Математическая статистика. ДЗ 7.

Прохоров Юрий, 776

Задача 1

Пусть H_0 — основная гипотеза, а H_1 — альтернативная гипотеза.

Доказать, что для рандомизированного решающего правила

$$\delta: \ \mathbf{X} \longmapsto [0,1], \qquad \delta(\mathbf{X}) = \mathbb{P}\{\text{принять } H_1\}$$

выполнены равенства

(a) ошибка первого рода:

$$\alpha \equiv \mathbb{P}\{\text{принять } H_1 \mid \text{верна } H_0\} \equiv \mathbb{P}_{H_0}\{H_1\} = \mathbb{E}_{H_0}\big[\delta(\mathbf{X})\big]$$

(b) ошибка второго рода:

$$\beta \equiv \mathbb{P}\{\text{принять } H_0 \mid \text{верна } H_1\} \equiv \mathbb{P}_{H_1}\{H_0\} = 1 - \mathbb{E}_{H_1}\big[\delta(\mathbf{X})\big]$$

Решение:

Пусть $\xi \sim \mathrm{Be}(p)$, где $p = \delta(\mathbf{X})$ — случайная величина, которая разыгрывается после подсчета $\delta(\mathbf{X})$, чтобы определить, какую гипотезу принять.

$$\xi = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{принимается } H_1$$

Тогда, обуславливая по случайной величине $\delta(\mathbf{X})$, получаем

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}\{H_1\} = \Big/ \begin{matrix}\text{формула полной}\\ \text{вероятности}\end{matrix} \Big/ = \int_0^1 \mathbb{P}\{\xi = 1 \bigm| \delta(\mathbf{X}) = p\} \cdot f_{\delta|H_0}(p)\, dp = \int_0^1 p\, f_{\delta|H_0}(p)\, dp = \mathbb{E}_{H_0}\big[\delta(\mathbf{X})\big]$$

Здесь $f_{\delta|H_0}$ — плотность условного распределения $\delta(\mathbf{X}) \mid H_0$.

Аналогично:

$$\beta = 1 - \mathbb{P}_{H_1}\{H_1\} = 1 - \int_0^1 \mathbb{P}\{\xi = 1 \bigm| \delta(\mathbf{X}) = p\} \cdot f_{\delta|H_1}(p)\, dp = 1 - \int_0^1 p\, f_{\delta|H_1}(p)\, dp = 1 - \mathbb{E}_{H_1}\big[\delta(\mathbf{X})\big]$$

Здесь $f_{\delta|H_1}$ — плотность условного распределения $\delta(\mathbf{X}) \mid H_1$.

Задача 2

Пусть имеется выборка $\mathbf{X} = \{X_1\}$ объема $n = 1$. Известно, что $X_1 \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$. Относительно неизвестного параметра θ сформулированы две гипотезы:

$$\begin{cases} H_0: & \theta = 0 \\ H_1: & \theta = 1 \end{cases}$$

Построить:

(a) минимаксное решающее правило $\delta^{\mathrm{MM}}(\mathbf{X})$.

(b) байесовское решающее правило $\delta^{\text{Б}}(\mathbf{X})$ при априорных вероятностях

$$\mathbb{P}\{H_0\} = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{P}\{H_1\} = \frac{2}{3}$$

(c) наиболее мощный критерий $\delta^{\text{НМ}}(\mathbf{X})$ размера $\alpha_0 = 0.1$.

Решение:

Сначала выпишем функцию правдоподобия:

$$L(\mathbf{X} \mid \theta) = f_{X_1|\theta}(X_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(X_1-\theta)^2}{2}\right\}$$

Отношение правдоподобий:

$$\Lambda(\mathbf{X}) = \frac{L(\mathbf{X} \mid \theta_1)}{L(\mathbf{X} \mid \theta_0)} = \exp\left\{\frac{X_1^2 - (X_1-1)^2}{2}\right\} = e^{X_1 - \frac{1}{2}}$$

По теореме Неймана-Пирсона, во всех трех случаях можно искать решающее правило в виде

$$\delta_{c,p}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \Lambda(\mathbf{X}) > c, \\ p, & \Lambda(\mathbf{X}) = c, \\ 0, & \Lambda(\mathbf{X}) < c. \end{cases}$$

Заметим, что при $c > 0$

$$\Lambda(\mathbf{X}) > c \qquad \Longleftrightarrow \qquad X_1 > \ln c + \frac{1}{2} \equiv \widetilde{c}.$$

Кроме того, распределение X_1 в обоих случаях непрерывно, поэтому событие $\{X_1 = \widetilde{c}\}$ происходит с вероятностью 0. Тогда можно искать решающее правило в виде

$$\delta_{\widetilde{c}}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_1 > \widetilde{c}, \\ 0, & X_1 < \widetilde{c}. \end{cases}$$

Вычислим ошибку первого рода, используя результат задачи 1:

$$\begin{aligned} \alpha = \alpha(\delta_{\widetilde{c}}) &= \mathbb{E}_{\theta=0}\big[\delta_{\widetilde{c}}(\mathbf{X})\big] = \mathbb{E}_{\theta=0}\big[\mathbb{I}\{X_1 > \widetilde{c}\}\big] = 1 \cdot \mathbb{P}_{\theta=0}\big\{\mathbb{I}\{X_1 > \widetilde{c}\} = 1\big\} = \mathbb{P}_{\theta=0}\{X_1 > \widetilde{c}\} = \\ &= 1 - \mathbb{P}_{\theta=0}\{X_1 < \widetilde{c}\} = 1 - \Phi(\widetilde{c}), \end{aligned}$$

где Φ — функция распределения $\mathcal{N}(0,1)$.

Аналогично, вычислим ошибку второго рода:

$$\beta = \beta(\delta_{\widetilde{c}}) = 1 - \mathbb{E}_{\theta=1}\big[\mathbb{I}\{X_1 > \widetilde{c}\}\big] = \mathbb{P}_{\theta=1}\{X_1 < \widetilde{c}\} = \mathbb{P}_{\theta=1}\{\underbrace{X_1 - 1}_{\mathcal{N}(0,1)} < \widetilde{c} - 1\} = \Phi(\widetilde{c} - 1)$$

Далее найдем $\widetilde{c}$ в разных случаях, исходя из теоремы Неймана-Пирсона.

(a) Условие минимаксного решающего правила:

$$\alpha = \beta$$

Отсюда следует, что

$$\underbrace{1 - \Phi(\widetilde{c})}_{\Phi(-\widetilde{c})} = \Phi(\widetilde{c} - 1) \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(-\widetilde{c}) = \Phi(\widetilde{c} - 1) \qquad \Longrightarrow \qquad -\widetilde{c} = \widetilde{c} - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \widetilde{c} = \frac{1}{2}$$

Тогда **минимаксное решающее правило**:

$$\delta^{\text{ММ}}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_1 > \frac{1}{2}, \\ 0, & X_1 \le \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(b) Условие байесовского решающего правила:

$$c = \frac{\mathbb{P}\{H_0\}}{\mathbb{P}\{H_1\}} = \frac{1}{2}$$

Отсюда находим

$$\widetilde{c} = \ln c + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2} \approx -0.193$$

Тогда **байесовское решающее правило**:

$$\delta^{\text{Б}}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_1 > \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2}, \\ 0, & X_1 \le \frac{1}{2} + \ln\frac{1}{2}. \end{cases}$$

(c) Условие наиболее мощного критерия:

$$\alpha = \alpha_0 = 0.1$$

Отсюда

$$1 - \Phi(\widetilde{c}) = 0.1 \qquad \Longrightarrow \qquad \widetilde{c} = \Phi^{-1}(0.9) \approx 1.282$$

Тогда **наиболее мощный критерий**:

$$\delta^{\text{НМ}}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_1 > \Phi^{-1}(0.9), \\ 0, & X_1 \le \Phi^{-1}(0.9). \end{cases}$$