Математическая статистика. ДЗ 8.

Прохоров Юрий, 776

Задача 1

Пусть имеется выборка $\mathbf{X} = \{X_1\}$ объема $n = 1$.

Относительно распределения X_1 сформулированы две гипотезы:

$$\begin{cases} H_0: \quad X_1 \sim \mathcal{U}[0,1] \\ \\ H_1: \quad f_{X_1} = \begin{cases} \frac{3}{2}, & x \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2}, & x \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \end{cases}$$

Построить решающее правило Неймана-Пирсона при ошибке первого рода $\alpha = 0.25$.

То есть фактически требуется построить наиболее мощный критерий уровня $\alpha_0 = 0.25$.

Решение:

Вычислим отношение правдоподобий:

$$\Lambda(\mathbf{X}) = \frac{f_{X_1|H_1}(X_1)}{f_{X_1|H_0}(X_1)} = \begin{cases} \frac{3}{2}, & X_1 \in [0, \frac{1}{2}), \\ \frac{1}{2}, & X_1 \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ищем решающее правило в виде

$$\delta_{c,p}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \Lambda(\mathbf{X}) > c, \\ p, & \Lambda(\mathbf{X}) = c, \\ 0, & \Lambda(\mathbf{X}) < c. \end{cases}$$

Тогда ошибка первого рода:

$$\alpha = \mathbb{E}_{H_0}\left[\delta_{c,p}(\mathbf{X})\right] = \mathbb{P}_{H_0}\{\Lambda(\mathbf{X}) > c\} + p \cdot \mathbb{P}_{H_0}\{\Lambda(\mathbf{X}) = c\}$$

Будем перебирать разные c, пока не найдем возможное решение.

- $c > \frac{3}{2}$
$$\alpha = 0 + p \cdot 0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{нет решений}$$
- $c = \frac{3}{2}$
$$\alpha = 0 + p \cdot \mathbb{P}_{H_0}\{X_1 \in [0, \tfrac{1}{2})\} = \frac{p}{2} = \frac{1}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad p = \frac{1}{2}$$
- $\frac{1}{2} < c < \frac{3}{2}$
$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}\{X_1 \in [0, \tfrac{1}{2})\} + p \cdot 0 = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{нет решений}$$
- $c = \frac{1}{2}$
$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}\{X_1 \in [0, \tfrac{1}{2})\} + p \cdot \mathbb{P}_{H_0}\{X_1 \in [\tfrac{1}{2}, 1]\} = \frac{1}{2} + \frac{p}{2} = \frac{1}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad p = -\frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{нет решений}$$
- $c < \frac{1}{2}$
$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}\{X_1 \in [0, 1]\} + p \cdot 0 = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{нет решений}$$

В итоге получаем единственное возможное решение:

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & X_1 \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$