Теорвер. ДЗ 4-5.

Прохоров Юрий, 776

Сначала я докажу какие-то общие утверждения, их можно не читать.

Случайные векторы

Опр. 1 Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные величины, определенные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Тогда их упорядоченный набор $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется *случайным вектором.*

Опр. 2 Вектор-функция $\xi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ называется *случайным вектором*, если она измерима относительно пары $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, т.е.

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \to \quad \xi^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

Важно, что случайный вектор, будучи функцией, определен на том же самом пространстве элементарных исходов Ω, что и любая из составляющих его случайных величин.

Доказывать эквивалентность этих определений не будем, но скажем, что для этого нужно понять структуру борелевской σ-алгебры на $\mathbb{R}^n$ (напомним, что, по определению, это сигма-алгебра, порожденная семейством всех открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$).

Далее используются материалы, приведенные в §1.12, §2.12 и §2.13 конспекта Н.А. Гусева по мере и интегралу Лебега.

Опр. Пусть $(X, \mathcal{E})$, $(Y, \mathcal{F})$ — измеримые пространства. *Произведением сигма-алгебр* $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ называется следующая порожденная сигма-алгебра на $X \times Y$:

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{P}), \qquad \mathcal{P} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{E},\ B \in \mathcal{F}\}$$

Следующее утверждение доказано в пособии С.В. Симушкина “Методы теории вероятностей. Часть 1.” в §III.2, теорема 117 (стр. 138).

Утв. 1 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\Big(\big\{(a_1, a_2) \times (b_1, b_2) \bigm| a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}\big\}\Big)$ и аналогично для $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Утв. 2 Определения 1 и 2 случайного вектора эквивалентны.

Опр. *Распределением случайного вектора* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется функция $\mathbb{P}_\xi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow [0, 1]$ такая, что

$$\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}\{\xi \in B\},$$

где $\mathbb{P}$ — вероятностная мера на исходном Ω.

Опр. *Совместным распределением* случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ называется распределение составленного из них вектора $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

Пусть X, Y — произвольные случайные величины на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Каждая из них индуцирует на $\mathbb{R}$ вероятностную меру, т.е. распределение случайной величины:

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}\{X \in A\}, \qquad \mathbb{P}_Y(A) = \mathbb{P}\{Y \in A\}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Теперь составим из этих величин случайный вектор $\xi = (X, Y)$. Он также индуцирует на $\mathbb{R}^2$ вероятностную меру $\mathbb{P}_\xi$, определенную выше.

Зададимся вопросом, как связаны распределения случайных величин $\mathbb{P}_X$ и $\mathbb{P}_Y$ с их совместным распределением, то есть с распределением случайного вектора $\mathbb{P}_\xi$.

Оказывается, что конкретный ответ на этот вопрос можно получить в случае, когда X и Y независимы.

Опр. Пусть $(X, \mathcal{E}, \mu)$, $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ — измеримые пространства с мерами. Мера

$$\lambda: \ \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$$

называется *произведением мер* μ и ν, если

$$\forall A \in \mathcal{E}, \ B \in \mathcal{F} \quad \to \quad \lambda(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

Теорема о произведении мер. Пусть $(X, \mathcal{E}, \mu)$, $(Y, \mathcal{F}, \nu)$ — пространства с сигма-конечными мерами. Тогда произведение мер

$$(\mu \times \nu): \ \mathcal{E} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty]$$

существует и единственно. При этом $\forall M \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ выполнено:

$$(\mu \times \nu)(M) = \int\limits_X \left(\int\limits_Y \mathbb{I}_M(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int\limits_Y \left(\int\limits_X \mathbb{I}_M(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y),$$

где $\mathbb{I}_M$ — индикаторная функция множества M.

Утв. 3 Пусть X, Y — <u>независимые</u> случайные величины на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Тогда распределение случайного вектора $\xi = (X, Y)$, т.е. совместное распределение X и Y, является произведением мер $\mathbb{P}_X$ и $\mathbb{P}_Y$:

$$\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_\xi = \mathbb{P}_X \times \mathbb{P}_Y$$

и для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ выполнено

$$\mathbb{P}_\xi(B) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_B(x, y) d\mathbb{P}_Y(y) \right) d\mathbb{P}_X(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_B(x, y) d\mathbb{P}_X(x) \right) d\mathbb{P}_Y(y)$$

Доказательство:
По определению, $\mathbb{P}_\xi$ — мера, определенная на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. По утверждению 1, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Убедимся, что $\mathbb{P}_\xi$ является произведением мер.

Пусть $A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Тогда в силу независимости с.в. X и Y:

$$\mathbb{P}_\xi(A \times B) = \mathbb{P}\{\xi \in (A \times B)\} = \mathbb{P}\{X \in A, \ Y \in B\} = \mathbb{P}\{X \in A\} \cdot \mathbb{P}\{Y \in B\} = \mathbb{P}_X(A) \cdot \mathbb{P}_Y(B),$$

значит, $\mathbb{P}_\xi$ действительно произведение мер $\mathbb{P}_X$ и $\mathbb{P}_Y$.

Все вероятностные меры конечны, а значит, и сигма-конечны. Тогда по теореме о произведении мер, $\mathbb{P}_\xi$ определяется требуемым выражением. $\square$

Зависимость компонент случайного вектора

Опр. Компоненты случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называются *независимыми в совокупности*, если

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \to \quad F_\xi(x) = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x_i)$$

или эквивалентно:

$$\forall B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \to \quad \mathbb{P}\{\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n\} = \mathbb{P}\{\xi_1 \in B_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{\xi_n \in B_n\}$$

В случае непрерывного случайного вектора это эквивалентно:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \to \quad f_\xi(x) = \prod_{i=1}^{n} f_{\xi_i}(x_i)$$

Если требования независимости не выполняются, то говорят об условных распределениях. Рассмотрим двумерный случайный вектор $\xi = (X, Y)$. Тогда *условное распределение*:

$$\mathbb{P}\{X \in B_1 \mid Y \in B_2\} = \frac{\mathbb{P}\{X \in B_1,\ Y \in B_2\}}{\mathbb{P}\{Y \in B_2\}}, \qquad B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

условная функция распределения:

$$F_{X|Y}(x|y_0) = \mathbb{P}\{X < x \mid Y = y_0\} = \frac{\mathbb{P}\{X < x,\ Y = y_0\}}{\mathbb{P}\{Y = y_0\}}, \qquad x, y_0 \in \mathbb{R}$$

Для непрерывного случайного вектора *условная плотность распределения*:

$$f_{X|Y}(x|y_0) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y_0)}{f_Y(y_0)},$$

где $f_{(X,Y)}$ — *совместная* плотность распределения, т.е. плотность случайного вектора, а f_Y — плотность маргинального распределения $Y:\ f_Y(y_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y_0)dx$.

Геометрически для случая двумерного случайного вектора (X, Y) это можно представить следующим образом. Плотность совместного распределения $f_{(X,Y)}$ — это некоторая поверхность на $\mathbb{R}^2$. Тогда условная плотность $f_{X|Y}$ — график, получаемой сечением этой поверхности плоскостью $Y = y_0$ (и отнормированный на единицу).

Опр. *Матожиданием* случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется вектор из матожиданий составляющих его случайных величин:

$$\mathbb{E}\xi = \big(\mathbb{E}\xi_1, \dots, \mathbb{E}\xi_n\big)$$

Опр. *Центрированным* случайным вектором называется случайный вектор $\mathring{\xi} = \xi - \mathbb{E}\xi$.

Опр. *Ковариационной матрицей* случайного вектора называется матрица

$$\mathbb{V}\xi = \mathbb{E}\big[\mathring{\xi}\mathring{\xi}^T\big] = \begin{bmatrix} \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_1) & \dots & \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_1) & \dots & \operatorname{cov}(\xi_n, \xi_n) \end{bmatrix},$$

где $\operatorname{cov}(X, Y)$ — *ковариация* случайных величин:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\big[\mathring{X}\mathring{Y}\big] = \mathbb{E}\Big[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\Big]$$

Это симметричная положительно полуопределенная матрица, на диагонали которой стоят дисперсии компонент случайного вектора.

Опр. *(Нормированной) корреляционной матрицей* называется матрица

$$R = \left[\frac{\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j)}{\sqrt{\mathbb{V}\xi_i \mathbb{V}\xi_j}}\right]_{i,j=1}^{n}$$

Ее компоненты называются *коэффициентами корреляции*. На диагонали стоят единицы.

Опр. Случайные величины называются *некоррелированными*, если их ковариационная (корреляционная) матрица имеет диагональный вид.

Утв. 4 Попарно независимые случайные величины некоррелированы. Обратное неверно.

Доказательство:
Достаточно показать, что если две с.в. X и Y независимы, то их ковариация равна нулю. Действительно,

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\big] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 0$$

Для независимых случайных величин матожидание произведения равно произведению матожиданий (в дискретном случае легко проверяется). $\square$

Утв. 5 Пусть ξ — случайный вектор. Тогда для случайного вектора $\eta = A\xi + b$ ($A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ b \in \mathbb{R}^n$), получаемого при аффинном преобразовании ξ выполнено

$$\mathbb{E}\eta = A \cdot \mathbb{E}\xi + b, \qquad \mathbb{V}\eta = A \cdot \mathbb{V}\xi \cdot A^T$$

Доказательство:
Пользуемся линейностью матожидания:
$\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\big[A\xi + b\big] = A\mathbb{E}\xi + b$

$\mathbb{V}\eta = \mathbb{E}\big[(\eta - \mathbb{E}\eta)(\eta - \mathbb{E}\eta)^T\big] = \mathbb{E}\big[A(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^T A^T\big] = A\mathbb{E}\big[\mathring{\xi}\mathring{\xi}^T\big]A^T = A\mathbb{V}\xi A^T$ $\square$

Задача 1

Найти матожидание и дисперсию

(a) распределения Пуассона: $\xi \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$;

(b) экспоненциального распределения: $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Решение:

(a) Функция вероятности распределения Пуассона:

$$\mathbb{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \mathbb{P}\{\xi = k\} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$\mathbb{V}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \lambda^2 = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda e^{-\lambda} \left(\lambda \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \right) - \lambda^2 =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left(\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda} \right) - \lambda^2 = \lambda$$

$$\boxed{\xi \sim \mathrm{Pois}(\lambda) \implies \mathbb{E}\xi = \mathbb{V}\xi = \lambda}$$

(b) Функция плотности экспоненциального распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < 0; \\ \lambda e^{-\lambda x} & , \ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{V}\xi = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x} 2x dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda} \cdot \mathbb{E}\xi - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\boxed{\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \implies \mathbb{E}\xi = \frac{1}{\lambda}, \ \ \mathbb{V}\xi = \frac{1}{\lambda^2}}$$

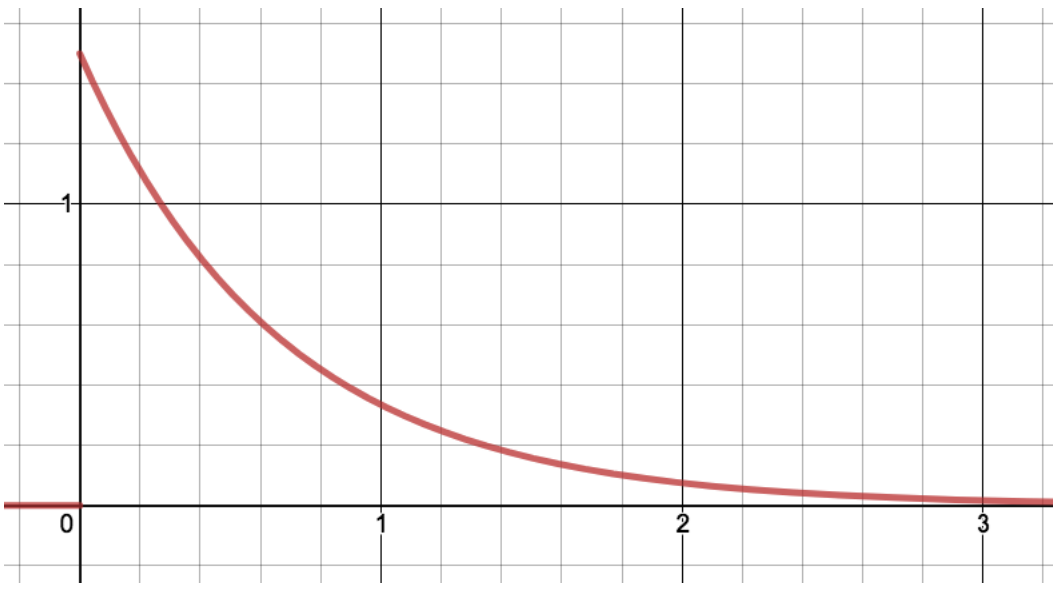


Рис. 1: Плотность экспоненциального распределения с параметром $\lambda = 1.5$

Задача 2

На первом этаже 17-этажного здания в лифт зашли n человек. Найти математическое ожидание и дисперсию числа остановок лифта, если каждый из вошедших (независимо от остальных) может с равной вероятностью жить на любом из $m = 16$ этажей.

Решение:

Определим случайную величину:

$$\xi = \# \text{ остановок лифта } = \mathbb{I}_1 + \ldots + \mathbb{I}_m,$$

где случайные величины $\mathbb{I}_k$ определены как

$$\mathbb{I}_k = \begin{cases} 1, & \text{лифт остановился на } k\text{-ом этаже}, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

то есть это индикаторы соответствующих событий. В силу симметрии, $\mathbb{E}[\mathbb{I}_1] = \ldots = \mathbb{E}[\mathbb{I}_m]$.

Лифт не остановится на k-ом этаже, если все n человек одновременно не живут там. В силу независимости людей друг от друга имеем:

$$\mathbb{P}\{\mathbb{I}_k = 0\} = \Big(\mathbb{P}\{\text{1-ый человек не живет на } k\text{-ом этаже}\}\Big)^n = \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n$$

Тогда все с.в. $\mathbb{I}_k \sim \mathrm{Be}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)^n\right)$, и тогда по свойству линейности матожидания:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}[\mathbb{I}_k] = m - m\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n$$

Утв. 6 Пусть ξ — случайная величина с непрерывной функцией распределения (но сама она не обязательно непрерывна). Тогда $\mathbb{P}\{\xi = a\} = 0$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство:
Заметим, что $\{\xi = a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left\{a \le \xi < a + \dfrac{1}{n}\right\}$ — стягивающаяся система событий. Тогда по свойству непрерывности вероятности и непрерывности функции распределения F:

$$\mathbb{P}\{\xi = a\} = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{a \le \xi < a + \frac{1}{n}\right\}\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{a \le \xi < a + \frac{1}{n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left[F\left(a + \frac{1}{n}\right) - F(a)\right] = 0 \qquad \square$$

Задачи 3 и 1 (доп.)

Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с непрерывной функцией распределения. Будем говорить, что в момент времени n наблюдается рекордное значение, если $X_n > \max\{X_1, \ldots, X_{n-1}\}$.

(a) Найти вероятность того, что рекорд зафиксирован в момент времени n;

(b) Найти матожидание числа рекордов до момента времени n включительно;

(c) Пусть $Y_n = \mathbb{I}\{\text{рекорд в момент n}\}$. Показать, что события $Y_1, Y_2, \ldots$ независимы в совокупности;

(d) Найти дисперсию числа рекордов до момента n включительно;

(e) Показать, что если T — момент появления первого рекорда после момента 1, то $\mathbb{E}T = \infty$.

Решение:

Сначала докажем, что для любых двух с.в. из последовательности выполнено

$$\mathbb{P}\{X_i = X_j\} = 0$$

Для удобства обозначим их X и Y. Составим из них случайный вектор $\xi = (X, Y)$, распределение которого, по утверждению 3, имеет вид

$$\mathbb{P}_\xi(B) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_B(x, y) d\mathbb{P}_Y(y) \right) d\mathbb{P}_X(x), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \tag{$*$}$$

Заметим, что $X = Y$ тогда и только тогда, когда

$$\xi \in \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x + y = 0\right\} = M$$

Таким образом, $\mathbb{P}\{X = Y\} = \mathbb{P}\{\xi \in M\} = \mathbb{P}_\xi(M)$. Рассмотрим внутренний интеграл в равенстве $(*)$. В нем функция $\mathbb{I}_M$ рассматривается как функция одного переменного (то есть x фиксирован), то есть это индикатор множества $\{-x\}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \to \quad \mathbb{I}_M(x, y) = \mathbb{I}_{\{-x\}}(y)$$

Тогда по утверждению 6 внутренний интеграл есть:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_M(x, y) d\mathbb{P}_Y(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{I}_{\{-x\}}(y) d\mathbb{P}_Y(y) = \int\limits_{\{-x\}} d\mathbb{P}_Y = \mathbb{P}_Y\big(\{-x\}\big) = \mathbb{P}\{Y = -x\} = 0$$

Значит и весь интеграл $(*)$:

$$\mathbb{P}\{X = Y\} = \mathbb{P}_\xi(M) = 0$$

(a) Рассмотрим момент времени n. К нему мы получим n случайных величин $X_1, \ldots, X_n$. Вероятность того, что все они различны:

$$\mathbb{P}\{\text{все различны}\} = 1 - \mathbb{P}\{\text{какие-то совпадают}\} \geq 1 - \sum_{i \neq j} \mathbb{P}\{X_i = X_j\} \geq 1 - n^2 \cdot 0 = 1,$$

то есть с вероятностью 1 все с.в. примут различные значения.

Упорядочим их по возрастанию — получим перестановку их индексов (чисел от 1 до n). Из независимости всех этих с.в. следует симметричность, то есть любая перестановка этих чисел равновозможна. Нам нужна вероятность того, что на последнем месте стоит число n (то есть с.в. X_n больше всех остальных).

Из простой комбинаторики получаем, что

$$\mathbb{P}\{\text{рекорд в момент } n\} = \frac{1}{n}$$

(b) Обозначим с.в. ξ — число рекордов до момента n включительно, Y_k — индикатор того, что в момент k был рекорд, $\mathbb{P}\{Y_k = 1\} = \frac{1}{k}$. Тогда

$$\xi = Y_1 + \ldots + Y_n, \qquad Y_k \sim \mathrm{Be}\left(\frac{1}{k}\right)$$

В силу линейности матожидания:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[Y_k] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

(c) Рассмотрим произвольное конечное семейство с.в. $Y_{k_1}, \ldots, Y_{k_n}$ $(k_1 < \ldots < k_n)$. Достаточно проверить, что для любых $r_1, \ldots, r_n \in \{0, 1\}$ выполнено

$$\mathbb{P}\big\{Y_{k_1} = r_1, \ldots, Y_{k_n} = r_n\big\} = \mathbb{P}\{Y_{k_1} = r_1\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{Y_{k_n} = r_n\}$$

Распишем через условную вероятность:

$$\mathbb{P}\big\{Y_{k_1} = r_1, \ldots, Y_{k_n} = r_n\big\} = \mathbb{P}\{Y_{k_1} = r_1, \ldots, Y_{k_{n-1}} = r_{n-1} \mid Y_{k_n} = r_n\} \cdot \mathbb{P}\{Y_{k_n} = r_n\}$$

Вычислим первую вероятность. Аналогично пункту (a), можно считать, что ты генерируем случайную перестановку с.в. $X_1, \ldots, X_{k_n}$. Мы знаем, что $Y_{k_n} = r_n$, то есть где стоит с.в. X_{k_n}. Выкинем ее. Оставшиеся $(k_n - 1)!$ перестановок равновероятны, и на предыдущие рекорды X_{k_n} никак не влияла. Поэтому

$$\mathbb{P}\big\{Y_{k_1} = r_1, \ldots, Y_{k_n} = r_n\big\} = \mathbb{P}\{Y_{k_1} = r_1, \ldots, Y_{k_{n-1}} = r_{n-1}\} \cdot \mathbb{P}\{Y_{k_n} = r_n\}$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получаем нужное выражение.

(d) Пусть $\xi = \#$ число рекордов до момента n. Тогда

$$\xi = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

Случайные величины $Y_1, \ldots, Y_n$ независимы и $Y_k \sim \mathrm{Be}\left(\frac{1}{k}\right)$, поэтому

$$\mathbb{V}\xi = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}Y_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k^2}$$

(e) В силу независимости Y_k в совокупности:

$$\mathbb{P}\{T = n\} = \mathbb{P}\{Y_2 = \ldots = Y_{n-1} = 0,\ Y_n = 1\} = \prod_{k=2}^{n-1} \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Тогда матожидание равно бесконечности:

$$\mathbb{E}T = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n(n-1)} = \infty$$

Задача 4

В $\mathbb{R}^2$ на оси ординат зафиксирована точка $(0, d)$. Случайно и равновероятно выбирается угол $\phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, под которым через точку $(0, d)$ проводится прямая (под углом ϕ к оси ординат). Пусть с.в. X — координата пересечения этой прямой с осью абсцисс. Найти

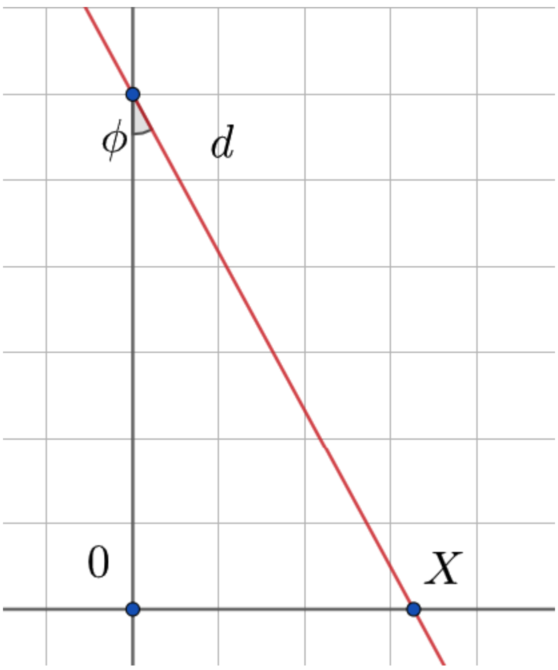
(a) плотность распределения X;

(b) матожидание X;

(c) дисперсию X.

Решение:

(a) Из простой геометрии видим, что $X = d\,\mathrm{tg}\,\phi = g(\phi)$.



Это строго монотонное дифференцируемое преобразование с.в. ϕ, тогда

$$f_X(x) = \frac{f_\phi(\phi)}{|g'(\phi)|} = \frac{\cos^2\phi}{\pi d} = \frac{d}{\pi(d^2+x^2)}$$

Значит, X имеет распределение Коши со параметрами $m = 0$ и $\gamma = d$:

$$X \sim \text{Cauchy}(m, \gamma) \quad \Longrightarrow \quad f_X(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{\gamma^2 + (x-m)^2}$$

(b), (c) Матожидание непрерывной с.в. существует, если следующий интеграл сходится абсолютно:

$$\mathbb{E}X = \frac{d}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{d^2+x^2} = \frac{d}{2\pi}\left(\int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{+\infty}\right)\frac{d(x^2+d^2)}{x^2+d^2} = \frac{d}{2\pi}\left(\int\limits_{+\infty}^{d^2} + \int\limits_{d^2}^{+\infty}\right)\frac{du}{u} = \frac{d}{2\pi}\left(\ln u\Big|_{+\infty}^{d^2} + \ln u\Big|_{d^2}^{+\infty}\right)$$

Каждый из интегралов в сумме расходится, поэтому матожидание $\mathbb{E}X$ не определено. Значит, дисперсия $\mathbb{V}X$ тоже не определена.

Теорема о преобразовании случайного вектора.
Пусть ξ — непрерывный случайный вектор с непрерывной плотностью распределения, $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывно дифференцируемое обратимое отображение. Тогда случайный вектор $\eta = \phi(\xi)$ также является непрерывным с плотностью

$$f_\eta(y) = \frac{f_\xi(x)}{|\det J(x)|}\Bigg|_{x=\phi^{-1}(y)},$$

где в знаменателе стоит модуль детерминанта матрицы Якоби для ϕ: $J(x) = \left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\right)$.

Теорема следует из теоремы о замене переменных в кратном интеграле из мат. анализа.

Задача 5

Пусть $\xi, \eta \sim \mathcal{N}(0,1)$ — iid (independent identically distributed). Найти распределение $\xi^2 + \eta^2$.

Решение:

Схема решения:

1. Составить из величин ξ, η случайный вектор p и найти его распределение.
2. Произвести преобразование случайного вектора, чтобы одна из компонент была $\xi^2 + \eta^2$.
3. Найти маргинальное (частное) распределение этой компоненты.

Рассмотрим случайный вектор $p = (\xi, \eta)$. В силу независимости случайных величин:

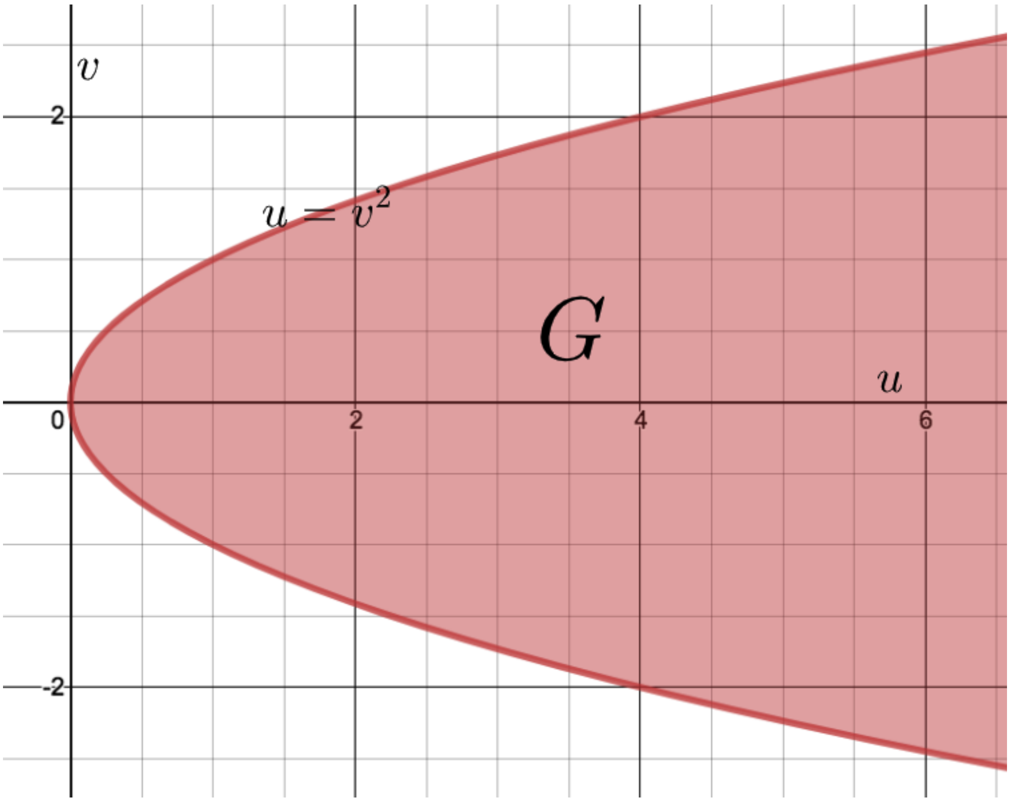
$$F_p(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y) \qquad \Longrightarrow \qquad f_p(x,y) = \frac{\partial^2 F_p(x,y)}{\partial x \partial y} = f_\xi(x)f_\eta(y) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

Выполним следующее преобразование:

$$\phi: \begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = y \end{cases} \qquad |\det J| = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2|x|$$

Вектор p принимает все значения в $\mathbb{R}^2$, тогда несложно видеть, что случайный вектор $q = \phi(p)$ принимает значения во множестве

$$G = \left\{(u,v) \;\middle|\; u \geq v^2\right\}$$



Отображение ϕ не является взаимно однозначным. Для почти всех пар $(u, v) \in G$ существует равно два прообраза:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{u - v^2} \\ y = v \end{cases}$$

Так как распределение с.в. ξ симметрично, то есть $f_p(x, y) = f_p(-x, y)$, то можно рассмотреть преобразование ϕ вектора p при $x > 0$, получить по теореме плотность распределение для вектора q, а потом умножить на 2 (так как было ровно 2 прообраза).

При $x > 0$ преобразование биективно, поэтому работает теорема о преобразовании плотности распределения случайного вектора. Тогда при $(u, v) \in G$:

$$f_q(u, v) = 2 \cdot \frac{f_p(x, y)}{2x} = \frac{1}{\sqrt{u - v^2}} \frac{\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)}{2\pi} = \frac{\exp\left(-\frac{u}{2}\right)}{2\pi\sqrt{u - v^2}}$$

Замечание: полученная выше формула не имеет смысла на границе множества G, то есть при $u = v^2$. Однако граница G является множеством лебеговой меры нуль, поэтому совершенно неважно, как там определена плотность вероятности.

Значения вне G случайный вектор q не принимает, поэтому там плотность распределения равна 0. Итого, имеем

$$f_q(u, v) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\frac{u}{2}\right)}{2\pi\sqrt{u-v^2}} & , (u, v) \in G \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}$$

Маргинальное распределение компоненты $\widetilde{\xi} = \xi^2 + \eta^2$ вектора $q = (\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta})$ есть предел при $v \to +\infty$ функции распределения $F_q(u, v)$. Она, в свою очередь, выражается через плотность следующим образом:

$$F_q(u, v) = \int\limits_{-\infty}^{u} \int\limits_{-\infty}^{v} f_q(x, y) dy dx \qquad \Longrightarrow \qquad F_{\widetilde{\xi}}(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_q(x, y) dy dx$$

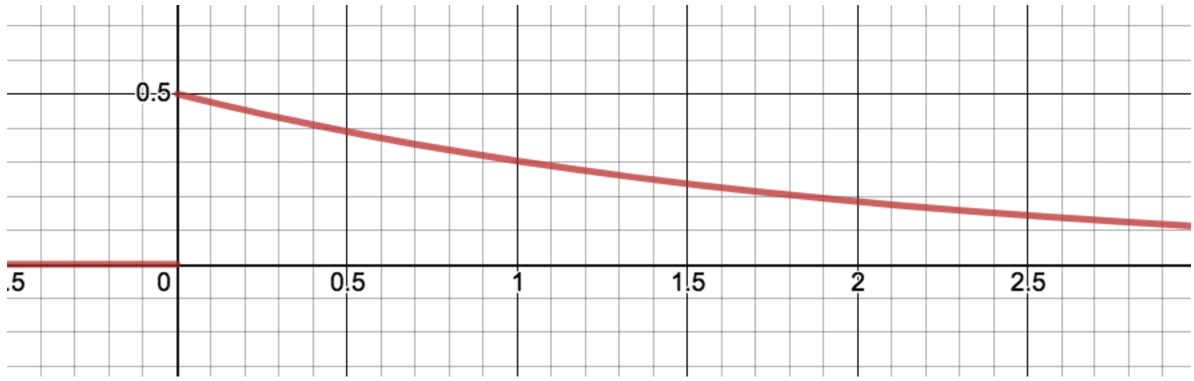
Чтобы найти плотность, надо продифференцировать последнее выражение.

При $u < 0: f_q = 0$, поэтому и маргинальная плотность $f_{\widetilde{\xi}} = 0$. При фиксированном $u > 0$:

$$f_{\widetilde{\xi}}(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_q(u, y) dy = \int\limits_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}} \frac{\exp\left(-\frac{u}{2}\right)}{2\pi\sqrt{u - y^2}} dy = \frac{\exp\left(-\frac{u}{2}\right)}{\pi} \int\limits_{0}^{\sqrt{u}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y}{\sqrt{u}}\right)}} \frac{dy}{\sqrt{u}} = \frac{\exp\left(-\frac{u}{2}\right)}{\pi} \arcsin t \Big|_0^1 = \frac{\exp\left(-\frac{u}{2}\right)}{2}$$

Такое распределение называется *распределением χ-квадрат с 2 степенями свободы*:

$$\boxed{\xi^2 + \eta^2 \sim \chi^2(2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{x}{2}\right) & , \ x > 0 \\ 0 & , \ x \le 0 \end{cases}}$$



Утв. 7 Пусть непрерывный случайный вектор ξ имеет функцию плотности распределения, инвариантную относительно ортогональных преобразований. Тогда

$$\mathbb{V}\xi = cE, \qquad c = \text{const} \ge 0$$

Доказательство:
При аффинном преобразовании матрица ковариаций преобразовывается как $S\mathbb{V}\xi S^T$. По условию, при ортогональном преобразовании плотность не меняется, значит, и матрица ковариаций тоже. Тогда

$$\forall \text{ ортогональных } S \quad \to \quad S\mathbb{V}\xi S^T = \mathbb{V}\xi$$

Матрица $\mathbb{V}\xi$ симметрична, значит, у нее существует ОНБ из собственных векторов и существует диагонализация (eigenvalue decomposition):

$$\mathbb{V}\xi = Q\Lambda Q^T, \qquad Q \text{ — ортогональна} \qquad \Longrightarrow \qquad \Lambda = Q^T\mathbb{V}\xi Q = \mathbb{V}\xi,$$

то есть $\mathbb{V}\xi$ диагональна. Осталось показать, что все собственные значения равны. Их неотрицательность следует из положительной полуопределенности $\mathbb{V}\xi$. Рассмотрим ортогональное преобразование с матрицей:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Несложно видеть, что матрица $S\mathbb{V}\xi S^T$ отличается от $\mathbb{V}\xi$ только тем, что первое и второе диагональные значения поменялись местами. Но по условию, матрица не изменилась, значит, эти значения равны. Аналогично для всех остальных пар собственных чисел. $\square$

Задача 6

Двумерный случайный вектор $X = (X_1, X_2)$ имеет плотность распределения

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & , \ (x_1, x_2) \in G \\ 0 & , \ \text{иначе} \end{cases} \qquad G = \left\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\right\}$$

(a) Найти c;

(b) Найти условные и маргинальные распределения компонент X;

(c) Проверить стохастическую зависимость и коррелированность компонент X.

Решение:

(a) Константу c находим из нормировки плотности вероятности на единицу:

$$1 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f d\mu = c \int\limits_G \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Будем считать, что выполнены достаточные условия для замены переменных в кратном интеграле Лебега (что бы это ни значило) и перейдем к полярным координатам:

$$\Phi : \begin{cases} x_1 = r\cos\phi \\ x_2 = r\sin\phi \end{cases}, \qquad |\det J| = r, \qquad \Phi^{-1}(G) = [0,1] \times [0, 2\pi]$$

Тогда имеем

$$1 = c \int\limits_0^1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{r} r d\phi dr = 2\pi c \qquad \Longrightarrow \qquad c = \frac{1}{2\pi}$$

(b) Распределение симметрично по X_1 и X_2, поэтому найдем только маргинальное и условное распределения первой компоненты X_1.

Для нахождения маргинального распределения надо проинтегрировать по X_2. При $x \neq 0$:

$$f_{X_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\sqrt{x^2+y^2} + y\right)\Bigg|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}$$

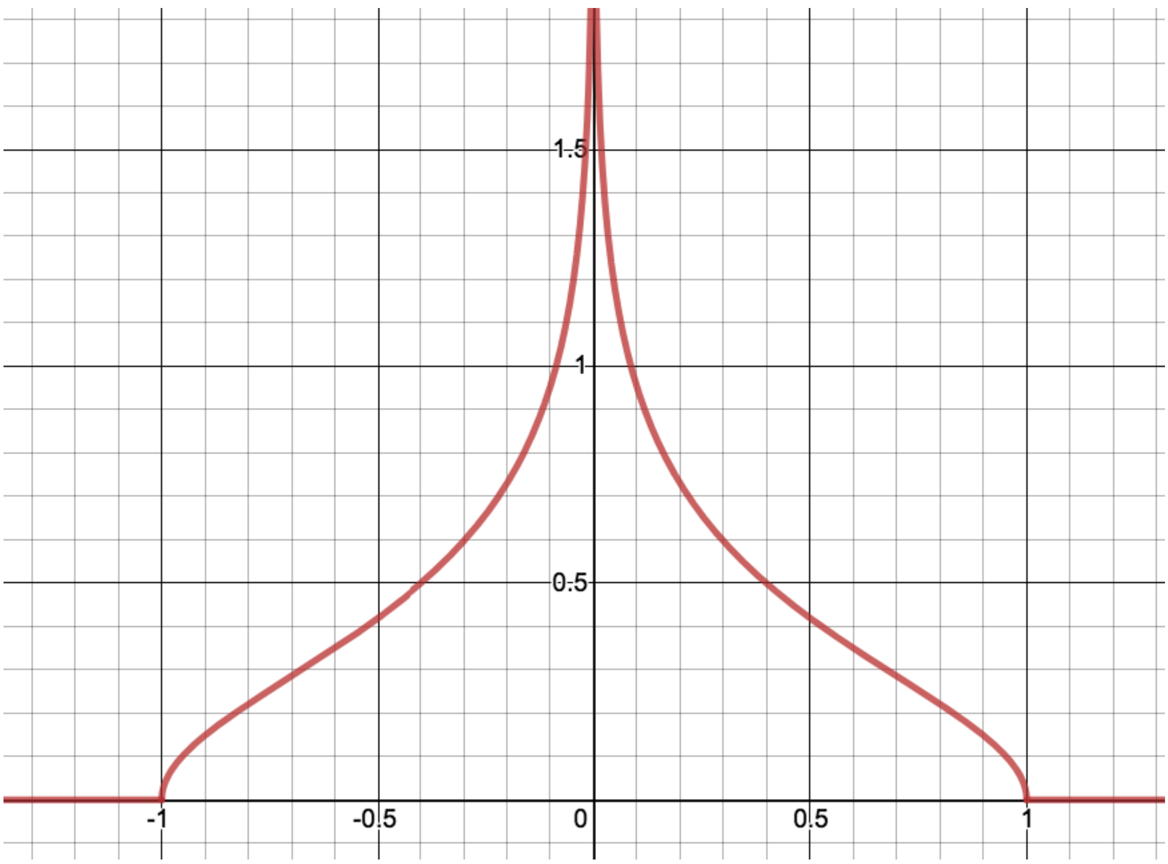


Рис. 2: Плотность маргинального распределения каждой из компонент.

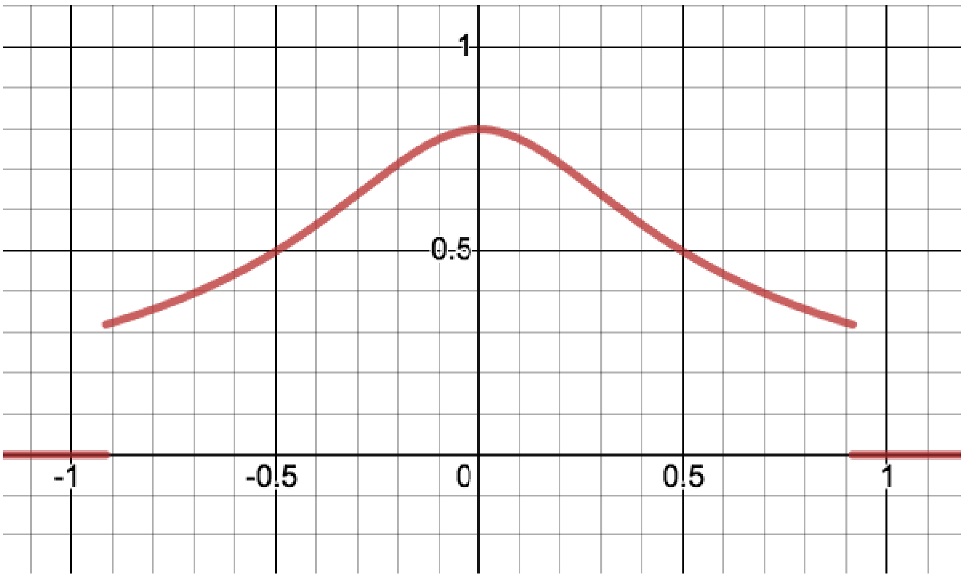


Рис. 3: Плотность условного распределения каждой из компонент ($y = 0.4$).

Теперь найдем условную плотность распределения X_1. При $y \neq 0, y \in (-1, 1)$:

$$f_{X_1|X_2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_{X_2}(y)} = \begin{cases} \left[\sqrt{x^2+y^2} \cdot \ln \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}\right]^{-1} & , -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2} \\ 0 & , \text{иначе} \end{cases}$$

(c) Условные и маргинальные распределения различаются, поэтому компоненты случайного вектора (стохастически) зависимы.

Для коррелированности нужно, чтобы матрица ковариаций была диагональной.

Заметим, что функция плотности вероятности инвариантна относительно поворотов, т.е. относительно ортогональных преобразований. Тогда ковариационная матрица диагональна (см. утверждение 7), значит компоненты случайного вектора не коррелируют.

Задача 2 (доп.)

Пусть n-мерный случайный вектор $X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$. Пусть Y, Z — его k- и $(n-k)$-мерные подвекторы: $X = (Y, Z)$. Тогда

$$\mathbb{E}X = m = (m_Y, m_Z), \qquad \mathbb{V}X = \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{YY} & \Sigma_{YZ} \\ \Sigma_{ZY} & \Sigma_{ZZ} \end{bmatrix},$$

где

$$m_Y = \mathbb{E}Y, \qquad m_Z = \mathbb{E}Z$$

$$\Sigma_{YY} = \mathbb{V}Y, \qquad \Sigma_{ZZ} = \mathbb{V}Z, \qquad \Sigma_{YZ} = \Sigma_{ZY}^T = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}Y)(Z - \mathbb{E}Z)]$$

(a) Показать, что маргинальные распределения нормальные:

$$Y \sim \mathcal{N}(m_Y, \Sigma_{YY}), \qquad Z \sim \mathcal{N}(m_Z, \Sigma_{ZZ})$$

(b) Найти условное распределение Y при $Z = z \in \mathbb{R}^{n-k}$.