Теорвер. ДЗ 7.

Прохоров Юрий, 776

---

1 Характеристические функции

Опр. $Z = X + iY$ называется *комплекснозначной* случайной величиной, если X и Y — с.в. Ее матожиданием называется

$$\mathbb{E}Z = \mathbb{E}X + i\mathbb{E}Y$$

Опр. *Характеристической функцией* с.в. ξ называется функция

$$\varphi_\xi(t) = \mathbb{E}\big[e^{it\xi}\big]$$

Если ξ — дискретная случайная величина, а η — непрерывная случайная величина, то

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k e^{itx_k}, \qquad \varphi_\eta(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\eta(x) e^{itx} dx$$

На характеристическую функцию непрерывной с.в. можно смотреть как на обратное преобразование Фурье.

Характеристическая функция непрерывной случайной величины стремится к нулю на $\pm\infty$. Это следует из леммы Римана-Лебега: если $f \in \mathbb{L}_1(\mathbb{R})$, то $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\sin\lambda x \, dx = 0$.

Свойства:

1. Если $X_1, \ldots, X_n$ — независимые с.в., а $S = X_1 + \ldots + X_n$, то $\varphi_S(t) = \prod\limits_{j=1}^{n} \varphi_{X_j}(t)$;
2. При линейном преобразовании с.в.: $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_\xi(at)$;
3. $\varphi_\xi(0) = 1, \qquad \varphi_\xi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\xi^k$ (если k-ый момент ξ конечен);
4. $\varphi_\xi(t)$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$;
5. $\big|\varphi_\xi(t)\big| \le 1 \ \ \forall t \in \mathbb{R}$;
6. $\varphi(t) = \overline{\varphi(t)}$.

Теорема единственности. Между функциями распределения и характеристическими функциями есть взаимно однозначное соответствие.

Более строго в книге “Теория вероятностей”, Боровков А.А., глава 7, §2, теорема 1.

Характеристические функции конкретных случайных величин:

$$\xi \sim \mathrm{Be}(p) \qquad \varphi_\xi(t) = 1 - p + pe^{it} \qquad\qquad \xi \sim \mathrm{Bin}(n,p) \qquad \varphi_\xi(t) = \big(1 - p + pe^{it}\big)^n$$

$$\xi \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \varphi_\xi(t) = e^{-t^2/2} \qquad\qquad \xi \sim \mathcal{U}[-a,a] \qquad \varphi_\xi(t) = \frac{sin(at)}{at}$$

$$\xi \sim \mathrm{Cauchy}(0,1) \qquad \varphi_\xi(t) = e^{-|t|} \qquad\qquad \xi \sim \mathrm{Pois}(\lambda) \qquad \varphi_\xi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Для случайного вектора $\mathbf{X}$ аналогичные определения и свойства:

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}\big[e^{i\langle \mathbf{t}, \mathbf{X}\rangle}\big]$$

$$\frac{\partial \varphi_{\mathbf{X}}}{\partial t_j}(\mathbf{0}) = i\mathbb{E}[X_j], \qquad \frac{\partial^2 \varphi_{\mathbf{X}}}{\partial t_j \partial t_k}(\mathbf{0}) = i^2\mathbb{E}[X_j X_k], \qquad \varphi_{A\mathbf{X}+\mathbf{b}}(\mathbf{t}) = e^{i\langle \mathbf{t}, \mathbf{m}\rangle}\varphi_{\mathbf{X}}(A^T\mathbf{t})$$

$$\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp\left(i\mathbf{t}^T\mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}\right)$$

Теорема Бохнера-Хинчина. Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная на $\mathbb{R}$ функция и $\varphi(0) = 1$. Тогда $\varphi(t)$ — характеристическая функция (какой-то с.в.) $\iff$ $\varphi(t)$ положительно определена:

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad \forall t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R} \quad \forall z_1, \ldots, z_m \in \mathbb{C} \quad \to \quad \sum_{i,j=1}^{m} \varphi(t_i - t_j) z_i \overline{z_j} \ge 0$$

Подробнее про характеристические функции в книге “Вероятность-1”, Ширяев, стр. 352.

Задача 1

Будем говорить, что случайная величина ξ имеет *решетчатое распределение*, если $\exists\, a, h \in \mathbb{R},\ h > 0$, такие что ξ почти наверное принимает значения из множества $\{a + kh\}_{k\in\mathbb{Z}}$, т.е.

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}\{\xi = a + kh\} = 1$$

Доказать, что с.в. ξ имеет решетчатое распределение тогда и только тогда, когда $\left|\varphi_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right)\right| = 1$ для некоторого $h > 0$.

Решение:

1. ($\Longrightarrow$) Пусть ξ имеет решетчатое распределение. Так как характеристическая функция, будучи матожиданием, не зависит от значений ξ на множестве меры нуль, то будем считать ξ дискретной с.в. Тогда
$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k e^{it(a+kh)} = e^{ita} \sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k e^{itkh}$$
$$\left|\varphi_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right)\right| = \left|\sum_{k\in\mathbb{Z}} p_k e^{i2\pi k}\right| = \sum_{k\in Z} p_k = 1$$

2. ($\Longleftarrow$) Пусть $\exists h > 0$, такое что $\left|\varphi_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right)\right| = 1$.

   Значит, $\exists a \in \mathbb{R}$, такое что $\varphi_\xi\left(\frac{2\pi}{h}\right) = e^{ita}$. Обозначим с.в. $\eta = \frac{\xi}{h} - a$, и тогда $\varphi_\eta(2\pi) = 1$.

   Покажем, что $\mathbb{P}\{\eta \in \mathbb{Z}\} = 1$. Отсюда будет следовать, что ξ имеет решетчатое распределение.

   По определению,
$$1 = \varphi_\eta(2\pi) = \mathbb{E}\big[e^{i2\pi\eta}\big] = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i2\pi x} d\mathbb{P}_\eta(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \cos(2\pi x) d\mathbb{P}_\eta(x) + i \int\limits_{\mathbb{R}} \sin(2\pi x) d\mathbb{P}_\eta(x)$$
   Значит, мнимый интеграл равен нулю, а действительный — единице. Представим его в следующем виде:
$$\int\limits_{\mathbb{Z}} \cos(2\pi x) d\mathbb{P}_\eta(x) + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}} \cos(2\pi x) d\mathbb{P}_\eta(x) = 1$$
   Так как $\cos(2\pi x) = 1$ при $x \in \mathbb{Z}$, то первый интеграл равен $\mathbb{P}_\eta(\mathbb{Z})$. Отсюда
$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}} \cos(2\pi x) d\mathbb{P}_\eta(x) = 1 - \mathbb{P}_\eta(\mathbb{Z}) = \mathbb{P}_\eta(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}} 1 \cdot d\mathbb{P}_\eta(x)$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}} \big(1 - \cos(2\pi x)\big) d\mathbb{P}_\eta(x) = 0 \qquad (*)$$
   Допустим, что $\mathbb{P}_\eta\{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\} > 0$. Подынтегральная функция в равенстве $(*)$ строго положительна. Тогда значение интеграла $(*)$ строго больше 0 (этот факт я доказывал в одном из прошлых ДЗ). Это противоречие.

   Значит, $\mathbb{P}_\eta\{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\} = 0 \implies \mathbb{P}_\eta\{\mathbb{Z}\} = \mathbb{P}\{\eta \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{P}\Big\{\xi \in \{a + kh\}_{k\in\mathbb{Z}}\Big\} = 1$.

Задача 2

(a) Может ли функция $\varphi(t)$ быть характеристической функцией некоторой случайной величины?

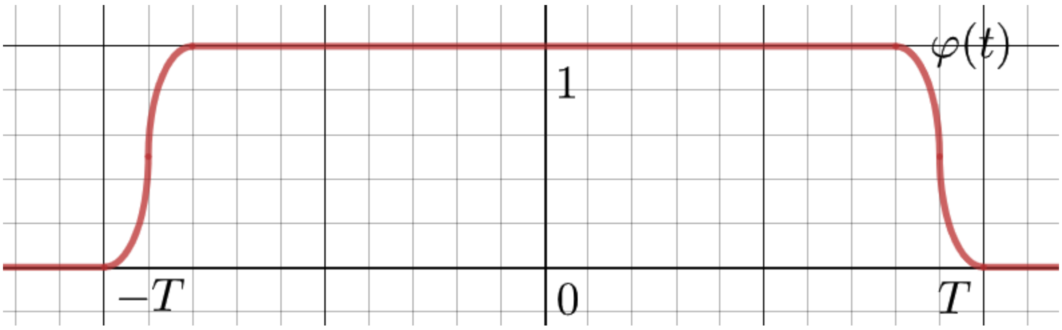
$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & x \in [-T, T] \\ 0, & x \notin [-T, T] \end{cases}$$

(b) Изменится ли ответ, если сгладить разрывы φ в точках $-T$ и T?

Решение:

(a) Нет, т.к. характеристическая функция любой случайной величины равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

(b) Под сглаживанием будем понимать примерно следующее:



Для такой функции выполнен критерий "решетчатости" из задачи 1. Действительно, $\exists h = \frac{4\pi}{T} > 0$:

$$\varphi\left(\frac{2\pi}{h}\right) = \varphi\left(\frac{T}{2}\right) = 1$$

Допустим, что φ — характеристическая функция с.в. ξ. Значит, ξ имеет решетчатое распределение. Тогда, аналогично задаче 1, φ имеет вид

$$\varphi(t) = e^{ita} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k e^{itkh}, \qquad a \in \mathbb{R}$$

Подставляя $t_0 = \frac{16\pi}{h} = 2T$, получаем

$$\varphi(t_0) = e^{it_0 a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \cdot 1 = e^{it_0 h} \neq 0$$

Это противоречие, так как $\varphi(2T) = 0$. Значит, даже сглаженная функция φ не может являться характеристической функцией.

Задача 3

Пусть ξ и η — iid, $\varphi(t)$ — их характеристическая функция. Найти характеристическую функцию с.в. $\xi - \eta$.

Решение:

Характеристическая функция $-\eta$: $\varphi_1(t) = \varphi(-t)$. Так как ξ и η независимы, то ξ и $-\eta$ независимы, поэтому характеристическая функция их суммы:

$$\psi(t) = \varphi(t)\varphi_1(t) = \varphi(t)\varphi(-t) = \left|\varphi(t)\right|^2$$

Задача 4

На вероятностном пространстве $\Big([0,1],\ \mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mu\Big)$, где μ — мера Лебега, задана случайная величина ξ. Найти ее характеристическую функцию, если

(a) $\xi(w) = \begin{cases} 2w, & 0 \le w \le \frac{1}{2} \\ 2w - 1, & \frac{1}{2} < w \le 1 \end{cases}$

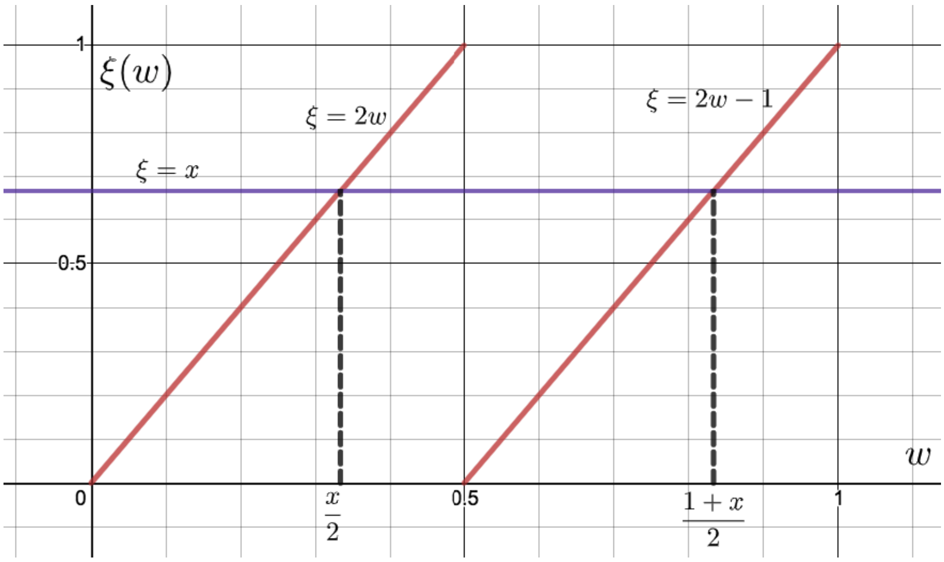
(b) $\xi(w) = \begin{cases} 0, & w = 0 \\ \ln w, & w > 0 \end{cases}$

(c) $\xi(w) = \begin{cases} 1, & 0 \le w \le \frac{1}{3} \\ 0, & \frac{1}{3} < w < \frac{2}{3} \\ 1, & \frac{2}{3} \le w \le 1 \end{cases}$

Решение:

(a) Найдем функцию распределения ξ:

$$F_\xi(x) = 0 \ \text{ при } x \le 0, \qquad F_\xi(x) = 1 \ \text{ при } x \ge 1$$



При $x \in (0, 1)$:

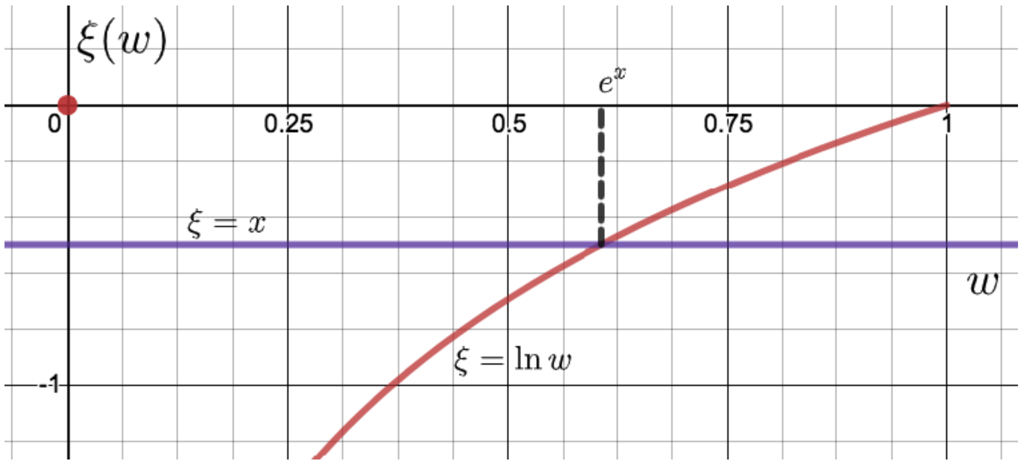
$$F_\xi(x) = \mu\{w \mid \xi(w) \in [0, x)\} = \mu\left(\left[0, \frac{x}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{1+x}{2}\right)\right) = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$$

Значит, $\xi \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Тогда характеристическая функция:

$$\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx = \int\limits_0^1 e^{itx} dx = \frac{e^{it} - 1}{it}$$

(b) Найдем функцию распределения ξ:

$$F_\xi(x) = 1 \ \text{ при } x \ge 0$$



При $x < 0$:

$$F_\xi(x) = \mu\{w \mid \ln w < x\} = \mu(0, e^x) = e^x$$

Плотность распределения такой случайной величины $f_\xi = \frac{d}{dx}F_\xi$:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases} \qquad \implies \qquad -\xi \sim \mathrm{Exp}(1)$$

Характеристическая функция:

$$\varphi_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{(it+1)x} dx = \frac{1}{it+1}$$

(c) ξ принимает только 2 значения (0 и 1), значит $\xi \sim \mathrm{Be}(p)$, где $p = \frac{2}{3}$. Тогда ее характеристическая функция:

$$\varphi_\xi(t) = 1 - p + pe^{it} = \frac{1 + 2e^{it}}{3}$$