Функан. ДЗ 4.

Прохоров Юрий, 776

Полнота и пополнение метрических пространств

Опр. Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ сходится к элементу $x \in X$.

Полнота метрического пространства — свойство метрики, а не метрической топологии. Может быть такое, что для разных метрик ρ и d на X выполнено $\tau_\rho = \tau_d$, однако пространство (X, ρ) полно, а (X, d) — нет.

Опр. (X, ρ), (Y, d) — метрические пространства. Функция $\varphi: X \to Y$ называется *изометрией*, если

- φ биективна;
- φ сохраняет расстояния: $\rho(x, y) = d\big(\varphi(x), \varphi(y)\big) \ \ \forall x, y \in X$

При этом метрические пространства (X, ρ) и (Y, d) называются *изометрическими* (изометрически изоморфными).

Теорема. *(Принцип вложенных шаров)* (X, ρ) — полное МП $\iff$ любая последовательность замкнутых вложенных шаров, радиусы которых $r_n \to 0$, имеет непустое пересечение.

Опр. Множество $A \subset X$ называется *всюду плотным* в метрическом пространстве (X, ρ), если $[A]_{\tau_\rho} \supset X$ или, эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \forall x \in X \ \ \exists a \in A: \quad \rho(x, a) < \varepsilon$$

Опр. Метрическое пространство (Y, d) называется *пополнением* МП (X, ρ), если:

- МП (Y, d) полно;
- существует $Z \subset Y$, всюду плотное в Y такое, что МП (X, ρ) и (Z, d) изометричны.

Теорема Хаусдорфа. Любое неполное метрическое пространство имеет единственное с точностью до изометрии пополнение.

Утв. 1 Пусть (X, ρ) — полное МП, $Y \subset X$. Тогда

$$(Y, \rho) \text{ — полное МП} \qquad \iff \qquad Y \text{ замкнуто в } (X, \rho) \text{ (т.е. } [Y]_{\tau_\rho} = Y)$$

Доказательство.

- $(\Longrightarrow)$ Покажем, что $[Y] \subset Y$. Пусть $a \in X$ — точка прикосновения Y. Тогда a — секвенциальная точка прикосновения, т.е.
$$\exists \ \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Y: \quad y_n \xrightarrow{\rho} a$$
Последовательность $\{y_n\}$ сходится в X, значит, она фундаментальна по метрике ρ. Так как $\{y_n\} \subset Y$, то $\{y_n\}$ фундаментальна в (Y, ρ). В силу полноты (Y, ρ), $\{y_n\}$ сходится в Y. В силу единственности предела в МП, $y_n \xrightarrow{\rho} a \in Y$.
- $(\Longleftarrow)$ Пусть $\{y_n\} \subset Y$ — произвольная фундаментальная последовательность. В силу полноты (X, ρ):
$$y_n \xrightarrow{\rho} a \in X \qquad \Longrightarrow \qquad a \text{ — точка прикосновения } Y$$
Y замкнуто, поэтому $a \in Y$. Значит, (Y, ρ) полно. □

Опр. Множество $B \subset X$ называется *нигде не плотным* в метрическом пространстве (X, ρ), если его замыкание $[B]_{\tau_\rho}$ не содержит ни одного открытого шара.

Теорема Бэра. Полное метрическое пространство не может быть представлено в виде счетного объединение своих нигде не плотных подмножеств.

Сепарабельность метрических пространств

Опр. Метрическое пространство (X, ρ) называется *сепарабельным*, если в X существует счетное всюду плотное множество.

По определению, конечные метрические пространства не сепарабельны, так как конечное множество не является счетным.

Утв. 2 Пусть (X, ρ) — сепарабельное метрическое пространство, $Y \subset X$ — его бесконечное подмножество. Тогда (Y, ρ) сепарабельно.

Опр. Пусть (X, ρ) — МП. Подмножество $A \subset X$ называется ε_0*-дырявым*, если

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \quad \forall x, y \in A \quad \to \quad \rho(x, y) \geq \varepsilon_0$$

Утв. 3 Если в МП (X, ρ) есть более чем счетное ε_0-дырявое подмножество (для какого-то ε_0), то МП (X, ρ) не сепарабельно.

Утв. 4 Свойства сепарабельности и полноты метрических пространств сохраняются при изометрии.

Основные метрические пространства

	Метрическое пространство	Сепарабельность	Полнота	Пополнение
1	(l_∞, ρ_∞)	✗	✓	(l_∞, ρ_∞)
2	$(l_p, \rho_p), \ 1 \leq p < \infty$	✓	✓	(l_p, ρ_p)
3	$(l_p, \rho_q), \ 1 \leq p < q < \infty$	✓	✗	(l_q, ρ_q)
4	(c, ρ_∞)	✓	✓	(c, ρ_∞)
5	(c_0, ρ_∞)	✓	✓	(c_0, ρ_∞)
6	$(C[a, b], \rho_c)$	✓	✓	$(C[a, b], \rho_\infty)$
7	$(C(\mathbb{R}), \rho_c)$	✓	✓	$C(\mathbb{R}, \rho_\infty)$
8	$(C_0(\mathbb{R}), \rho_c)$	✓	✓	$C_0(\mathbb{R}, \rho_\infty)$
9	$(BC(\mathbb{R}), \rho_c)$	✓	✓	$(BC(\mathbb{R}), \rho_\infty)$
10	$(L_p(X), \rho_p), \ 1 \leq p < \infty$	✓	✓	$(L_p(X), \rho_p)$

Метрика ρ_p для последовательностей и функций:

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| x(k) - y(k) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \rho_p(f, g) = \left(\int_a^b \left| f(x) - g(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

В случае пространства $L_p(X)$ под ρ_p понимается интеграл Лебега.

Метрика $\rho_\infty \equiv \rho_c$ для последовательностей и функций:

$$\rho_\infty(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| x(k) - y(k) \right|, \qquad \rho_\infty(f, g) \equiv \rho_c(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} \left| f(x) - g(x) \right|$$

В определении метрик ρ_p и ρ_∞ для функций отрезок $[a, b]$ можно заменить на другое множество (например, на $\mathbb{R}$) в зависимости от конкретного пространства.

Большинство доказательств держится на следующих двух фактах:

Теорема Вейерштрасса. Множество многочленов всюду плотно в пространстве $(C[a, b], \rho_c)$.

Утв. 5 Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Основные метрические пространства последовательностей и функций (к таблице):

1. l_∞ — пространство ограниченных последовательностей.
   - Несепарабельность: более чем счетное ε_0-дырявое множество — все последовательности и нулей и единиц.
   - Полнота: доказывается по определению.
2. l_p — пространство таких последовательностей x, что сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|x(k)\right|^p < \infty$.
   - Сепарабельность: счетное всюду плотное множество — все финитные последовательности с рациональными членами.
   - Полнота: доказывается по определению (см. задачу 1).
3. l_p — пространство таких последовательностей x, что сумма ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|x(k)\right|^p < \infty$.
   - Сепарабельность: $l_p \subset l_q$, а (l_q, ρ_q) сепарабельно.
   - Неполнота: рассмотреть $x(n) = \dfrac{1}{n^{1/p}}$ как поточечный предел финитных последовательностей.
4. c — сходящиеся последовательности.
   - Сепарабельность: построить счетное всюду плотное множество, заменив хвост последовательности на предел, а потом приблизив все члены рациональными числами.
   - Полнота: c — замкнутое подмножество полного МП (l_∞, ρ_∞).
5. c_0 — бесконечно малые последовательности (сходящиеся к 0).
   - Сепарабельность: $c_0 \subset c$ или рассмотреть счетное всюду плотное множество из всех финитных последовательностей с рациональными членами.
   - Полнота: c_0 замкнуто в полном МП (l_∞, ρ_∞).
6. $C[a, b]$ — непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции.
   - Сепарабельность: счетное всюду плотное множество — все многочлены с рациональными коэффициентами (по теореме Вейерштрасса).
   - Полнота: предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций непрерывен (теорема из матанализа) + критерий Коши равноверной сходимости.
7. $C(\mathbb{R})$ — непрерывные функции, имеющие конечный предел при $x \to \pm\infty$
   Вместо $\mathbb{R}$ можно рассматривать функции на любом конечном или бесконечном интервале или полуинтервале.
   - Сепарабельность: аналогично случаю $C_0(\mathbb{R})$ (?).
8. $C_0(\mathbb{R})$ — непрерывные функции, бесконечно малые при $x \to \pm\infty$
   - Сепарабельность: построить счетное всюду плотное множество, заменив функцию вне отрезка $[-n-1, n+1]$ на 0, а внутри $[n, n]$ приблизив многочленами с рациональными коэффициентами и дополнив по непрерывности.
   - Полнота: см. задачу §2.6.
9. $BC(\mathbb{R})$ — ограниченные непрерывные функции.
10. $L_p(X)$ — интегрируемые в степени p по Лебегу функции, т.е. $\int_X \left|f(x)\right|^p dx < \infty$.

Задача §2.6

Найти пополнение метрического пространства (X, ρ), состоящего из всех непрерывных финитных функций на $\mathbb{R}$, с метрикой

$$\rho(x, y) = \max_{t \in \mathbb{R}} \left| x(t) - y(t) \right|$$

Решение:

Покажем, что пополнением будет метрическое пространство $(C_0(\mathbb{R}), \rho_\infty)$, состоящее из всех функций, бесконечно малых при $x \to \pm\infty$.

1. Пространство (C_0, ρ_∞) полно.
   Рассматриваем произвольную фундаментальную последовательность, показываем, что она сходится. Затем показываем, что предел тоже лежит в исходном пространстве.

   Пусть $\{f_n\} \subset C_0(\mathbb{R})$ — фундаментальная последовательность. Тогда

   $$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon) \;\; \forall n, m \geq N \quad \to \quad \sup_{\mathbb{R}} |f_n - f_m| < \varepsilon$$

   По критерию Коши равномерной сходимости функциональной последовательности, последовательность $\{f_n\}$ сходится на $\mathbb{R}$ равномерно к некоторой функции f.

   Все функции f_n непрерывны на $\mathbb{R}$. Тогда по теореме о пределе равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, f непрерывна на $\mathbb{R}$.

   Осталось показать, что $f(\pm\infty) = 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости $\{f_n\}$ к f:

   $$\exists N = N(\varepsilon): \;\; \sup_{\mathbb{R}} |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N$$

   Так как $f_N \in C_0(\mathbb{R})$, то $f_N(+\infty) = 0$, значит,

   $$\exists x_0: \quad \left| f_N(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x > x_0$$

   Тогда при $x > x_0$ выполнена оценка:

   $$\left| f(x) \right| \leq \left| f(x) - f_N(x) \right| + \left| f_N(x) \right| \leq \sup_{\mathbb{R}} |f - f_N| + |f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

   Итак, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_0: \;\; \forall x > x_0 \quad \to \quad |f(x)| < \varepsilon$, то есть $f(+\infty) = 0$. Аналогично, $f(-\infty) = 0$.

2. Множество X всюду плотно в $C_0(\mathbb{R})$.

   Пусть $\varepsilon > 0, \; g \in C_0(\mathbb{R})$. Построим $f \in X$ такую, что $\rho_\infty(f, g) < \varepsilon$.

   Так как $g(\pm\infty) = 0$, то $\exists R > 0: \;\; |g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $|x| \geq R$. Определим функцию:

   $$f(x) = \begin{cases} g(x), & |x| \leq R; \\ 0, & |x| \geq R + 1; \\ \ldots, & \text{иначе}, \end{cases}$$

   где при $R \leq |x| \leq R + 1$ функция f определена линейно так, чтобы она была непрерывна.

   По построению:

   $$\rho_\infty(f, g) = \sup_{|x| \geq R} \left| f(x) - g(x) \right| \leq \sup_{R \leq |x| \leq R+1} \left| f(x) \right| + \sup_{|x| \geq R} \left| g(x) \right| \leq \max\left\{ |f(R)|, |f(-R)| \right\} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

3. Пространства (X, ρ) и (X, ρ_∞) изометричны.

   Изометрией является тождественное отображение $\varphi(f) \equiv f$. Действительно, по теореме Вейерштрасса, непрерывная функция достигает супремума на конечном отрезке, поэтому

$$\forall f, g \in X \quad \rho_\infty(f,g) = \sup_{[-a,a]} |f-g| = \max_{[-a,a]} |f-g| = \max_{\mathbb{R}} |f-g| = \rho(f,g)$$

Из пунктов $1, 2, 3$ и определения пополнения следует, что $(C_0(\mathbb{R}), \rho_\infty)$ — пополнение (X, ρ).

Задача 1.14 (из задавальника)

Пусть $(F, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, состоящее из непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций (т.е. $F = BC(\mathbb{R})$), с нормой

$$\|f\| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\big|f(x)\big|}{1+x^2} dx$$

Всякое линейное нормированное пространство является метрическим с метрикой ρ, порожденной нормой:

$$\rho(x,y) = \|x-y\|$$

(a) Исследовать $(F, \|\cdot\|)$ на сепарабельность.

(b) Исследовать $(F, \|\cdot\|)$ на полноту.

(c) Построить пополнение $(F, \|\cdot\|)$.

Решение:

Вместо $(F, \|\cdot\|)$ будем исследовать на полноту и сепарабельность изометричное пространство (X, ρ_1), так как изометрия сохраняет эти свойства. Построим изометрию $\varphi : F \to X$ следующим образом:

$$\varphi(f)(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}$$

Тогда

$$X = \big\{ h \;\big|\; (1+x^2)h(x) \text{ непрерывна и ограничена на } \mathbb{R} \big\}, \qquad \rho_1(f,g) = \int\limits_{\mathbb{R}} \big|f(x)-g(x)\big| dx$$

φ биективно и $\rho_1\big(\varphi(f), \varphi(g)\big) = \|f-g\|$ при $f, g \in F$.

Сразу заметим, что

$$X = \left\{ h \in C(\mathbb{R}) \;\middle|\; h(x) = O\left(\tfrac{1}{x^2}\right) \text{ при } x \to \pm\infty \right\}$$

(a) Покажем, что (X, ρ_1) **сепарабельно**.

1. Множество финитных непрерывных функций всюду плотно в X.

   Пусть $\varepsilon > 0$. Пусть $h \in X$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)| dx = A < +\infty$. Интеграл сходится, поэтому

$$\exists R > 0 : \quad \left(\int_{-\infty}^{-R} + \int_{R}^{+\infty} \right) \big|h(x)\big| dx < \varepsilon$$

   Функция h непрерывна, а интеграл сходится, значит, она ограничена: $\big|h(x)\big| \le M \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

   Определим финитную непрерывную функцию f (она лежит в X):

$$f(x) = \begin{cases} h(x), & |x| \le R; \\ 0, & |x| \ge R + \delta; \\ \ldots, & \text{иначе,} \end{cases}$$

   где $\delta = \delta(h, \varepsilon)$ и при $R \le |x| \le R + \delta$ функция f определена так, чтобы:

- f была линейной на $[-R-\delta, -R]$ и $[R, R+\delta]$;
- f была непрерывной на $\mathbb{R}$;
- $\displaystyle\int_R^{R+\delta} |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon, \quad \int_{-R-\delta}^{-R} |f(x) - h(x)| dx < \varepsilon$

  Последнего можно добиться, выбрав δ достаточно малым:

$$\int_R^{R+\delta} |f(x) - h(x)| dx \leq 2M\delta < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \delta = \frac{\varepsilon}{4M}$$

Осталось показать, что f хорошо аппроксимирует h:

$$\rho_1(f, h) = \left(\int\limits_{-\infty}^{-R-\delta} + \int\limits_{-R-\delta}^{-R} + \int\limits_{-R}^{R} + \int\limits_{R}^{R+\delta} + \int\limits_{R+\delta}^{+\infty} \right) \big|f(x) - h(x)\big| dx < \varepsilon + \varepsilon + 0 + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon$$

2. Пространство финитных непрерывных непрерывных функций с метрикой ρ_1 сепарабельно.

Построим счетное всюду плотное множество. Пусть $\varepsilon > 0$, g финитна и непрерывна. Тогда

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad \{x \mid g(x) \neq 0\} \subset [-n+1, n-1]$$

По теореме Вейерштрасса, существует многочлен $P^m(x)$ степени m такой, что

$$\sup_{[-n,n]} \big|g - P^m\big| < \frac{\varepsilon}{2n} \qquad \Longrightarrow \qquad \rho_1\big(g, P^m\big) = \int_{-n}^{n} \big|g(x) - P^m(x)\big| dx < \varepsilon$$

Так как $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$, то P^m можно приблизить многочленом $P^m_{\mathbb{Q}}$ с рациональными коэффициентами на отрезке $[-n, n]$:

$$\sup_{[-n,n]} \big|P^m - P^m_{\mathbb{Q}}\big| < \frac{\varepsilon}{2n} \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{[-n,n]} \big|g - P^m_{\mathbb{Q}}\big| < \frac{\varepsilon}{n}$$

Построим функцию f:

$$f(x) = \begin{cases} P^m_{\mathbb{Q}}(x), & |x| \leq n; \\ 0, & |x| \geq n+1; \\ \ldots, & \text{иначе}, \end{cases}$$

где при $n \leq |x| \leq n+1$ функция определена линейно так, чтобы f была непрерывной.

Ясно, что f строится однозначно, если известен отрезок $[-n, n]$ и многочлен $P^m_{\mathbb{Q}}$. Кроме того, множество всех таких отрезков и многочленов является счетным:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathbb{Q}^{m+1} \text{ — счетно},$$

так как счетное объединение счетных множеств счетно.

Осталось показать, что f хорошо приближает исходную функцию g. Сначала отметим, что по построению $g(n) = g(-n) = 0$, поэтому $|f(n)| < \dfrac{\varepsilon}{n}$, $\;|f(-n)| < \dfrac{\varepsilon}{n}$. С учетом этого:

$$\rho_1(f, g) = \left(\int\limits_{-n-1}^{-n} + \int\limits_{n}^{n+1} \right) \big|f(x)\big| dx + \int\limits_{-n}^{n} \big|P^m_{\mathbb{Q}}(x) - g(x)\big| dx \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{n} + 2n \cdot \frac{\varepsilon}{2n} < 2\varepsilon$$

Из пунктов 1 и 2 следует, что в X есть счетное всюду плотное множество, поэтому пространство (X, ρ_1) сепарабельно.

(c) Покажем, что **пополнением** (X, ρ_1) будет пространство $L_1(\mathbb{R})$, которое, как известно, является полным. Достаточно показать, что X всюду плотно в $L_1(\mathbb{R})$.

Как известно из курса меры и интеграла Лебега, множество финитных непрерывных функций всюду плотно в $L_1(\mathbb{R})$.
см. “Мера и интеграл Лебега”, Н.А.Гусев, §2.11, задача 2.11.6

Множество финитных непрерывных функций лежит в X, поэтому X всюду плотно в $L_1(\mathbb{R})$.

В обозначениях исходного пространства, пополнением (F, ρ) будет пространство (F', ρ), где

$$F' = \left\{ f \;\middle|\; \frac{f(x)}{1+x^2} \in L_1(\mathbb{R}) \right\}$$

(b) Пространство (X, ρ_1) **неполно**, так как не совпадает со своим пополнением.
Можно взять функцию g из пополнения, не лежащую в X, и построить последовательность $\{f_n\} \subset X$, такую что $f_n \xrightarrow{\rho_1} g$ (это можно сделать, т.к. X всюду плотно в пополнении). Тогда последовательность $\{f_n\}$ будет фундаментальной в (X, ρ_1), но не будет сходящейся.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^{3/2}} \in L_1(\mathbb{R}), \qquad f(x) \neq O\left(\frac{1}{x^2}\right) \implies f \notin X$$

Задача 1

Доказать, что (l_p, ρ_p) — полное метрическое пространство.

Решение:

Пусть $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset l_p$ — произвольная фундаментальная последовательность. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \;\; \forall n, m \geq N \;\; \to \;\; \rho_p(x_n, x_m) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \big| x_n(k) - x_m(k) \big|^p \right]^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (*)$$

$$\implies \qquad \big| x_n(k) - x_m(k) \big| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Это означает, что числовая последовательность $\{x_n(k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ фундаментальна для любого $k \in \mathbb{N}$, а значит, сходится к некоторому числу $y(k)$ в силу полноты $\mathbb{R}$. Естественно предположить, что последовательность $y = \{y(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ будет пределом $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Требуется показать, что (1) $x_n \xrightarrow{\rho_p} y$ и (2) $y \in l_p$.

1. Из $(*)$ следует, что

$$\forall n, m \geq N \;\; \forall L \in \mathbb{N} \;\; \to \;\; \sum_{k=1}^{L} \big| x_n(k) - x_m(k) \big|^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$\forall n \geq N \;\; \forall L \in \mathbb{N} \;\; \to \;\; \sum_{k=1}^{L} \big| x_n(k) - y(k) \big|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p < \varepsilon^p \qquad (**)$$

Переходя к пределу при $L \to \infty$, получаем, что

$$\forall n \geq N \;\; \to \;\; \sum_{k=1}^{\infty} \big| x_n(k) - y(k) \big|^p \leq \varepsilon^p \implies \rho_p(x_n, y) \leq \varepsilon \implies x_n \xrightarrow{\rho_p} y$$

2. Из $(**)$ следует, что $\forall L \in \mathbb{N} \;\; \to \;\; \left[\sum_{k=1}^{L} \big| x_N(k) - y(k) \big|^p \right]^{1/p} < \varepsilon$. По неравенству Минковского:

$$\left[\sum_{k=1}^{L} \big| y(k) \big|^p \right]^{1/p} \leq \left[\sum_{k=1}^{L} \big| x_N(k) - y(k) \big|^p \right]^{1/p} + \left[\sum_{k=1}^{L} \big| x_N(k) \big|^p \right]^{1/p} < \varepsilon + C,$$

где $C^p = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_N(k)|^p < \infty$. Переходя к пределу при $L \to \infty$, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big|y(k)\big|^p \leq (\varepsilon + C)^p < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad y \in l_p$$

Задача 2

Рассматривается метрическое пространство (X, ρ), где

$$X = \big\{x : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\big|\; x(k) = o(k) \text{ при } k \to \infty\big\}, \qquad \rho(x, y) = \sup_{\mathbb{N}} \frac{\big|x(k) - y(k)\big|}{k}$$

(a) Исследовать (X, ρ) на сепарабельность.

(b) Исследовать (X, ρ) на полноту.

(c) Построить пополнение (X, ρ).

Решение:

Сделаем изометрию $\varphi : (X, \rho) \to (c_0, \rho_\infty)$:

$$\varphi(x)(k) = \frac{x(k)}{k}, \qquad \rho_\infty(x, y) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \big|x(k) - y(k)\big|$$

Изометрия сохраняет свойства полноты и сепарабельности, поэтому рассмотрим пространство (c_0, ρ_∞).

(a) Пространство (c_0, ρ_∞) **сепарабельно**.

Как мы разбирали на семинаре, в c_0 счетным всюду плотным множеством является множество финитных последовательностей с рациональными членами.

(b) Пространство (c_0, ρ_∞) **полно**, так как c_0 замкнуто в полном пространстве (l_∞, ρ_∞).

Доказательство абсолютно аналогично доказательству полноты $(C_0(\mathbb{R}), \rho_\infty)$ (см. задачу §2.6).

(c) Полное пространство совпадает со своим пополнением.

Задача 3

Рассматривается метрическое пространство (X, ρ), где

$$X = \big\{f \in C(\mathbb{R}) \;\big|\; f(x) = O(x^2) \text{ при } x \to \pm\infty\big\}$$

Здесь под $C(\mathbb{R})$ понимаются все непрерывные на $\mathbb{R}$ функции.

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{\big|f(x) - g(x)\big|}{2^x + x^2 + \big|f(x) - g(x)\big|}$$

(a) Исследовать (X, ρ) на сепарабельность.

(b) Исследовать (X, ρ) на полноту.

(c) Построить пополнение (X, ρ).

Решение:

Сделаем изометрию: $\varphi : (X, \rho) \to (Y, d)$:

$$\varphi(f)(x) = \frac{f(x)}{2^x + x^2}, \qquad d(f, g) = \sup_{\mathbb{R}} \frac{\big|f(x) - g(x)\big|}{1 + \big|f(x) - g(x)\big|}$$

$$Y = \big\{ g \in C(\mathbb{R}) \;\big|\; (2^x + x^2) g(x) = O(x^2) \big\}$$

(a) Пространство (Y, d) **сепарабельно**.

Сначала заметим, что из неравенства $\frac{t}{1+t} \le t \ \ \forall t \ge 0$ следует, что

$$\forall f, g \in Y \quad \to \quad d(f,g) \le \rho_\infty(f,g)$$

Далее, $Y \subset C_0(\mathbb{R})$. Достаточно показать, что пространство $(C_0(\mathbb{R}), d)$ сепарабельно. Известно, что $(C_0(\mathbb{R}), \rho_\infty)$ сепарабельно. Пусть S — счетное всюду плотное в $(C_0(\mathbb{R}), \rho_\infty)$ множество.

Пусть $\varepsilon > 0, \quad g \in Y$. Тогда

$$\exists f \in S: \quad \rho_\infty(f,g) < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad d(f,g) \le \rho_\infty(f,g) < \varepsilon$$

Значит, S всюду плотно в $(C_0(\mathbb{R}), d)$, и это пространство сепарабельно.

(c) Покажем, что **пополнением** (Y, d) является пространство $(C_0(\mathbb{R}), d)$.

1. Пространство $(C_0(\mathbb{R}), d)$ полно.

   Пусть $\{f_n\} \subset C_0(\mathbb{R})$ — произвольная фундаментальная по метрике d последовательность. Покажем, что $\{f_n\}$ фундаментальна по метрике ρ_∞.

   Пусть $\varepsilon > 0$. Из фундаментальности $\{f_n\}$ по метрике d следует, что

   $$\exists N \ \ \forall n, m \ge N \quad \to \quad d(f_n, f_m) < \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} < 1$$

   Тогда для любых $x \in \mathbb{R}$:

   $$\frac{|f_n - f_m|}{1 + |f_n - f_m|} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 1} \qquad \Longrightarrow \qquad |f_n - f_m| < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \rho_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$$

   Это означает, что $\{f_n\}$ фундаментальна по метрике ρ_∞. В силу полноты $(C_0(\mathbb{R}), \rho_\infty)$, эта последовательность сходится к $g \in C_0(\mathbb{R})$.

   Из неравенства $d(f,g) \le \rho_\infty(f,g)$ следует:

   $$f_n \xrightarrow{\rho_\infty} g \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \xrightarrow{d} g \in C_0(\mathbb{R})$$

2. (Y, d) всюду плотно в $C_0(\mathbb{R}, d)$.

   Мы знаем, что в $(C_0(\mathbb{R}), \rho_\infty)$ всюду плотно множество S, состоящее из финитных многочленов (важно, что они финитны). Тогда $S \subset Y$.

   В пункте (a) было получено, что S всюду плотно в $C_0(\mathbb{R})$ по метрике d, поэтому и множество Y всюду плотно в $C_0(\mathbb{R})$ по метрике d.

(b) Пространство (Y, d) **неполно**, так как не совпадает со своим пополнением.

$$f(x) = \frac{x^3}{2^x + x^2} \in C_0(\mathbb{R}), \qquad (2^x + x^2) f(x) = x^3 \ne O(x^2) \quad \Longrightarrow \quad f \notin Y$$