Случайные процессы. ДЗ 11-12.

Прохоров Юрий, 776

Задача 11.1

Два шахматиста A и B участвуют в длительном шахматном турнире, в котором за победу в каждой партии дается одно очко, а за поражение отнимается одно очко. Вероятности обоих шахматистов победить или проиграть описываются следующим образом:

результат предыдущей партии	победа A	ничья	поражение A
$\mathbb{P}\{$победа $A\}$	p	p	p
$\mathbb{P}\{$ничья$\}$	$1-p-q$	$1-p-q$	$1-p-q$
$\mathbb{P}\{$поражение $A\}$	q	q	q

Вероятности шахматиста A.

результат предыдущей партии	победа B	ничья	поражение B
$\mathbb{P}\{$победа $B\}$	$p+\varepsilon$	p	$p-\varepsilon$
$\mathbb{P}\{$ничья$\}$	$1-p-q$	$1-p-q$	$1-p-q$
$\mathbb{P}\{$поражение $B\}$	$q-\varepsilon$	q	$q+\varepsilon$

Вероятности шахматиста B.

Кто из игроков A и B наберет больше очков в длительном турнире?

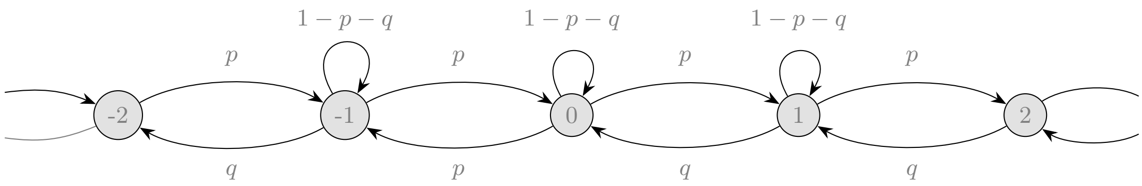
Решение:

Считаем, что между собой шахматисты не играют и исходы их партий независимы.

а) Рассмотрим сначала шахматиста A.

Подход с использованием марковских цепей для моделирования числа очков со временем не работает, потому что цепь не является эргодичной.

Количество его очков в зависимости от номера партии можно представить в виде дискретной марковской цепи:



Можно показать, что при любых p и q все состояния этой цепи нулевые (аналогично случайному блужданию на $\mathbb{Z}$). Тогда из критерия сильной эргодичности следует, что данная цепь **не сильно эргодична**.

Также можно показать, что у нее **нет стационарных распределений**. Решим систему $P^T\pi = \pi, \quad \sum \pi_k = 1$. Для k-ой строчки системы:

$$p\pi_{k-1} + (1-p-q)\pi_k + q\pi_{k+1} = \pi_k$$

$$\pi_{k+1} - \frac{p+q}{q}\pi_k + \frac{p}{q}\pi_{k-1} = 0$$

Решая эту рекурренту, находим

$$p \neq q \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_k = C_1\left(\frac{p}{q}\right)^k + C_2$$

$$p = q \qquad \Longrightarrow \qquad \pi_k = C_1 k + C_2$$

Условие нормировки не выполняется ни в одном из случаев, поэтому стационарных распределений нет. Значит, нет эргодичности (слабой).

Рассмотрим случайные величины — добавка к очкам после k-ой партии

$$X_k = \begin{cases} +1 & \text{, с вер. } p \\ 0 & \text{, с вер. } 1-p-q \\ -1 & \text{, с вер. } q \end{cases}, \qquad \mathbb{E}X_k = p - q$$

По условию они независимы и одинаково распределены. Значит, выполняется усиленный закон больших чисел:

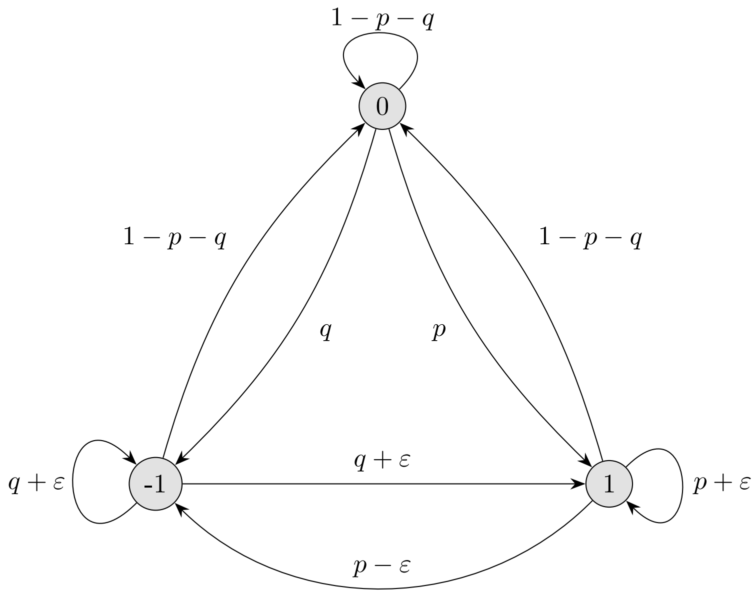
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \mathbb{E}X_1 = p - q$$

Тогда можно оценить число очков после N партий:

$$S_A = \sum_{k=1}^{N} X_k \approx N(p-q)$$

b) Рассмотрим шахматиста B.

Рассмотрим другой подход. Рассмотрим цепь с тремя состояниями $1, 0, -1$. Нахождение цепи на k-ом шаге в состоянии 1 будем интерпретировать как победу шахматиста в k-ой партии. Тогда, если цепь окажется эргодичной, мы сможем оценить долю времени нахождения в каждом состоянии и получить оценку суммарного количества очков.



Эта цепь неразложима и апериодична, значит, она **сильно эргодична**. Матрица переходов:

$$P = \begin{bmatrix} p+\varepsilon & 1-p-q & q-\varepsilon \\ p & 1-p-q & q \\ p-\varepsilon & 1-p-q & p+\varepsilon \end{bmatrix}$$

Найдем стационарное распределение. Решим систему $P^T\pi = \pi$. После вычислений получается:

$$\pi_1 = \frac{p - \varepsilon(p+q)}{1-2\varepsilon}, \qquad \pi_0 = 1 - p - q, \qquad \pi_{-1} = \frac{q - \varepsilon(p+q)}{1-2\varepsilon}$$

Заметим, что данное вычисление верно и при $\varepsilon = 0$, поэтому предудущий случай можно было свести к этому.

Из сильной эргодичности следует, что доля времени, проведенная в i-ом состоянии примерно равно π_i. Формально:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{I}\{X_k = i\} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \pi_i, \qquad i \in \{1, 0, -1\}$$

Тогда в состоянии 1 цепь побывала примерно $\pi_1 N$ раз (т.е. столько партий выиграл шахматист), а в состоянии -1 — примерно $\pi_{-1}N$ раз (столько партий шахматист проиграл).

Тогда оценка количества очков для шахматиста B:

$$S_B \approx \pi_1 N - \pi_{-1} N = \frac{p-q}{1-2\varepsilon}N$$

Итак, получается, что

$$S_A = (p-q)N, \qquad S_B = \frac{p-q}{1-2\varepsilon}N$$

То есть если $p > q$, то больше очков наберет шахматист B. Если $p < q$, то больше очков наберет шахматист A. Если $p = q$, то у обоих будет примерно по 0 очков, но дисперсия числа очков будет больше у игрока B.

Задача 11.2

Ладья совершает случайные блуждания по шахматной доске 8×8 (допустимыми являются шаги любой длины, параллельные сторонам доски). В любой момент времени шаги все допустимые шаги равновероятны. Найти среднее время возвращения ладьи в угол.

Решение:

Случайное блуждание ладьи — случайное блуждание по неориентированному графу. Легко видеть, что степень любой вершины равна 14 (столько допустимых шагов у ладьи в любой клетке). Поэтому в каждую вершину можно придти 14 способами. Это значит, что матрица данной ОДМЦ — дважды стохастическая.

Стационарное распределение дважды стохастической матрицы — равномерное:

$$\pi_i = \frac{1}{64}, \qquad \forall i \in E$$

Данная ОДМЦ является сильно эргодичной, так как она неразложима и апериодична, поэтому найденное стационарное распределение единственно.

В общем случае, при случайном блуждании по неориентрированному графу с m ребрами стационарное распределение имеет вид

$$\pi_i = \frac{\deg(i)}{2m}, \qquad i \in E$$

Нам требуется найти $\mu_i = \mathbb{E}\sigma_i$, где σ_i — число шагов до первого возвращения в i-ую клетку. Но эти числа связаны со стационарным распределением следующим образом:

$$\mu_i = \frac{1}{\pi_i} = 64, \qquad \forall i \in E$$

Итак, в среднем ладья вернется в любую клетку через 64 шага.

Задача 12.1

Пусть $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — ОДМЦ со множеством состояний $E = \{0, 1\}$ и матрицей переходов

$$P = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\beta & \beta \end{bmatrix}, \qquad 0 \le \alpha, \beta \le 1$$

При различных α, β исследовать

(a) существование и единственность стационарного распределения;

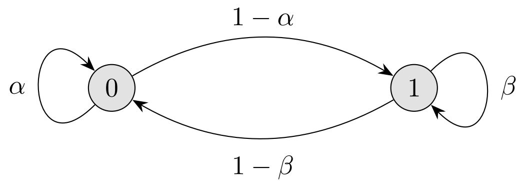
(b) существование предельного распределения p^*, не зависящего от начального;

(c) эргодичность в сильном смысле;

(d) как можно ослабить требование сильной эргодичности, чтобы для любого начального распределения и любой ограниченной функции f существовал предел

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} f^*$$

Решение:



(a) Хотя бы одно стационарное распределение существует всегда, потому что цепь конечная.

Стационарное распределение единственно тогда и только тогда, когда замкнутый класс эквивалентности единственен. Это выполнено, если $\alpha + \beta < 2$, т.е.

$$\begin{array}{c}\text{стационарное распределение}\\ \text{не единственно}\end{array} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha = \beta = 1$$

(b) Пусть $p(0)$ — произвольное начальное распределение. Тогда

$$p(n) = (P^T)^n p(0)$$

Найдем собственные значения и собственные векторы P^T. Собственные значения:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = \alpha + \beta - 1$$

Далее рассмотрим два случая:

1. $\alpha = \beta = 1$.

   Тогда матрица $P^T = I$, поэтому $p(n) = I^n p(0) = p(0)$ — предельное распределение существует, но зависит от начального.

2. $\alpha + \beta < 2$.

   Можно сразу сказать, что в этом случае цепь имеет единственное стационарное распределение, которое как раз будет предельным вне зависимости от начального распределения, если цепь дополнительно является апериодичной. Получим это явным способом.

   Собственные векторы

$$h_1 = \begin{bmatrix} 1-\beta \\ 1-\alpha \end{bmatrix}, \qquad h_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   Диагонализация матрицы P^T:

$$P^T = \begin{bmatrix} \alpha & 1-\beta \\ 1-\alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\beta & 1 \\ 1-\alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha+\beta-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\alpha & \beta-1 \end{bmatrix} \frac{1}{2-\alpha-\beta}$$

   Тогда

$$p(n) = (P^T)^n p(0) = \begin{bmatrix} 1-\beta & 1 \\ 1-\alpha & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\alpha+\beta-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\alpha & \beta-1 \end{bmatrix} \frac{p(0)}{2-\alpha-\beta}$$

   Далее возможны две ситуации:

   - $\alpha = \beta = 0$
     Этот случай соответствует периодичности цепи. Предельного распределения p^* не существует.

- $0 < \alpha + \beta < 2$

  Этот случай соответствует существованию единственного замкнутого класса и апериодичности цепи.

  Имеем, что $(\alpha + \beta - 1)^n \to 0$, поэтому

  $$p(n) \xrightarrow{n \to \infty} \frac{1}{2 - \alpha - \beta} \begin{bmatrix} 1 - \beta \\ 1 - \alpha \end{bmatrix} = p^*,$$

  т.е. предельное распределение существует и не зависит от начального.

(c) По определению, цепь будет сильно эргодичной, когда существует не зависящее от начального предельное распределение p^*, все компоненты которого положительны. Исходя из предыдущего пункта, заключаем, что это выполняется, если

$$0 < \alpha < 1, \qquad 0 < \beta < 1$$

Можно было воспользоваться критерием эргодичности:конечная цепь эргодична тогда и тольго тогда, когда она неразложима и апериодична. Это приводит к тем же условиям на α и β.

(d) Можно ввести эргодичность для конечных цепей как единственность стационарного распределения. Такое определение эквивалентно единственности замкнутого класса эквивалентности в ОДМЦ.

Если дополнительно цепь апериодична, то из этого определения эргодичности следует сильная эргодичность (обратное верно всегда).

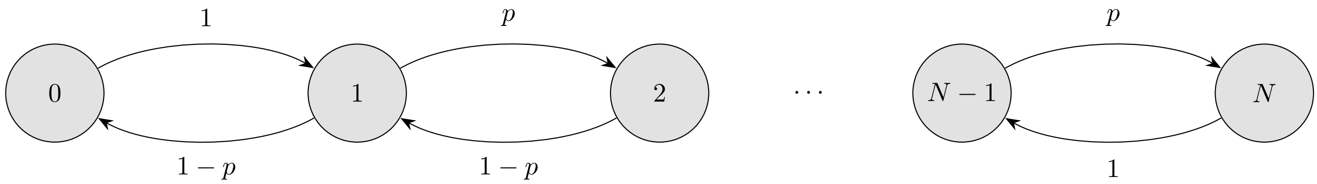
Согласно пособию А. Гасникова (с. 139), такой эргодичности достаточно для того, чтобы

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(X_k) \xrightarrow[n \to \infty]{\text{п.н.}} f^*$$

для любой ограниченной функции f.

Задача 12.2

Дана конечная ОДМЦ с $0 < p < 1$.



Исследовать

(a) существование и единственность стационарного распределения;

(b) существование предельного распределения p^*, не зависящего от начального;

(c) эргодичность в сильном смысле;

(d) эргодичность в слабом смысле.

Решение:

(a) Цепь конечна, поэтому стационарное распределение существует. Цепь неразложима, поэтому стационарное распределение единственно.

(b) Цепь конечна, неразложима, поэтому все состояния положительно возвратны, значит, $p_{i,i}(n) \not\to 0$. Кроме того, цепь является периодической с периодом 2, поэтому $p_{i,i}(2m-1) = 0$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что предела $\lim\limits_{n \to \infty} p_{i,i}(n)$ не существует. Значит, не существует предельного распределения p^*.

(c) Цепь является апериодической, поэтому из критерия сильной эргодичности следует, что цепь не является сильно эргодической.

(d) Для конечных цепей можно ввести *слабую эргодичность*, заменив пределы на пределы по Чезаро. Это позволит периодичным цепям быть эргодичными.

Будем называть конечную ОДМЦ *(слабо) эргодичной*, если для любого $j \in E$ существует не зависящий от i предел

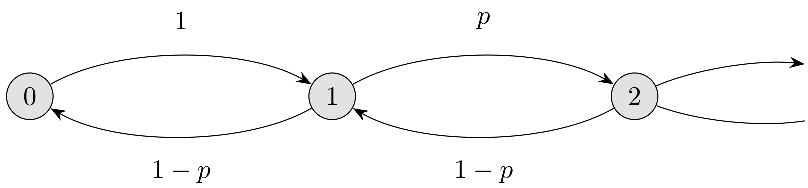
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{i,j}(k) = p_j^* \geq 0$$

Для эргодичности в этом смысле необходимо и достаточно единственности стационарного распределения.
Верно ли это утверждение?

Для нашей цепи стационарное распределение единственно, поэтому цепь (слабо) эргодична.

Задача 12.3

Рассматриваются случайные блуждания на $\mathbb{Z}_+$ с отражающим экраном $(0 < p < 1)$:



Исследовать

(a) при каких p цепь будет положительно возвратной, нуль возвратной и невозвратной;

(b) при каких p существует стационарное распределение;

(c) эргодичность в сильном смысле;

(d) эргодичность в слабом смысле.

Решение:

(a) Решение проведем в две шага, сначала исследуем нулевость, а потом возвратность.

1. Цепь неразложима и апериодична, поэтому

   $$\text{цепь положительно возвратна} \iff \text{существует стационарное распределение}$$

   Попробуем найти стационарное распределение, т.е. решить систему $P^T\pi = \pi$, $\sum_k \pi_k = 1$. Записывая ее покомпонентно, получаем

   $$\begin{cases} \pi_0 = (1-p)\pi_1 \\ \pi_k = p\pi_{k-1} + (1-p)\pi_{k+1}, \quad k \geq 1 \end{cases}$$

   Решая вторую рекурренту, находим

   $$\pi_k = C_1 \left(\frac{p}{1-p}\right)^k + C_2$$

   Из нормировки получаем, что $C_2 = 0$ и $\pi_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$. Это значит, что при $p \geq 1-p$, т.е. при $p \geq \frac{1}{2}$, не существует стационарного распределения, а при $p < \frac{1}{2}$ — существует.

2. Теперь исследуем возвратость. Вычислим F_0 — вероятность вернуться в 0 за конечное число шагов.

$$F_0 = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(n),$$

где $f_0(n)$ — вероятность первый раз вернуться в 0 через n шагов. Цепь периодична, поэтому $f_{2m-1} = 0$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Посчитаем число способов вернуться ровно через $2m$ шагов. Несложно понять, что это число равно числу правильных скобочных последовательностей длины $2(m-1)$, то есть числу Каталана C_{m-1}. Вероятность каждой такой траектории одинакова и равна $p^{m-1}(1-p)^m$. Поэтому

$$F_0 = \sum_{m=1}^{\infty} f_0(2m) = \sum_{m=1}^{\infty} C_{m-1} p^{m-1}(1-p)^m = (1-p)\sum_{m=0}^{\infty} C_m \big[p(1-p)\big]^m$$

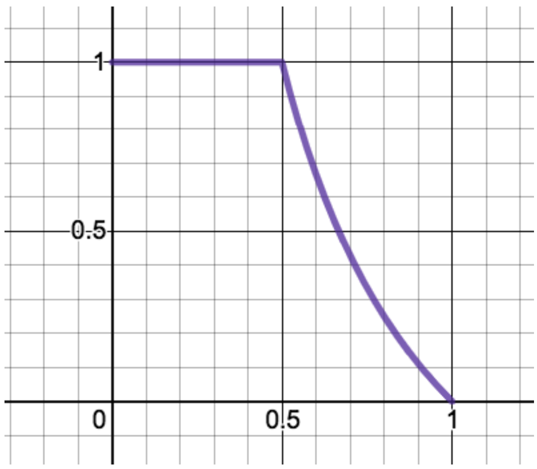
Известно, что производящая функция чисел Каталана имеет вид

$$C(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x},$$

поэтому сумма данного ряда есть

$$F_0 = (1-p)C\big(p(1-p)\big) = \frac{1-\sqrt{1-4p(1-p)}}{2p}$$

График этой функции выглядит следующим образом



Итого получаем, что при $p \le \frac{1}{2}$ такое блуждание возвратно, а при $p > \frac{1}{2}$ невозвратно.

Итого получаем, что

- при $p < \frac{1}{2}$ цепь положительно возвратна;
- при $p = \frac{1}{2}$ цепь нуль возвратна;
- при $p > \frac{1}{2}$ цепь невозвратна.

(b) В предыдущем пункте мы нашли, что стационарное распределение существует при $p < \frac{1}{2}$.

(c) По критерию сильной эргодичности, необходимым условием является апериодичность. Данная цепь имеет период 2, поэтому она не является сильно эргодичной.

(d) При $p < \frac{1}{2}$ цепь эргодична в том смысле, что ее стационарное распределение единственно.