Случайные процессы. ДЗ 3.

Прохоров Юрий, 776

Задача 1

Найти конечномерные распределения случайного процесса

$$X(t) = (-1)^{K(t)}, \qquad t \geq 0,$$

где $K(t) \sim \text{ПП}(\lambda)$ — пуассоновский процесс интенсивности λ.

Решение:

Требуется вычислить вероятности вида

$$\mathbb{P}\big\{X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_n) = x_n\big\}, \qquad t_1 < \ldots < t_n, \qquad x_i \in \{-1, 1\}$$

Учитывая, что пуассоновский процесс имеет независимые приращения, получим

$$\mathbb{P}\big\{(-1)^{K(t_1)} = x_1, \ldots, (-1)^{K(t_n)} = x_n\big\} = \mathbb{P}\left\{(-1)^{K(t_1)-K(0)} = x_1, \ldots, (-1)^{K(t_n)-K(t_{n-1})} = \frac{x_n}{x_{n-1}}\right\} =$$
$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left\{(-1)^{K(t_k)-K(t_{k-1})} = x_k x_{k-1}\right\} = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left\{K(t_k) - K(t_{k-1}) = 2n + \delta_k\right\} = (*),$$

где $\delta_k = \begin{cases} 1, & x_k x_{k-1} = -1 \\ 0, & x_k x_{k-1} = 1 \end{cases}$.

Учтем, что $K(t_k) - K(t_{k-1}) \sim \text{Poiss}(\lambda(t_k - t_{k-1}))$:

$$(*) = \prod_{k=1}^{n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big[\lambda(t_k - t_{k-1})\big]^{2n+\delta_k}}{(2n+\delta_k)!} e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} = \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} \left\{ \begin{array}{ll} \text{sh}\big(\lambda(t_k - t_{k-1})\big), & \delta_k = 1 \\ \text{ch}\big(\lambda(t_k - t_{k-1})\big), & \delta_k = 0 \end{array} \right\} =$$
$$= \frac{e^{-\lambda t_n}}{2^n} \prod_{k=1}^{n} \left(e^{\lambda(t_k - t_{k-1})} + x_k x_{k-1} e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})}\right)$$

Задача 2

На остановку приходят маршрутки согласно пуассоновскому процессу интенсивности $\lambda > 0$ и автобусы — интенсивности $\mu > 0$. Пассажир приходит на остановку в некоторый момент t_0, не связанный с расписанием маршруток и автобусов. Найти вероятность того, что раньше подойдет маршрутка.

Решение:

Пусть количество пришедших на остановку маршруток и автобусов описывается пуассоновскими процессами $M(t) \sim \text{ПП}(\lambda)$ и $A(t) \sim \text{ПП}(\mu)$ соответственно.

Требуется найти вероятность того, что значение $M(t)$ увеличится на 1 раньше, чем значение $A(t)$, начиная с момента t_0. Определим процессы

$$\widetilde{M}(t) = M(t + t_0) - M(t_0), \qquad \widetilde{A}(t) = A(t + t_0) - A(t_0), \qquad t \geq 0$$

По свойству пуассоновских процессов, $\widetilde{M}(t) \sim \text{ПП}(\lambda)$, $\widetilde{A}(t) \sim \text{ПП}(\mu)$ — тоже пуассоновские процессы.

Согласно эквивалентному определению пуассоновского процесса, случайные величины

$$\xi = \min\left\{t \;\middle|\; \widetilde{M}(t) \geq 1\right\} \sim \text{Exp}(\lambda), \qquad \eta = \min\left\{t \;\middle|\; \widetilde{A}(t) \geq 1\right\} \sim \text{Exp}(\mu)$$

Процесс $\widetilde{M}(t)$ примет значение 1 раньше процесса $\widetilde{A}(t)$ тогда и только тогда, когда $\xi < \eta$. Поэтому нам нужно найти вероятность

$$\mathbb{P}\{\xi < \eta\} = \Big/ \begin{matrix}\text{формула полной}\\ \text{вероятности}\end{matrix} \Big/ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\{\xi < \eta \mid \eta = y\} f_\eta(y)dy = \int\limits_{0}^{+\infty} \mathbb{P}\{\xi < y\}\mu e^{-\mu y}dy =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \left(1 - e^{-\lambda y}\right)\mu e^{-\mu y}dy = 1 - \mu \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)y}dy = 1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Задача 3

На остановку приходят автобусы согласно пуассоновскому процессу интенсивности $\lambda > 0$. Два человека приходят на остановку независимо друг от друга в случайное время, равномерно распределенное на $[0, T]$. Найти вероятность того, что они поедут на одном автобусе.

Изменится ли эта ответ, если $[0, T]$ заменить на $[a, a+T]$, где $a > 0$ — некоторая константа?

Решение:

(a) Пусть $\xi, \eta \sim \mathcal{U}[0, T]$ — независимые времена прихода пассажиров на остановку, а $K(t) \sim \text{ПП}(\lambda)$ — количество приходящих на остановку автобусов. Тогда нам требуется вычислить вероятность

$$\mathbb{P}\big\{K(\xi) = K(\eta)\big\} = \Big/ \begin{matrix}\text{формула полной}\\ \text{вероятности}\end{matrix} \Big/ = \int\limits_0^T \int\limits_0^T \mathbb{P}\big\{K(\xi) = K(\eta) \mid \xi = x, \eta = y\big\} f_{(\xi,\eta)}(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_0^T \mathbb{P}\big\{K(x) = K(y)\big\} f_\xi(x) f_\eta(y)dxdy = 2 \cdot \iint\limits_{0 \le x < y \le T} \mathbb{P}\big\{\underbrace{K(y) - K(x)}_{\sim \text{Poiss}(\lambda(y-x))} = 0\big\}\, \frac{1}{T}\, \frac{1}{T}\, dxdy =$$

$$= \frac{2}{T^2} \iint\limits_{0 \le x < y \le T} e^{-\lambda(y-x)}dxdy = \frac{2}{T^2} \int\limits_0^T \int\limits_x^T e^{-\lambda y} e^{\lambda x}dydx = \frac{2}{\lambda T^2} \int\limits_0^T \left(e^{-\lambda x} - e^{-\lambda T}\right)e^{\lambda x}dx =$$

$$= \frac{2}{\lambda T^2}\left(T - e^{-\lambda T}\int\limits_0^T e^{\lambda x}dx\right) = \frac{2}{\lambda T^2}\left(T - e^{-\lambda T}\frac{e^{\lambda T} - 1}{\lambda}\right) = \frac{2}{\lambda^2 T^2}\left(\lambda T + e^{-\lambda T} - 1\right)$$

(b) Пусть теперь $\xi, \eta \sim \mathcal{U}[a, a+T]$. Тогда в интегралах изменятся пределы на a и $a+T$. Подынтегральная функция зависит только от $y - x$, поэтому она не изменится при замене переменных $x' = x - a,\ y' = y - a$, а якобиан такой замены равен 1. Поэтому итоговое значение **не изменится**.

Можно привести другое объяснение. Определим процесс

$$X(t) = K(t+a) - K(a), \qquad t \ge 0$$

Согласно свойствам пуассоновского процесса, $X(t) \sim \text{ПП}(\lambda)$, и тогда вычисления для процесса $K(t)$ на отрезке $[a, a+T]$ сводятся к вычислениям для процесса $X(t)$ на отрезке $[0, T]$, а они совпадают с исходными в пункте (a).

Задача 4

На остановку приходят автобусы согласно пуассоновскому процессу интенсивности λ и пассажиры согласно пуассоновскому процессу интенсивности μ. Пусть случайные величины X_k равны числу пассажиров на k-ом автобусе.

(a) Найти распределение X_1.

(b) Доказать, что $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ независимы в совокупности и одинаково распределены.

Решение:

Пусть $A(t) \sim \text{ПП}(\lambda)$ — процесс, моделирующий автобусы, а $P(t) \sim \text{ПП}(\mu)$ — процесс, моделирующий пассажиров. Запишем $A(t)$ в виде

$$A(t) = \max\big\{n \;\big|\; S_n < t\big\}, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \qquad \xi_k \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$$

Тогда

$$X_k = P(S_k) - P(S_{k-1}), \qquad X_1 = P(S_1) = P(\xi_1)$$

Составим случайный вектор $X = (X_1, \ldots, X_n)$ для произвольного $n \in \mathbb{N}$. Достаточно показать, что его компоненты независимы. Для этого найдем производящую функцию этого случайного вектора и покажем, что она разбивается на произведение производящих функций компонент:

$$\varphi_X(z_1, \ldots, z_n) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\big[z_1^{X_1} \cdots z_n^{X_n}\big] = \varphi_{X_1}(z_1) \cdots \varphi_{X_n}(z_n)$$

Будем использовать формулу полного матожидания:

$$\begin{aligned}\varphi_X(z) &= \mathbb{E}\big[z_1^{X_1} \cdots z_n^{X_n}\big] = \mathbb{E}\big[z_1^{P(S_1)} z_2^{P(S_2)-P(S_1)} \cdots z_n^{P(S_n)-P(S_{n-1})}\big] = \\ &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}\big[z_1^{P(S_1)} \cdots z_n^{P(S_n)-P(S_{n-1})} \;\big|\; S_1 = t_1, \ldots, S_n = t_n\big]\, f_S(t_1, \ldots, t_n) dt_1 \cdots dt_n,\end{aligned}$$

где $f_S(t)$ — функция плотности совместного распределения $S = (S_1, \ldots, S_n)$. Учтем, что приращения пуассоновского процесса $A(t)$ независимы, поэтому случайный вектор $S' = (S_1, S_2 - S_1, \ldots, S_n - S_{n-1})$ имеет независимые компоненты $\sim \operatorname{Exp}(\lambda)$. Его функция плотности:

$$f_{S'}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{S_k - S_{k-1}}(t_k) = \prod_{k=1}^{n} \lambda \exp(-\lambda t_k)$$

Вектор S получается из S' линейным преобразованием:

$$S = AS' \qquad \Longrightarrow \qquad f_S(t) = \frac{1}{|\det A|} f_{S'}(A^{-1}t), \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_S(t) = \prod_{k=1}^{n} \lambda \exp\big(-\lambda(t_k - t_{k-1})\big), \qquad 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$$

Пользуясь независимостью приращений $P(t)$, получаем

$$\begin{aligned}\varphi_X(z) &= \int\limits_{0<t_1<\ldots<t_n} \cdots \int \mathbb{E}\big[z_1^{P(t_1)} \cdots z_n^{P(t_n)-P(t_{n-1})}\big] \prod_{k=1}^{n} \lambda \exp\big(-\lambda(t_k - t_{k-1})\big) dt_1 \cdots dt_n = \\ &= \int\limits_{0<t_1<\ldots<t_n} \cdots \int \prod_{k=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E} z_k^{P(t_k)-P(t_{k-1})}}_{\text{произв. ф-я пуассоновской с.в.}} \lambda \exp\big(-\lambda(t_k - t_{k-1})\big) dt_1 \cdots dt_n = \\ &= \int\limits_{0<t_1<\ldots<t_n} \cdots \int \prod_{k=1}^{n} e^{\mu(t_k - t_{k-1})(z_k - 1)} \lambda e^{-\lambda(t_k - t_{k-1})} dt_1 \cdots dt_n = \Big/ \tau_k = t_k - t_{k-1} \Big/ = \\ &= \lambda^n \int\limits_{0}^{+\infty} \cdots \int\limits_{0}^{+\infty} \prod_{k=1}^{n} e^{\tau_k(\mu z_k - \mu - \lambda)} d\tau_1 \cdots d\tau_n = \prod_{k=1}^{n} \lambda \int\limits_{0}^{+\infty} e^{\tau_k(\mu z_k - \mu - \lambda)} d\tau_k = \\ &= \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda}{\lambda + \mu - \mu z_k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}{1 - \frac{\mu}{\lambda+\mu} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(z_k),\end{aligned}$$

где $X_k \sim \mathrm{Geom}\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$ — геометрическое распределение.

Итак, мы показали, что все X_k независимы и имеют геометрическое распределение, т.е.

$$\mathbb{P}\{X_1 = n\} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^n \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{\mu^n \lambda}{(\lambda+\mu)^{n+1}}, \qquad \mathbb{E}X_1 = \frac{\mu}{\lambda}.$$