Функан. ДЗ 2.

Прохоров Юрий, 776

В решениях я буду пользоваться некоторыми обозначениями и определениями из книги лектора и конспекта Паши Останина. Сначала я приведу их и докажу некоторые вспомогательные утверждения. Серым выделено то, что в принципе не нужно, но я написал для полноты рассуждений.

Опр. Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — топологические пространства. *Тихоновской топологией* или *топологией произведения* на $X_1 \times X_2$ называется слабейшая (наименьшая) топология, относительно которой отображения проекций

$$\pi_1 : (x_1, x_2) \mapsto x_1, \qquad \pi_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_2$$

топологически непрерывны.

Аналогично определяется топология на произведении произвольного числа пространств (не обязательно конечного числа). Например,

$$F = \{f : [0,1] \to [0,1]\} = \prod_{\alpha \in [0,1]} [0,1] = [0,1]^{[0,1]}.$$

В этом случае топология произведения τ такова, что $\forall x \in [0,1]$ отображение

$$\pi_x : F \to \mathbb{R}, \qquad \pi_x : f \mapsto f(x)$$

топологически непрерывно.

Лемма 1. Пусть $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$. Тогда

f — топологически непрерывно $\iff$ прообраз любого элемента предбазы τ_2 открыт.

Доказательство:
Известно что,

f — топологически непрерывно $\iff$ прообраз любого открытого множества открыт

Достаточно доказать, что из открытости прообразов элементов предбазы τ_2 следует правая часть этого утверждения. Сразу также отметим, что для операции взятия прообраза выполнено

$$f^{-1}\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}(A_\alpha), \qquad f^{-1}\left(\bigcap_\alpha A_\alpha\right) = \bigcap_\alpha f^{-1}(A_\alpha)$$

Пусть W — произвольный элемент базы τ_2. Тогда $W = \bigcap\limits_{k=1}^{m} V_k$, где V_k — элементы предбазы. Значит,

$$f^{-1}(W) = f^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{m} V_k\right) = \bigcap_{k=1}^{m} f^{-1}(V_k)$$

По условию леммы, $f^{-1}(V_k) \in \tau_1$, а значит, и $f^{-1}(W) \in \tau_1$ как конечное пересечение элементов топологии.

Пусть теперь $U \in \tau_2$ — произвольное открытое множество. Тогда $U = \bigcup\limits_\alpha W_\alpha$, где W_α — элементы базы. По доказанному выше, $\forall \alpha\ f^{-1}(W_\alpha) \in \tau_1$, тогда, аналогично, $f^{-1}(U) \in \tau_1$ как объединение элементов топологии. $\square$

Данная лемма позволяет строить топологии, относительно которых некоторые отображения непрерывны. Так, например, строится топология произведения τ в $[0,1]^{[0,1]}$.

По лемме 1, чтобы π_x было топологически непрерывным необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall A \in \sigma([0,1]) : \ \pi_x^{-1}(A) \in \tau,$$

где $\sigma([0,1]) = \{(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap [0,1] \mid c \in [0,1],\ \varepsilon > 0\}$ — предбаза стандартной топологии на $[0,1]$ (ее можно записать в таком виде). Тогда

$$\pi_x^{-1}(c-\varepsilon, c+\varepsilon) = V(x, c, \varepsilon) = \{g \in F \mid |g(x) - c| < \varepsilon\}$$

По *критерию предбазы*:

$$\bigcup_{\substack{x\in[0,1]\\ c\in[0,1]\\ \varepsilon>0}} V(x,c,\varepsilon) = [0,1]^{[0,1]} \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma = \Big\{V(x,c,\varepsilon) \mid x \in [0,1], c \in [0,1], \varepsilon > 0\Big\} \text{ — предбаза}$$

Топология τ, определяемая предбазой σ, является наименьшей по построению, значит, это тихоновская топология.

Лемма 2. Пусть τ — тихоновская топология в $[0,1]^{[0,1]}$. Тогда

$$f_n \longrightarrow f \text{ поточечно} \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_n \xrightarrow{\tau} f \text{ (по топологии)},$$

то есть τ — топология поточечной сходимости.

Доказательство:

- Необходимость.

  Пусть есть поточечная сходимость. Пусть $U(f) \in \tau$ — произвольная окрестность. $U(f)$ представляется в виде объединения элементов базы, значит, $\exists W$ из базы такое, что $f \in W$. Множество W, в свою очередь, есть конечное пересечение элементов предбазы:

  $$W = \bigcap_{k=1}^{m} V_k \qquad \Longrightarrow \qquad f \in V_k = V(x_k, c_k, \varepsilon_k) \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x_k) - c_k| < \varepsilon_k \qquad \forall k = 1, \ldots, m$$

  По условию, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_k) = f(x_k) \implies \exists N_k :\ \forall n \geq N_k$ выполнено $|f_n(x_k) - c| < \varepsilon_k$, то есть $f_n \in V_k$.

  Возьмем $N = \max\limits_k N_k$. Тогда $\forall n \geq N$:

  $$f_n \in V_k \ \ \forall k \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \in \bigcap_{k=1}^{m} V_k = W \subset U(f) \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \xrightarrow{\tau} f$$

- Достаточность.

  Пусть есть сходимость по топологии. Пусть $x \in [0,1]$ — произвольная точка, $\varepsilon > 0$. По определению сходимости по топологии:

  $$\text{для } U(f) = V(x, f(x), \varepsilon) \ \ \exists N = N(\varepsilon) :\ \forall n \geq N \ \longrightarrow\ f_n \in U(f) \quad \Longrightarrow \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

  что есть определение поточечной сходимость $f_n \longrightarrow f$. $\square$

Аналогично лемме 1, можно доказать, что в утверждениях, в которых требуется проверить какое-то условие для любого открытого множества, достаточно проверить, что оно выполнено для элементов предбазы. В частности:

Лемма 3. Пусть σ — предбаза топологии τ на X, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Тогда

$$x_n \xrightarrow{\tau} x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall U(x) \in \sigma \ \ \exists N :\ \ \forall n \geq N \ \ \to \ \ x_n \in U(x)$$

Доказательство:

Необходимость следует из определения сходимости по топологии. Докажем достаточность.

Пусть $U(x)$ — произвольная окрестность x. Она является объединением элементов базы, значит, $\exists W(x) \subset U(x)$ из базы $\Longrightarrow$ $W(x) = \bigcap\limits_{k=1}^{m} V_k,\ V_k \in \sigma$. Для V_k, по условию леммы, существуют номера N_k такие, что $\forall n \geq N_k$ выполнено $x_n \in V_k$. Возьмем $N = \max\limits_k N_k$. Тогда при $n \geq N$:

$$x_n \in V_k \ \ \forall k \qquad \Longrightarrow \qquad x_n \in \bigcap_{k=1}^{m} V_k = W(x) \subset U(x) \qquad \Longrightarrow \qquad x_n \xrightarrow{\tau} x$$

$\square$

Лемма 4. Пусть $f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$, σ_2 — предбаза τ_2. Тогда

$$f \text{ — топологически непрерывно} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in X_1 \ \ \forall V(f(x)) \in \sigma_2 \ \ \exists U(x) \in \tau_1 : \quad f(U(x)) \subset V(f(x))$$

Доказательство аналогично.

Критерий предбазы. $\sigma \subset 2^X$ является предбазой некоторой топологии в X $\Longleftrightarrow$

$$\bigcup_{S \in \sigma} S = X$$

Критерий базы. $\beta \subset 2^X$ является базой некоторой топологии в X $\Longleftrightarrow$

- $\bigcup\limits_{S \in \beta} S = X$
- $\forall A, B \in \beta \ \ \forall x \in A \cap B \ \ \exists C \in \beta : \quad x \in C \subset A \cap B$

Также в курсе интеграла Лебега была доказана теорема:

Теорема Лебега об ограниченной сходимости.

Пусть

- все $f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}$ измеримы по Лебегу,
- $f_n \to f$ поточечно на X,
- существует $g \in \mathbb{L}^1(X)$ — интегрируемая по Лебегу — такая, что

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \forall x \in X$$

Тогда функция $f \in \mathbb{L}^1(X)$ и

$$\int\limits_X |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0 \qquad \text{при } n \to \infty$$

Ясно, что

$$0 \leq \left| \int\limits_X f_n d\mu - \int\limits_X f d\mu \right| = \left| \int\limits_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \int\limits_X |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty$$

Поэтому в условиях теоремы Лебега об ограниченной сходимости:

$$\int\limits_X f_n d\mu \longrightarrow \int\limits_X f d\mu, \qquad n \to \infty$$

Задача 1.6(1) (из задавальника)

Пусть

- $F = \{f : [0,1] \to [0,1]\} = [0,1]^{[0,1]}$, $\qquad \tau$ — топология поточечной сходимости на F
- $M = \{f \in F \mid f \text{ измерима по Лебегу}\}$
- τ_0 — стандартная топология на $\mathbb{R}$ с базой из всевозможных интервалов
- Отображение $I : (M, \tau) \ \to \ (\mathbb{R}, \tau_0)$:

$$I(g) = \int\limits_0^1 g(x) dx$$

- Отображение $S : (F, \tau) \;\to\; (\mathbb{R}, \tau_0)$:

$$S(f) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} f(2^{-k})$$

Исследовать:

(a) топологическую непрерывность I,

(b) секвенциальную непрерывность I,

(c) топологическую непрерывность S,

(d) секвенциальную непрерывность S.

Решение:

(a) Покажем, что I — не непрерывно топологически. Проверим отрицание определения:

$$\exists f \in M \;\; \exists V(I(f)) \in \tau_0 \;\; \forall U(f) \in \tau_1 : \quad I(U(f)) \not\subset V(I(f))$$

Рассмотрим функцию $f \equiv 0,\;\; I(f) = 0$. Пусть $U(f)$ — произвольная окрестность. По определению базы, f лежит в каком-то элементе базы $W \subset U(f)$, который, свою очередь, является пересечением элементов предбазы τ:

$$f \in W = \bigcap_{k=1}^{m} V_k = \bigcap_{k=1}^{m} V(x_k, c_k, \varepsilon_k)$$

Здесь используется тот факт, что топология поточечной сходимости τ задается предбазой

$$\sigma = \Big\{ V(x, c, \varepsilon) \mid x \in [0,1], c \in [0,1], \varepsilon > 0 \Big\}$$

Определим измеримую по Лебегу функцию

$$g : [0,1] \longrightarrow [0,1], \qquad g(x) = \begin{cases} 0, & x = x_k, \\ 1, & x \neq x_k \end{cases}$$

Значения функции g отличаются от 1 лишь в конечном числе точек, значит, интеграл Лебега $I(g) = 1$. По построению:

$$g \in \bigcap_{k=1}^{m} V(x_k, c_k, \varepsilon_k) = W \subset U(f)$$

Итак,

$$\exists f \equiv 0 \;\; \exists V(0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \;\; \forall U(f) \;\; \exists g \in U(f) : \quad I(g) \notin V(0)$$

Значит, отображение I не топологически непрерывно.

(b) Покажем, что I секвенциально непрерывно. Пусть $f_n \xrightarrow{\tau} f$, где τ — топология поточечной сходимости в M. Покажем, что

$$I(f_n) \xrightarrow{\tau_0} I(f) \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n \to \infty} I(f_n) = I(f) \text{ в } \mathbb{R}$$

Последовательность $\{f_n\}$ сходится к f поточечно, и все f_n измеримы по Лебегу. Кроме того,

$$\forall x \in [0,1] \qquad |f_n(x)| \leq 1 = g(x) \in \mathbb{L}^1[0,1]$$

По теореме Лебега об ограниченной сходимости,

$$\int_0^1 f_n dx \longrightarrow \int_0^1 f dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad I(f_n) \longrightarrow I(f), \qquad n \to \infty$$

(c) Покажем, что S топологически непрерывно. Нужно проверить, что

$$\forall f \in F \quad \forall V(S(f)) \in \tau_0 \quad \exists U(f) \in \tau : \quad S(U(f)) \subset V(S(f))$$

В силу *леммы 4*, достаточно проверить это условие только для $V(S(f))$ из предбазы τ_0, то есть для всех V вида

$$V_\varepsilon = (S(f) - \varepsilon,\ S(f) + \varepsilon), \qquad \varepsilon > 0$$

Построим для каждого $\varepsilon > 0$ подходящую окрестность $U(f)$.

Представим $S(f)$ в следующем виде:

$$S(f) = \sum_{k=1}^{N} 2^{-k} f(2^{-k}) + \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} f(2^{-k}),$$

где $N = N(\varepsilon)$ — параметр.

Построим следующую окрестность f:

$$U_{N,\delta} = \bigcap_{k=1}^{N} V(2^{-k}, f(2^{-k}), \delta),$$

где $\delta = \delta(\varepsilon)$ — также параметр.

Наша цель: подобрать δ и N так, чтобы для любой функции $g \in U_{N,\delta}$ было выполнено

$$S(g) \in V_\varepsilon(S(f)) \qquad \Longleftrightarrow \qquad |S(g) - S(f)| < \varepsilon$$

Распишем последнее условие при $g \in U_{N,\delta}$:

$$|S(f) - S(g)| = \left| \sum_{k=1}^{N} 2^{-k} \Big(f(2^{-k}) - g(2^{-k}) \Big) + \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} \Big(f(2^{-k}) - g(2^{-k}) \Big) \right| \leq \sum_{k=1}^{N} 2^{-k} |f(2^{-k}) - g(2^{-k})|$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} |f(2^{-k}) - g(2^{-k})| \leq \sum_{k=1}^{N} 2^{-k} \delta + \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} \cdot 1 < \delta + 2^{-N} \leq \varepsilon$$

Можно взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, а натуральное N таким, что $2^{-N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Итак, мы проверили по определению топологическую непрерывность S.

(d) S секвенциально непрерывно, так как S топологически непрерывно.

Задача 1.6(2) (из задавальника)

Пусть в условиях задачи 1.6(1) задано отображение $J : (F, \tau) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_0)$ вида

$$J(f) = \sup \left\{ \int_0^1 g(x) dx \;\middle|\; g \in M,\ 0 \leq g \leq f \text{ на } [0,1] \right\}$$

Исследовать:

(a) топологическую непрерывность J,

(b) секвенциальную непрерывность J.

Решение:

Будем обозначать

$$J(f) = \sup_{0 \leq g \leq f} I(g), \qquad \text{где } I(g) = \int_0^1 g dx, \quad g \in M$$

(a) Докажем, что J не является топологически непрерывным.

Заметим, что

$$J(f) = I(f) \qquad \text{при } f \in M,$$

т.к. из $0 \leq g \leq f$ следует $I(g) \leq I(f)$ по свойствам интеграла Лебега.

В задаче 1.6.(1)(c) мы уже доказали, что отображение I, а значит, и J, не является топологически непрерывным на M. Из включения $M \subset F$ следует, что J — не топологически непрерывно на F.

(b) J не является секвенциально непрерывным.

Задача 1.7(a) (из задавальника)

Пусть $C[0,1]$ — множество непрерывных на $[0,1]$ функций. Пусть множество

$$V_\varepsilon(f) = \left\{ g \in C[0,1] \;\middle|\; \left| \int_0^1 \big(f(x) - g(x)\big) dx \right| < \varepsilon \right\}$$

Доказать, что семейство

$$\beta = \big\{ V_\varepsilon(f) \;\big|\; f \in C[0,1],\ \varepsilon > 0 \big\}$$

образует базу некоторой топологии τ в $C[0,1]$.

Решение:

Обозначим

$$I(f) = \int_0^1 f(x) dx, \qquad f \in C[0,1]$$

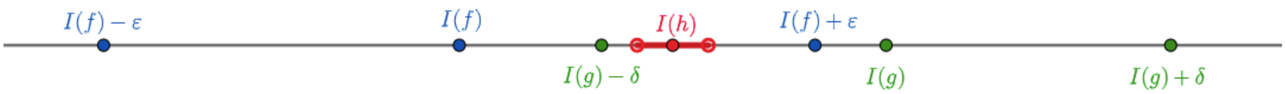
Проверим, что выполняется критерий базы.

- $\displaystyle\bigcup_{\substack{f \in C[0,1] \\ \varepsilon > 0}} V_\varepsilon(f) \supset \bigcup_{\substack{f \in C[0,1] \\ \varepsilon > 0}} \{f\} = C[0,1]$
- Пусть $V_\varepsilon(f), V_\delta(g) \in \beta$. Пусть $h \in V_\varepsilon(f) \cap V_\delta(g)$, то есть

  $$|I(h) - I(g)| < \varepsilon, \qquad |I(h) - I(f)| < \delta$$

  Построим некоторую окрестность $V_\gamma(h)$, где γ определим из рисунка:

  $$\gamma = \frac{1}{2} \cdot \min\Big(\big|I(g) - \delta - I(h)\big|,\ \big|I(f) + \varepsilon - I(h)\big| \Big)$$



  По построению, $h \in V_\gamma(h) \in \beta$. Осталось показать, что $V_\gamma(h) \subset V_\varepsilon(f) \cap V_\delta(g)$.

  Пусть $v \in V_\gamma(h)$. Тогда $|I(h) - I(v)| < \gamma$. Из рисунка и выбора γ следует, что

  $$I(v) \in U_\varepsilon(I(f)) \;\cap\; U_\delta(I(g)) \qquad \Longrightarrow \qquad v \in V_\varepsilon(f) \cap V_\delta(g)$$

По критерию базы, β является базой некоторой топологии τ в $C[0,1]$.

Задача 1.7(б) (из задавальника)

В условиях задачи 1.7(а) для произвольной функции $f \in C[0,1]$ найти в топологическом пространстве $\big(C[0,1], \tau\big)$:

(a) топологическое замыкание $\{f\}$,

(b) секвенциальное замыкание $\{f\}$.

Решение:

(a) $\big[\{f\}\big]_\tau = \big\{g \in C[0,1] \bigm| I(g) = I(f)\big\}$. Докажем два включения.

- Пусть $g \in \big[\{f\}\big]_\tau \implies g$ — точка прикосновения $\{f\}$. Тогда
$$\forall U(g) \in \tau \quad f \in U(g)$$
В частности, это верно для окрестностей следующего вида:
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; f \in V_\varepsilon(g) \qquad \implies \qquad \forall \varepsilon > 0 \;\; |I(f) - I(g)| < \varepsilon \qquad \implies \qquad I(f) = I(g)$$

- Пусть $g \in C[0,1]$ такова, что $I(g) = I(f)$. Пусть $U(g)$ — произвольная окрестность, значит, существует $V_\delta(h) \in \beta$ такое, что
$$g \in V_\delta(h) \subset U(g).$$
$$I(f) = I(g) \qquad \implies \qquad f \in V_\delta(h) \subset U(g)$$
Это определение того, что g — точка прикосновения $\{f\}$.

(b) $\big[\{f\}\big]_{\text{секв.}} = \big\{g \in C[0,1] \bigm| I(g) = I(f)\big\}$. Докажем два включения.

- Пусть g — секвенциальная точка прикосновения $\{f\}$. Тогда $f \xrightarrow{\tau} g$:
$$\forall U(g) \in \tau \;\; \exists N : \;\; \forall n \geq N \;\; f \in U(g)$$
В частности, это верно для окрестностей вида
$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \;\; \forall n \geq N \;\; |I(f) - I(g)| < \varepsilon \qquad \implies \qquad I(f) = I(g)$$

- Пусть $g \in C[0,1]$ такова, что $I(g) = I(f)$. Пусть $U(g)$ — произвольная окрестность, значит, существует $V_\delta(h) \in \beta$ такое, что
$$g \in V_\delta(h) \subset U(g).$$
$$I(f) = I(g) \qquad \implies \qquad f \in V_\delta(h) \subset U(g)$$
Итак,
$$\forall U(g) \;\; \exists N = 1 : \;\; \forall n \geq 1 \;\; f \in U(g),$$
то есть g — секвенциальная точка прикосновения $\{f\}$.

Задача 1.8 (из задавальника)

Опр. Пара (X, τ) называется *топологическим векторным пространством*, если

- X — линейное пространство,
- (X, τ) — топологическое пространство,
- Операции линейного пространства
$$\Phi_+ : X \times X \longrightarrow X, \qquad \Phi_+ : (f, g) \longmapsto f + g$$
$$\Psi_\alpha : X \longrightarrow X, \qquad \Psi_\alpha : f \longmapsto \alpha f, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$
топологически непрерывны.

Пусть $F = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ с топологией τ поточечной сходимости.

(a) Доказать, что (F, τ) — топологическое векторное пространство относительно поточечных операций сложения и умножения на скаляр,

(b) Найти все линейные непрерывные отображения $\Phi : (F, \tau) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Решение:

(a) Легко видеть, что F — линейное пространство, и, по построению, (F, τ) — топологическое пространство. Докажем топологическую непрерывность Ψ_α и Φ_+.

1. Непрерывность Ψ_α.

   Известно, что топология τ поточечной сходимости задается предбазой

$$\sigma = \big\{V(x, c, \varepsilon) \;\big|\; x, c \in \mathbb{R},\; \varepsilon > 0\big\}$$

   В силу *леммы 1* достаточно показать, что

$$\forall V(x, c, \varepsilon) \in \sigma \quad \to \quad \Psi_\alpha^{-1}(V(x, c, \varepsilon)) \in \tau$$

   Имеем при $\alpha \neq 0$:

$$f \in \Psi_\alpha^{-1}(V(x, c, \varepsilon)) \iff \alpha f \in V(x, c, \varepsilon) \iff |\alpha f(x) - c| < \varepsilon \iff$$
$$\iff \left|f(x) - \frac{c}{\alpha}\right| < \frac{\varepsilon}{\alpha} \iff f \in V\left(x, \frac{c}{\alpha}, \frac{\varepsilon}{\alpha}\right)$$

   Значит,

$$\Psi_\alpha^{-1}(V(x, c, \varepsilon)) = V\left(x, \frac{c}{\alpha}, \frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \in \sigma \subset \tau$$

   При $\alpha = 0:$

$$\Psi_0^{-1}(V(x, c, \varepsilon)) = F \text{ или } \varnothing \in \tau$$

2. Непрерывность Φ_+. Требуется показать топологическую непрерывность Φ_+ относительно топологии произведения $F \times F$. Предбаза такой топологии τ_0 имеет вид

$$\sigma_0 = \{A \times B \mid A, B \in \sigma\}$$

   В силу *леммы 4* достаточно проверить условие

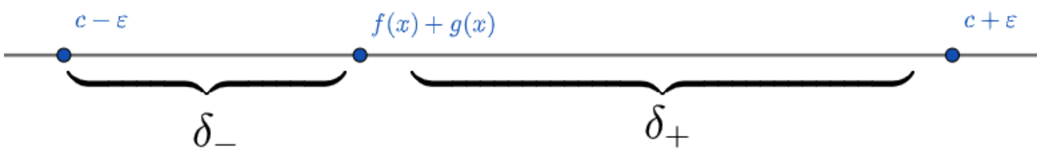
$$\forall f, g \in F \;\; \forall V(x, c, \varepsilon) \ni f + g \;\; \exists U(f, g) \in \tau_0 \quad \Phi_+(U(f, g)) = U(f) + U(g) \subset V(x, c, \varepsilon),$$

   где $U(f) = \pi_1(U(f, g)),\; U(g) = \pi_2(U(f, g))$ — проекции.

   Пусть $V(x, c, \varepsilon)$ — произвольная окрестность, содержащая $f + g$. Тогда

$$|f(x) + g(x) - c| < \varepsilon$$

   Построим окрестность $U(f + g)$.



   Рассмотрим

$$U(f) = V(x, f(x), \gamma), \qquad U(g) = V(x, g(x), \gamma), \qquad U(f, g) = U(f) \times U(g),$$

где $\gamma = \dfrac{1}{4}\min(\delta_-, \delta_+)$.

Пусть $u \in U(f),\ v \in U(g)$. Требуется показать, что $u + v \in V(x, c, \varepsilon)$. Имеем:

$$|u(x) + v(x) - c| = \Big|\big(u(x) - f(x)\big) + \big(v(x) - g(x)\big) + \big(f(x) + g(x) - c\big)\Big| \le |u(x) - f(x)| +$$
$$+ |v(x) - g(x)| + |f(x) + g(x) - c| \le \gamma + \gamma + \big(\varepsilon - \min(\delta_-, \delta_+)\big) \le 2\gamma + \varepsilon - 4\gamma < \varepsilon$$

Итак, мы построили $U(f, g)$ такую, что

$$\Phi_+(U(f, g)) = U(f) + U(g) \subset V(x, c, \varepsilon)$$

Значит, Φ_+ топологически непрерывно.

(b) Покажем, что все линейные непрерывные отображения имеют вид

$$\Phi(f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k), \qquad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

Докажем необходимость и достаточность.

1. Необходимость

Для непрерывности Φ необходимо, чтобы прообразы всех элементов базы $\mathbb{R}$ были открыты. То есть:

$$\Phi^{-1}((a, b)) \in \tau \qquad \Longrightarrow \qquad \exists V = \bigcap_{k=1}^{n} V(x_k, c_k, \varepsilon_k) \subset \Phi^{-1}((a, b)) \ \ \text{(т.е. } V \text{ — элемент базы } \tau\text{)}$$

Обозначим $\delta_k(x) = \begin{cases} 1, & x = x_k \\ 0, & x \neq x_k \end{cases}$ и представим произвольную функцию $f \in F$ в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k(x) f(x_k) + g(x), \qquad g(x_k) = 0,\ \forall k = 1, \dots, n$$

Подействуем на нее отображением Φ и воспользуемся линейностью:

$$\Phi(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Phi(\delta_k) + \Phi(g)$$

По построению, если $f \in V$, то $a < \Phi(f) < b$. Для произвольного $C > 0$ рассмотрим

$$F(x) = \begin{cases} Cf(x), & x \neq x_k\ \forall k \\ f(x), & x = x_k \end{cases}$$

По построению, $F \in V$, значит, $a < \Phi(F) < b$. Но

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} \delta_k(x) f(x_k) + Cg(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(F) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Phi(\delta_k) + C\Phi(g) = \Phi(f) + (C - 1)\Phi(g)$$

$$\forall C > 0 \quad \left.\begin{matrix} a < \Phi(f) < b \\ a < \Phi(f) + (C-1)\Phi(g) < b \end{matrix}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \Phi(g) = 0$$

Таким образом, отображение Φ должно иметь вид:

$$\Phi(f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Phi(\delta_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k), \qquad f \in F,$$

где $\alpha_k = \Phi(\delta_k)$ — значения отображения на конечном числе функций.

2. <u>Достаточность</u>

Линейность тривиальна. Проверим топологическую непрерывность. Заметим, что

$$\Phi(f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \pi_{x_k}(f),$$

где проекции π_{x_k} непрерывны по определению топологии произведения. Осталось показать, что линейная комбинация непрерывных отображений тоже непрерывна. Достаточно проверить, что умножение на скаляр и сложение сохраняют непрерывность.

Доказательства этих фактов повторяют доказательства непрерывности операций линейного пространства из пункта (a).