и соответствующую ему норму:

$$\|f\|_e = \sum_{k=0}^{d} |\alpha_k|$$

Она эквивалентна $\|\cdot\|_1$, так как в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны. Значит,

$$\exists C_0 > 0 : \quad \forall f \in M \quad \to \quad \|f\|_e \leq C_0 \, \|f\|_1 \leq 10 \, C_0$$

Это значит, что $\forall k \in \overline{0, d} \quad |\alpha_k| \leq \|f\|_e \leq 10C_0 = C_1$

- Рассмотрим функцию $d+2$ переменных:

$$F(x, a_0, \ldots, a_d) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k, \qquad x \in [a, b], \quad a_k \in [-C_1, C_1]$$

Она непрерывна на компакте $[a, b] \times [-C_1, C_1]^{d+1}$. По теорема Кантора, F равномерно непрерывна на нем. Из определения равномерной непрерывности следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : \quad \forall \alpha \in [-C_1, C_1]^{d+1}, \quad \forall x', x'' \in [a, b] \quad (|x' - x''| < \delta) \quad \to \quad \big|F(x', \alpha) - F(x'', \alpha)\big| < \varepsilon$$

Отсюда сразу следует определение равностепенной непрерывности M, так как любому полиному $f \in M$ соответствует набор коэффициентов $\alpha \in [-C_1, C_1]^{d+1}$.

Далее, по теореме Арцело-Асколи, M ограничено и равностепенно непрерывно, значит, M **вполне ограничено**. Пространство $C[a, b]$ с равномерной нормой является полным, поэтому, по критерию компактности, из замкнутости и вполне ограниченности M, следует, что M **компактно**.

Задача §4.7

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП, а B_1, B_2 — шары радиусов r_1 и r_2. Доказать, что если $B_1 \subset B_2$, то $r_1 \leq r_2$.

Решение:

Случай $X = \{0\}$ тривиален, его рассматривать не будем. Пусть $B_1 = B_{r_1}(x_1)$ и $B_2 = B_{r_2}(x_2)$. Если $x_1 = x_2$, то неравенство $r_1 \leq r_2$ следует из определения шаров.

Пусть $x_1 \neq x_2$ и допустим, что $r_1 > r_2$. Покажем, что $B_1 \not\subset B_2$. Рассмотрим векторы

$$y_1 = x_1 + r_1 \, \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|}, \qquad y_2 = x_1 - r_1 \, \frac{x_2 - x_1}{\|x_2 - x_1\|}$$

Видно, что $y_1, y_2 \in B_1$ и $\|y_1 - y_2\| = 2r_1$. Но если бы $y_1, y_2 \in B_2$, то, по неравенству треугольника,

$$\|y_1 - y_2\| \leq 2r_2 < 2r_1,$$

что является противоречием.

Задача §5.3

Привести пример последовательности непустых вложенных ограниченных замкнутых множеств из l_2, имеющих пустое пересечение.

Считается, что $l_2 \subset \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ — пространство всех таких комплекснозначных последовательностей, что сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^2$, на котором введено скалярное произведение

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \, \overline{y(k)}$$

Решение:

Рассмотрим ограниченное замкнутое множество

$$A_0 = \big\{ x \in l_2 \ \big| \ 1 \leq \|x\|_2 \leq 2 \big\} = B_2(0) \cap \big(l_2 \setminus O_1(0) \big)$$

и семейство множеств

$$B_n = \big\{ x \in l_2 \ \big| \ x(1) = \ldots = x(n) = 0 \big\}$$

Покажем, что множества $A_n = A_0 \cap B_n$ будут искомыми в задаче.

1. Покажем, что все B_n замкнуты.

   Пусть $\{x_m\} \subset B_n$ и $x_m \xrightarrow{\|\cdot\|_2} x$. Так как из сходимости по норме l_2 следует покоординатная сходимость, то $x_m(k) \to x(k)$ при $m \to \infty$.
$$\forall k = \overline{1, n}, \quad \forall m \in \mathbb{N}: \quad x_m(k) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \forall k = \overline{1, n}: \quad x(k) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \in B_n$$

2. Покажем, что A_n — искомые множества.
   - Вложенность $A_{n+1} \subset A_n$ следует из вложенности $B_{n+1} \subset B_n$.
   - A_n замкнуто, так как являются пересечением двух замкнутых множеств.
   - A_n ограничено, так как вложено в шар $B_2(0)$.
   - Пересечение всех A_n пусто:
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_0 \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = A_0 \cap \{0\} = \varnothing$$

Задача 2.1 (из задавальника)

Пусть множество
$$S = \left\{ f \in C^1[0,1] \;\middle|\; \|f\|_{c^1} \overset{\text{def}}{=} \|f\|_c + \|f'\|_c = 1 \right\}$$
$\|\cdot\|_c$ — равномерная норма: $\|f\|_c = \max\limits_{[0,1]} |f|$.

(a) Исследовать S на вполне ограниченность и замкнутость в $\big(C[0,1], \|\cdot\|_c\big)$;

(b) Исследовать замыкание S на вполне ограниченность и полноту в $\big(C^1[0,1], \|\cdot\|_c\big)$;

(c) Исследовать S на вполне ограниченность и замкнутость в $\big(C^1[0,1], \|\cdot\|_{c^1}\big)$.

Решение:

(a) Покажем, что S **ограничено** в $\big(C[0,1], \|\cdot\|_c\big)$:
$$\|f\|_c \le \|f\|_c + \|f'\|_c = 1$$
Покажем, что S **равностепенно непрерывно**. $\forall \varepsilon > 0$ возьмем $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ и, по теореме Лагранжа о конечных приращениях:
$$\big|f(x_1) - f(x_2)\big| = \big|f'(\xi)\big| \cdot \big|x_1 - x_2\big| \le \|f\|_{c^1} \cdot \delta \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$
По теореме Арцела-Асколи, S **вполне ограничено**.

Покажем, что S **не замкнуто** в $\big(C[0,1], \|\cdot\|_c\big)$. Пусть
$$f_n(x) = \frac{1}{n+2} \sin(n+1)x, \qquad \|f_n\|_{c^1} = \frac{1}{n+2} + \frac{n+1}{n+2} = 1$$
Но $f_n(x)$ равномерно сходятся к $f(x) \equiv 0 \notin S$.

(b) S вполне ограничено, значит, $[S]$ вполне ограничено. Так как $C^1[0,1] \subset C[0,1]$, а норма та же самая, то $[S]$ **вполне ограничено** в $\big(C^1[0,1], \|\cdot\|_c\big)$.

$[S]$ **неполно** в $\big(C^1[0,1], \|\cdot\|_c\big)$, так как можно построить последовательность функций из S, которая равномерно сходится к недифференцируемой функции, как мы это делали на семинаре. (Выразить f_n как интеграл с переменным верхним пределом.)

(c) Покажем, что S **замкнуто**. Пусть $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{c^1}} f$, $f_n \in S$. В силу полноты $\big(C^1[0,1], \|\cdot\|_{c^1}\big)$, $f \in C^1[0,1]$. Проверим, что $\|\cdot\|_{c^1} = 1$:
$$\begin{cases} \|f\|_{c^1} \le \|f_n\|_{c^1} + \|f_n - f\|_{c^1} \\ \|f\|_{c^1} \ge \|f_n\|_{c^1} - \|f_n - f\|_{c^1} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 = \|f_n\|_{c^1} \longrightarrow \|f\|_{c^1} \qquad \Longrightarrow \qquad \|f\|_{c^1}$$
Допустим, S вполне ограничено. Тогда, по критерию компактности, S — компакт. Но по теореме Рисса, единичная сфера в бесконечномерном ЛНП не компактна — противоречие. Значит, S **не вполне ограничено**.

Задача 2.3(1) (из задавальника)

Пусть множество

$$S = \left\{ x \in c_0 \;\middle|\; \exists f \in \mathbb{L}_2[0,1]: \quad \|f\|_2 \le 1, \quad x(k) = \int_{2^{-k}}^{2^{1-k}} f(t)\,dt \quad \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

Исследовать множество S в пространстве $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ на

(a) ограниченность;

(b) вполне ограниченность;

(c) замкнутость.

Решение:

(a) Покажем, что S **ограничено**.

Для любого $x \in S$ оценим равномерную норму нормой $\|\cdot\|_1$:

$$\|x\|_\infty \le \sum_{k=1}^{\infty} \big|x(k)\big| \le \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k}}^{2^{1-k}} \big|f(t)\big| dt = \Big/ \begin{array}{c}\text{теорема Лебега об}\\ \text{ограниченной сходимости}\end{array} : \ |f| \cdot \mathbb{I}_{[2^{-k},1]} \longrightarrow |f| \Big/ =$$

$$= \int_0^1 |f(t)| dt = \big\langle 1, |f| \big\rangle \le \Big/ \begin{array}{c}\text{неравенство Коши-Буняковского}\\ \text{для скалярного произведения в } \mathbb{L}_2\end{array} \Big/ \le \|1\|_2 \cdot \|f\|_2 \le 1.$$

Теорема Лебега нужна для строго обоснования счетной аддитивности интеграла Лебега. Здесь $\mathbb{I}_A$ — индикаторная функция множества A.

(b) Покажем, что S **вполне ограничено**. Пользуемся критерием вполне ограниченности в c_0.

Для любого $\varepsilon > 0$ найдем номер $N = N(\varepsilon)$, такой чтобы $\forall x \in S$ супремум хвоста ряда был ограничен ε:

$$\sup_{k>N} |x(k)| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} |x(k)| \le \sum_{k=N+1}^{\infty} \int_{2^{-k}}^{2^{1-k}} |f(t)| dt = \int_0^{2^{-N}} |f(t)| dt = \int_0^1 |f(t)| \cdot \mathbb{I}_{[0,2^{-N}]}(t)\, dt =$$

$$= \big\langle |f|, \ \mathbb{I}_{[0,2^{-N}]} \big\rangle \le \|\mathbb{I}_{[0,2^{-N}]}\|_2 \cdot \|f\|_2 \le \sqrt{2^{-N}} \cdot 1 < \varepsilon$$

Здесь пользовались счетной аддитивностью интеграла Лебега и неравенством Коши-Буняковского.

Отсюда находим условие на N. Подойдет, например,

$$N(\varepsilon) = \left[2 \ln \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

Из ограниченности S и выполнения этого условия следует вполне ограниченность множества S.

(c) Покажем, что S **замкнуто**.

Представим множество S в другом виде, с которым более удобно работать. Сначала получим достаточное условие принадлежности множеству S, а потом покажем, что оно является и необходимым.

1. $S \supset \left\{ x \in c_0 \;\middle|\; \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \big|x(k)\big|^2 \le 1 \right\}$

   Покажем, что такие $x(k)$ порождаются кусочно-постоянными функциями вида

$$f(t) = 2^k \cdot x(k), \qquad t \in \big(2^{-k}, 2^{1-k}\big]$$

   Достаточно показать, что $\|f\|_2 \le 1$:

$$\|f\|_2^2 = \int_0^1 \big|f(t)\big|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{2^{-k}}^{2^{1-k}} 2^{2k} \big|x(k)\big|^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \big|x(k)\big|^2 \le 1$$

2. $S = \left\{ x \;\Big|\; \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \big|x(k)\big|^2 \le 1 \right\}$

   Сразу отметим, что $S \subset l_2 \subset c_0$.

   Одно вложение уже показано, получим второе. Пусть $x \in S$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \big|x(k)\big|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left| \int_{2^{-k}}^{2^{1-k}} f(t)dt \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \Big| \big\langle f, \mathbb{I}_{[2^{-k}, 2^{1-k}]} \big\rangle \Big|^2 = (*),$$

   где скалярное произведение используем на пространстве $\mathbb{L}_2[2^{-k}, 2^{1-k}]$. Неравенство Коши-Буняковского принимает вид:

$$\langle f, g \rangle^2 \le \left(\int_{2^{-k}}^{2^{1-k}} \big|f(t)\big|^2 \, dt \right) \left(\int_{2^{-k}}^{2^{1-k}} \big|g(t)\big|^2 \, dt \right)$$

   Тогда

$$(*) \le \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\int_{2^{-k}}^{2^{1-k}} dt \right) \left(\int_{2^{-k}}^{2^{1-k}} f(t)\, dt \right) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot 2^{-k} \int_{2^{-k}}^{2^{1-k}} \big|f(t)\big|^2 dt = \int_0^1 \big|f(t)\big|^2 dt = \|f\|_2^2 \le 1$$

3. Покажем, что дополнение S открыто. Пусть $x \notin S$. Найдем шар $O_\delta(x) \subset c_0 \setminus S$.

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \big|x(k)\big|^2 > 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists K : \; \sum_{k=1}^{K} 2^k \big|x(k)\big|^2 = d^2 > 1$$

   Числом d^2 просто обозначаем эту конечную сумму.

   Число δ найдем из условия, что сумма ряда для $y(k) \in O_\delta(x)$ тоже больше 1. Оценим корень из этой суммы, так как по ходу придется применить неравенство Минковского для l_2-нормы.

   Пусть $y \in O_\delta(x)$ — произвольный, т.е. $\sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \big|x(k) - y(k)\big| < \delta$. Тогда

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \big|y(k)\big|^2 \right)^{1/2} \ge \left(\sum_{k=1}^{K} \big|2^{k/2}\, y(k)\big|^2 \right)^{1/2} \ge \Big/ \begin{matrix} \text{неравенство} \\ \text{Минковского для } p = 2 \end{matrix} \Big/ \ge$$

$$\ge \left(\sum_{k=1}^{K} 2^k \big|x(k)\big|^2 \right)^{1/2} - \left(\sum_{k=1}^{K} 2^k \big|x(k) - y(k)\big|^2 \right)^{1/2} > d - \left(\sum_{k=1}^{K} 2^k \delta^2 \right)^{1/2} > d - \delta\sqrt{K \cdot 2^K} > 1$$

   Подойдет, например,

$$\delta = \frac{d-1}{2\sqrt{K \cdot 2^K}}.$$