Функан. ДЗ 7.

Прохоров Юрий, 776

---

1. Теорема Хана-Банаха и сопряженное пространство

Зафиксируем некоторое ЛНП $(X, \|\cdot\|)$.

Опр. Множество $L(X, \mathbb{C})$ всех линейных ограниченных операторов $X \to \mathbb{C}$ называется *сопряженным пространством* и обозначается X^*.

Сопряженное пространство X^* всегда полно, так как $\mathbb{C}$ полно.

Опр. Произвольное отображение $f : X \to \mathbb{R}$ или $f : X \to \mathbb{C}$ называется *функционалом* на X.

Опр. Элемент сопряженного пространства X^* называется *линейным (непрерывным) функционалом.*

Теорема Хана-Банаха. (*общая формулировка*) Пусть

- X — комплексное ЛП, Y — линейное подпространство X;
- $p(x)$ — полунорма на X:
  (1) $p(x) \geq 0 \qquad \forall x \in X$;
  (2) $p(\lambda x) = |\lambda| \cdot p(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$;
  (3) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.
- $f : Y \to \mathbb{C}$ — линейный функционал, удовлетворяющий условию

$$\big|f(x)\big| \leq p(x) \qquad \forall x \in Y$$

Тогда существует линейный функционал $F : X \to \mathbb{C}$, являющийся продолжением f на X и удовлетворяющий условию

$$\big|F(x)\big| \leq p(x) \qquad \forall x \in X$$

Здесь под линейностью подпространства Y и функционалов f, F понимается именно комплексная линейность.

Здесь приведена формулировка из книги Рудин, "Функциональный анализ".

Теорема Хана-Банаха. (*вещественный случай*) Пусть

- X — вещественное ЛП, Y — линейное подпространство X;
- $p : X \to \mathbb{R}$ — такой функционал, что:
  (1) $p(\lambda x) = \lambda \cdot p(x) \qquad \forall \lambda \geq 0$;
  (2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.
- $f : Y \to \mathbb{R}$ — линейный функционал, удовлетворяющий условию

$$f(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in Y$$

Тогда существует линейный функционал $F : X \to \mathbb{R}$, являющийся продолжением f на X и удовлетворяющий условию

$$F(x) \leq p(x) \qquad \forall x \in X$$

Теорема Хана-Банаха не использует структуры нормированного пространства, однако есть удобное следствие. На семинарах под теоремой Хана-Банаха понимается это важное следствие общей теоремы.

Теорема Хана-Банаха. (*следствие из общей теоремы*) Пусть

> - X — ЛНП, Y — подпространство X;
> - $f \in L(Y, \mathbb{C}) = Y^*$.
>
> Тогда существует $F \in X^*$, являющийся продолжением f на X и имеющий ту же норму: $\|F\| = \|f\|$.

Далее приведены некоторые следствия из теоремы Хана-Банаха.

Утв. 1.1 Пусть X — ЛНП.

(1) Пусть $L \subset X$ — замкнутое подпространство, $x_0 \notin L$. Тогда $\exists f \in X^*$, такой что

$$f\Big|_L = 0, \qquad f(x_0) = 1, \qquad \|f\| = \frac{1}{\rho(x_0, L)}$$

(2) Пусть $x_0 \neq 0$. Тогда $\exists f \in X^*$, такой что

$$f(x_0) = \|x\|_X, \qquad \|f\| = 1$$

(3) Пусть $\forall f \in X^* \;\to\; f(x_0) = 0$. Тогда $x_0 = 0$.

(4) $\forall x \in X: \quad \|x\|_X = \sup\limits_{\|f\|=1} \big|f(x)\big|$.

Утв. 1.2 Пусть $X \neq \{0\}$ — произвольное ЛНП, причем Y — неполное ЛНП. Тогда пространство $L(X, Y)$ неполно.

Теоремы об отделимости. Пусть X — комплексное ЛНП, $A, B \subset X$ — непустые выпуклые непересекающиеся множества. Тогда

(1) если A открыто, то $\exists f \in X^*,\ f \neq 0$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, такие что

$$\mathrm{Re} f(a) < \gamma \leq \mathrm{Re} f(b) \qquad \forall a \in A, \qquad \forall b \in B$$

(2) если A компактно, а B замкнуто, то $\exists f \in X^*,\ f \neq 0$ и $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, такие что

$$\mathrm{Re} f(a) < \gamma_1 < \gamma_2 < \mathrm{Re} f(b) \qquad \forall a \in A, \qquad \forall b \in B$$

Утв. 1.3 Пусть X — комплексное ЛНП. Тогда отображение $\Phi: X \to X^{**}$ вида

$$\Phi(x) = \Phi_x, \quad \text{где } \Phi_x : X^* \to \mathbb{C} \quad \text{действует по правилу} \quad \Phi_x(f) = f(x)$$

осуществляет изометрический изоморфизм между X и $\mathrm{Im}\Phi \subset X^{**}$.
Отображение Φ иногда называется *отображением Банаха.*

Опр. Комплексное ЛНП X называется *рефлексивным*, если $\mathrm{Im}\Phi = X^{**}$.
То есть X рефлексивно $\iff$ Φ осуществляет изометрический изоморфизм между X и X^{**}.
Любое рефлексивное пространство является банаховым, так как сопряженное пространство всегда полно.

Опр. Функционал $f: X \to \mathbb{C}$ *достигает своей нормы*, если

$$\exists x \in X: \quad \|x\| = 1, \quad f(x) = \|x\|$$

Теорема Джеймса. ЛНП X рефлексивно $\iff$ любой функционал $f \in X^*$ достигает своей нормы.

Опр. ЛНП X и Y будем называть *равными* и писать $X = Y$ или $X \cong Y$, если X и Y изометрически изоморфны.

Сопряженные и вторые сопряженные пространства для пространств последовательностей:

	X	X^*	X^{**}	Рефлексивность
1	c_0	l_1	l_∞	✗
2	c	l_1	l_∞	✗
3	l_1	l_∞	$\dots$	✗
4	$l_p,\ 1<p<\infty$	$l_q,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$	l_p	✓
5	l_∞	$\dots$	$\dots$	✗

Пространство l_∞^* не выражается через известные пространства, но содержит подпространство, изоморфное l_1.

Если в пространстве X есть счетный базис (Шаудера) $\{e_m\}_{m=1}^\infty$, а $f \in X^*$, то

$$x = \sum_{m=1}^\infty \alpha(m) e_m \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = \sum_{n=1}^\infty \alpha(m) f(e_m)$$

Утв. 1.4 В пространствах l_p $(1 \le p < \infty)$ и c_0 есть счетный базис $\{e_m\}_{m=1}^\infty$:

$$e_m(k) = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \ne k. \end{cases}$$

Утв. 1.5 В пространстве c_0 есть счетный базис $\{e_m\}_{m=0}^\infty$:

$$e_0(k) \equiv 1, \qquad e_m(k) = \begin{cases} 1, & m = k, \\ 0, & m \ne k. \end{cases}, \quad m \ge 1$$

2. Ядро линейного функционала

Утв. 2.1 Пусть X — ЛНП, $f \in X^*$. Тогда $\operatorname{Ker} f$ — замкнутое подпространство X.

Доказательство.
Пусть $f(x_n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ и $x_n \to x \implies \big|f(x)\big| = \big|f(x) - f(x_n)\big| \le \|f\| \cdot \|x - x_n\| \to 0.$ □

Утв. 2.2 Пусть X — ЛНП, $f \in X^*$, $f(x_0) \ne 0$. Тогда $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Lin}\{x_0\} = X$.

Доказательство.
Пусть $x \in X$. Определим $\alpha = \frac{f(x)}{f(x_0)}$. Тогда $f(x - \alpha x_0) = 0 \implies x - \alpha x_0 \in \operatorname{Ker} f \implies \operatorname{Ker} f + \operatorname{Lin}\{x_0\} = X$.
Сумма прямая, потому что пересечение подпространств тривиально. □

Утв. 2.3 Пусть X — ЛНП, $f \in X^*$. Тогда $\forall x_0 \in X$ справедлива формула

$$\rho\big(x_0, \operatorname{Ker} f\big) = \frac{\big|f(x_0)\big|}{\|f\|}$$

Доказательство.

$$\|f\| = \sup_{x \ne 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \Big/ \text{Утв. 2.2} \Big/ = \sup_{\substack{\alpha \ne 0 \\ y \in \operatorname{Ker} f}} \frac{\big|f(\alpha x_0 + y)\big|}{\|\alpha x_0 + y\|} = \sup_{\substack{\alpha \ne 0 \\ y \in \operatorname{Ker} f}} \frac{|\alpha|\big|f(x_0)\big|}{\|\alpha x_0 + y\|} = \sup_{y \in \operatorname{Ker} f} \frac{\big|f(x_0)\big|}{\big\|x_0 + \frac{y}{\alpha}\big\|} =$$

$$= \sup_{z \in \operatorname{Ker} f} \frac{\big|f(x_0)\big|}{x_0 - z} = \frac{\big|f(x_0)\big|}{\inf\limits_{z \in \operatorname{Ker} f} \|x_0 - z\|} = \frac{\big|f(x_0)\big|}{\rho(x_0, \operatorname{Ker} f)}.$$ □

3. Сопряженное гильбертово пространство

Теорема Рисса-Фреше.

Пусть H — гильбертово пространство. Тогда существует такое отображение $z : H^* \to H$, что

- z взаимно однозначно;
- $f(x) = \big\langle x, z(f) \big\rangle, \quad \forall x \in H, \quad \forall f \in H^*$;
- $\|f\| = \|z(f)\|, \quad \forall f \in H^*$;
- z сопряженно-линейное: $z(f+g) = z(f) + z(g), \quad z(\alpha f) = \overline{\alpha} z(f)$.

В некотором смысле H^* изометрически изоморфно H, но формально так говорить нельзя.

Утв. 3.1 Гильбертово пространство рефлексивно.

Задача §9.11

Найти норму функционала φ на пространстве $C[a,b]$:

$$\varphi(f) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx,$$

где g — фиксированная непрерывная функция. Исследовать вопрос о том, когда норма достигается.

Решение:

(a) Найдем норму функционала φ. Сразу получим оценку:

$$\big|\varphi(f)\big| \le \int_a^b |f(x)||g(x)|dx \le \|f\|_\infty \cdot \|g\|_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\varphi\| \le \|g\|_1$$

1. Пусть сначала g — функция, не меняющая знак.

   Тогда можно взять $f(x) \equiv 1$, и тогда

   $$|\varphi(f)| = \int_a^b |g(x)|dx = \|g\|_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\varphi\| = \|g\|_1$$

2. Пусть теперь g — функция, имеющая конечное число нулей $\{x_k\}_{k=1}^{N-1} \subset (a,b)$. Построим максимизирующую последовательность.

   Определим для $n \in \mathbb{N}$: $l_k = x_k - \frac{1}{n}$, $r_k = x_k + \frac{1}{n}$. Функции $f_n(x)$ определим следующим образом:

   $$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{|g(x)|} & , \quad |x - x_k| \ge \frac{1}{n}, \quad \forall k = \overline{1,N}, \\ 0 & , \quad x = x_k, \\ \text{линейно} & , \quad \text{иначе}, \end{cases}$$

   то есть мы фактически разбиваем отрезок $[a,b]$ на N отрезков, на каждом из которых $g(x)$ знакопостоянна, и там полагаем $f_n(x)$ того же знака, что и g, и единицей по модулю. А потом соединяем линейно, чтобы была непрерывность.

   Ясно, что $\|f_n\|_\infty = 1$ при достаточно больших n. По построению, знаки f_n и g всегда совпадают, поэтому, считая $x_0 = r_0 = a$ и $x_N = l_N = b$, запишем

   $$|\varphi(f_n)| = \int_a^b f_n(x)g(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f_n(x)||g(x)|dx \ge \sum_{k=1}^{N} \int_{r_{k-1}}^{l_k} 1 \cdot |g(x)|dx =$$
   $$= \|g\|_1 - \sum_{k=1}^{N-1} \int_{l_k}^{r_k} |g(x)|dx \ge \|g\|_1 - \frac{2(N-1)}{n}\|g\|_\infty \longrightarrow \|g\|_1 \ \text{ при } \ n \to \infty$$

   Поэтому $\|\varphi\| = \|g\|_1$.

3. Пусть теперь g — произвольная непрерывная функция на $[a,b]$.

   По теореме Вейерштрасса, существует последовательность полиномов $P_n(x)$, сходящаяся к $g(x)$ по норме $\|\cdot\|_\infty$. Обозначим функционалы

   $$\varphi_n(f) = \int\limits_a^b f(x)P_n(x)dx$$

   Функции $P_n(x)$ имеют конечные числа нулей, поэтому функционалы φ_n удовлетворяют пункту 2, значит, их нормы $\|\varphi_n\| = \|P_n\|_1$.

Покажем, что $\varphi_n \to \varphi$ по норме сопряженного пространства (т.е. сильно сходится).

$$\big|(\varphi_n - \varphi)(f)\big| \le \int_a^b |f(x)||P_n(x) - g(x)|dx \le (b-a)\|f\|_\infty \cdot \|P_n - g\|_\infty$$

Тогда норма разности функционалов

$$\|\varphi_n - \varphi\| \le (b-a)\|P_n - g\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|\varphi_n\| \longrightarrow \|\varphi\|$$

Последний переход следует из оценки $\big|\|x\| - \|y\|\big| \le \|x - y\|$, которая следует из неравенства треугольника.

Тогда имеем, что $\|P_n\|_1 \to \|\varphi\|$. С другой стороны,

$$\|P_n - g\|_\infty \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|P_n - g\|_1 \to 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \|P_n\|_1 \to \|g\|_1$$

Отсюда тогда следует, что $\|\varphi\| = \|g\|_1$.

(b) Мы показали, что если $g(x)$ — знакопостоянная функция, то норма достигается.

Теперь докажем, что если $g(x)$ имеет нуль $c \in (a,b)$ и меняет там знак, то норма не достигается. Для произвольной функции $f \in C[a,b]$, $\|f\|_\infty = 1$:

$$|\varphi(f)| = \left|\int_a^{c-\delta} f(x)g(x)dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)g(x)dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)g(x)dx\right| \le$$
$$\le \int_a^{c-\delta} |f||g|dx + \int_{c+\delta}^{b} |f||g|dx + \left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} fgdx\right| \le \|g\|_1 - \int_{c-\delta}^{c+\delta} |g(x)|dx + \left|\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)g(x)dx\right| = (*)$$

где $\delta = \delta(f) > 0$ — выберем сами, чтобы получить более точную оценку.

1. Пусть $|f(c)| = 1$.

   Тогда $\exists \delta > 0$, такое, что с одной стороны от $x = c$ функция $f(x)g(x)$ неотрицательна, а с другой неположительна. Тогда

$$(*) \le \|g\|_1 - \underbrace{\int_{c-\delta}^{c+\delta} |g|dx}_{\alpha+\beta} + \left|\underbrace{\int_{c-\delta}^{c} |f||g|dx}_{\alpha>0} - \underbrace{\int_{c}^{c+\delta} |f||g|dx}_{\beta>0}\right| = \|g\|_1 + \underbrace{|\alpha - \beta| - \alpha - \beta}_{<0} < \|g\|_1$$

2. Пусть $|f(c)| < 1$.

   Тогда $\exists \delta > 0$, такое, что $|f(c)| \le r < 1$ на $[c-\delta, c+\delta]$. Тогда

$$(*) \le \|f\|_1 - \int_{c-\delta}^{c+\delta} |g|dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} r|g| = \|g\|_1 - \underbrace{(1-r)\int_{c-\delta}^{c+\delta} |g(x)|dx}_{>0} < \|g\|_1$$

Подводя итог, получаем, что

$$\|\varphi\| = \|g\|_1$$

и что норма этого функционала достигается $\Longleftrightarrow$ функция $g(x)$ не меняет знак на $[a,b]$.

Задача §9.4

Привести пример функционала в пространстве $C[a,b]$, не достигающего своей нормы.

Решение:

Из задачи §9.11 следует, что таким функционалом на $C[-1,1]$ является, например

$$\varphi(f) = \int_{-1}^{1} x f(x)dx,$$

так как функция $g(x) = x$ меняет знак в нуле.

Задача §9.5

Пусть X — ЛНП. Доказать, что $f \in X^*,\ f \neq 0$ достигает своей нормы $\iff$

$$\exists x_0 \in X \setminus \operatorname{Ker} f, \quad \exists x \in \operatorname{Ker} f: \quad \|x - x_0\| = \rho(x_0, \operatorname{Ker} f)$$

Решение:

Будем пользоваться формулой, полученной на семинаре: если $f \in X^*,\ f \neq 0$, то $\forall x_0 \in X$:

$$\rho\big(x_0, \operatorname{Ker} f\big) = \frac{\big|f(x_0)\big|}{\|f\|}$$

1. ($\Longrightarrow$) f достигает нормы, значит, существует $y \neq 0$, такой, что $\|f\| = \dfrac{|f(y)|}{\|y\|} \neq 0$. Тогда $y \notin \operatorname{Ker} f$.

   Подберем элементы нужные x и x_0. В качестве x_0 возьмем произвольный элемент не из $\operatorname{Ker} f$ (он существует, так как $f \neq 0$). Заметим, что

   $$z = y - \frac{f(y)}{f(x_0)} x_0 \in \operatorname{Ker} f \qquad \Longrightarrow \qquad y = z + \alpha x_0, \qquad \alpha = \frac{f(y)}{f(x_0)} \neq 0$$

   По формуле выше:

   $$\rho(x_0, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(x_0)|}{\|f\|} = \frac{|f(x_0)| \cdot \|y\|}{|f(y)|} = \frac{|f(x_0)| \cdot \|z + \alpha x_0\|}{|\alpha| \cdot |f(x_0)|} = \Big\| x_0 - \underbrace{\Big(-\frac{z}{\alpha}\Big)}_{x} \Big\|$$

2. ($\Longleftarrow$) По предположению и формуле выше:

   $$\|x - x_0\| = \rho(x_0, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(x_0)|}{\|f\|} = \frac{|f(x - x_0)|}{\|f\|},$$

   то есть функционал f достигает свою норму на элементе $y = x - x_0$.

Покажем еще, что если второе свойство выполнено для какого-то $x_0 \in X \setminus \operatorname{Ker} f$, то оно выполнено $\forall y_0 \notin \operatorname{Ker} f$. Тогда $y_0 = z + \alpha x_0$, где $z \in \operatorname{Ker} f,\ \alpha = \frac{f(y_0)}{f(x_0)}$. По предположению и формуле выше:

$$\rho(y_0, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(y_0)|}{\|f\|} = \frac{|\alpha| \cdot |f(x_0)|}{\|f\|} = |\alpha| \cdot \rho(x_0, \operatorname{Ker} f) = |\alpha| \cdot \|x - x_0\| = \big\| \underbrace{\alpha x + z}_{y} - y_0 \big\|,$$

где y — элемент наилучшего приближения y_0.