АМВ. ДЗ на неделю 8.

Прохоров Юрий, 771

Во всех задачах будем использовать следующие обозначения и предположения:

- n — степень двойки, если не оговорено противное.
- строки и столбцы матриц индексируются от 0 до $n-1$.
- матрица $M_n = \left(w^{jk}\right)_{j,k=0}^{n-1}$, где $w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ — порождающий элемент группы корней n-ой степени из единицы.
- дискретным преобразованием Фурье массива (вектора) $\mathbf{a} = \left[a_0, \dots, a_{n-1}\right]$ будем называть матричное произведение
$$\mathrm{DFT}\left[A\right] = M_n \mathbf{a}$$
- многочлен $A(x)$ задается вектором коэффициентов $\mathbf{a}$:
$$A(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j, \qquad \mathbf{a} = \left[a_0, \dots, a_{n-1}\right]$$
- $\overline{z}$ — комплексное сопряжение.
- E — единичная матрица

Задача 1

Докажите формулу обращения: $(M_n(\omega))^{-1} = \dfrac{1}{n} M_n(\omega^{-1})$. Вычислите также матрицу $(M_n(\omega))^4$.

Решение:

Заметим, что $|w| = 1$, поэтому $w^{-1} = \overline{w}$, поэтому достаточно доказать, что
$$M_n \overline{M_n} = nE.$$
Пусть c_{jk} — элементы матрицы в правой части ($j, k = 0, \dots, n-1$). Посчитаем их. Диагональные элементы:
$$c_{jj} = \sum_{s=0}^{n-1} w^{js} w^{-sj} = n$$
$$c_{jk} = \sum_{s=0}^{n-1} w^{js} w^{-sk} = \sum_{s=0}^{n-1} \left(w^{j-k}\right)^s = \frac{\left(w^{j-k}\right)^n - 1}{\dots} = \frac{0}{\dots} = 0, \qquad j \neq k$$
В последнем равенстве использовалась сумма членов геометрической прогрессии.

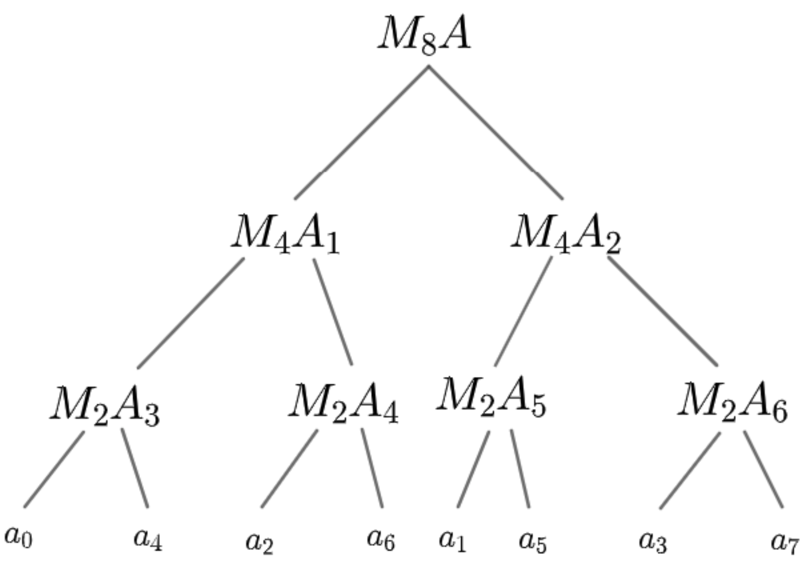
Вычислим M_n^4. Сначала вычислим M_n^2. Пусть c_{jk} — коэффициенты этой матрицы.
$$c_{jk} = \sum_{s=0}^{n-1} w^{js} w^{sk} = \sum_{s=0}^{n-1} \left(w^{j+k}\right)^s = \begin{cases} \frac{\left(w^{j-k}\right)^n - 1}{\dots} = 0 & , \ (j+k) \text{ не кратно } n; \\ n & , \ j+k = 0, \ n \end{cases}$$
Отсюда
$$M_n^2 = \begin{pmatrix} n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & 0 & n \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & 0 & n & \iddots & \vdots \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_n^4 = \mathrm{diag}\left(n^2, \dots, n^2\right)$$

Задача 2

Найдите произведение многочленов $A(x) = x^3 + 3x + 2$ и $B(x) = 3x^3 + 3x^2 + 2$ с помощью алгоритма быстрого преобразования Фурье. Для этого найдите рекурсивно дискретное преобразование Фурье двух массивов $A = (2, 3, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$ и $B = (2, 0, 3, 3, 0, 0, 0, 0)$, затем вычислите ДПФ массива C и восстановите коэффициенты многочлена-произведения, используя обратное преобразование.

Решение:

Составим дерево рекурсивных вызовов быстрого преобразования Фурье:



$$A = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7]$$
$$A_1 = [a_0, a_2, a_4, a_6]$$
$$A_2 = [a_1, a_3, a_5, a_7]$$
$$A_3 = [a_0, a_4]$$
$$A_4 = [a_2, a_6]$$
$$A_5 = [a_1, a_5]$$
$$A_6 = [a_3, a_7]$$

Интересной особенностью является то, что числа в нижнем ряду стоят в таком порядке, что если взять их двоичные записи и развернуть все виду справа налево, то числа будут по возрастанию:

$$000,\ 100,\ 010,\ 110,\ 001,\ 101,\ 011,\ 111\ -\ \text{числа в нижнем ряду}$$

Основной формулой после рекурсивного вычисления является:

$$M_nA = \begin{bmatrix} M_{\frac{n}{2}}A_{even} + \operatorname{diag}(w^j)M_{\frac{n}{2}}A_{odd} \\ M_{\frac{n}{2}}A_{even} - \operatorname{diag}(w^j)M_{\frac{n}{2}}A_{odd} \end{bmatrix}, \qquad w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

Проведем эти вычисления для массивов A и B из условия:

$$M_2A_3 = [2, 2], \qquad M_2A_4 = [0, 0], \qquad M_2A_5 = [3, 3], \qquad M_2A_6 = [1, 1]$$

$$M_4A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad M_4A_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3+i \\ 2 \\ 3-i \end{bmatrix}, \qquad M_8A = \begin{bmatrix} 6 \\ 2+\sqrt{2}+i2\sqrt{2} \\ 2+2i \\ 2-\sqrt{2}+i2\sqrt{2} \\ -2 \\ 2-\sqrt{2}-i2\sqrt{2} \\ 2-2i \\ 2+\sqrt{2}-i2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$M_2B_3 = [2, 2], \qquad M_2B_4 = [3, 3], \qquad M_2B_5 = [0, 0], \qquad M_2B_6 = [3, 3]$$

$$M_4 B_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2+3i \\ -1 \\ 2-3i \end{bmatrix}, \qquad M_4 B_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3i \\ -3 \\ -3i \end{bmatrix}, \qquad M_8 B = \begin{bmatrix} 8 \\ \frac{4-3\sqrt{2}}{2} + i\frac{6+3\sqrt{2}}{2} \\ -1-3i \\ \frac{4+3\sqrt{2}}{2} - i\frac{6-3\sqrt{2}}{2} \\ 2 \\ \frac{4+3\sqrt{2}}{2} + i\frac{6-3\sqrt{2}}{2} \\ -1+3i \\ \frac{4-3\sqrt{2}}{2} - i\frac{6+3\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

Теперь вычислим значения многочлена C в этих же корнях из единицы как покомпонентное произведение:

$$\mathrm{DFT}[C] = \mathrm{DFT}[A] * \mathrm{DFT}[B] = M_8 A * M_8 B = \begin{bmatrix} 48 \\ -5-7\sqrt{2}+i(3+10\sqrt{2}) \\ 4-8i \\ -5+7\sqrt{2}-i(3-10\sqrt{2}) \\ -4 \\ -5+7\sqrt{2}+i(3-10\sqrt{2}) \\ 4+8i \\ -5-7\sqrt{2}-i(3+10\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

Чтобы восстановить коэффициенты многочлена, нужно сделать обратное дискретное преобразование Фурье:

$$C = \mathrm{IDFT}[C] = M_8^{-1} C = \frac{1}{8}\overline{M_8} C = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \\ 17 \\ 9 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Алгоритм аналогичный, но вместо w используется $\overline{w}$. Отсюда:

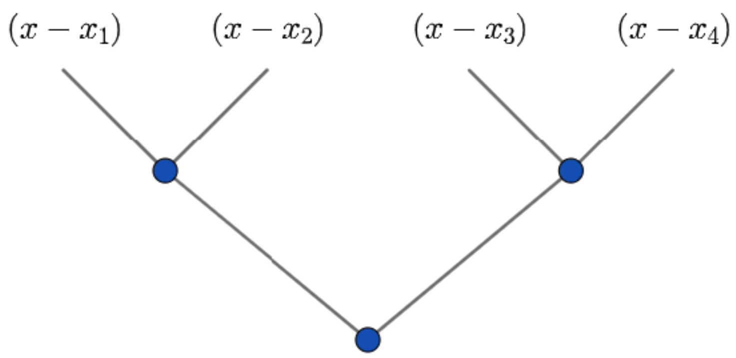
$$C(x) = 4 + 6x + 6x^2 + 17x^3 + 9x^4 + 3x^5 + 3x^6$$

Задача 3

Даны числа $x_1, \ldots, x_n$. Доказать, что коэффициенты многочлена $f(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(x - x_i)$, можно найти за $O(n \log_2^2 n)$ арифметических операций.

Решение:

Пусть n — степень двойки. Будем перемножать с помощью FFT:



На первом шаге делаем $\frac{n}{2}$ перемножений многочленов степени 1. На втором — $\frac{n}{4}$ перемножений многочленов степени 2, и так далее. На k-ом шаге — $\frac{n}{2^k}$ перемножений многочленов степени 2^{k-1}.

Выше показан пример при $n = 4$. Синими точками отмечены вызовы FFT.

Асимптотика FFT при перемножении двух многочленов степени m:

$$F(m) = O\big(m \log_2 m\big)$$

Итоговая асимптотика:

$$T(n) = \sum_{k=1}^{\log_2 n} \frac{n}{2^k} F(2^{k-1}) \leq \sum_{k=1}^{\log_2 n} \frac{n}{2^k} C 2^k \log_2 2^k \leq Cn \sum_{k=1}^{\log_2 n} k = O(n \log^2 n)$$

Задача 6

Рассмотрим циркулянтную матрицу порядка n, первый столбец которой равен $(c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})^T$, т. е. матрицу вида

$$= \begin{bmatrix} c_0 & c_{n-1} & c_{n-2} & \cdots & c_1 \\ c_1 & c_0 & c_{n-1} & \cdots & c_2 \\ c_2 & c_1 & c_0 & \cdots & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n-1} & c_{n-2} & c_{n-3} & \cdots & c_0 \end{bmatrix}$$

Докажите, что все её собственные значения, домноженные на $\frac{1}{\sqrt{n}}$, могут быть найдены умножением матрицы Фурье $F_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\omega_n^{ij}\right)_{i,j=0}^{n}$ размеров $n \times n$, где $\omega_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — корень из единицы, на вектор $(c_0, c_{n-1}, c_{n-2}, \ldots, c_1)^T$. Найдите с помощью алгоритма БПФ собственные значения циркулянтной матрицы, первый столбец которой имеет вид $(1, 2, 4, 6)^T$.

Решение:

Обозначим:

$$\mathbf{c}^* = (c_0, c_{n-1}, \ldots, c_1)^T, \qquad \mathbf{c} = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})^T, \qquad F = \frac{1}{\sqrt{n}} M_n$$

Требуется показать, что вектор $M_n \mathbf{c}^*$ состоит из собственных значений матрицы C.

Заметим, что если $\mathbf{c}$ — порождающий вектор циркулянта C, то $\mathbf{c}^*$ — порождающий вектор циркулянта C^T. Если мы докажем, что

- собственные значения C и C^T совпадают;
- произведение M_n и порождающего вектора произвольного циркулянта состоит из его собственных чисел;

то мы докажем нужное утверждение.

Характеристические полиномы матриц C и C^T совпадают:

$$|C - \lambda E| = \left|(C - \lambda E)^T\right| = |C^T - \lambda E|,$$

поэтому их корни, то есть собственные значения совпадают. Осталось доказать второй пункт.

Обозначим

$$\lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} c_j w^{jk}, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

$$\mathbf{e}_s = \begin{pmatrix} \vdots \\ w^{js} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad - \text{ столбцы матрицы } M_n, \qquad w = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

Покажем, что $\mathbf{e}_s$ — собственные векторы матрицы C, и найдем соответствующие собственные значения.

- $s = 0$. Вектор $\mathbf{e}_0$ состоит из всех единиц. Тогда j-ая компонента вектора:

$$\Big(C\mathbf{e}_0\Big)_j = \sum_{k=0}^{n-1} c_k = \lambda_0 \qquad \Longrightarrow \qquad C\mathbf{e}_0 = \lambda_0 \mathbf{e}_0$$

- $s > 0$. Тогда j-ая компонента вектора:

$$\Big(C\mathbf{e}_s\Big)_j = \sum_{k=0}^{j} c_{j-k} w^{ks} + \sum_{k=j+1}^{n-1} c_{n-k+j} w^{ks} = \left[\sum_{k=0}^{j} c_{j-k} w^{(k-j)s} + \sum_{k=j+1}^{n-1} c_{n-k+j} w^{(k-j)s}\right] w^{js} =$$
$$= \left[\sum_{k=0}^{j} c_{j-k} w^{(n-s)(j-k)} + \sum_{k=j+1}^{n-1} c_{n-k+j} w^{(n-s)(n-k+j)}\right] w^{js} = \left[\sum_{t=0}^{j} c_t w^{(n-s)t} + \sum_{k=j+1}^{n-1} c_t w^{(n-s)t}\right] w^{js} =$$
$$= \left[\sum_{t=0}^{n-1} c_t w^{n-s} t\right] w^{js} = \lambda_{n-s} w^{js} \qquad \Longrightarrow \qquad C\mathbf{e}_s = \lambda_{n-s}\mathbf{e}_s, \qquad s > 0$$

Итак, мы нашли n линейно независимых (т.к. матрица M_n невырождена) собственных векторов матрицы C и их собственные значения. Теперь мы можем вычислить искомое произведение M_n на порождающий вектор циркулянта:

$$M_n \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k w^{kj} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Вектор состоит из всех собственных значений, что и требовалось доказать.

Так как мы нашли линейно независимый набор векторов, то матрица C диагонализуема. Пусть

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} M_n$$

Матрица F является симметричной эрмитовой, вследствие задачи 1:

$$F^{-1} = \left(\overline{F}\right)^T = \overline{F}$$

Поэтому F — матрица перехода к базису из собственных векторов. Тогда в тех же самых обозначениях:

$$C = \overline{F}\Lambda F, \qquad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_k)$$

Задача 4

Используя ДПФ, найдите решение системы линейных уравнений $Cx = b$. где C — это циркулянтная матрица, порожденная вектором столбцом $(1, 2, 4, 8)^T$, а $b^T = (16, 8, 4, 2)$.

Решение:

Как следует из задачи 6,

$$C = \overline{F}\Lambda F, \qquad F = \frac{1}{\sqrt{n}} M_n \qquad \Longrightarrow \qquad C = \frac{1}{n}\overline{M_n}\Lambda M_n$$

Пусть $\mathbf{c} = \big[1, 2, 4, 8\big]^T$ — порождающий циркулянта. Тогда из задачи 6:

$$\Lambda = \mathrm{diag}\Big(M_n \mathbf{c}\Big) = \mathrm{diag}\Big(\mathrm{DFT}\big[\mathbf{c}\big]\Big)$$

Система принимает вид:

$$\frac{1}{n}\overline{M_n}\Lambda M_n x = b \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{1}{n}\overline{M_n}\Lambda^{-1} M_n b$$

Матрица Λ вычисляется с помощью FFT за $O(n \log n)$, умножение на матрицы M_n и $\overline{M_n}$ также делается за $O(n \log n)$. Поэтому систему с циркулянтной матрицей можно решить за

$$T(n) = O(n \log n).$$

Проведем вычисления:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3-6i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3+6i \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \Lambda^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1+2i}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1-2i}{15} \end{bmatrix}$$

$$x = \frac{1}{4}\overline{M_n}\Lambda^{-1}M_n b = \frac{1}{4}\overline{M_n}\Lambda^{-1}\begin{bmatrix} 30 \\ 12+6i \\ 10 \\ 12-6i \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\overline{M_n}\begin{bmatrix} 2 \\ \frac{-8+6i}{5} \\ -2 \\ \frac{-8-6i}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -3.2 \\ 6.4 \\ 3.2 \\ 1.6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 1.6 \\ 0.8 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

Задача 5

Обозначим для вектора $\vec{x}$ циркулянтную матрицу с первым столбцом $\vec{x}$ за $\text{circ}(\vec{x})$. Назовём циклической свёрткой $\vec{x} * \vec{y}$ двух векторов произведение матрицы на вектор $\text{circ}(\vec{x})\vec{y}$. Докажите, что $FFT(\vec{x} * \vec{y})$ есть произведение векторов $FFT(\vec{x})$ и $FFT(\vec{y})$ по Адамару (т. е. поэлементное: i-ая компонента вектора-произведения есть произведение i-ых компонент сомножителей).

Решение:

Надо доказать, что

$$\text{DFT}\big[\mathbf{x} * \mathbf{y}\big] = \text{DFT}\big[\text{circ}(\mathbf{x})\mathbf{y}\big] = \text{DFT}\big[\mathbf{x}\big] \ \otimes \ \text{DFT}\big[\mathbf{y}\big]$$
$$M_n C\mathbf{y} = M_n\mathbf{x} \ \otimes \ M_n\mathbf{y}$$

В обоих частях стоят векторы размерности n. Посчитаем их k-ые компоненты.

- Правая часть:

$$\big(RHS\big)_k = \big(M_n\mathbf{x}\big)_k \cdot \big(M_n\mathbf{y}\big)_k = \left(\sum_{i=0}^{n-1} w^{ik}x_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n-1} w^{jk}y_j\right)$$

Это полином от x_i, y_j, причем каждое слагаемое имеет вторую степень. Посчитаем коэффициент перед произведением $x_r y_t$:

$$\text{coef}\big(x_r y_t\big) = w^{rk}w^{tk} = w^{(r+t)k}$$

- Левая часть:

$$\big(C\mathbf{y}\big)_i = \sum_{j=0}^{i} x_{i-j}y_j + \sum_{j=i+1}^{n-1} x_{n-j+i}y_j$$

Тогда

$$\big(LHS\big)_k = \big(M_n C\mathbf{y}\big)_k = \sum_{i=0}^{n-1} w^{ik}\left[\sum_{j=0}^{i} x_{i-j}y_j + \sum_{j=i+1}^{n-1} x_{n-j+i}y_j\right] = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i} w^{ik}x_{i-j}y_j + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n-1} w^{ik}x_{n-j+i}y_j$$

Также посчитаем коэффициент перед $x_r y_t$. Вычислим его отдельно для каждой из двойных сумм. Для первой:

$$\left\{\begin{array}{c} i-j=r \\ j=t \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} i=r+t \\ j=t \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad r+t<n$$

$$\text{coef}_1\big(x_r y_t\big) = \begin{cases} w^{(r+t)k} & , \ r+t<n \\ 0 & , \ r+t \geq n \end{cases}$$

Для второй:

$$\begin{cases} n-j+i=r \\ j=t \end{cases} \implies \begin{cases} i=r+t-n \\ j=t \end{cases} \implies r+t \geq n$$

$$\mathrm{coef}_2\big(x_r y_t\big) = \begin{cases} 0 & , \ r+t<n \\ w^{(r+t)k} & , \ r+t \geq n \end{cases}$$

Тогда общий коэффицент:

$$\mathrm{coef}\big(x_r y_t\big) = w^{(r+t)k}$$

Все коэффициенты в многочленах равны, значит, эти многочлены тождественно равны. то есть k-ые компоненты равны. Все компоненты левой и правой частей равны, значит, векторы равны.

Задача 7

Дано множество различных чисел $A \subseteq \{1, \dots, m\}$. Рассмотрим множество $A+A$, образованное суммами элементов A. Докажите или опровергните существование процедур построения $A+A$, имеющих субквадратичную трудоемкость $o(m^2)$.

Решение:

Пусть

$$A(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i x^i, \qquad a_i = \begin{cases} 1 & , \ i \in A \\ 0 & , \ i \notin A \end{cases}$$

$$B(x) = \big(A(x)\big)^2 = \sum_{k=2}^{2m} b_k x^k, \qquad b_k = \sum_{j=1}^{k-1} a_j a_{k-j} = \sum_{i+j=k} a_i a_j$$

Докажем, что

$$b_k > 0 \qquad \iff \qquad \exists i,j \in A \ : \ i+j=k.$$

Необходимость. Пусть $b_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i a_j > 0$. Значит, есть слагаемое $a_i a_j > 0, \ i+j=k$. Тогда $a_i = a_j = 1$, откуда следует, что $i,j \in A$.

Достаточность. Пусть $a_r = a_s = 1, \ r+s=k$. Тогда $b_k \sum\limits_{i+j=k} a_i a_j \geq a_r a_s = 1 > 0$.

Таким образом, чтобы построить множество $A+A$ достаточно найти все ненулевые коэффициенты многочлена $B(x)$. Время работы при перемножении многочленов с помощью FFT:

$$T(m) = O(m \log m + 2m) = O(m \log m) = o(m^2)$$

Задача 8

Прочитайте статью:

P. Clifford, R. Clifford. Simple deterministic wildcard matching. Information Processing Letters 101 (2007) 53–54.

В этой задаче нужно обосновать некоторые утверждения из неё. Задача состоит в быстром нахождении подстроки $p_0, \dots p_{m-1}$ в строке $t_0, \dots, t_{n-1}$ (тексте). Подстрока входит с i-ой позиции, если $p_j = t_{i+j}$ для $j = 0, \dots, m-1$. Если считать буквы различными целыми числами, то вхождение подстроки с i-ой позициии эквивалентно обнулению суммы квадратов $B_i = \sum\limits_{j=0}^{m-1} (p_j - t_{i+j})^2$. Нужно вычислить весь массив $\{B_i, i = 0, \dots, n-m\}$.

(i) Покажите, как построить $O(n \log n)$-алгоритм поиска вхождения образца в текст.

(ii) Покажите, как, используя БПФ, построить $O(n \log n)$-алгоритм поиска вхождения образца в текст с «джокерами» (идея описана в том же тексте).

(iii) Покажите, как понизить сложность алгоритмов предыдущих двух пунктов до $O(n \log m)$.

Решение:

Я придумал алгоритм поиска образцов в тексте с «джокерами» со сложностью $O(n \log m)$ раньше, чем алгоритм со сложностью $O(n \log n)$. Этот алгоритм будет решением ко всем трем пунктам задачи, так как $m < n$.

Будем вычислять следующие выражения:

$$B_i = \sum_{j=0}^{m-1} p_j t_{i+j} \left(p_j - t_{i+j}\right)^2$$

Каждой букве алфавита будем ставить в соответствие число от 1 до $|\Sigma|$, а символу «?» будем ставить в соответствие 0. Легко видеть, что

$$B_i = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad p \text{ совпадает с } t, \text{ начиная с } i\text{-го символа}$$

Тогда для того, чтобы найти все вхождения строки p в текст t, требуется вычислить все B_i при $i = 0, 1, \dots, n-m$.

Разобьем текст t на примерно $\frac{n}{m}$ блоков длины $2m$. Соседние блоки будут иметь overlap в m символов, то есть j-ый блок начинается с символа t_{jm}. Задача сводится к тому, чтобы найти все вхождения подстроки длины m в строку длины $2m$. Нужно вычислить ровно m значений $B_0, \dots, B_{m-1}$. Значение B_m вычислять не надо, так как этот кусок строки проверится в следующем блоке. Такую процедуру нужно будет сделать $\frac{n}{m}$ раз.

Рассмотрим выделенную подзадачу при $n = 2m$.

$$B_i = \sum_{j=0}^{m-1} \left[p_j^3 t_{i+j} - 2p_j^2 t_{i+j}^2 + p_j t_{i+j}^3\right] = \sum_{j=0}^{m-1} p_j^3 t_{i+j} - 2\sum_{j=0}^{m-1} p_j^2 t_{i+j}^2 + \sum_{j=0}^{m-1} p_j t_{i+j}^3 \tag{1}$$

Научимся вычислять суммы вида

$$s_i = \sum_{j=0}^{m-1} a_j b_{i+j}, \qquad i = 0, \dots, m-1 \tag{2}$$

за время $O(m \log m)$. Представим искомые суммы в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{m-2} \\ s_{m-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & b_1 & b_0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \ddots & b_1 \\ \vdots & b_m & b_{m-1} & \ddots & \vdots \\ b_{2m-3} & \ddots & \ddots & \ddots & b_{m-2} \\ b_{2m-2} & b_{2m-2} & \dots & b_m & b_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{m-1} \\ a_{m-2} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = T\mathbf{a},$$

где T — теплицева матрица порядка m. Рассмотрим циркулянт порядка $2m$ с порождающим вектором

$$\mathbf{c} = \left[b_0, b_0, b_1, b_2, \dots, b_{2m-2}\right]^T$$

Тогда циркулянт имеет вид:

$$C = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline T & A_3 \end{array}\right]$$

Рассмотрим вектор $\mathbf{a}' = \left[\mathbf{a},\ \mathbf{0}\right]^T$, с дописанными в конце m нулями. Тогда

$$C\mathbf{a}' = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline T & A_3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \hline \mathbf{0} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} A_1\mathbf{a} \\ \hline T\mathbf{a} \end{array}\right]$$

Поэтому, чтобы найти все суммы, нужно вычислить произведение $C\mathbf{a}'$. Но циркулянт можно диагонализовать с помощью матрицы Фурье, поэтому умножение вектора размерности $2m$ на циркулянт с помощью FFT занимает время $O(2m \log 2m) = O(m \log m)$.

Итак, все три суммы в равенстве (1) для B_i имеют вид (2), поэтому мы можем вычислить их за $O(m \log m)$, то есть эту подзадачу данный алгоритм решает за $O(m \log m)$.

Возвращаясь к исходной задаче, для ее решения нужно выполнить описанную процедуру $\frac{n}{m}$ раз, поэтому итоговая асимптотика:

$$T(n, m) = \frac{n}{m} O(m \log m) = O(n \log m).$$

Задача 9

Многочлен $A(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ задан последовательностью коэффициентов. Пусть последовательность $\{y_k\}_{k=0}^{n-1}$ — его ДПФ, т. е. $y_k = A\left(e^{\frac{2\pi k}{n} i}\right)$. Предложите алгоритм, вычисляющий $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (\mathrm{Re}\ y_k + \mathrm{Im}\ y_k)$ и требующий $o(n^2)$ арифметических операций.

Решение:

Мы используем вычислительную модель, в которой арифметические операции требуют 1 такт, а комплексные числа хранятся в виде действительной и мнимой части.

Таким образом, последовательность $\mathbf{y}$ считается с помощью FFT за $O(n \log n)$, а затем суммируются нужные ее части за $O(n)$. Суммарная асимптотика:

$$T(n) = O(n \log n) = o(n^2).$$