Теорвер. ДЗ 3.

Прохоров Юрий, 776

Сначала я выпишу и докажу какие-то общие утверждения, их можно не читать.

Случайные величины

Опр. Пусть ξ — случайная величина в вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. *Распределением случайной величины* ξ называется функция

$$\mathbb{P}_\xi : \ \mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1], \qquad \mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}\{\xi \in B\}$$

$\mathbb{P}_\xi$ — счетно-аддитивная вероятностная мера на $\mathbb{R}$, то есть $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_\xi)$ — вероятностное пространство.

Опр. *Функцией распределения* случайной величины ξ называется функция

$$F_\xi : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\xi < x\} = \mathbb{P}_\xi\big((-\infty, x)\big)$$

Опр. 1 Случайная величина ξ называется *(абсолютно) непрерывной*, если существует такая борелевская функция $f_\xi : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, что

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t) dt \qquad \text{(интеграл по мере Лебега)}$$

При этом функция f_ξ называется *плотностью распределения* случайной величины ξ.

Замечание: в этом определении требуется выполнение равенства

$$\mathbb{P}\{\xi \in B\} = \int\limits_B f_\xi(t) dt$$

только для множеств вида $B = (-\infty, \beta)$. Однако это эквивалентно тому (и я это докажу ниже), что данное равенство выполнено для всех борелевских множеств.

Опр. 2 Случайная величина называется *(абсолютно) непрерывной*, если мера $\mathbb{P}_\xi$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ:

$$\mathbb{P}_\xi \ll \mu \qquad \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}): \ \text{ из } \ \mu(B) = 0 \ \text{ следует } \ \mathbb{P}_\xi(B) = 0$$

Эти два определения непрерывной случайной величины эквивалентны. Для доказательства требуется сформулировать некоторые известные из курса меры и интеграла Лебега понятия.

Опр. Пусть $(X, \mathcal{E})$ — измеримое пространство. Функция $\mu : \ \mathcal{E} \longrightarrow [0, +\infty]$ называется *сигма-конечной*, если

$$\exists \{X_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{E} : \ \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X \ \text{ и } \ \mu(X_n) < +\infty \ \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

В частности, любая вероятностная мера — конечная мера на Ω. Значит, она и сигма-конечна.

Опр. Пусть $\mu : \ \mathcal{E} \longrightarrow [0, +\infty]$ — счетно-аддитивная мера, а функция $f : \ X \longrightarrow [0, +\infty)$ измерима относительно $\mathcal{E}$. Произведением $(f \cdot \mu) : \ \mathcal{E} \longrightarrow [0, +\infty]$ назовем функцию

$$(f \cdot \mu)(A) = \int\limits_A f d\mu, \qquad A \in \mathcal{E}$$

Можно доказать по теореме о монотонной сходимости, что функция $(f \cdot \mu)$ также является счетно-аддитивной мерой и что она абсолютно непрерывна относительно меры μ.

Следующая теорема доказана в §2.15 в конспекте Н.А. Гусева по мере и интегралу Лебега.

Теорема Радона-Никодима. Пусть μ и ν — σ-конечные меры на $(X, \mathcal{E})$, причем $\nu \ll \mu$. Тогда существует такая измеримая относительно $\mathcal{E}$ функция $f: X \longrightarrow [0, +\infty)$, что

$$\nu = f \cdot \mu \qquad \stackrel{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \qquad \nu(A) = \int\limits_A f d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{E}$$

При этом функция f определена однозначно с точностью до значений на множестве меры нуль.

Опр. Функция $f = \dfrac{d\nu}{d\mu}$ из теоремы Радона-Никодима называется *плотностью меры ν относительно меры μ* или *производной Радона-Никодима.*

Утв. 1 Определения 1 и 2 непрерывной случайной величины эквивалентны.

Доказательство:

(a) (1) $\implies$ (2):
Имеем из определения 1 с учетом замечания, что

$$\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}\{\xi \in B\} = \int_B f_\xi d\mu, \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Пусть $\mu(B) = 0$. Тогда и $\mathbb{P}_\xi(B) = 0$, так как интеграл Лебега по множеству меры нуль равен нулю. Значит, $\mathbb{P}_\xi = f \cdot \mu \ll \mu$.

(b) (2) $\implies$ (1):
Меры $\mathbb{P}_\xi$ и μ конечны, а значит, и сигма-конечны. По теореме Радона-Никодима, существует борелевская f_ξ (в нашем случае $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$) такая, что $\mathbb{P}_\xi = f_\xi \cdot \mu$. Значит,

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}_\xi\big((-\infty, x)\big) = \int\limits_{(-\infty,x)} f_\xi d\mu = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t) dt \qquad \square$$

Теперь вернемся к доказательству того, что в определении 1 непрерывной случайной величины эквивалентно требовать выполнение равенства

$$\mathbb{P}\{\xi \in B\} = \int\limits_B f_\xi(t) dt$$

для любого борелевского множества B.

Идея: показать, что интеграл борелевской функции по какому-то множеству является мерой на Ω, совпадающей с мерой $\mathbb{P}_\xi$. Для этого нам понадобится следующая теорема, которая приведена в §1.15 и §1.16 в конспекте Н.А. Гусева по мере и интегралу Лебега.

Опр. Семейство множеств $\mathcal{F}$ называется *π-системой*, если

$$\forall A, B \in \mathcal{F} \quad \to \quad A \cap B \in \mathcal{F}$$

Критерий совпадения мер. Пусть

- $\mathcal{F}$ — π-система в X;
- $\mu,\ \nu:\ \sigma(\mathcal{F}) \to [0, +\infty]$ — счетно-аддитивные меры;
- $\mu(A) = \nu(A)$ при $A \in \mathcal{F}$;
- $\exists \{X_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{F}$ такая, что

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X, \qquad \mu(X_n) < +\infty$$

Тогда меры μ и ν совпадают на порожденной сигма-алгебре $\sigma(\mathcal{F})$.

Для начала покажем, что интеграл борелевской функции является счетно-аддитивной мерой. В доказательстве используется следующая известная теорема.

Теорема Лебега об ограниченной сходимости. Пусть

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n,\ f:\ X \longrightarrow \mathbb{R}$ измеримы по Лебегу;
- $f_n \xrightarrow{\text{п.в.}} f$ на X;
- $\exists g \in L_1(X)$ — интегрируемая по Лебегу — такая, что

$$|f_n(x)| \leq g(x) \text{ почти всюду на } X \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Тогда $f \in L_1(X)$ и

$$\int\limits_X f_n d\mu \longrightarrow \int\limits_X f d\mu \qquad \text{при } n \to \infty$$

Утв. 2 Пусть $f \in L_1(X)$, $\mathcal{F}$ — сигма-алгебра на X. Тогда функция

$$\nu:\ \mathcal{F} \longrightarrow [0, +\infty), \qquad \nu(A) = \int\limits_A f d\mu$$

является счетно-аддитивной мерой.

Доказательство:
Ясно, что $\nu(\varnothing) = 0$. Покажем счетную аддитивность. Пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ — дизъюнктное семейство, $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ (случай, когда дизъюнктные множества в объединении не дают все X легко сводится к такому).

Определим функции:

$$f_n:\ X \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = f(x) \cdot \mathbb{I}_{A_n}(x),$$

где $\mathbb{I}_{A_n}$ — индикаторная (характеристическая) функция множества A_n. Также определим

$$g_n:\ X \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_n(x)$$

По построению, все f_n и g_n измеримы по Лебегу, последовательность $\{g_n\}$ сходится к f поточечно и выполнена оценка:

$$|g_n(x)| \leq f(x), \qquad \forall x \in X, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

По теореме Лебега об ограниченной сходимости,

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_X g_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$$

Откуда:

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_X \sum_{k=1}^{n} f_k d\mu = \int\limits_X f d\mu \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_X f_k d\mu = \int\limits_X f d\mu \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{A_k} f d\mu = \int\limits_X f d\mu$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k) = \nu(X)$$ □

Утв. 3 Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $\xi:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная случайная величина. Тогда ее распределение представимо в виде:

$$\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}\{\xi \in B\} = \int\limits_B f_\xi(x) dx, \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

где f_ξ — функция плотности распределения с.в. ξ.

Доказательство:
У нас имеется две счетно-аддитивные меры на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}\{\xi \in B\}, \qquad \nu(B) = \int\limits_B f_\xi(x)dx$$

Мера ν счетно-аддитивна в силу доказанного выше утверждения 2. Требуется доказать, что они совпадают на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Пусть

$$\mathcal{F} = \big\{[a,b) \bigm| a,b \in \mathbb{R}\big\} \ \text{ — все полуинтервалы}$$

Видно, что $\mathcal{F}$ — π-система, а порожденная $\mathcal{F}$ сигма-алгебра есть борелевская сигма-алгебра на $\mathbb{R}$. Кроме того, обе меры $\mathbb{P}_\xi$ и ν конечны, поэтому последнее условие в критерии совпадения мер не нужно.

Убедимся, что меры совпадают на $\mathcal{F}$:

$$\mathbb{P}_\xi\big([a,b)\big) = \mathbb{P}\{a \le \xi < b\} = \mathbb{P}\{\xi < b\} - \mathbb{P}\{\xi < a\} = F_\xi(b) - F_\xi(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} f_\xi dx - \int\limits_{-\infty}^{a} f_\xi dx = \int\limits_{a}^{b} f_\xi(x)dx$$

$$\nu\big([a,b)\big) = \int\limits_{[a,b)} f_\xi(x)dx$$

Интеграл Лебега не зависит от значений в конечном числе точек, значит интегралы для $\mathbb{P}_\xi$ и ν равны. По критерию совпадения мер, $\mathbb{P}_\xi$ и ν совпадают на $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\square$

Следствие 1 Для произвольной непрерывной случайной величины ξ выполнено

$$\mathbb{P}\{\xi = a\} = 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}$$

Данное свойство выполнено для любой случайной величины, обладающей непрерывной функцией распределения (из непрерывности F_ξ не следует, что с.в. ξ непрерывна!). Это можно доказать, используя свойство непрерывности вероятности:

$$\mathbb{P}\{\xi = a\} = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{a \le \xi < a + \frac{1}{n}\right\}\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{a \le \xi < a + \frac{1}{n}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left[F\left(a + \frac{1}{n}\right) - F(a)\right] = F(a) - F(a) = 0$$

Следствие 2 Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $\xi : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная случайная величина. Тогда ее функция распределения F_ξ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Доказательство:
Из общих свойств функции распределения с.в., доказанных на лекции, $\forall x \in \mathbb{R}$ выполнено:

$$F_\xi(x) - F_\xi(x-0) = 0 \ \ \text{(непрерывность слева)}$$

$$F_\xi(x+0) - F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\xi = x\}$$

Но $\mathbb{P}\{\xi = x\} = 0$, поэтому пределы слева и справа для функции F_ξ равны, значит, она непрерывна на $\mathbb{R}$. $\square$

Задача 1

Пусть X, Y — независимые случайные величины (далее с.в.). Найти функции распределения с.в. $\xi = \min(X, Y)$ и $\eta = \max(X, Y)$.

Решение:

Пользуясь независимостью, получаем

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}\{\eta < x\} = \mathbb{P}\{X < x \wedge Y < x\} = \mathbb{P}\{X < x\} \cdot \mathbb{P}\{Y < x\} = F_X(x) F_Y(x)$$

Используя формулу включений-исключений для двух событий, получаем

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\xi < x\} = \mathbb{P}\{X < x \ \vee \ Y < x\} = F_X(x) + F_Y(x) - F_X(x) F_Y(x)$$

Утв. 4 Пусть $f : E \longrightarrow (0, +\infty)$ измерима по Лебегу и $\mu(E) > 0$. Тогда

$$\int_E f d\mu > 0.$$

Доказательство:
Определим множества

$$B_1 = \{x \in E \mid f(x) > 1\}, \qquad B_k = \left\{x \in E \;\middle|\; \frac{1}{k+1} < f(x) < \frac{1}{k}\right\}, \quad k \geq 2$$

По построению $\{B_k\}$ дизъюнктны и $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k = E$. По счетной аддитивности:

$$\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists n \in \mathbb{N} : \ \ \mu(B_n) > 0$$

Тогда

$$\int_E f d\mu \geq \int_{B_n} f d\mu \geq \int_{B_n} \frac{1}{n+1} d\mu = \frac{\mu(B_n)}{n+1} > 0 \qquad \square$$

Задача 2

Пусть ξ — непрерывная с.в., $f_\xi > 0$ — ее функция распределения. Найти распределение с.в. $\eta = F_\xi(\xi)$, где F_ξ — функция распределения ξ.

Решение:

Функция $f_\xi > 0$, значит, F_ξ строго возрастает.

Допустим противное, $\exists a, \ b \in \mathbb{R} : \ F_\xi(a) = F_\xi(b) \implies F_\xi = \text{const}$ на $[a, b]$ так как F_ξ монотонна. Тогда

$$0 = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f_\xi(x) dx > 0 \ \ \text{(в силу утверждения 4) — противоречие}$$

Тогда существует обратная функция $F_\xi^{-1}(y)$ при $y \in [0, 1]$. В таком случае при $x \in [0, 1]$:

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}\{\eta < x\} = \mathbb{P}\{F_\xi(\xi) < x\} = \mathbb{P}\{\xi < F_\xi^{-1}(x)\} = F_\xi\left(F_\xi^{-1}(x)\right) = x$$

Случайная величина η принимает значения от 0 до 1, поэтому

$$F_\eta(x) = 0, \quad x \leq 0, \qquad F_\eta(x) = 1, \quad x \geq 1$$

Таким образом,

$$\eta \sim \mathcal{U}[0, 1] \ \ \text{(равномерное распределение на отрезке } [0, 1])$$

Задача 3

Пусть с.в. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ — нормально распределенная случайная величина, т.е. с плотностью

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Найти плотность распределения с.в. $Y = X^2$.

Решение:

При $x \le 0: \; F_Y(x) = 0$. При $x > 0$:

$$F_Y(x) = \mathbb{P}\{X^2 < x\} = \mathbb{P}\{-\sqrt{x} < X < \sqrt{x}\} = \mathbb{P}\{X < \sqrt{x}\} - \mathbb{P}\{X \le -\sqrt{x}\} = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$$

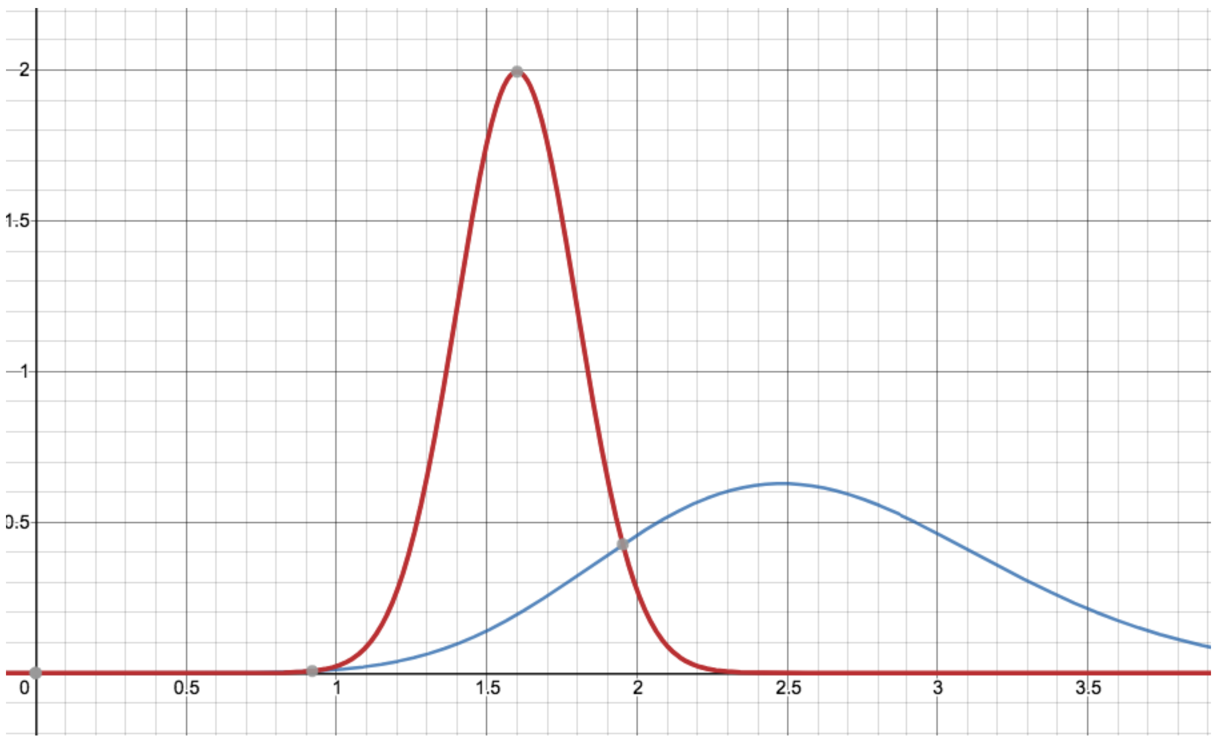
В последнем равенстве мы пользуемся тем, что $\mathbb{P}\{X = -\sqrt{x}\} = 0$ (следствие 1).

Функция $f_X(x)$ непрерывна, значит, $F_X(x)$ непрерывно дифференцируема. Тогда и функция $F_Y(x)$ непрерывно дифференцируема при $x > 0$. Плотность вероятность в таком случае:

$$f_Y(x) = \frac{dF_Y}{dx} = \frac{f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

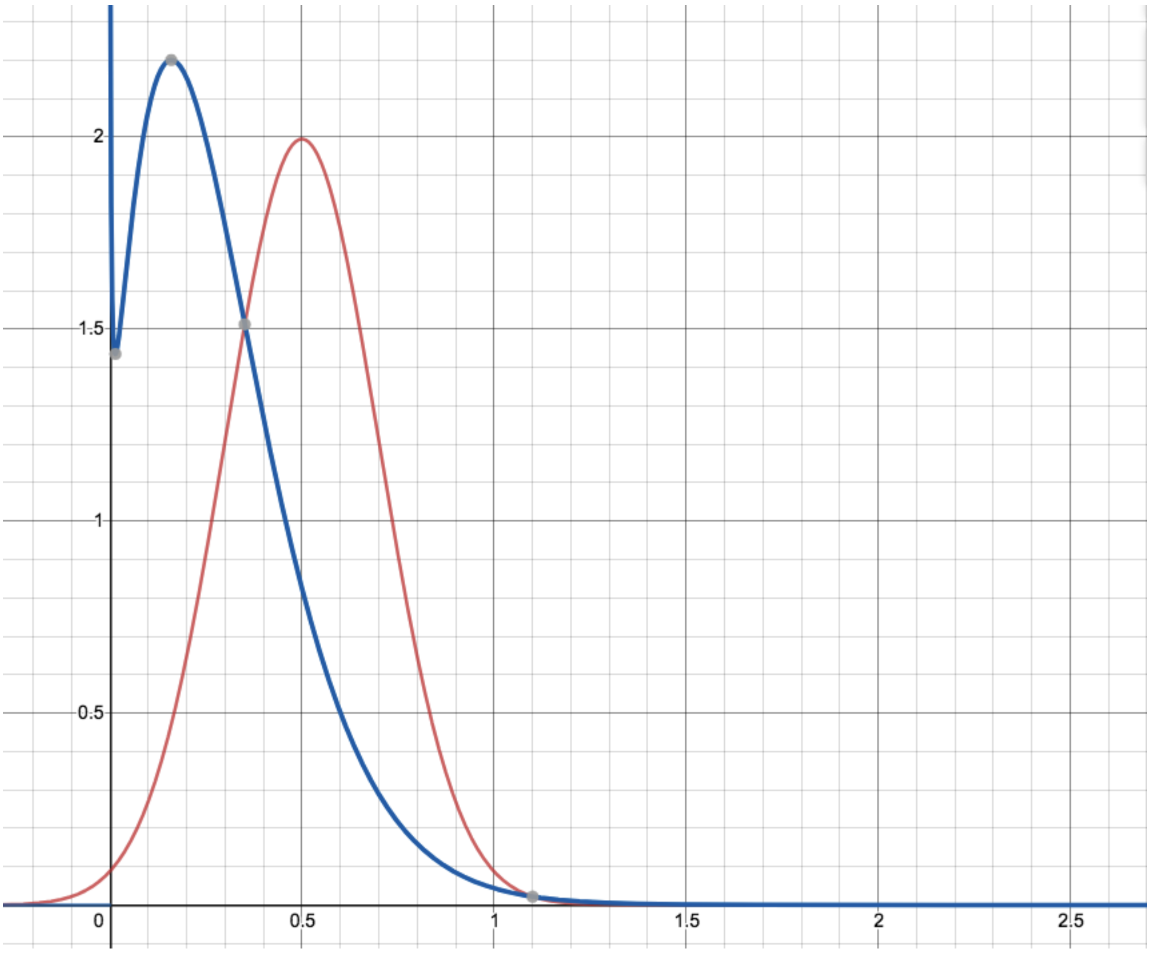
Здесь нигде не использовалось, какое конкретно распределение имела величина X. Вообще, функция плотности определяется с точностью до значений на множестве меры 0. Здесь ее можно задать функцией:

$$f_Y(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \le 0 \\ \dfrac{f_X(\sqrt{x}) + f_X(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} & , \; x > 0 \end{cases}$$



Красным цветом показана функция $f_X(x)$, а синим цветом — функция $f_Y(x)$ $(\sigma = 0.2, \; \mu = 1.6)$.

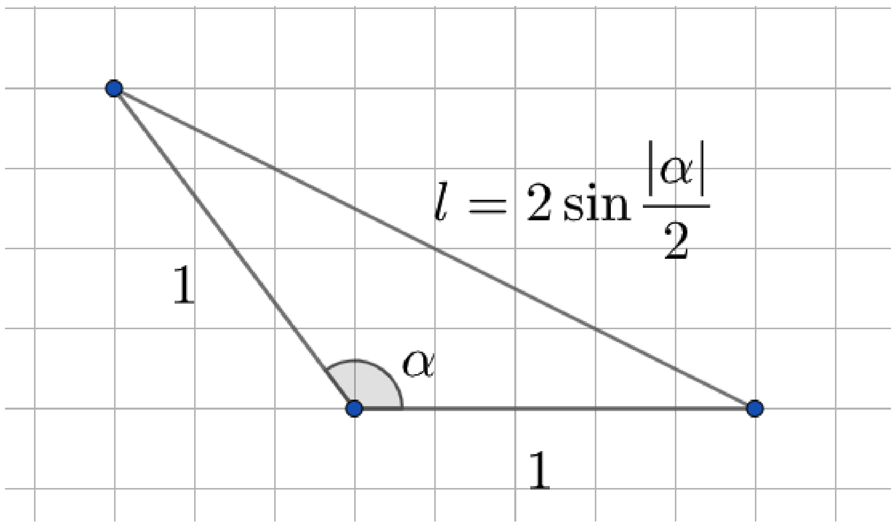
Эта функция не является непрерывной и стремится к бесконечности при $x \to +0$: $(\sigma = 0.2, \; \mu = 0.5)$



Задача 4

Равнобедренный треугольник на плоскости образован единичным вектором в направлении оси абсцисс и единичным вектором, имеющим случайное равномерно распределённое направление. Найти распределение длины третьей стороны треугольника.

Решение:



В данном случае вероятностным пространством является $[-\pi, \pi]$. На нем задана тождественная случайная величина α, которая распределена равномерно:

$$\alpha \sim \mathcal{U}[-\pi, \pi], \qquad f_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi}, \quad x \in [-\pi, \pi]$$

Есть также вторая случайная величина, распределение которой надо найти:

$$l = \phi(\alpha) = 2\sin\frac{|\alpha|}{2}$$

Будем обозначать x — значение с.в. α, а y — значение с.в. l. Сделаем двумя способами.

1. Воспользуемся формулой преобразования плотности распределения непрерывной случайно величины в случае, когда преобразование не монотонно (можно было воспользоваться симметрией):

$$\eta = \phi(\xi) \qquad \Longrightarrow \qquad f_\eta(y) = \sum_{x:\ \phi(x)=y} \frac{f_\xi(x)}{|\phi'(x)|}$$

   В нашем случае при $\alpha \neq 0$:

$$\phi'(\alpha) = \operatorname{sign}(\alpha)\cos\frac{\alpha}{2}, \qquad |\phi'(\alpha)| = \cos\frac{\alpha}{2}$$

   Так как функцию плотности можно определить с точностью до значений на множестве меры нуль, посчитаем ее значения при $\alpha \neq 0, \pm\pi$, то есть при $l \neq 0,\ l \neq 2$:

$$f_l(y) = \frac{f_\alpha(x)}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{f_\alpha(-x)}{\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\pi\cos\frac{x}{2}}, \qquad x \in (0, \pi)$$

   Выразим значение с.в. l через значение с.в. α:

$$x = 2\arcsin\frac{y}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad f_l(y) = \frac{1}{\pi\cos\left(\arcsin\frac{y}{2}\right)} = \frac{1}{\pi\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}$$

2. Посчитаем функцию распределения по определению. При $0 \leq y \leq 2$:

$$F_l(y) = \mathbb{P}\{l < y\} = \mathbb{P}\left\{\sin\frac{|\alpha|}{2} < \frac{y}{2}\right\} = \mathbb{P}\left\{-2\arcsin\frac{y}{2} < \alpha < 2\arcsin\frac{y}{2}\right\}$$

   Эта вероятность равна отношению длины дуги к длине всей окружности:

$$F_l(y) = \frac{4\arcsin\frac{y}{2}}{2\pi} = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{y}{2}$$

   Если продифференцировать $F_l(y)$, то получится такая же функция плотности, как и в первом пункте.

Задача 1 (доп.)

Пусть вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

$$\Omega = [0,1]^2, \qquad \mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega), \qquad \mathbb{P} \text{ — мера Лебега}$$

Обозначим координаты (ω_1, ω_2). На Ω заданы случайные величины ξ и η. Найти функцию распределения с.в. $\zeta = \xi + \eta$, если

(a) $\xi = \omega_1 + \omega_2,\ \eta = \omega_1 - \omega_2$;

(b) $\xi = \omega_1,\ \eta = \omega_2$;

(c) $\xi = \begin{cases} 1, & \omega_1 = \omega_2 \\ 0, & \omega_1 \neq \omega_2 \end{cases}, \quad \eta = \omega_1\omega_2.$

Решение:

(a) $\zeta \in [0,2]$. При $x \in [0,2]$:

$$F_\zeta(x) = \mathbb{P}\{\xi + \eta < x\} = \mathbb{P}\{2\omega_1 < x\} = \mu\left([0,1]^2 \cap \{2\omega_1 < x\}\right) = \frac{x}{2}$$

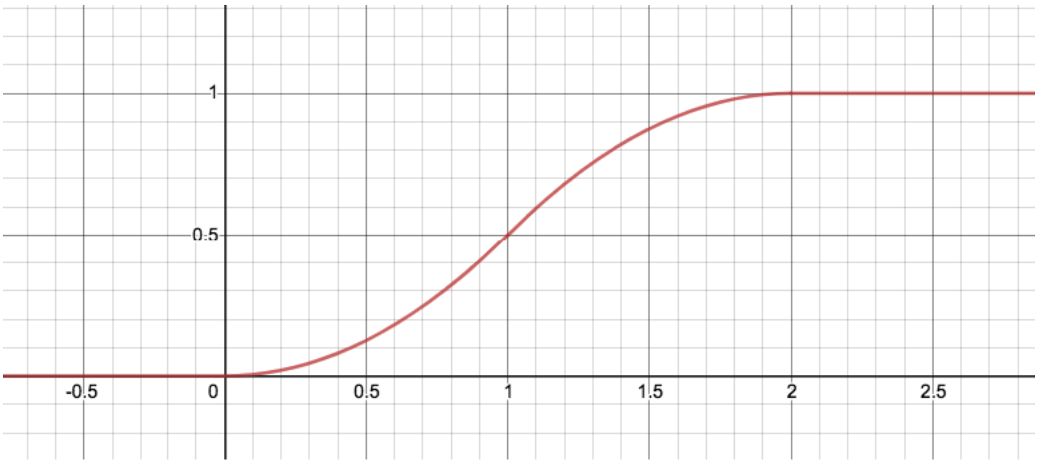
Значит,

$$\zeta = \xi + \eta \sim \mathcal{U}[0,2]$$

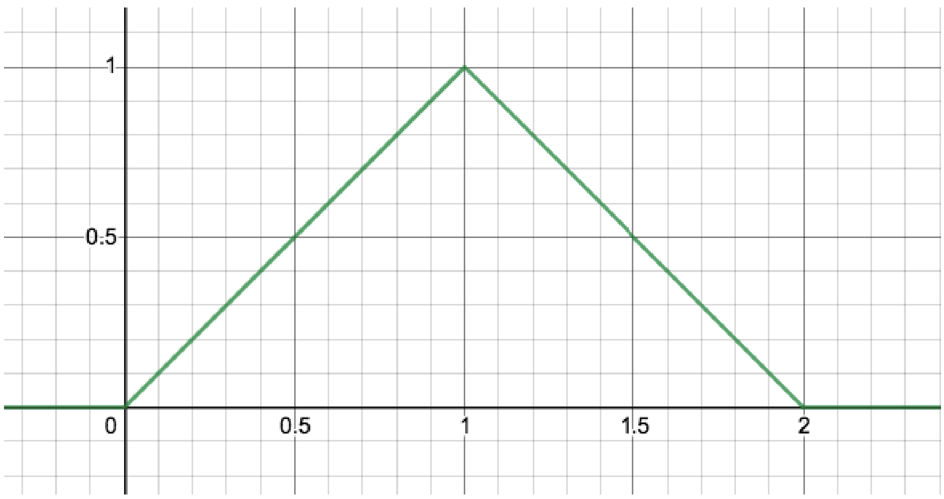
(b) $\zeta \in [0,2]$. При $x \in [0,2]$:

$$F_\zeta(x) = \mathbb{P}\{\xi + \eta < x\} = \mathbb{P}\{\omega_1 + \omega_2 < x\} = \mu\left([0,1]^2 \cap \{\omega_1 + \omega_2 < x\}\right) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & ,0 \le x \le 1 \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2} & ,1 \le x \le 2 \end{cases}$$

Последний переход делается из простой геометрии, так как μ — площадь фигуры.



$$f_\zeta(x) = 1 - |1 - x|, \qquad 0 \le x \le 2$$



(c) $\zeta \in [0,2]$. При $x \in [0,2]$:

$$F_\zeta(x) = \mathbb{P}\big\{\mathbb{I}\{\omega_1 = \omega_2\} + \omega_1\omega_2 < x\big\} = \mu(M_1 \cup M_2) = \mu(M_1) + \mu(M_2),$$

где M_1 и M_2 — непересекающиеся множества:

$$M_1 = \big\{(\omega_1, \omega_2) \in [0,1]^2 \;\big|\; \omega_1 \neq \omega_2,\ \omega_1\omega_2 < x\big\}$$

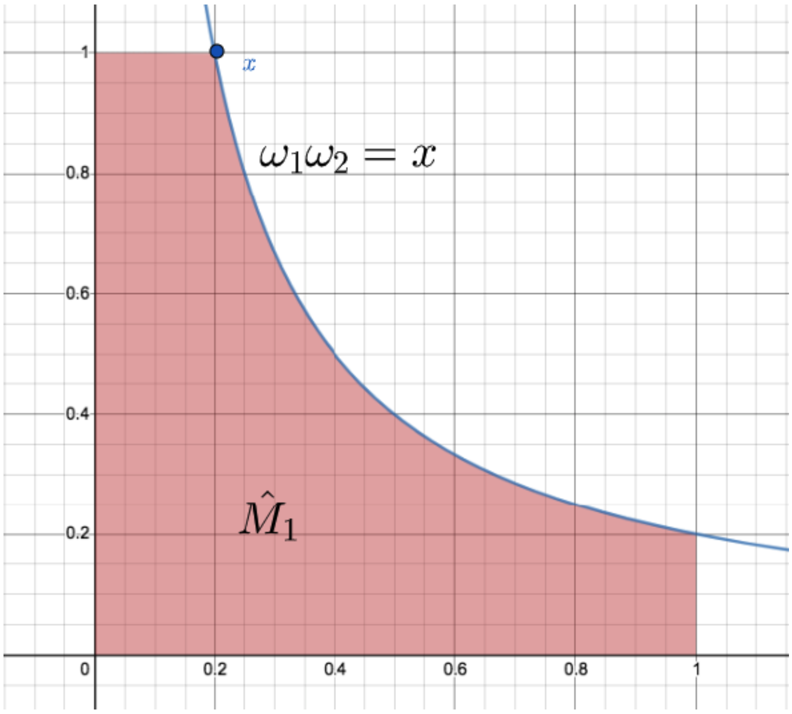
$$M_2 = \big\{(\omega_1, \omega_2) \in [0,1]^2 \;\big|\; \omega_1 = \omega_2,\ 1 + \omega_1\omega_2 < x\big\}$$

Заметим, что

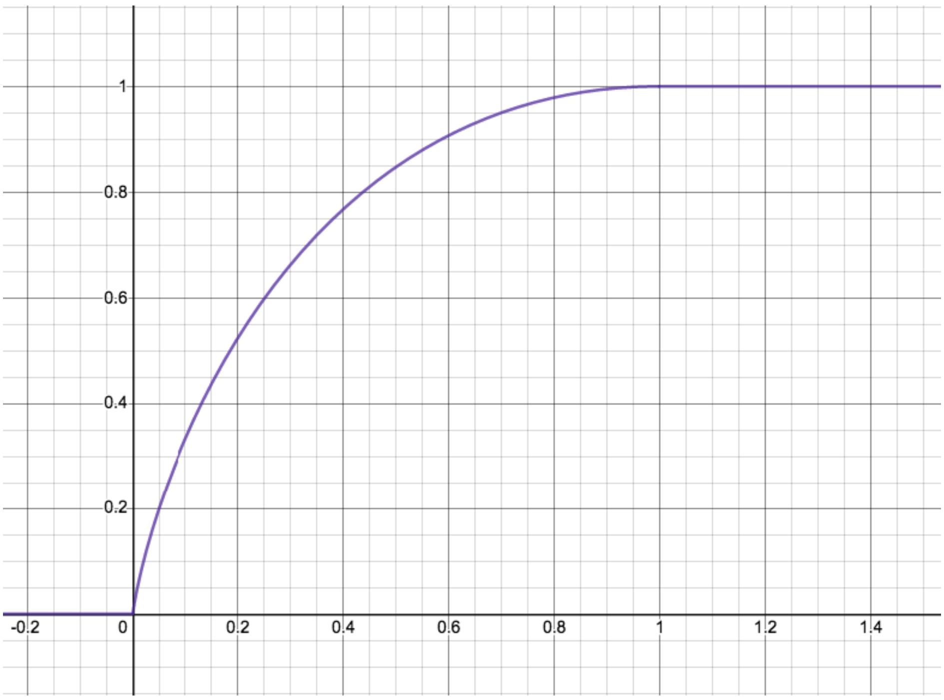
$$\mu(M_2) \leq \mu([0,1]^2 \cap \{\omega_1 = \omega_2\}) = 0$$

Тогда

$$F_\zeta(x) = \mu(M_1) = \mu(\hat{M}_1) = \mu([0,1]^2 \cap \{\omega_1\omega_2 < x\}) = \text{площадь фигуры}$$



$$F_\zeta(x) = 1 \cdot x + \int\limits_x^1 \frac{x}{\omega_1} d\omega_1 = x - x\ln x = x(1 - \ln x), \qquad 0 \leq x \leq 1$$



$$f_\zeta(x) = -\ln x, \qquad 0 < x \leq 1$$

Задача 2 (доп.)

Пусть ξ — с.в. с функцией распределения F_ξ, а $\mathbb{P}_\xi$ — её распределение. Рассмотрим вероятностное пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_\xi)$ и зададим функцию $\eta(x) = x$. Найти функцию распределения η.

Решение:

$$F_\eta(x) = \mathbb{P}_\xi\{\eta < x\} = \mathbb{P}_\xi\big\{\eta^{-1} \in (-\infty, x)\big\} = \mathbb{P}_\xi\big((-\infty, x)\big) = \mathbb{P}\{\xi < x\} = F_\xi(x)$$

Задача 3 (доп.)

Пусть $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ — строго возрастающая непрерывная функция такая, что $F(-\infty) = 0,\ F(+\infty) = 1$. Рассмотрим с.в. $\eta \sim \mathcal{U}[0,1]$. Доказать, что с.в. $\xi = F^{-1}(\eta)$ имеет функцию распределения F.

Решение:

Случайная величина η имеет функцию распределения $F_\eta(y) = y,\ 0 \le y \le 1$. Тогда

$$F_\xi(x) = \mathbb{P}\{F^{-1}(\eta) < x\} = \mathbb{P}\{\eta < F(x)\} = F_\eta(F(x)) = F(x)$$