Функан. ДЗ 11.

Прохоров Юрий, 776

Задача 1

Дан оператор Вольтерра $A \in \mathcal{L}\big(\mathbb{L}_2[0,1]\big)$:

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)\,ds$$

Найти спектр и резольвенту оператора AA^*.

Решение:

1. Покажем, что оператор Вольтерра **компактен**.

   Для этого покажем, что он является пределом некоторой последовательности компактных операторов $\{A_n\}$. Так как пространство компактных операторов замкнуто в $\mathcal{L}(H)$, то и оператор A будет компактным.

   Построим последовательность $\{A_n\}$.

   - Представим оператор A в следующем виде:

     $$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds, \qquad K(t,s) = \begin{cases} 1, & s \le t \\ 0, & s > t \end{cases}$$

     Сразу отметим, что для оператора, записанного в таком виде, справедлива оценка:

     $$\|A\| \le \|K\|_2$$

     Докажем ее. Для любого $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$ выполнено

     $$\|Ax\|_2^2 = \int\limits_0^1 \left|\int\limits_0^1 K(t,s)x(s)\,ds\right|^2 d = \int\limits_0^1 \Big|\big\langle K(t,s), x(s)\big\rangle\Big|^2 dt \le \Big/ \begin{matrix}\text{неравенство}\\ \text{Коши-Буняковского}\end{matrix} \Big/ \le$$
     $$\le \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^1 \big|K(t,s)\big|^2 ds \cdot \int\limits_0^1 \big|x(s)\big|^2 ds\right] dt = \int\limits_0^1 \big|x(s)\big|^2 ds \cdot \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \big|K(t,s)\big|^2 ds\,dt =$$
     $$= \|x\|_2^2 \cdot \|K\|_2^2$$

     Отсюда получаем, что $\|A\| \le \|K\|_2$

   - Из теории рядов Фурье известно, что система

     $$E = \Big\{\sin(\pi p t) \cdot \sin(\pi q s)\Big\}_{p,q=1}^{\infty} = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$$

     образует ортогональный базис в пространстве $\mathbb{L}_2\big([0,1]^2\big)$.

     Разложим функцию $K(t,s) \in \mathbb{L}_2\big([0,1]^2\big)$ по этому базису и рассмотрим частичные суммы

     $$K = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k f_k, \qquad S_n(t,s) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(t,s)$$

     Имеем из определения базиса

     $$\|S_n - K\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Введем операторы $A_n : \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$:

$$(A_n x)(t) = \int\limits_0^1 S_n(t,s)x(s)\,ds$$

Их ограниченность следует из оценки $\|A_n\| \leq \|S_n\|_2 < +\infty$.

Тогда оператор $A_n - A$ имеет вид

$$((A_n - A)x)(t) = \int\limits_0^1 \big[S_n(t,s) - K(t,s)\big]x(s)\,ds,$$

поэтому справедлива оценка

$$\|A_n - A\| \leq \|S_n - K\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

то есть $A_n \xrightarrow{n\to\infty} A$.

- Покажем, что операторы A_n являются компактными.

  Покажем, что образ оператора A_n конечномерен. Отсюда будет следовать компактность.

  Для любого $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$ имеем

$$(A_n x)(t) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int\limits_0^1 f_k(t,s)x(s)\,ds = \sum_{k=1}^n \alpha_k \underbrace{\int\limits_0^1 \sin(\pi q_k s)x(s)\,ds}_{\beta_k=\beta_k(x)} \cdot \sin(\pi p_k t) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \beta_k \sin(\pi p_k t) \in \mathrm{Lin}\big\{\sin(\pi p_k t)\big\}_{k=1}^n$$

  Значит, $\mathrm{Im}\, A_n \subset \mathrm{Lin}\big\{\sin(\pi p_k t)\big\}_{k=1}^n$, то есть $\dim \mathrm{Im}\, A_n \leq n$.

2. Найдем **сопряженный оператор** A^*.

   По определению для гильбертового пространства.

$$\langle Ax, y\rangle = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^t x(s)\,ds\right)\overline{y(t)}\,dt = \Bigg/ \begin{array}{c}\text{меняем порядок}\\ \text{интегрирования}\\ \text{(т. Фубини-Тонелли)}\end{array} \Bigg/ = \int\limits_0^1 \int\limits_s^1 x(s)\overline{y(t)}\,dt\,ds =$$
$$= \int\limits_0^1 x(s)\overline{\int_s^1 y(t)\,dt}\,ds = \langle x, A^*y\rangle$$

   Отсюда находим, что сопряженный оператор имеет вид

$$(A^*y)(s) = \int\limits_s^1 y(t)\,dt$$

   Так как компактность A эквивалентна компактности A^*, то оператор A^* тоже компактен.

3. Теперь рассмотрим оператор AA^*. Отметим его свойства:

- оператор AA^* имеет вид

$$(AA^*x)(t) = \int\limits_0^t \int\limits_s^1 x(\xi)\,d\xi\,ds$$

- AA^* **компактен** как композиция компактных операторов (над банаховым пространством).
- AA^* **самосопряжен**:

$$(AA^*)^* = A^{**}A^* = \Big/ \begin{array}{c} A^{**} = A, \text{ т.к.} \\ \mathbb{L}_2[0,1] \text{ рефлексивно} \end{array} \Big/ = AA^*$$

- AA^* **неотрицателен**: для любого $x \in \mathbb{L}_2[0,1]$:

$$\langle AA^*x, x\rangle = \langle A^*x, A^*x\rangle = \|A^*x\|^2 \geq 0$$

По теореме о спектре компактного оператора,

$$\sigma(AA^*) = \sigma_p(AA^*) \cup \{\text{возможно, } 0\}$$

Из самосопряженности и неотрицательности следует, что

$$\sigma(AA^*) \subset [0, +\infty)$$

4. Найдем **точечный спектр** $\sigma_p(AA^*)$.

- $\lambda > 0$.

  Ищем нетривиальное решение интегрального уравнения:

$$\int\limits_0^t \int\limits_s^1 x(\xi)\,d\xi\,ds = \lambda x(t), \qquad \text{для п.в. } t \in [0,1]$$

  Так как для любой $x(\xi)$ интеграл в левой части является непрерывной функцией от t, то и правая часть должна быть непрерывной. Поэтому данное уравнение имеет только непрерывные решения.

  Так как для любой непрерывной $x(\xi)$ интеграл в левой части является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, то и правая часть тоже. Аналогичными рассуждениями получаем, что $x(t) \in C^\infty[0,1]$.

  Из исходного равенства следует, что $x(0) = 0$. Дифференцируем его:

$$\int\limits_t^1 x(\xi)\,d\xi = \lambda x'(t)$$

  Отсюда следует, что $x'(1) = 0$. Дифференцируем еще раз и получаем краевую задачу:

$$\begin{cases} x''(t) = -\frac{1}{\lambda}x(t), \qquad 0 < t < 1 \\ x(0) = 0, \\ x'(1) = 0 \end{cases}$$

  Общее решение:

$$x(t) = C_1 \cos\frac{t}{\sqrt{\lambda}} + C_2 \sin\frac{t}{\sqrt{\lambda}}$$

  Из граничных условий находим, что $C_1 = 0$ и

$$x'(1) = \frac{C_2}{\sqrt{\lambda}}\cos\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0 \qquad \xRightarrow[\text{т.к. } x\neq 0]{C_2\neq 0} \qquad \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -\frac{\pi}{2} + \pi n \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_n = \frac{1}{\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- $\lambda = 0$.

  Допустим, $0 \in \sigma_p(AA^*)$, т.е. существует $x \neq 0$, такой, что

$$AA^*x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A^*x \in \operatorname{Ker} A = \Big/ \begin{array}{c} \text{теорема} \\ \text{Фредгольма} \end{array} \Big/ = \left(\operatorname{Im} A^*\right)^\perp$$

С другой стороны, $A^*x \in \operatorname{Im} A^*$, поэтому $A^*x = 0$.

$$A^*x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x \in \operatorname{Ker} A^* = \Big/ \begin{array}{c}\text{теорема}\\ \text{Фредгольма}\end{array} \Big/ = \big(\operatorname{Im} A\big)^\perp$$

Рассмотрим подпространство $E = A\big(CL_2[0,1]\big) \subset \operatorname{Im} A$. Так как E состоит из непрерывно дифференцируемых функций $z(t)$ на $[0,1]$ с $z(0) = 0$, то E плотно в $\mathbb{L}_2[0,1]$. Поэтому

$$[E] = \mathbb{L}_2[0,1] \qquad \Longrightarrow \qquad \big(\operatorname{Im} A\big)^\perp \subset E^\perp = \big(\mathbb{L}_2[0,1]\big)^\perp = \{0\}$$

Значит, $x \in \big(\operatorname{Im} A\big)^\perp = \{0\}$, то есть $x = 0$ — противоречие.

Итак, точечный спектр имеет вид

$$\sigma_p(AA^*) = \left\{ \frac{1}{(-\frac{\pi}{2} + \pi n)^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

5. Исследуем принадлежность $\lambda = 0$ спектру AA^*.

   По теореме о спектре компактного оператора, $\sigma(AA^*)$ не имеет предельных точек, кроме, быть может, точки 0. Ранее мы доказали, что точечный спектр счетен, поэтому из компактности множества $\sigma(AA^*)$ следует, что предельная точка существует. Ею может быть только $\lambda = 0$. Поэтому $0 \in \sigma(AA^*)$.

   Исследуем, какой части спектра принадлежит $\lambda = 0$. Найдем $\big[\operatorname{Im}(AA^*)\big]$. Рассмотрим множество $CL_2[0,1] \subset \mathbb{L}_2[0,1]$. Легко видеть, что

$$AA^*\big(CL_2[0,1]\big) = \big\{ z(t) \in C^2[0,1] \;\big|\; z(0) = 0,\ z'(1) = 0 \big\} \subset \operatorname{Im}(AA^*)$$

   Это множество является плотным в $\mathbb{L}_2[0,1]$, поэтому, беря замыкание от обоих частей равенства выше, получаем $\mathbb{L}_2[0,1] = \big[\operatorname{Im}(AA^*)\big]$, что означает, что $0 \in \sigma_c(AA^*)$.

   Итак, **спектр** оператора AA^*:

$$\sigma(AA^*) = \left\{ \frac{1}{(-\frac{\pi}{2} + \pi n)^2} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\}$$

6. Найдем **резольвенту** оператора AA^*:

$$R_{AA^*}(\lambda) : \rho(AA^*) \longrightarrow \mathcal{L}\big(\mathbb{L}_2[0,1]\big),$$

   где резольвентное множество $\rho(AA^*) = \mathbb{C} \setminus \sigma(AA^*)$.

   Хотим найти для любого $y \in \mathbb{L}_2[0,1]$ его образ x:

$$x = R_{AA^*}(\lambda) y = (AA^* - \lambda I)^{-1} y \qquad \Longleftrightarrow \qquad (AA^* - \lambda I)x = y$$

   Решаем интегральное уравнение при $\lambda \notin \sigma(AA^*)$:

$$\int\limits_0^t \int\limits_s^1 x(\xi)\, d\xi\, ds - \lambda x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} y(t)$$

   Решим его для достаточно гладкой функции $y(t) \in C^2[0,1]$. Такое множество функций плотно в $\mathbb{L}_2[0,1]$, поэтому из непрерывности оператора $(AA^* - \lambda I)^{-1}$ мы найдем его значения на всем $\mathbb{L}_2[0,1]$.

   Аналогично тому, как мы искали точечный спектр, тут получается, что решение интегрального уравнения должно быть дважды непрерывно дифференцируемым.

   Дифференцирование этого уравнения приводит к краевой задаче:

$$\begin{cases} -x(t) - \lambda x''(t) = y''(t) \\ -\lambda x(0) = y(0) \\ -\lambda x'(1) = y'(1) \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x''(t) + \frac{1}{\lambda} x(t) = -\frac{1}{\lambda} y''(t) \\ x(0) = -\frac{1}{\lambda} y(0) \\ x'(1) = -\frac{1}{\lambda} y'(1) \end{cases}$$

Ее решение и есть значение резольвенты. Решим ее, например, для $\lambda > 0$. Решение однородного уравнения:

$$x(t) = A\cos\frac{t}{\sqrt{\lambda}} + B\sin\frac{t}{\sqrt{\lambda}}$$

Частное решение находим вариацией постоянных. Решаем систему

$$\begin{cases} A'(t)\cos\frac{t}{\sqrt{\lambda}} + B'(t)\sin\frac{t}{\sqrt{\lambda}} = 0 \\ A'(t)\left(-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\sin\frac{t}{\sqrt{\lambda}} + B'(t)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\cos\frac{t}{\sqrt{\lambda}} = -\frac{1}{\lambda}y''(t) \end{cases}$$

Отсюда находим

$$A'(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}y''(t)\sin\frac{t}{\sqrt{\lambda}}, \qquad B'(t) = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}y''(t)\cos\frac{t}{\sqrt{\lambda}}$$

Интегрируя и подставляя в $x(t)$, получаем общее решение:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_0^t y''(s)\sin\frac{s-t}{\sqrt{\lambda}}\,ds + A\cos\frac{t}{\sqrt{\lambda}} + B\sin\frac{t}{\sqrt{\lambda}}$$

Подставляя граничные условия, находим A, B.

Из-за громоздкости выражений я не стал их выписывать.

В случае $\lambda < 0$ фундаментальными решениями являются экспоненты, поэтому будет примерно то же самое, но через гиперболические синусы и косинусы. В случае $\lambda \notin \mathbb{R}$ непонятно, как решать данное дифференциальное уравнение.

Задача §11.5(б)

Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$ — самосопряженный оператор. Доказать, что

$$\|A\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \left|\langle Ax, y\rangle\right|$$

Решение:

- В одну сторону имеем

$$\sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \left|\langle Ax, y\rangle\right| \le \Big/ \begin{matrix}\text{неравенство} \\ \text{Коши-Буняковского}\end{matrix} \Big/ \le \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \|Ax\|\cdot\|y\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| = \|A\|$$

- В обратную сторону:

$$\sup_{\substack{\|x\|=1 \\ \|y\|=1}} \left|\langle Ax, y\rangle\right| \ge \sup_{\|x\|=1} \left|\langle Ax, x\rangle\right| = M$$

Поэтому достаточно показать, что $M \ge \|A\|$.

Докажем, что для любых $y, z \in H$, $\|y\| = \|z\| = 1$, выполнено $\operatorname{Re}\langle Ay, z\rangle \le M$.

Вычислим выражение

$$\big\langle A(y+z), y+z\big\rangle - \big\langle A(y-z), y-z\big\rangle = 2\langle Ay, z\rangle + 2\langle Az, y\rangle = \Big/ \text{самосопряженнность} \Big/ = \\ = 2\langle Ay, z\rangle + 2\overline{\langle Ay, z\rangle} = 4\operatorname{Re}\langle Ay, z\rangle$$

Поэтому можно сделать оценку

$$4\operatorname{Re}\langle Ay, z\rangle \le \left|\big\langle A(y+z), y+z\big\rangle\right| + \left|\big\langle A(y-z), y-z\big\rangle\right| = \\ = \|y+z\|^2\left|\left\langle A\frac{y+z}{\|y+z\|}, \frac{y+z}{\|y+z\|}\right\rangle\right| + \|y-z\|^2\left|\left\langle A\frac{y-z}{\|y-z\|}, \frac{y-z}{\|y-z\|}\right\rangle\right| \le \\ \le \|\|y+z\|^2 M + \|y-z\|^2 M = \Big/ \begin{matrix}\text{правило} \\ \text{параллелограма}\end{matrix} \Big/ = 2M\left(\|y\|^2 + \|z\|^2\right) = 4M$$

Тогда для произвольного вектора $y \in H,\ \|y\| = 1$ имеем

$$\|Ay\| = \Big/ \begin{matrix} \text{т. Рисса-Фреше +} \\ \text{т. Хана-Банаха} \end{matrix} \Big/ = \sup_{\|z\|=1} \big|\langle Ay, z\rangle\big| = \sup_{\|z\|=1} \underbrace{e^{-i\varphi}\langle Ay, z\rangle}_{\substack{\text{действ.} \\ \text{число}}} =$$

$$= \sup_{\|z\|=1} \operatorname{Re}\langle Ay, e^{i\varphi} z\rangle \le M$$

Отсюда получаем, что $\|A\| \le M$.

Задача §11.7

Пусть H — гильбертово пространство, $A \in \mathcal{L}(H)$ — самосопряженный неотрицательный оператор. Доказать, что $\exists\,(I + A)^{-1}$.

Решение:

Решим двумя способами:

1. Оператор A самосопряжен и неотрицателен, поэтому его спектр $\sigma(A) \subset [0, +\infty)$. Значит, $-1 \in \rho(A)$, что означает, что оператор $A - (-1)I = A + I$ непрерывно обратим.
2. Покажем, что $I + A$ ограничен снизу, что необходимо и достаточно для его непрерывной обратимости.

$$\|(I + A)x\|^2 = \langle x + Ax, x + Ax\rangle = \|x\|^2 + \langle x, Ax\rangle + \langle Ax, x\rangle + \|Ax\|^2 = \Big/ \text{самосопряженность} \Big/ =$$

$$= \|x\|^2 + 2\langle Ax, x\rangle + \|Ax\|^2 \ge \Big/ \text{неотрицательность} \Big/ \ge \|x\|^2 + 0 + 0 = \|x\|^2$$

То есть $I + A$ ограничен снизу:

$$\|(I + A)x\| \ge \|x\|, \qquad \forall x \in H$$