Функан. ДЗ 3.

Прохоров Юрий, 776

Теорема Тихонова. Произведение компактных топологических пространств компактно в топологии произведения.
компактность $\equiv$ топологическая компактность

Утв. 1 Отрезок $[0,1]$ со стандартной (метрической) топологией — компактное ТП.

Доказательство:
Рассмотрим произвольное открытое покрытие $[0,1] = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$. Допустим нельзя выделить конечное подпокрытие.

Тогда хотя бы один из отрезков $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ не допускает конечного подпокрытия (иначе можно было бы объединить их и получить конечное подпокрытие $[0,1] = r_1$). Назовем этот отрезок r_2.

Аналогично, какая-то половина r_2 не допускает конечного подкрытия — отрезок r_3. Продолжая так, получим стягивающуюся систему вложенных отрезков $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Она имеет общую точку $x \in [0,1]$. Она лежит в каком-то элементе открытого покрытия: $\exists \alpha_0 : \ x \in U_{\alpha_0}$.

В метрической топологии открытость U_{α_0} эквивалентна тому, что любая точка U_{α_0} лежит там вместе с каким-то открытым шаром, значит, $\exists R > 0 : \ O_R(x) \subset U_{\alpha_0}$. Мы знаем, что длины отрезков из системы $\{r_n\}$ стремятся к нулю. Поэтому

$$\exists N \ \forall n \geq N \quad \to \quad r_n \in O_R(x) \subset U_{\alpha_0}$$

Но по построению, все r_n не допускают конечного покрытия, состоящего из элементов $\{U_\alpha\}$. Однако таким покрытием является покрытие из одного элемента — U_{α_0}. Противоречие. □

Утв. 2 Замкнутое подмножество компактного множества — компакт.

Доказательство:
Пусть A — компакт в (X,τ), $B \subset A$ и B замкнуто. Возьмем произвольное открытое покрытие $B \subset \bigcup\limits_{\alpha} U_\alpha$.

Добавим в него открытое множество $X \setminus B$ и получим открытое покрытие A. A — компакт, значит можно выделить конечное подпокрытие. Из него, если нужно, удалим $X \setminus B$ и получим конечное подпокрытие B. □

Опр. Пусть (X,τ) — ТП. *Определяющим семейством* или *локальной базой* точки $x \in X$ называется такое семейство окрестностей $\beta(x) = \{V_\alpha(x) \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$, что

$$\forall U(x) \in \tau \ \ \exists V_\alpha(x) \in \beta(x) : \ \ V_\alpha(x) \subset U(x)$$

Опр. Говорят, что ТП (X,τ) удовлетворяет *аксиоме счетности,* если для любой точки $x \in X$ существует счетная локальная база.

Утв. 3 Если ТП (X,τ) удовлетворяет аксиоме счетности, то

- x — секвенциальная точка пр. $\iff$ x — топологическая точка пр.
- S замкнуто $\iff$ S секвенциально замкнуто;
- $[S]_{\text{секв.}} = [S]_\tau$;
- Для отображения $f : (X,\tau) \to (Y,\tau_2)$ (причем (Y,τ_2) — произвольное ТП):

$$f \text{ топологически непрерывно} \iff f \text{ секвенциально непрерывно}$$

В произвольном ТП эти утверждения выполняются слева направо и $[S]_{\text{секв.}} \subset [S]_\tau$, а компактность и секвенциальная компактность не следуют друг из друга.

Утв. 4 Любое метрическое пространство (X, ρ) (с метрической топологией τ_ρ) удовлетворяет аксиоме счетности, а компактность эквивалентна секвенциальной компактности.

Утв. 5 Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, а отображения

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

непрерывны. Тогда

(1) Отображение $h : X \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) + g(x)$ непрерывно;

(2) Отображение $h : X \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) \cdot g(x)$ непрерывно;

(3) Если $g \neq 0$ на X, то отображение $h : X \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывно;

Доказательство:
В метрическом пространстве определение непрерывности отображения $f : X \to \mathbb{R}$ можно записать в виде:

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \quad f\big(O_\delta(x)\big) \subset O_\varepsilon\big(f(x)\big)$$

(1) Пусть f, g непрерывны. Покажем, что h тоже непрерывно, доказав определение выше. Пусть $x \in X$ — произвольная точка, $\varepsilon > 0$ — любое. Надо подобрать число $\delta > 0$ из требования:

$$\forall y \in O_\delta(x) \quad \to \quad h(y) \in O_\varepsilon(h(x))$$

$$|h(y) - h(x)| \leq |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{при } y \in O_{\delta_1}(x) \cap O_{\delta_2}(x),$$

где числа δ_1, δ_2 получены из определения непрерывности для f и g для $\frac{\varepsilon}{2}$. Тогда можно взять $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$.

Как видим, такое доказательство повторяет аналогичные доказательства с первого семестра матанализа.

(2) Используем, что непрерывная функция ограничена в какой-то окрестности:

$$|h(y) - h(x)| = |f(y)g(y) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(x)g(x)| \leq |f(y)||g(y) - g(x)| + |g(x)||f(y) - f(x)| \leq M_1\varepsilon + M_2\varepsilon$$

(3) Аналогично. □

Опр. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Множество $A \subset X$ называется *ограниченным*, если его *диаметр* конечен, то есть

$$\operatorname{diam} A = \sup_{x,y \in A} \rho(x, y) < \infty$$

Эквивалентное определение: существует шар $O_r(x_0)$, содержащий A.

Утв. 6 Пусть (X, ρ) — МП, $A \subset X$ — компакт. Тогда A ограничено и замкнуто.

Доказательство:

- Покажем ограниченность. Рассмотрим следующее открытое покрытие $A \subset \bigcup_{x \in A} O_1(x)$. A — компакт, значит, существует конечное подпокрытие $\{O_1(x_k)\}_{k=1}^n$. Тогда

$$R = \max_k \rho(x_1, x_k) \qquad \Longrightarrow \qquad A \subset \bigcup_{k=1}^n O_1(x_k) \subset O_{R+1}(x_1) \qquad \Longrightarrow \qquad A \text{ ограничено}$$

- Покажем замкнутость A, то есть открытость $X \setminus A$. Покажем, что любая точка $x \notin A$ лежит вне A вместе с каким-то шаром. Пусть $x \notin A$ — произвольная точка.

  Легко видеть, что любое метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме отделимости (т.е. является хаусдорфовым): $\forall z \in X \ (x \neq z) \quad \exists U(x), \ V(z) : \quad U(x) \cap V(z) = \varnothing$. Тогда рассмотрим открытое покрытие A:

$$A \subset \bigcup_{z \in A} V(z), \qquad A \subset \bigcup_{k=1}^n V(z_k) \text{ — конечное подпокрытие}$$

  По построению, $U_k(x) \cap V(z_k) = \varnothing$, значит можно построить окрестность $U(x) = \bigcap_{k=1}^n U_k(x)$ такую, что

$$U(x) \cap \bigcup_{k=1}^n V(z_k) = \varnothing \qquad \Longrightarrow \qquad U(x) \subset X \setminus \left(\bigcup_{k=1}^n V(z_k)\right) \subset X \setminus A$$

□

Задача 1.6(4) (из задавальника)

Пусть $F = [0,1]^{[0,1]}$ с топологией τ поточечной сходимости. Привести пример множества $M \subset F$, которое является секвенциальным компактом и не является топологическим компактом в (F, τ).

Решение: (source: Нина Каплоухая)

Покажем, что (F, τ) — компактное ТП. Известно, что топология поточечной сходимости — это топология произведения, которым является F:

$$F = \prod_{\alpha \in [0,1]} [0,1], \qquad ([0,1], \tau_0) \text{ — производимые пространства,}$$

где τ_0 — стандартная топология на $[0,1]$ (порождена базой из всех открытых интервалов).

Все производимые пространства компактны (утверждение 1), значит, по теореме Тихонова, (F, τ) — компактное топологическое пространство.

$$M = \big\{ \mathbb{I}_A \bigm| A \subset [0,1] \text{ не более, чем счетно} \big\} \text{ — индикаторные функции}$$

- M секвенциально компактно.

  Пусть $\{f_n\} \subset M$ — произвольная последовательность. Надо выделить сходящуюся в M подпоследовательность. Пусть $Q = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) = 1\}$. Сразу заметим, что все функции $f_n \equiv 0$ на $[0,1] \setminus Q$. Пусть $Q = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ (так как Q счетно).

  Рассмотрим значения функций из $\{f_n\}$ в точке q_1. Одно из значений 0, 1 принимается бесконечным числом функций. Выкинем из $\{f_n\}$ все функции, принимающие другое значение. Получим подпоследовательность $A_1 \subset \{f_n\}$.

  Рассмотрим значения функций из A_1 в точке q_2 и аналогичным образом получим бесконечное множество $A_2 \subset A_1$. Продолжая таким образом, получим систему бесконечных множеств

  $$\{f_n\} \supset A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$

  Построим подпоследовательность $\{g_n\}$, где $g_n \in A_n$ — произвольная функция. На $[0,1] \setminus Q$ все они равны 0. Рассмотрим их значения на Q. По построению, последовательность $\{g_n(q_k)\}$ стационарна при $n \geq k$, значит она сходится. Таким образом, $\{g_n\}$ сходится поточечно к некоторой функции $g = \mathbb{I}_B$, $B \subset Q$ — не более, чем счетно, значит, $g \in S$.

- M не компактно.

  Рассмотрим открытое покрытие

  $$M \subset \bigcup_{x \in [0,1]} V(x, 0, \varepsilon), \qquad \varepsilon > 0$$

  Рассмотрим его произвольное конечное подмножество $\big\{V(x_k, 0, \varepsilon)\big\}_{k=1}^{n}$. Оно не является подпокрытием, так как не содержит в себе индикатор множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Значит, M не компактно.

Задача 1.9(а) (из задавальника)

Пусть $F = \mathbb{R}^{[0,1]}$ (функции $f : [0,1] \to \mathbb{R}$) с топологией τ поточечной сходимости. Привести пример множества $S_0 \subset F$, секвенциальное замыкание которого не совпадает с его τ-замыканием в пространстве (F, τ).

Решение:

$$S_0 = \big\{ f \in F \bigm| f \text{ измерима по Лебегу} \big\}$$

Пусть $f_n \xrightarrow{\tau} f$, значит, f_n сходится к f поточечно. Поточечный предел измеримых функций — измеримая функция, поэтому $f \in S_0$, значит,

$$\big[S_0\big]_{\text{секв.}} = S_0$$

Данный факт доказывался в курсе меры и интеграла Лебега (см. §2.3, утв. 2.3.4 в конспекте Н.А. Гусева).

Рассмотрим произвольную функцию g, быть может даже неизмеримую. Покажем, что g — (топологическая) точка прикосновения S_0. Отсюда будет следовать, что

$$\big[S_0\big]_{\tau} = F \qquad \Longrightarrow \qquad \big[S_0\big]_{\text{секв.}} \subsetneq \big[S_0\big]_{\tau},$$

так как существуют не измеримые по Лебегу функции (например, индикаторная функция множества Витали).

Итак, пусть $U(g)$ — произвольная окрестность g, которая есть объединение элементов базы. Значит, существует элемент базы $W(g) \subset U(g)$, который, в свою очередь, есть конечное пересечение элементов предбазы:

$$W(g) = \bigcap_{k=1}^{n} V(x_k, c_k, \varepsilon_k),$$

где $V(x, c, \varepsilon) = \big\{ f \bigm| |f(x) - c| < \varepsilon \big\}$ — элементы предбазы τ.

Определим функцию:

$$h : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \begin{cases} c_k, & x = x_k \\ 0, & x \neq x_k \ (\forall k) \end{cases}$$

h измерима по Лебегу, т.е. $h \in S_0$. Кроме того,

$$h \in V_{x_k, c_k, \varepsilon_k} \ \ \forall k \qquad \Longrightarrow \qquad h \in W(g) \subset U(g),$$

следовательно, g — точка прикосновения S_0.

Задача 1.11 (из задавальника)

Дано семейство множеств

$$\tau = \big\{ V \subset \mathbb{R} \bigm| \mathbb{R} \setminus V \text{ конечно} \big\} \cup \{\varnothing\}$$

(a) доказать, что τ — топология в $\mathbb{R}$;

(b) привести пример компактного и незамкнутого в пространстве $(\mathbb{R}, \tau)$ множества $K \subset \mathbb{R}$;

(c) привести пример секвенциально компактного и секвенциально незамкнутого в топологическом пространстве $(\mathbb{R}, \tau)$ множества $S \subset \mathbb{R}$.

Решение:

(a) Проверим свойства из определения топологии.

- $\varnothing \in \tau, \ \mathbb{R} \in \tau$.
- Пусть $\{U_\alpha\} \in \tau$. Тогда все $\mathbb{R} \setminus U_\alpha$ конечны либо равны всему $\mathbb{R}$. Если все $U_\alpha = \varnothing$, то и объединение есть пустое множество, которое лежит в τ. Пусть среди $\{U_\alpha\}$ есть непустое U_0. Тогда

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_\alpha U_\alpha = \bigcap_\alpha \big(\mathbb{R} \setminus U_\alpha\big) \subset \mathbb{R} \setminus U_0 \text{ — не более, чем конечно} \qquad \Longrightarrow \qquad \bigcup_\alpha U_\alpha \in \tau$$

- Пусть $A, B \in \tau$. Если среди них есть пустые, то $A \cap B = \varnothing \in \tau$. Если оба непустые, то

$$\mathbb{R} \setminus \big(A \cap B\big) = \big(\mathbb{R} \setminus A\big) \cup \big(\mathbb{R} \setminus B\big) \text{ — не более, чем конечно} \qquad \Longrightarrow \qquad A \cap B \in \tau$$

(b) $K = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.

$\mathbb{N}$ бесконечно, поэтому $\mathbb{N}$ незамкнуто. Покажем компактность. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{U_\alpha\}$. Рассмотрим произвольный непустой элемент этого покрытия $X_0 = \mathbb{R} \setminus \{x_k\}$, где $\{x_k\}$ — конечный набор действительных чисел.

Построим конечное подпокрытие $\mathbb{N}$. Сначала добавим туда X_0. Осталось покрыть $\{x_k\} \cap \mathbb{N}$. Если $x_k \in \mathbb{N}$, то $\exists X_k \subset \{U_\alpha\}$, содержащее x_k. Тогда добавим это X_k в покрытие. Получили конечное подпокрытие.

(c) $S = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

Покажем, что $[\mathbb{N}]_{\text{секв.}} = \mathbb{R}$. Пусть $a \in \mathbb{R}$. Покажем, что $\{n\}_1^\infty \xrightarrow{\tau} a$. Рассмотрим произвольную окрестность $U(a) = \mathbb{R} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$. Пусть $N = \lceil \max\{z_1, \ldots, z_k\} \rceil + 1$. Тогда $\forall n \geq N$ выполнено $n \in U(a)$. Значит $\{n\}$ сходится к a по топологии. Мы доказали, что $\mathbb{N}$ секвенциально незамкнуто.

Покажем секвенциальную компактность $\mathbb{N}$. Пусть $\{x_n\} \subset \mathbb{N}$ — произвольная последовательность. Если она содержит только конечное число различных чисел, то можно выбрать стационарную подпоследовательность, которая и будет сходящейся в $\mathbb{N}$.

Пусть $\{x_n\}$ содержит бесконечное число различных чисел. Значит, она неограничена, и поэтому можно выделить строго возрастающую подпоследовательность $\{y_n\}$. Последовательность $\{y_n\}$ сходится к произвольному числу $a \in \mathbb{R}$ (доказательство аналогично тому, что $\{n\} \xrightarrow{\tau} a$). Значит, это верно и для любого $a \in \mathbb{N}$.

Итак, из любой последовательности натуральных чисел можно выделить сходящуюся к натуральному числу подпоследовательность. Значит, $\mathbb{N}$ секвенциально компактно.

Задача §1.4

l_∞ — пространство всех ограниченных числовых последовательностей с метрикой

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k - y_k|$$

Проверить открытость в метрическом пространстве (l_∞, ρ) множества

$$A = \left\{ x \in l_\infty \;\middle|\; 0 < x_k < 1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

Под открытостью в метрическом пространстве (X, ρ) понимается принадлежность метрической топологии τ_ρ, порожденной базой из всех открытых шаров в X.

Решение:

Известно, что

$$A \text{ открыто} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall x \in A \;\; \exists r > 0 \;\; O_r(x) \subset A$$

Покажем, что A не открыто, доказав отрицание этого утверждения.

Рассмотрим последовательность $x = \left\{ \dfrac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} \in A$. Пусть $O_r(x)$ — произвольный открытый шар. Надо показать, что для любого $r > 0$ выполнено $O_r(x) \not\subset A$. Зафиксируем $r > 0$.

Рассмотрим последовательность y :

$$y_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \frac{1}{n} \geq r \\ 0, & \frac{1}{n} < r \end{cases}, \qquad y \notin A$$

Однако легко видеть, что по построению $\rho(x, y) < r$, то есть $y \in O_r(x)$ и $y \notin A$.

Задача §1.7

Пусть A, B — замкнутые, непересекающиеся подмножества метрического пространства (X, ρ). Доказать, что на X существует непрерывная функция f такая, что $f\big|_A \equiv 0,\ f\big|_B \equiv 1$.

$f\big|_A$ — сужение функции f на множество A.

Под открытостью в метрическом пространстве (X, ρ) понимается принадлежность метрической топологии τ_ρ, порожденной базой из всех открытых шаров в X.

Так как любое метрическое пространство удовлетворяет аксиоме счетности, то в нем понятия топологически непрерывного и секвенциально непрерывного отображения совпадают. Под непрерывностью понимается любое из них.

Решение:

Из задачи §1.5, разобранной на семинаре, мы знаем, что

$$\forall S \subset X \quad f_S(x) = \rho(x, S) = \inf_{y \in S} \rho(x, y) \ \text{ — непрерывное отображение}$$

Докажем, что искомым в нашей задаче является отображение

$$f(x) = \frac{\rho(x, A)}{\rho(x, A) + \rho(x, B)}$$

Надо доказать следующее:

(1) f определено на всем X;

(2) $f\big|_A \equiv 0,\ f\big|_B \equiv 1$;

(3) f непрерывно на X.

(1) Покажем, что если A, B — замкнутые непересекающиеся множества, то

$$\rho(x, A) + \rho(x, B) > 0$$

для любых $x \in X$.

Пусть $\rho(x_0, A) = \rho(x_0, B) = 0$. Тогда

$$\exists \{x_n\} \subset A,\ \exists \{y_n\} \subset B: \quad \rho(x_0, x_n) \to 0, \quad \rho(x_0, y_n) \to 0 \quad (n \to \infty)$$

В метрическом пространстве:

$$\rho(x_0, x_n) \to 0, \quad \rho(x_0, y_n) \to 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \xrightarrow{\tau_\rho} x_0,\ y_n \xrightarrow{\tau_\rho} x_0,$$

то есть x_0 — точка прикосновения A и B. Значит, $x_0 \in [A] \cap [B] = A \cap B$ — противоречие.

В метрическом пространстве эквивалентны понятия топологической и секвенциальной точки прикосновения, топологического и секвенциального замыкания.

(2) При $x \in A: \quad f(x) = 0$, а при $x \in B: \quad f(x) = \frac{\rho(x,A)}{\rho(x,A)} = 1$.

(3) Мы знаем, что $\rho(x, A)$ и $\rho(x, B)$ — непрерывные отображения. Так сумма, произведение и частное непрерывных отображений непрерывны (утверждение 5), то и $f(x)$ непрерывно.

Задача §1.13

Опр. Топологическое пространство (X, τ) называется *метризуемым*, если на X можно так задать метрику ρ, что метрическая топология $\tau_\rho = \tau$.

$D(\mathbb{R})$ — пространство финитных, бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$. В нем можно задать топологию τ так, что сходимость по ней будет эквивалентна привычной сходимости в D:

$$\phi_n \xrightarrow{\tau} \phi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \phi_n \xrightarrow{D(\mathbb{R})} \phi \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \begin{cases} \phi_n^{(k)} \longrightarrow \phi^{(k)} \text{ равномерно на } \mathbb{R} \ \ \forall k \in \mathbb{N}_0 \\ \operatorname{supp}\, \phi_n \subseteq [a, b] \ \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases},$$

где $\operatorname{supp}\phi = \overline{\{x \mid \phi(x) \neq 0\}}$ — *носитель* функции — замыкание множества точек, где функция отлична от нуля.

Доказать, что пространство основных функций $D(\mathbb{R})$ неметризуемо.

Решение:

Допустим противное: существует такая метрика ρ на $D(\mathbb{R})$, что

$$\phi_n \xrightarrow{D(\mathbb{R})} \phi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \rho(\phi_n, \phi) \longrightarrow 0 \ \text{ при } \ n \to \infty$$

Идея: построить последовательность функций, которая сходится по метрике ρ, но не сходится в смысле $D(\mathbb{R})$. Определим функцию:

$$\phi_n(x) = \begin{cases} 1 & , \ |x| \leq n \\ \ldots & , \ n < |x| < n+1 \\ 0 & , \ |x| \geq n+1 \end{cases},$$

где при $n < |x| < n+1$ функция определена так, чтобы ϕ_n была бесконечно дифференцируемой.

Сначала покажем, что $\forall n \in \mathbb{N}: \ \dfrac{\phi_n}{m} \xrightarrow{D(\mathbb{R})} 0$ при $m \to \infty$.

$$\begin{cases} \operatorname{supp} \dfrac{\phi_n}{m} \subset [-n-1, n+1] \qquad \forall m \in \mathbb{N} \\ \\ \sup\limits_{\mathbb{R}} \left| \dfrac{\phi_n^{(k)}}{m} \right| = \dfrac{1}{m} \max\limits_{[-n-1, n+1]} \left| \phi_n^{(k)} \right| \longrightarrow 0, \quad \text{при } m \to \infty \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\phi_n}{m} \xrightarrow{D(\mathbb{R})} 0$$

Тогда $\rho\left(\dfrac{\phi_n}{m}, 0\right) \to 0$ при $m \to \infty$, значит:

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists m_n : \ \ \rho\left(\frac{\phi_n}{m_n}, 0\right) < \frac{1}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \rho\left(\frac{\phi_n}{m_n}, 0\right) \longrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty$$

Тогда $\dfrac{\phi_n}{m_n} \xrightarrow{D(\mathbb{R})} 0$. Однако носители функций ϕ_n неограниченно разрастаются — противоречие.