Каноническое задание №2 по случайным процессам. Прокоров, 776

Задача 1 (красный сборник, №49)

В урне в момент $n=0$: $m\times$○ и $k\times$●

На n-ом шаге: вытаскивается случайный шар и возвращаются два таких шара.

$$A_n = \mathbb{I}\{\text{на } n\text{-ом шаге вытащили } \bigcirc\}.$$

$$B_n(r) = \mathbb{I}\{\text{на } n\text{-ом шаге в урне } r\times\bigcirc\}.$$

$\{A_n\}$, $\{B_n(r)\}$ - марковские последовательности?

а) Проверим марковское свойство $\forall n\in\mathbb{N}$, $i_n\in\{0,1\}$.

$$\mathbb{P}\{A_n=i_n \mid A_{n-1}=i_{n-1},\dots,A_0=i_0\} \overset{?}{=} \mathbb{P}\{A_n=i_n \mid A_{n-1}=i_{n-1}\}$$

$\cancel{\Updownarrow}$

$$\cancel{\frac{\mathbb{P}\{A_n=i_n,\dots,A_0=i_0\}}{\mathbb{P}\{A_{n-1}=i_{n-1},\dots,A_0=i_0\}}} =$$

Покажем, что это не марковская последовательность

$$\mathbb{P}\{A_3=1 \mid \underbrace{A_2=1,\ A_1=0}_{\text{после этого в урне } (m+1)\times\bigcirc \text{ и } (k+1)\times\bullet}\} = \frac{m+1}{(m+1)+(k+1)} = \frac{m+1}{m+k+2}.$$

$$\mathbb{P}\{A_3=1 \mid \underbrace{A_2=1,\ A_1=1}_{\text{после этого в урне } (m+2)\times\bigcirc \text{ и } k\times\bullet}\} = \frac{m+2}{m+k+2}.$$

Эти вероятности не совпадают.

б) Проверим марковское свойство для $B_n(r)$:

$$\mathbb{P}\left\{B_n = i_n \mid B_{n-1} = i_{n-1}, \dots, B_0 = i_0\right\} = \frac{\mathbb{P}\{B_n = i_n, \dots, B_0 = i_0\}}{\mathbb{P}\{B_{n-1} = i_{n-1}, \dots, B_0 = i_0\}}$$

~~Заметим, что с вероятностью всегда~~

$$\cancel{B_0(r) \leq B_1(r) \leq \dots \leq B_n(r) \leq B_{n+1}(r) \leq \dots}$$

~~Поэтому при $i_0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_n$:~~

~~Если~~ Рассмотрим $\xi_n = \#$ ○ на n-ом шаге.

Тогда $B_n(r) = \mathbb{I}\{\xi_n = r\}$ –

Если мы покажем, что $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ – марковская, то и $\left\{\mathbb{I}\{\xi_n = r\}\right\}_{n=0}^{\infty}$ – тоже будет марковской, потому что ~~если~~

~~ξ_n независимы, то и любые борелевские функции от них тоже~~

Свойство марковости для $B_n(r)$ – частный случай этого св-ва для ξ_n.

Заметим, что событие $\{\xi_{n-1} = x_{n-1}\}$ полностью определяет дальнейшее состояние цепи, поэтому

$$\mathbb{P}\left\{\xi_n = x_n \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}, \dots, \xi_0 = x_0\right\} = \mathbb{P}\left\{\xi_n = x_n \mid \xi_{n-1} = x_{n-1}\right\}$$

$\Rightarrow \{B_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ – марковская последовательность

<u>Задача 2</u> (Красный сборник, №52)

Показать, что для ДМЦ выполнено при $n_1 < n_2 < n_3$

(а) $\mathbb{P}\left\{X_{n_3} = x_3 \mid X_{n_2} = x_2, X_{n_1} = x_1\right\} = \mathbb{P}\left\{X_{n_3} = x_3 \mid X_{n_2} = x_2\right\}$

(б) $\mathbb{P}\left\{X_{n_1} = x_1, X_{n_3} = x_3 \mid X_{n_2} = x_2\right\} =$

$$= \mathbb{P}\left\{X_{n_1} = x_1 \mid X_{n_2} = x_2\right\} \cdot \mathbb{P}\left\{X_{n_3} = x_3 \mid X_{n_2} = x_2\right\}$$

(в) $\mathbb{P}\{X_{n_1}=x_1 \mid X_{n_2}=x_2, X_{n_3}=x_3\} = \mathbb{P}\{X_{n_1}=x_1 \mid X_{n_2}=x_2\}$

<u>Решение:</u>

(а) Это определение марковского свойства

(б) $$\mathbb{P}\{X_{n_1}=x_1, X_{n_3}=x_3 \mid X_{n_2}=x_2\} = \frac{\mathbb{P}\{X_{n_1}=x_1, X_{n_2}=x_2, X_{n_3}=x_3\}}{\mathbb{P}\{X_{n_2}=x_2\}} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{X_{n_3}=x_3 \mid X_{n_2}=x_2, X_{n_1}=x_1\} \cdot \mathbb{P}\{X_{n_2}=x_2, X_{n_1}=x_1\}}{\mathbb{P}\{X_{n_2}=x_2\}} \underset{\text{марковское свойство}}{=}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{X_{n_3}=x_3 \mid X_{n_2}=x_2\} \cdot \mathbb{P}\{X_{n_1}=x_1 \mid X_{n_2}=x_2\} \cdot \cancel{\mathbb{P}\{X_{n_2}=x_2\}}}{\cancel{\mathbb{P}\{X_{n_2}=x_2\}}}$$

(в) $$\mathbb{P}\{X_{n_1}=x_1 \mid X_{n_2}=x_2, X_{n_3}=x_3\} = \frac{\mathbb{P}\{X_{n_1}=x_1, X_{n_2}=x_2, X_{n_3}=x_3\}}{\mathbb{P}\{X_{n_2}=x_2, X_{n_3}=x_3\}} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{X_{n_1}=x_1, X_{n_3}=x_3 \mid X_{n_2}=x_2\} \cdot \mathbb{P}\{X_{n_2}=x_2\}}{\mathbb{P}\{X_{n_2}=x_2, X_{n_3}=x_3\}} \underset{\text{пункт (б)}}{=}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{X_{n_1}=x_1 \mid X_{n_2}=x_2\} \cdot \mathbb{P}\{X_{n_3}=x_3 \mid X_{n_2}=x_2\} \cdot \mathbb{P}\{X_{n_2}=x_2\}}{\mathbb{P}\{X_{n_2}=x_2, X_{n_3}=x_3\}} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{X_{n_1}=x_1 \mid X_{n_2}=x_2\} \cdot \cancel{\mathbb{P}\{X_{n_3}=x_3, X_{n_2}=x_2\}}}{\cancel{\mathbb{P}\{X_{n_3}=x_3, X_{n_2}=x_2\}}} =$$

$$= \mathbb{P}\{X_{n_1}=x_1 \mid X_{n_2}=x_2\}.$$

Задача 3 (Красный сборник, N 53)

$\{X_k\}_{k=0}^{n}$ – марковская цепь.

Является ли $\{X_{n-k}\}_{k=0}^{n}$ марковской цепью?

Имеем: при $k \le n$:

$$\mathbb{P}\{X_k = x_k \mid X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_0 = x_0\} = \mathbb{P}\{X_k = x_k \mid X_{k-1} = x_{k-1}\}$$

Тогда

$$\mathbb{P}\{X_k = x_k \mid X_{k+1} = x_{k+1}, \dots, X_n = x_n\} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{X_k = x_k, \dots, X_n = x_n\}}{\mathbb{P}\{X_{k+1} = x_{k+1}, \dots, X_n = x_n\}} =$$

будем для краткости писать X_k вместо $X_k = x_k$

$$\cancel{= \frac{\mathbb{P}\{X_k = x_k, X_{k+2} = x_{k+2}, \dots, X_n = x_n \mid X_{k+1} = x_{k+1}\} \cdot \mathbb{P}\{X_{k+1} = x_{k+1}\}}{\mathbb{P}\{X_{k+1} = x_{k+1}, X_{k+2}, \dots, X_n = x_n\}}}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{X_n \mid X_{n-1}, \dots, X_k\}\, \mathbb{P}\{X_{n-1} \mid X_{n-2}, \dots, X_k\} \dots \mathbb{P}\{X_{k+1} \mid X_k\}\, \mathbb{P}\{X_k\}}{\mathbb{P}\{X_n \mid X_{n-1}, \dots, X_{k+1}\} \cdot \mathbb{P}\{X_{n-1} \mid X_{n-2}, \dots, X_{k+1}\} \dots \mathbb{P}\{X_{k+2} \mid X_{k+1}\}\, \mathbb{P}\{X_{k+1}\}} =$$

марковское свойство

$$= \frac{\cancel{\mathbb{P}\{X_n \mid X_{n-1}\}} \cdot \cancel{\mathbb{P}\{X_{n-1} \mid X_{n-2}\}} \dots \mathbb{P}\{X_{k+1} \mid X_k\} \cdot \mathbb{P}\{X_k\}}{\cancel{\mathbb{P}\{X_n \mid X_{n-1}\}} \cdot \cancel{\mathbb{P}\{X_{n-1} \mid X_{n-2}\}} \dots \cancel{\mathbb{P}\{X_{k+2} \mid X_{k+1}\}} \cdot \mathbb{P}\{X_{k+1}\}} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{X_{k+1} \mid X_k\} \cdot \mathbb{P}\{X_k\}}{\mathbb{P}\{X_{k+1}\}} = \mathbb{P}\{X_k = x_k \mid X_{k+1} = x_{k+1}\}.$$

формула Байеса

Задача 4 (Красный сборник, №54)

$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — i.i.d., X_n имеет плотность $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Исследовать $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ на марковость, если

(а) $Y_n = X_n \quad \forall n$

(б) $Y_n = \sum\limits_{i=0}^{n} X_i$,

(в) $Y_n = \max\{0, X_0, X_1, \dots, X_n\}$.

Для марковских последовательностей найти переходные вероятности.

Решение:

в задаче просили найти переходные вероятности для марковских цепей, но тут дана плотность $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ множество состояний $E = \mathbb{R}$ в случаях (а) и (б), и $E = \mathbb{R}_+$ в случае (в).

тут $B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ - борелевская σ-алгебра

(а) $\mathbb{P}\{Y_n \in B_n \mid Y_{n-1} \in B_{n-1}, \dots, Y_0 \in B_0\} =$

$\{X_n\}$ — i.i.d.

$= \mathbb{P}\{X_n \in B_n \mid X_{n-1} \in B_{n-1}, \dots, X_0 \in B_0\} =$

$= \mathbb{P}\{X_n \in B_n\} = \mathbb{P}\{X_n \in B_n \mid X_{n-1} \in B_{n-1}\}$.

$\Rightarrow \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ — марковский процесс.

Условная плотность:

$p_Y(x \mid x_0) = \frac{d}{dx} \mathbb{P}\{X_n < x \mid X_{n-1} = x_0\} = f(x)$.

(б) определение марковости из пособия

$$\mathbb{P}\{Y_n \in B_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots, Y_0 \in B_0\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{ \sum_{i=0}^{n} X_i \in B_n \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n-1} X_i = y_{n-1}, \dots, X_0 \in B_0 \right\} =$$

$$= \mathbb{P}\{ X_n \in \underbrace{B_n - y_{n-1}}_{\text{множественная разность}} \mid X_{n-1} \in B_{n-1} - B_{n-2}, \dots, X_0 \in B_0 \} \underset{\text{независимость } X_k}{=}$$

$$= \mathbb{P}\{X_n \in B_n - y_{n-1}\} = \mathbb{P}\left\{ X_n \in B_n \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n-1} X_i = y_{n-1} \right\}$$

$\Rightarrow \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – марковская последовательность.

Условная плотность:

$$p_Y(x \mid x_0) = \frac{d}{dx} \mathbb{P}\left\{ \sum_{i=0}^{n} X_i < x \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n-1} X_i = x_0 \right\} =$$

$$= \frac{d}{dx} \mathbb{P}\left\{ X_n < x - x_0 \,\middle|\, \sum_{i=0}^{n-1} X_i = x_0 \right\} \underset{\text{независимость } X_k}{=} \frac{d}{dx} \mathbb{P}\{X_n < x - x_0\} =$$

$$= \frac{d}{dx} F_X(x - x_0) = f(x - x_0).$$

(в). Заметим, что $Y_n = \max(X_n, Y_{n-1})$,

где X_n и Y_{n-1} независимы.

это определение марковости из пособия

$$\mathbb{P}\{Y_n \in B_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots, Y_0 \in B_0\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\max(X_n, Y_{n-1}) \in B_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots, Y_0 \in B_0\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\max(X_n, y_{n-1}) \in B_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots, Y_0 \in B_0\} =$$

независимость X_k

$$= \mathbb{P}\{\max(X_n, y_{n-1}) \in B_n\} = \mathbb{P}\{\max(X_n, Y_{n-1}) \in B_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}\} =$$

$$= \mathbb{P}\{Y_n \in B_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}\}.$$

$\Rightarrow \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – марковская последовательность.

Условная плотность:

$$p_Y(x \mid x_0) = \frac{d}{dx}\mathbb{P}\{\max(X_n, Y_{n-1}) < x \mid Y_{n-1} = x_0\} =$$

$$= \frac{d}{dx}\mathbb{P}\{\max(X_n, x_0) < x\} = \frac{d}{dx}\mathbb{P}\{X_n < x,\ x_0 < x\} =$$

$$= \frac{d}{dx}\begin{cases} 0, & x \le x_0 \\ F_X(x), & x > x_0 \end{cases}$$

Плотности не существует, условная функция распределения

$$F_Y(x \mid x_0) = \begin{cases} 0, & x \le x_0. \\ F_X(x), & x > 0 \end{cases}$$

Задача 5 (Красный сборник, N55)

$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – марковские цепи.

Является ли $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ДМЦ, если $Z_n = X_n + Y_n$?

Решение

Если $Y_k = X_k$, то $Z_k = 2X_k$ – тоже марковская цепь.

Но может оказаться, что это не так.

Пусть $X = (\xi, 0, 0, 0, \dots)$, $\quad \xi \in Be\left(\frac{1}{2}\right)$.

$Y = (0, 0, \xi, 0, \dots)$,

X, Y – марковские цепи, но

$Z = X + Y = (\xi, 0, \xi, 0, 0, \dots)$

не является марковской.

$\mathbb{P}\{Z_2 = 1 \mid Z_1 = 0,\ Z_0 = 0\} = 0.$

$\mathbb{P}\{Z_2 = 1 \mid Z_1 = 0,\ Z_0 = 1\} = 1.$

марковское свойство не выполнено.

<u>Задача 6</u> (Красный сборник, №56)

$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ДМЦ, $Y_k = X_{n_k}$ – подпоследовательность.

Доказать, что $\{Y_k\}_{k=0}^{\infty}$ – ДМЦ.

<u>Решение</u>

Проверим марковское свойство.

$$\mathbb{P}\{Y_k = y_k \mid Y_{k-1} = y_{k-1}, \dots, Y_0 = y_0\} =$$

$$= \mathbb{P}\{X_{n_k} = y_k \mid X_{n_{k-1}} = y_{k-1}, \dots, X_{n_0} = y_0\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{марковское} \\ \text{свойство для } X_n}}{=}$$

$$= \mathbb{P}\{X_{n_k} = y_k \mid X_{n_{k-1}} = y_{k-1}\} =$$

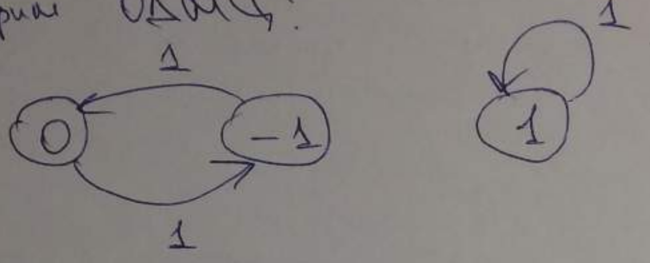
$$= \mathbb{P}\{Y_k = y_k \mid Y_{k-1} = y_{k-1}\}.$$

<u>Задача 7</u> (Красный сборник, №58)

$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ДМЦ, $Y_n = \varphi(X_n)$. Является ли $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ ДМЦ?

Если $\psi(t) = t$, то $Y_n = X_n$ — ДМЦ.
Но может оказаться, что не будет ДМЦ.

Рассмотрим ОДМЦ:



Начальное распределение:

$$p(0) = \begin{array}{c} \left(0, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}\right) \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ (-1) \quad (0) \quad (1) \end{array}$$

и функцию $\psi(t) = |t|$.

$$\mathbb{P}\{Y_2 = 0 \mid Y_1 = 1, Y_0 = 0\} =$$

$$= \mathbb{P}\{X_2 = 0 \mid \underbrace{|X_1| = 1, X_0 = 0}_{\Downarrow \; X_1 = -1}\} = \mathbb{P}\{X_2 = 0 \mid X_1 = -1, X_0 = 0\} =$$

$$= \mathbb{P}\{X_2 = 0 \mid X_1 = -1\} = 1.$$

$$\mathbb{P}\{Y_2 = 0 \mid Y_1 = 1\} = \mathbb{P}\{X_2 = 0 \mid |X_1| = 1\} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}\{X_2 = 0, \ X_1 = \pm 1\}}{\mathbb{P}\{X_1 = \pm 1\}} = \mathbb{P}\{X_2 = 0\} = \mathbb{P}\{X_0 = 0\} = \frac{1}{2}.$$

событие $\{X_1 = \pm 1\}$
достоверно
при данном нач. распределении.

Итак,

$$\mathbb{P}\{Y_2 = 0 \mid Y_1 = 1, Y_0 = 0\} \neq \mathbb{P}\{Y_2 = 0 \mid Y_1 = 1\}.$$

$\Rightarrow \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ — не марковская цепь.

Задача 8 (Красный сборник, №60)

$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ОДМЦ. Доказать:

$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ – независимы $\Longleftrightarrow$ все строки в P одинаковы (матрица перехода)

Решение:

$\boxed{\Rightarrow}$ Требуется показать, что $\forall i, j, k \in E$: $(i \neq j)$.

$\cancel{P_{i,k}}$ $p_{ik} = p_{jk} \Longleftrightarrow$

$$\mathbb{P}\{X_1 = k \mid X_0 = i\} = \mathbb{P}\{X_1 = k \mid X_0 = j\}$$
$$\mathbb{P}\{X_1 = k\} \qquad\qquad \mathbb{P}\{X_1 = k\}.$$

Выполнено.

$\boxed{\Leftarrow}$ Надо показать, что

$$\mathbb{P}\{X_{n_1} = i_1, \ldots, X_{n_k} = i_k\} = \prod_{s=1}^{k} \mathbb{P}\{X_{n_s} = i_s\}.$$

Пусть без ограничения общности $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$.

$$\mathbb{P}\{X_{n_k} = i_k, \ldots, X_{n_1} = i_1\} = \mathbb{P}\{X_{n_k} = i_k \mid X_{n_{k-1}} = i_{k-1}, \ldots, X_{n_1} = i_1\} \cdot$$
$$\cdot\, \mathbb{P}\{X_{n_{k-1}} = i_{k-1}, \ldots, X_{n_1} = i_1\} =$$
$$= \mathbb{P}\{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}, \ldots, X_{n_1}\} \cdot \mathbb{P}\{X_{n_{k-1}} \mid X_{n_{k-2}}, \ldots, X_{n_1}\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{X_{n_2} \mid X_{n_1}\} \cdot$$
$$\cdot\, \mathbb{P}\{X_{n_1}\} =$$

марковость

$$\overset{}{=} \mathbb{P}\{X_{n_k} = i_k \mid X_{n_{k-1}} = i_{k-1}\} \cdot \mathbb{P}\{X_{n_{k-1}} = i_{k-1} \mid X_{n_{k-2}} = i_{k-2}\} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{X_{n_1} = i_1\} =$$
$$= (*)$$

Далее, заметим, что если в P все строки одинаковы, то $P = \vec{1} \cdot \vec{p}^T$, где $\vec{p}$ – любая строка P.

$\vec{1}$ – вектор из единиц

Тогда $$P^n = \underbrace{\vec{1}\vec{p}^T}_{} \underbrace{\vec{1}\vec{p}^T}_{} \ldots \underbrace{\vec{1}\vec{p}^T}_{} = \vec{1}\vec{p}^T = P,$$

$\vec{p}^T\vec{1} = \sum_{j \in E} p_j = 1$

т.е. $P^n = P \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$$(*) = \left(P^{n_k - n_{k-1}}\right)_{i_{k-1} i_k} \cdot \left(P^{n_{k-1} - n_{k-2}}\right)_{i_{k-2} i_{k-1}} \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}\{X_{n_1} = i_1\} =$$

$$= P_{i_{k-1} i_k} \cdot P_{i_{k-2} i_{k-1}} \cdot \ldots \cdot P_{i_1 i_2} \cdot \left(\left(P^{n_1}\right)^T p(0)\right)_{i_1} =$$

$p(0)$ – нач. распр.

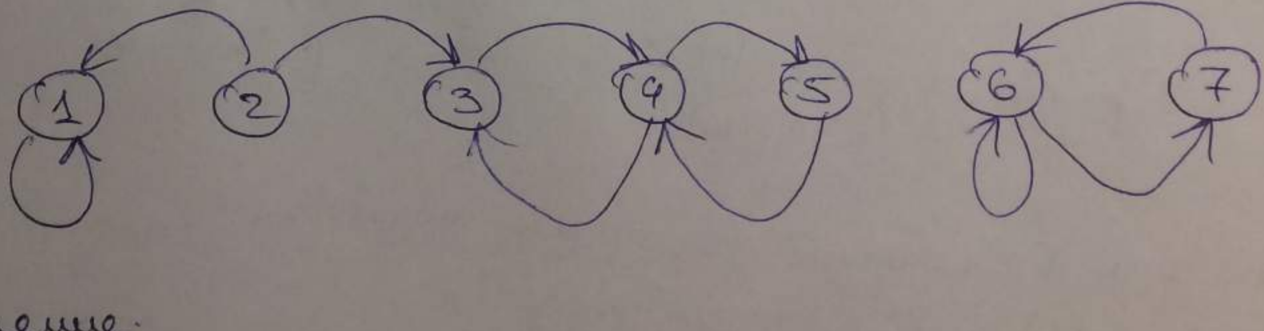
$$= p_{i_k} p_{i_{k-1}} \ldots p_{i_2} \left(\vec{p}\, \underbrace{\vec{1}^T p(0)}_{1}\right)_{i_1} = \underbrace{\prod_{s=1}^{k} p_{i_s}}_{} =$$

$$= \prod_{s=1}^{k} \mathbb{P}\{X_{n_s} = i_s\}.$$

это выражение не зависит от набора $\{n_s\}$.

<u>Задача 9</u> (Красный сборник, №62)

Классифицировать состояния ОДМЦ.



<u>Решение:</u>

$\{1\}$ – замкнутый класс, полож. возвратное состояние.

$\{2\}$ – открытый класс, невозвратное состояние

$\{3,4,5\}$ – замкнутый, полож. возвратный класс. имеет период 2.

$\{6,7\}$ – замкнутый, полож. возвратный класс.

Задача 10 (Красный сборник, №68)
Доказать, что в конечной неразложимой ОДМЦ все состояния ненулевые.

Решение:
Допустим, $\exists$ нулевое состояние: $p_{ii}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Покажем, что тогда $\forall j \in E$: $p_{ij}(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

i и j сообщаются (т.к. цепь неразложима) $\Rightarrow$
$\exists m$: $p_{ji}(m) > 0$.

по уравнению Колмогорова-Чепмена: при $n > m$:

$$p_{jj}(n) = \sum_{k\in E} p_{jk}(m)\, p_{kj}(n-m) \geq$$

$$\geq \underbrace{p_{ji}(m)}_{>0}\, p_{ij}(n-m).$$

$$\Rightarrow p_{ij}(n-m) \leq \frac{p_{jj}(n)}{p_{ji}(m)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow p_{ij}(n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Так как E конечно, то пределы аддитивны.

$$\underset{\overset{\parallel}{1}}{\sum_{j\in E} p_{ij}(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{— противоречие.}$$

1 $\forall n$, т.к. сумма по строкам матрицы P^n равна 1

Задача 11 (Красный сборник, №67)

(а) Доказать, что если в неразложимой ОДМЦ у матрицы P есть ненулевой диагональный элемент, то она не может быть периодической.

(б) Может ли неразложимая ОДМЦ, у которой в матрице P на диагонали стоят нули, быть апериодической?

Решение

(а) Пусть $p_{ii} > 0$.

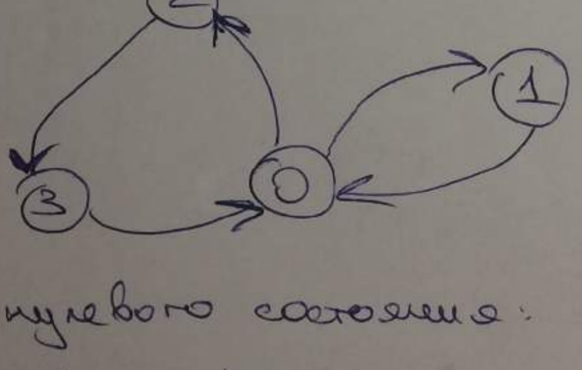
Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$: $p_{ii}(n) \geq (p_{ii})^n > 0$.

$\Rightarrow d_i = \text{НОД}\{n \geq 1 \mid p_{ii}(n) > 0\} = \text{НОД}\{1, 2, 3, ..\} = 1$.

$\Rightarrow$ период состояния i равен 1, т.е. оно апериодическое

по теореме солидарности: все состояния в цепи апериодические.

(б) Да, может.



Период нулевого состояния:

$d_0 = \text{НОД}\{n \geq 1 \mid p_{0,0}(n) > 0\} = \text{НОД}\{2, 3, ...\} = 1$.

по т. солидарности: цепь апериодична.

Задача 12 (Красный сборник, №68)

$\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — i.i.d ; $\quad X_n = \begin{cases} -1, & p \\ 1, & q = 1-p \end{cases}$.

Исследовать $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ на марковость, если

(а) $Y_n = X_n X_{n+1}$.

(б) $Y_n = \max\{X_0, \dots, X_n\}$.

(в) $Y_n = \prod\limits_{i=0}^{n} X_i$.

Решение.

(а) Проверяем марковское свойство.

$$\mathbb{P}\{Y_n = y_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots, Y_0 = y_0\} =$$

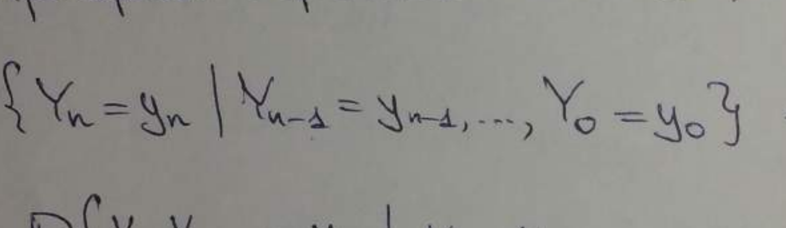
$$= \mathbb{P}\{X_n X_{n+1} = y_n \mid X_{n-1} X_n = y_{n-1}, \dots, X_0 X_1 = y_0\} =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \mathbb{P}\{X_n X_{n+1} = y_n \mid X_{n-1} X_n = y_{n-1}\}$$

X_n и X_{n+1} не зависят от $X_{n-1}, \dots, X_0$.

$\Rightarrow \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ — ОДМЦ.

	X_{n-1}	X_n	X_{n+1}	$\mathbb{P}$
	-1	-1	-1	p^3
	-1	-1	1	p^2q
✓	-1	1	-1	p^2q
✓	-1	1	1	pq^2
✓	1	-1	-1	p^2q
✓	1	-1	1	pq^2
	1	1	-1	pq^2
	1	1	1	q^3



$$\mathbb{P}\{X_n X_{n+1} = -1 \mid X_{n-1} X_n = 1\} = \frac{\mathbb{P}\{X_n X_{n+1} = -1,\ X_{n-1} X_n = 1\}}{\mathbb{P}\{X_{n-1} X_n = 1\}} =$$

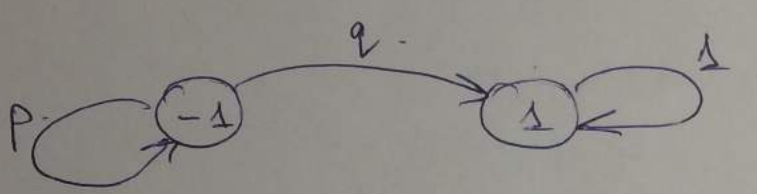
$$= \frac{p^2 q + p q^2}{p^2 + q^2} = \frac{pq}{p^2 + q^2}.$$

(б) $\mathbb{P}\{Y_n = y_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots, Y_0 = y_0\} =$

$= \mathbb{P}\{\max(X_n, Y_{n-1}) = y_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots, Y_0 = y_0\} \overset{\text{независимость } X_n}{=}$

$= \mathbb{P}\{\max(X_n, y_{n-1}) = y_n\} = \mathbb{P}\{\max(X_n, Y_{n-1}) = y_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}\}.$

$\Rightarrow \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – марковская цепь.



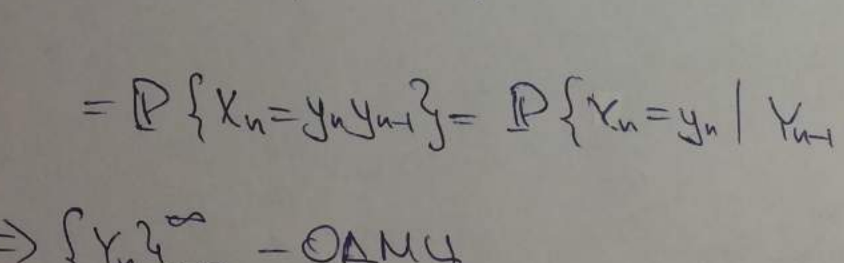
$\mathbb{P}\{\max(X_n, -1) = 1\} = \mathbb{P}\{X_n = 1\} = q.$

(в) $\mathbb{P}\{Y_n = y_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots, Y_0 = y_0\} =$

$= \mathbb{P}\{X_n = y_n y_{n-1} \mid X_{n-1} = y_{n-1} y_{n-2}, \dots, X_0 = y_0\} \overset{\text{независимость}}{=}$

$= \mathbb{P}\{X_n = y_n y_{n-1}\} = \mathbb{P}\{Y_n = y_n \mid Y_{n-1} = y_{n-1}\}$

$\Rightarrow \{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ – ОДМЦ



<u>Задача 13</u> (Красный сборник, №69)

p_1, p_2 – вероятности успеха двух действий (экспериментатору неизвестны).

Цель: максимизировать сумму всех успехов.

Сравнить две стратегии:

(а). Равновероятный выбор действия на каждом шаге.

(б) Повторение, если успех; смена действия, если неудача.

(делается много экспериментов N).

Решение:

Обозначим

η_1 — # успехов после 1-ой ручки

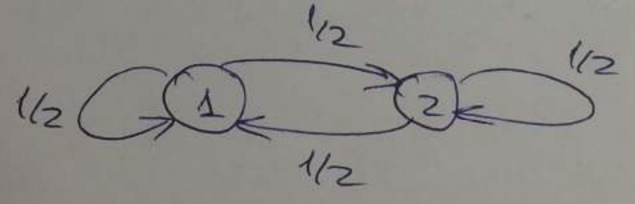
η_2 — # успехов после 2-ой ручки.

η — # успехов $(\eta = \eta_1 + \eta_2)$.

$$V_1(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{I}\{\text{на } k\text{-ом шаге делается 1 действие}\}$$

$$V_2(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{I}\{\text{на } k\text{-ом шаге 2 действие}\}$$ ← доли обоих действий.

(а) Рассмотрим цепь.



$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Если цепь в состоянии 1, то делается 1-ое действие, если в состоянии 2, то второе.

$$\Rightarrow \mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\eta_1 + \mathbb{E}\eta_2 = p_1 \mathbb{E} V_1(N) + p_2 \mathbb{E} V_2(N).$$

Цепь неразложима и апериодична $\Rightarrow$ она эргодична

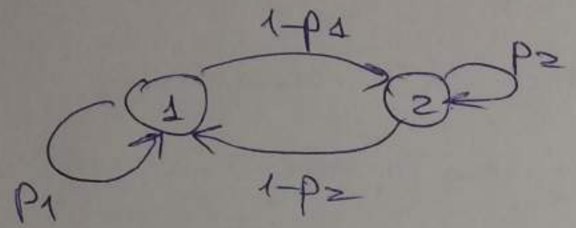
$$\Rightarrow \frac{1}{N} V_1(N) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{п.н.}} \pi_1 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{N} V_2(N) \xrightarrow[N\to\infty]{\text{п.н.}} \pi_2 = \frac{1}{2},$$

где $\pi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ — стационарное распределение

$$\Rightarrow \mathbb{E}\eta = p_1 \mathbb{E} V_1(N) + p_2 \mathbb{E} V_2(N) \approx$$

$$\approx p_1 \frac{N}{2} + p_2 \frac{N}{2} = \frac{(p_1+p_2)N}{2}.$$

(б) Аналогично, строим ОДМЦ.



$$\underline{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 1-p_1 \\ 1-p_2 & p_2 \end{bmatrix}.$$

Аналогично, она эргодична.

$$\underline{P}^T \pi = \pi \Rightarrow \begin{cases} p_1 \pi_1 + (1-p_2)\pi_2 = \pi_1 \\ (1-p_1)\pi_1 + p_2 \pi_2 = \pi_2. \end{cases}$$

$$(1-p_2)\pi_2 = (1-p_1)\pi_1.$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \frac{1-p_2}{2-p_1-p_2}; \quad \pi_2 = \frac{1-p_1}{2-p_1-p_2}.$$

$$\mathbb{E}\eta = p_1 \mathbb{E} V_1(N) + p_2 \mathbb{E} V_2(N) \approx$$

$$\approx N\left(p_1 \pi_1 + p_2 \pi_2\right) =$$

$$= N \frac{p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)}{2-p_1-p_2} = N \frac{p_1+p_2-2p_1p_2}{2-p_1-p_2}$$

Сравним две стратегии. Вычтем из числа успехов во второй число успехов в первой:

$$N \frac{p_1+p_2-2p_1p_2}{2-p_1-p_2} - N\frac{p_1+p_2}{2} = \frac{N}{4(2-p_1-p_2)}\Big[\cancel{2p_1} \cancel{+2p_2} - 4p_1p_2 \cancel{-2p_1} \cancel{-2p_2} + p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\Big] =$$

$$= \frac{N}{4(2-p_1-p_2)}(p_1-p_2)^2 \geq 0.$$

То есть если $p_1 = p_2$, то обе стратегии дадут одинаковое число успехов.

Но если $p_1 \neq p_2$, то вторая стратегия лучше.

<u>Задача 14</u> (Красный сборник, №72)

автомобили – пуассоновский процесс (30 машин/мин.).

Найти $\mathbb{P}\{$пройдет более N секунд, пока проедут n автомобилей$\}$

<u>Решение</u>.

$K(t) \sim \Pi\Pi(\lambda)$, t – время в секундах.

Известно, что

$$\left.\begin{array}{c} \mathbb{E}\, K(60) = 30 \\ \parallel \\ \mathbb{E}\, Poiss(60\lambda) = 60\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

$K(t) \sim \Pi\Pi\left(\frac{1}{2}\right)$.

Время между двумя автомобилями: $\xi \sim Exp(\lambda)$.

Время для n-автомобилей:

$$\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_n \sim Gamma(n, \lambda)$$

$$\Rightarrow \quad f_\eta(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathbb{P}\{\eta > N\} = \int_N^{+\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}\, dx.$$

Можно сделать другую оценку:

$$\mathbb{P}\{\underset{\text{Poiss}(\lambda N)}{\underset{\sim}{K(N)}} < n\} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda N)^k e^{-\lambda N}}{k!}$$

Оказывается, что эти два способа в точности совпадают:

$$\int\limits_N^{+\infty} \frac{\lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda N)^k e^{-\lambda N}}{k!}$$

Это соотношение можно явно доказать, проинтегрировав левую часть по частям $n-1$ раз.

<u>Задача 15</u> (Стох. анализ в задачах, гл. 6 №1)

Есть две собаки, на них сидят $N \gg 1$ блох. Блохи прыгают с одной собаки на другую.

$$\mathbb{P}\{\text{блоха прыгнет в } [t, t+h)\} = \lambda h + o(h), \quad h \to 0$$

$$\lambda = 1$$

Пусть в начальный момент все блохи на первой собаке.

(а) Показать, что при $t \geq cN$ $(c \sim 10)$

$$\mathbb{P}\left\{ \frac{|n_1(t) - n_2(t)|}{N} \leq \frac{5}{\sqrt{N}} \right\} \geq 0,99,$$

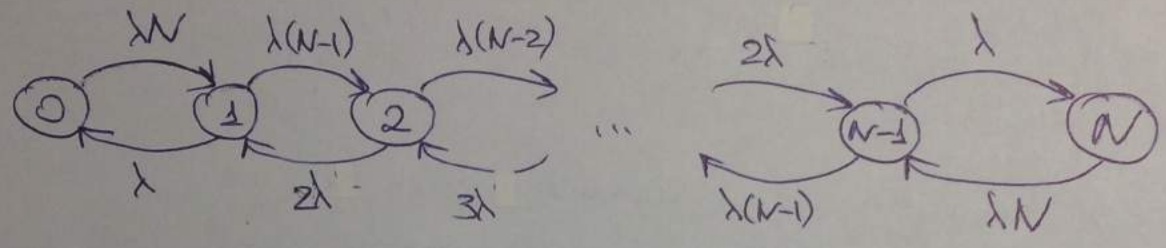
где $n_1(t) = \#$ блох на 1-ой собаке в момент t
$n_2(t) = \#$ блох на 2-ой собаке в момент t

(б) Показать, что $\mathbb{E}\sigma_0 = 2^N$, где σ_0 – время первого возвращения в начальное состояние.

<u>Решение</u>.

① Будем моделировать прыжки блох однородной непрерывной марковской цепью $\{X_t\}_{t \geq 0}$, где $X_t = \#$ блох на второй собаке в момент t.

Граф ОНМЦ представим в виде



Если на 2-ой собаке в момент t сидит k блох, то вероятности, что хотя бы одна прыгнет в интервале $[t, t+h)$ складываются:

$$\mathbb{P}\{\text{хотя бы одна из } k \text{ блох спрыгнет в } [t, t+h)\} = k\lambda h + o(h) \quad \text{при } h \to 0.$$

Поэтому интенсивность перехода из состояния k в $(k-1)$ равна $k\lambda$. Аналогично в обратную сторону.

Матрица-генератор ОНМЦ:

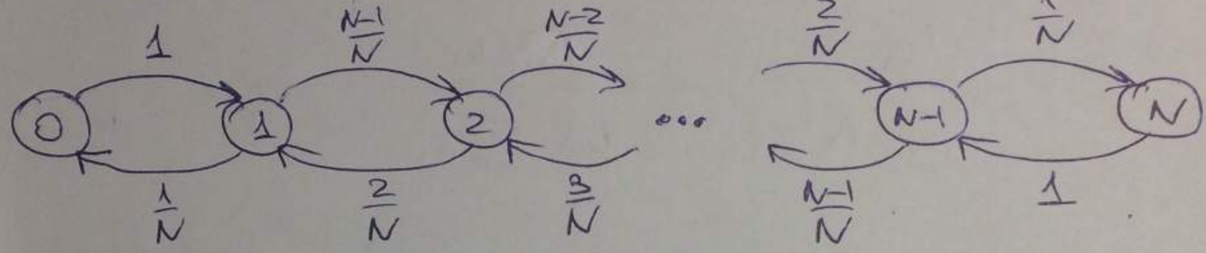
$$\Lambda = \begin{bmatrix} -N\lambda & N\lambda & & & & \\ \lambda & -N\lambda & (N-1)\lambda & & & \\ & 2\lambda & -N\lambda & (N-2)\lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -N\lambda & \lambda \\ & & & & N\lambda & -N\lambda \end{bmatrix}$$

матрица $(N+1) \times (N+1)$

② Цепь конечна и неразложима.
По критерию сильной эргодичности, она сильно эргодична.

Найдем стационарное распределение (которое, как следует из сильной эргодичности, единственно).

Рассмотрим цепь скачков $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$, соответствующую этой ОНМЦ. Ее стохастический граф:



Найдем ее стационарное распределение. Уравнение детального баланса:

$$\forall i,j \in E: \quad \hat{\pi}_i \hat{p}_{ij} = \hat{\pi}_j \hat{p}_{ji},$$

где $\hat{\pi}$ – стационарное распределение цепи скачков.
$\hat{p}_{ij}$ – элементы матрицы переходов цепи скачков.

$$\hat{P} = \|\hat{p}_{ij}\|_{i,j \in E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & & & \\ & \frac{2}{N} & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & \frac{1}{N} \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

При $k = 0, \ldots, N-1$:

$$\hat{\pi}_k \hat{p}_{k,k+1} = \hat{\pi}_{k+1} \hat{p}_{k+1,k}$$

$$\hat{\pi}_k \cdot \frac{N-k}{N} = \hat{\pi}_{k+1} \cdot \frac{k+1}{N} \Rightarrow \hat{\pi}_{k+1} = \frac{N-k}{k+1} \hat{\pi}_k$$

$$\hat{\pi}_{k+1} = \frac{N-k}{k+1} \hat{\pi}_k = \frac{(N-k)(N-k+1)}{(k+1)\,k} \hat{\pi}_{k-1} = \ldots = \frac{(N-k)\ldots N}{(k+1)\ldots 1} \hat{\pi}_0 = \frac{N!}{(N-k-1)!\,(k+1)!} \hat{\pi}_0 =$$

$$= C_N^{k+1} \hat{\pi}_0 .$$

нормировка: $\sum\limits_{k=0}^{N} \hat{\pi}_k = \sum\limits_{k=0}^{N} C_N^k \hat{\pi}_0 = 2^N \hat{\pi}_0 = 1 \Rightarrow \hat{\pi}_0 = 2^{-N}$.

Итак, стационарное распределение цепи скачков:

$$\hat{\pi}_k = C_N^k\, 2^{-N}\ ; \quad \hat{\pi} \sim \mathrm{Binom}\left(N, \tfrac{1}{2}\right).$$

Оно связано со стационарным распределением ОНМЦ по формуле:

$$\hat{\pi}_k = \frac{\Lambda_k \cdot \pi_k}{\sum\limits_{i\in E} \Lambda_i \pi_i} = \frac{\cancel{(N\lambda)}\, \pi_k}{\cancel{N\lambda} \sum\limits_{i\in E} \pi_i} = \pi_k = C_N^k\, 2^{-N}$$

(3) Для сильно эргодичных цепей можно найти время возврата в любое состояние:

$$\mathbb{E}\,\sigma_k = \frac{1}{\Lambda_k \pi_k}.$$

Поэтому время возврата в начальное:

$$\mathbb{E}\,\sigma_0 = \frac{1}{\Lambda_0 \pi_0} = \frac{1}{N\lambda \cdot 2^{-N}} = \frac{2^N}{N\lambda}.$$

почему в условии просят получить $\frac{2^N}{\lambda}$?

(4) Имеем, что

$$\pi^{(N)} \sim \mathrm{Binom}\left(N, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \pi^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} \xi_k, \quad \text{где} \quad \xi_k \sim \mathrm{Be}\left(\tfrac{1}{2}\right) - \text{i.i.d.}$$

по центральной предельной теореме:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{N} \xi_k - \sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{E}\xi_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{N} \mathbb{V}\xi_k}} \xrightarrow[N\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

$$\cancel{\Rightarrow \pi^{(N)} \xrightarrow[N\to\infty]{d} \pi^* \sim \mathcal{N}\left(\tfrac{N}{2}, \tfrac{N}{4}\right)}$$

$\pi^{(N)} \overset{d}{\approx} \pi^* \sim \mathcal{N}\left(\frac{N}{2}, \frac{N}{4}\right)$ при больших N по ЦПТ

(5) Для произвольного $\lambda > 0$, $t > 0$ выполнено:

$$\mathbb{P}\left\{\pi^* - \frac{N}{2} \geq t\right\} = \mathbb{P}\left\{e^{\lambda(\pi^* - \frac{N}{2})} \geq e^{\lambda t}\right\} \leq$$

неравенство Маркова

преобразование Лапласа $\pi^* \sim N(0, \frac{N}{4})$

$$\leq \frac{\mathbb{E}\, e^{\lambda(\pi^* - \frac{N}{2})}}{e^{\lambda t}} = \frac{\exp\left(\frac{\lambda^2}{2} \cdot \frac{N}{4}\right)}{\exp(\lambda t)} = \exp\left(\frac{\lambda^2 N}{8} - \lambda t\right).$$

Это верно $\forall \lambda > 0 \Rightarrow$ выполнено при

$$\lambda^* = \arg\min\left(\frac{\lambda^2 N}{8} - \lambda t\right) = \frac{4t}{N}.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left\{\pi^* - \frac{N}{2} \geq t\right\} \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{N}\right)$$

Аналогично,

$$\mathbb{P}\left\{\frac{N}{2} - \pi^* \geq t\right\} \leq \exp\left(-\frac{2t^2}{N}\right).$$

Имеем при $t = a\sqrt{N}$:

$$\mathbb{P}\left\{\left|\pi^* - \frac{N}{2}\right| \geq a\sqrt{N}\right\} \leq 2e^{-2a^2}.$$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{\left|\pi^* - \frac{N}{2}\right|}{N} \geq \frac{a}{\sqrt{N}}\right\} \leq 2e^{-2a^2}.$$

(6) Теперь оценим нужную величину.

$$\mathbb{P}\left\{\frac{|n_1(t) - n_2(t)|}{N} \geq \frac{a}{\sqrt{N}}\right\} = \mathbb{P}\left\{\frac{2\left|n_2(t) - \frac{N}{2}\right|}{N} \geq \frac{a}{\sqrt{N}}\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{\left|n_2(t) - \frac{N}{2}\right| \geq \frac{a\sqrt{N}}{2}\right\} =$$

$$= \mathbb{P}\left\{ n_2(t) - \frac{N}{2} \geq \frac{a\sqrt{N}}{2} \right\} + \mathbb{P}\left\{ n_2(t) - \frac{N}{2} \leq -\frac{a\sqrt{N}}{2} \right\} =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left\{ n_2(t) \leq \frac{N+a\sqrt{N}}{2} \right\} + \mathbb{P}\left\{ n_2(t) \leq \frac{N-a\sqrt{N}}{2} \right\} =$$

$$= 1 - F_{n_2(t)}\left(\frac{N+a\sqrt{N}}{2}\right) + F_{n_2(t)}\left(\frac{N-a\sqrt{N}}{2}\right) \approx$$

$n_2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{d} \pi^{(N)}$

$$\approx 1 - F_{\pi^{(N)}}\left(\frac{N+a\sqrt{N}}{2}\right) + F_{\pi^{(N)}}\left(\frac{N-a\sqrt{N}}{2}\right) \approx$$ в силу эргодичности

$$\approx 1 - F_{\pi^*}\left(\frac{N+a\sqrt{N}}{2}\right) + F_{\pi^*}\left(\frac{N-a\sqrt{N}}{2}\right) =$$

$\pi^{(N)} \overset{d}{\approx} \pi^*$ по ЦПТ

$$= 1 - \int\limits_{\frac{N}{2}-\frac{a\sqrt{N}}{2}}^{\frac{N}{2}+\frac{a\sqrt{N}}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi N}} \exp\left(-\frac{2\left(x-\frac{N}{2}\right)^2}{N}\right) dx =$$

$$= 1 - \int\limits_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

Ошибки можно оценить: $\overset{X_t}{\parallel}$

- по скорости сходимости $n_2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \pi^{(N)}$
- по близости $\pi^{(N)} \overset{d}{\approx} \pi^*$. (Оценка в 5 пункте) или неравенство Берри–Эссеена

Задача 16 (стох анализ в задачах, гл. 7, №16).

$G = \langle V, E \rangle$ – ориентированный граф.

V – все веб-страницы

E – ссылки между веб-страницами ($(i,j) \in E \iff$ на i-ой страница есть ссылка на j-ую).

(а) По графу G случайно блуждает пользователь. За 1 такт времени он переходит с i-ой стр. на j-ую стр. с вероятностью p_{ij}. Пусть граф G – сильно связен и апериодичен.

Показать, что при бесконечно долгом блуждании доля времени, проведенная на k-ой странице, равна π_k, где

$$\pi = P^T \pi, \quad \sum_{k \in V} \pi_k = 1.$$

причем π_k не зависит от начальной страницы.

(б) Пусть в условиях пункта (а) по графу блуждают $N \gg |V| \gg 1$ пользователей –

$\xi_i(n)$ – # пользователей на i-ой стр. в момент n

Показать, что

$\exists \lambda_0 > 0: \ \exists n_0' > 0: \ \forall n \geq n_0: \ \forall k \in V:$

$$\mathbb{P}\left\{ \left| \frac{\xi_k(n)}{N} - \pi_k \right| \leq \frac{\lambda_0}{\sqrt{N}} \right\} \geq 0{,}99.$$

Решение.

(1) Пусть сначала блуждает 1 пользователь.

Рассмотрим его блуждания как однородную дискретную марковскую цепь (ОДМЦ) $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, состояниями которой являются веб-страницы V, а матрица переходов состоит из чисел p_{ij}.

Цепь $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ конечна, $\underbrace{\text{неразложима}}_{\text{т.к. } G \text{ сильно связен}}$ и апериодична

$\Rightarrow \{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — сильно эргодична.

Значит, стационарное распределение единственно, т.е. решение системы $\begin{cases} P^T\pi = \pi. \\ \pi_k \geq 0. \\ \sum_{k\in V} \pi_k = 1. \end{cases}$ единственно.

Кроме того, для сильно эргодичных цепей выполнена <u>эргодическая теорема</u>:

$$\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M} f(X_n) \xrightarrow[M\to\infty]{\text{п.н.}} f(X) = \sum_{k\in V} \pi_k f(k).$$

(для $\forall$ ограниченной функции f)

Беря $f(t) = \mathbb{I}\{X_n = k\}$, получаем

$$\underbrace{\frac{1}{M}\sum_{n=1}^{M} \mathbb{I}\{X_n = k\}}_{\text{доля времени на } k\text{-ой странице}} \xrightarrow[M\to\infty]{\text{п.н.}} \pi_k.$$

Заметим, что этот предел не зависит от начального распределения.

(2). Пусть теперь блуждают N пользователей.

Соответственно имеется N ОДМЦ $\{X_n^{(j)}\}_{n=0}^{\infty}$; $j = 1,\dots,N$.

Тогда $\xi_k(n) = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{I}\{X_n^{(j)} = k\}$.

Обозначим $\eta_k(n) = \frac{\xi_k(n)}{N}$ – доля пользователей на k-ой ср. в момент n.

$$\mathbb{E}\eta_k(n) = \frac{1}{N}\,\mathbb{E}\,\xi_k(n) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}\,\mathbb{I}\{X_n^{(j)} = k\} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{P}\{X_n^{(j)} = k\} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\pi_k = \pi_k .$$

т.к. $X_n^{(j)} \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$ в силу эргодичности.

с.в. X имеет распр. π.

$$\mathbb{V}\eta_k(n) = \frac{1}{N^2}\,\mathbb{V}\,\xi_k(n) = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{V}\,\mathbb{I}\{X_n^{(j)} = k\} =$$

$$= \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{P}\{X_n^{(j)} = k\}\left(1 - \mathbb{P}\{X_n^{(j)} = k\}\right) \xrightarrow{n\to\infty}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\pi_k(1-\pi_k) = \frac{\pi_k(1-\pi_k)}{N} .$$

по неравенству Чебышева для $\eta_k(n)$ $\quad \boxed{\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq t\} \leq \frac{\mathbb{V}\xi}{t^2}}$

$$\mathbb{P}\{|\eta_k(n) - \mathbb{E}\eta_k(n)| \geq t\} \leq \frac{\mathbb{V}\eta_k(n)}{t^2} .$$

~~Берём~~ $\cancel{t = \frac{1}{\sqrt{N}}}$, ~~получаем~~

Теперь хотим получить такую же оценку, где вместо ~~P{η~~ $\mathbb{E}\eta_k(n)$ и $\mathbb{V}\eta_k(n)$ стоят значения для стационарного распределения.

~~Имеем (но этот подход для не совсем то, что нужно)~~

$$\cancel{|\eta_k(n) - \pi_k| \leq |\eta_k(n) - \mathbb{E}\eta_k(n)| + |\mathbb{E}\eta_k(n) - \pi_k|}$$

(3) $\mathbb{P}\{|\eta_k(n)-\pi_k|\ge t\} \le \cancel{\mathbb{P}\{\eta_k(n)=\pi_k}$

↑ неравенство Маркова

$$\le \frac{\mathbb{E}|\eta_k(n)-\pi_k|}{t} = \frac{1}{t}\,\mathbb{E}\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{I}\{X_n^{(j)}=k\}-\pi_k\right| =$$

$$= \frac{1}{Nt}\,\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^{N}\left(\mathbb{I}\{X_n^{(j)}=k\}-\pi_k\right)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{Nt}\sum_{j=1}^{N}\mathbb{E}\left|\mathbb{I}\{X_n^{(j)}=k\}-\pi_k\right| =$$

$$= \frac{1}{Nt}\sum_{j=1}^{N}\left[(1-\pi_k)\cdot\mathbb{P}\{X_n^{(j)}=k\}+\pi_k\left(1-\mathbb{P}\{X_n^{(j)}=k\}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{Nt}\sum_{j=1}^{N}\Big[\mathbb{P}$$

(3)

$$\mathbb{P}\{|\eta_k(n)-\pi_k|\ge t\} \le \mathbb{P}\left\{|\eta_k(n)-\mathbb{E}\eta_k(n)|\ge \frac{t}{2}\right\} +$$

$$+ \mathbb{P}\left\{|\mathbb{E}\eta_k(n)-\pi_k|\ge \frac{t}{2}\right\}.$$

Так как $|\mathbb{E}\eta_k(n)-\pi_k| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, то второе слагаемое равно 0 при $n\ge n_1$.

Тогда при $n \ge n_1$:

$$\mathbb{P}\{|\eta_k(n)-\pi_k|\ge t\} \le \mathbb{P}\left\{|\eta_k(n)-\mathbb{E}\eta_k(n)|\ge \frac{t}{2}\right\} \overset{\text{пункт (2)}}{\le}$$

$$\le \frac{4}{t^2}\,\mathbb{V}\eta_k(n) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{4\pi_k(1-\pi_k)}{t^2 N}$$

Возьмем $t=\frac{\lambda}{\sqrt{N}} \Rightarrow$

$$\mathbb{P}\left\{ |\eta_k(n) - \pi_k| \geq \frac{\lambda}{\sqrt{N}} \right\} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{4\pi_k(1-\pi_k)}{\lambda^2}.$$

Возьмем такое $\lambda_0 > 0$, что $\frac{4\pi_k(1-\pi_k)}{\lambda_0^2} < 0{,}01$.

Тогда $\exists\, n_0 > n_1$:

$$\mathbb{P}\left\{ |\eta_k(n) - \pi_k| \geq \frac{\lambda_0}{\sqrt{N}} \right\} \leq 0{,}01,$$

что и требовалось доказать.