Функан. ДЗ 1.

Прохоров Юрий, 776

Решал вместе с Алимом Бухараевым.

Задача 1.2(a) (из задавальника)

Пусть функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на $\mathbb{R}$. На $\mathbb{R}$ задано бинарное отношение:

$$x \leq_f y \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x) + |x-y| \leq f(y).$$

Доказать, что $\leq_f$ задает частичный порядок на $\mathbb{R}$.

Решение:

Достаточно проверить рефлексивность, антисимметричность и транзитивность.

1. Рефлексивность.

$$f(x) + |x-x| = f(x) \leq f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad x \leq_f x$$

2. Антисимметричность.

$$\begin{cases} x \leq_f y \\ y \leq_f x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) + |x-y| \leq f(y) \\ f(y) + |y-x| \leq f(x) \end{cases} \Longrightarrow f(x) + f(y) + 2|x-y| \leq f(x) + f(y) \Longrightarrow$$
$$|x-y| \leq 0 \implies x = y$$

3. Транзитивность.

$$\begin{cases} x \leq_f y \\ y \leq_f z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) + |x-y| \leq f(y) \\ f(y) + |y-z| \leq f(z) \end{cases}$$
$$f(x) + |x-z| \leq f(x) + |x-y| + |y-z| \leq f(y) + |y-z| \leq f(z) \implies x \leq_f z$$

Задача 1.3(a) (из задавальника)

Пусть $\mathbb{L}_1[0,1]$ — множество интегрируемых по Лебегу функций на $[0,1]$. На нем задано бинарное отношение

$$f \leq_L g \qquad \Longleftrightarrow \qquad |f(x) - f(y)| + \int\limits_{[0,1]} f d\mu \leq \int\limits_{[0,1]} g d\mu \quad \text{для п.в. } x \in [0,1]$$

Функции $f, g \in \mathbb{L}_1[0,1]$ считаются равными, если

$$f(x) = g(x) \quad \text{для п.в. } x \in [0,1].$$

Доказать, что $\leq_L$ задает частичный порядок на $\mathbb{L}_1[0,1]$.

Решение:

Далее для простоты будем писать $\int\limits_{[0,1]} f d\mu = \int_0^1 f dx$.

Достаточно проверить рефлексивность, антисимметричность и транзитивность.

1. Рефлексивность.

$$|f(x)-f(x)|+\int_0^1 f dx = \int_0^1 f dx \le \int_0^1 f dx \qquad \Longrightarrow \qquad f \le_L f$$

2. Антисимметричность.

$$\left\{\begin{array}{l} f \le_L g \\ g \le_L f \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} |f(x)-g(x)|+\displaystyle\int_0^1 f dx \le \int_0^1 g dx \text{ п.в. } x \in [0,1] \\ |g(x)-f(x)|+\displaystyle\int_0^1 g dx \le \int_0^1 f dx \text{ п.в. } x \in [0,1] \end{array}\right. \Longrightarrow$$

$$|f(x)-g(x)| \le 0 \text{ п.в. } x \in [0,1] \qquad \Longrightarrow \qquad f(x)=g(x) \quad \text{п.в. } x \in [0,1] \qquad \Longrightarrow \qquad f=g.$$

3. Транзитивность.

$$\left\{\begin{array}{l} f \le_L g \\ g \le_L h \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} |f(x)-g(x)|+\displaystyle\int_0^1 f dx \le \int_0^1 g dx \text{ п.в. } x \in [0,1] \\ |g(x)-h(x)|+\displaystyle\int_0^1 g dx \le \int_0^1 h dx \text{ п.в. } x \in [0,1] \end{array}\right.$$

Тогда для п.в. $x \in [0,1]$:

$$|f(x)-h(x)|+\int_0^1 f dx \le |f(x)-g(x)|+|g(x)-h(x)|+\int_0^1 f dx \le |g(x)-h(x)|+\int_0^1 g dx \le \int_0^1 h dx$$
$$\Longrightarrow f \le_L h$$

Задача 1.3(в) (из задавальника)

Пусть $\mathbb{L}_1[0,1]$ — множество интегрируемых по Лебегу функций на $[0,1]$. На нем задано бинарное отношение

$$f \le_L g \qquad \iff \qquad |f(x)-f(y)|+\int\limits_{[0,1]} f d\mu \le \int\limits_{[0,1]} g d\mu \quad \text{для п.в. } x \in [0,1]$$

Функции $f, g \in \mathbb{L}_1[0,1]$ считаются равными, если

$$f(x)=g(x) \quad \text{для п.в. } x \in [0,1].$$

Пусть $M \subset \mathbb{L}_1[0,1]$ — непустая цепь такая, что

$$\exists R>0 \ \ \forall f \in M \ \longrightarrow \ \int_0^1 |f| dx \le R.$$

Доказать, что M имеет в $\mathbb{L}_1[0,1]$ мажоранту.

Решение:

Пусть $f_0 \in M$ — произвольный элемент цепи. Из задачи 1.3(б) мы знаем, что так как все элементы цепи сравнимы, то

$$\forall f \in M \ \exists \alpha \in \mathbb{R} \ : \ f(x)=f_0(x)+\alpha \text{ почти всюду.}$$

Пусть

$$I_0=\int_0^1 |f_0| dx \ge 0, \qquad I_0 \le R.$$

Определим функцию f_1:

$$f_1(x)=f_0(x)+R-I_0.$$

Покажем, что это мажоранта M. Из условия ограниченности $\forall f \in M$ ($f=f_0+\alpha$ почти всюду):

$$\int_0^1 |f| dx = \int_0^1 |f_0+\alpha| dx \le \int_0^1 |f_0| dx + |\alpha| = I_0+|\alpha| \le R, \qquad \Longrightarrow \qquad |\alpha| \le R-I_0.$$

Тогда

$$f(x)=f_0(x)+\alpha \le f_0(x)+|\alpha| \le f_0(x)+R-I_0=f_1(x) \ \text{ почти всюду}$$

$$\left.\begin{array}{c} f, f_1 \text{ сравнимы} \\ f \le f_1 \text{ почти всюду} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f \le_L f_1 \quad \Longrightarrow \quad f_1 - \text{ мажоранта } M.$$

Задача 1.4(б) (из задавальника)

Пусть $E \subseteq \mathbb{R}$ — измеримо по Лебегу и $\mu(E) > 0$. На множестве $\mathbb{L}_1(E)$ интегрируемых по Лебегу на E функций введено отношение порядка:

$$f \leq_\mu g \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_E f d\mu + \mu\{x \in E \mid f(x) < g(x)\} \leq \int_E g d\mu.$$

Функции $f, g \in \mathbb{L}_1(E)$ считаются равными, если

$$f(x) = g(x) \quad \text{для п.в. } x \in E.$$

Пусть $M \in \mathbb{L}_1(E)$ — непустая цепь такая, что

$$\exists h \in M \ \forall f \in M \ \longrightarrow \ \int_E f d\mu \leq \int_E h d\mu.$$

Доказать, что h — максимальный элемент M.

Решение:

Допустим, $\exists f \in M \ : \ f \geq_\mu h$. Тогда

$$\begin{cases} \displaystyle\int_E h d\mu + \mu\{h < f\} \leq \int_E f d\mu \\ \displaystyle\int_E f d\mu \leq \int_E h d\mu \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu\{h < f\} \leq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu\{h < f\} = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad h(x) \geq f(x) \text{ почти всюду}$$

Из системы следует, что

$$\int_E f d\mu = \int_E h d\mu \qquad \Longrightarrow \qquad \int_E (h - f) d\mu = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad h(x) = f(x) \text{ почти всюду,}$$

так как подынтегральная функция неотрицательна почти всюду. Значит, h — максимальный элемент M.

Задача 1

Пусть X — линейное пространство, $L \subset X$ — его подпространство. Доказать, что существует такое подпространство $M \subset X$, что $L + M = X, \ L \cap M = \{0\}$.

Решение:

Из задачи 1.5 из задавальника мы знаем, что любое нетривиальное линейное пространство имеет базис Гамеля. Пусть L нетривиально (иначе $M = X$). Тогда в нем существует базис Гамеля Γ_0. Достроим его до базиса Гамеля в X.

Пусть

$$\mathcal{F} = \{\text{все линейно независимые наборы из } X, \text{ содержащие } \Gamma_0\}.$$

Пара $(\mathcal{F}, \subset)$ — ЧУМ. Применим к нему лемму Цорна. Для этого проверим, что произвольная цепь $C \subset \mathcal{F}$ имеет в $\mathcal{F}$ мажоранту. Обозначим

$$M = \bigcup_{A \in C} A = \{x \in X \mid \exists A_x \in C \ x \in A_x\}.$$

По построению ясно, что $\forall A \in C : \ A \subset M$, значит, M — мажоранта C. Осталось проверить, что $M \in \mathcal{F}$. По построению, $\forall A \in C : \ \Gamma_0 \subset A \implies \Gamma_0 \subset M$. Рассмотрим в M произвольный конечный набор $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

$$\exists A_1, \ldots, A_n \in C : \ x_i \in A_i.$$

Так как C — цепь, то в его конечной подцепи $\{A_1, \ldots, A_n\}$ есть максимальный элемент A_k. Значит,

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \subset A_k \in M \qquad \Longrightarrow \qquad \{x_1, \ldots, x_n\} \text{ — линейно независимый набор.}$$

Итак, имеем

$$\left.\begin{array}{c} \forall \text{ конечный набор из } M \text{ линейно независим} \\ \Gamma_0 \subset M \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad M \in \mathcal{F}.$$

По лемме Церна, в $\mathcal{F}$ есть максимальный элемент Γ. Пусть Γ — не базис Гамеля в X. Тогда $\exists x_0 \in X : \tilde{\Gamma} = \{x_0\} \cup \Gamma$ — тоже линейно независимый набор. Значит $\Gamma \subset \tilde{\Gamma} \in \mathcal{F}$ — противоречие, т.к. Γ — максимальный элемент $\mathcal{F}$.

Итак, мы достроили базис Гамеля Γ_0 в L до базиса Гамеля Γ в X. Определим

$$M = \big\langle \Gamma \setminus \Gamma_0 \big\rangle \text{ — линейная оболочка } \Gamma \setminus \Gamma_0.$$

Для завершения доказательства достаточно проверить три пункта:

1. $M \subset X$ — линейное подпространство.

   Из линейной алгебры известно, что линейное оболочка элементов X — линейное подпространство X.

2. $L + M = \{x + y \mid x \in L,\ y \in M\} = X$.

   Пусть $z \in X$. Так как Γ — базис Гамеля в X, то z — конечная линейная комбинация элементов Γ. Разобьем ее на две части:

   $$z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k + \sum_{l=1}^{m} \beta_l \eta_l = x + y, \qquad \xi_k \in \Gamma_0 \subset L,\ \eta_l \in \Gamma \setminus \Gamma_0 \subset M$$

   Так как L и M — линейные подпространства, то $x \in L,\ y \in M$, значит, $L + M = X$.

3. $L \cap M = \{0\}$

   Пусть $x \in L \cap M$. Тогда

   $$\left\{\begin{array}{l} x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k,\ \xi_k \in \Gamma_0 \\ x = \displaystyle\sum_{l=1}^{m} \beta_l \eta_l,\ \eta_l \in \Gamma \setminus \Gamma_0 \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \xi_k - \sum_{l=1}^{m} \beta_l \eta_l = 0$$

   Все $\xi_k, \eta_l \in \Gamma \implies$ они линейно независимы, значит их линейная комбинация тривиальна: $\alpha_k = \beta_l = 0$. Значит, $x = 0$.

Задача 2

Доказать, что в бесконечном частично упорядоченном множестве $(X, \leq)$ всегда найдется бесконечная цепь или бесконечная антицепь.

Решение:

Рассмотрим три случая:

- В X нет минимального элемента.

  Тогда построим убывающую цепь: x_1 — произвольный. x_1 — не минимальный элемент, значит, существует что-то меньше — x_2. И так далее.

- В X бесконечно много минимальных элементов.

  Так как все минимальные элементы попарно не сравнимы, то они образуют бесконечную антицепь.

- В X конечное число минимальных элементов.

Пусть $\{m_1, \ldots, m_n\}$ — минимальные элементы,

$$C_k = \{x \in X \mid x \geq m_k\} \text{ — все сравнимые с } m_k \text{ элементы, } m_k \text{ — наименьший элемент } C_k$$

Покажем, что во множестве $Y = X \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k$ нет минимальных элементов. Пусть $y \in Y$ — минимальный элемент. Достаточно показать, что y — минимальный элемент X. Пусть это не так, и $\exists x \in C_k : \ x \leq y$. Но $m_k \leq x \leq y \implies y \in C_k$ — противоречие.

Если Y бесконечно, то, аналогично первому случаю выше, в нем есть бесконечная убывающая цепь. Пусть Y конечно, тогда один из классов C_k бесконечен. Итак, мы доказали **утверждение** $(*)$**:** *в бесконечном ЧУМ есть бесконечная антицепь, бесконечная убывающая цепь или бесконечное подмножество с наименьшим элементом.*

Пусть в X нет бесконечной антицепи и нет бесконечной убывающей цепи. Тогда из $(*)$ следует, что есть бесконечное подмножество $C_1 \subset X$ с наименьшим элементов m_1. В $C_1 \setminus \{m_1\}$ тоже нет бесконечной антицепи или убывающей цепи, значит есть бесконечное подмножество $C_2 \subset C_1 \setminus \{m_1\}$ с наименьшим элементом $m_2 > m_1$ (так как $m_2 \in C_1, \ m_1$ — наим. элемент C_1). Продолжая аналогично, строим бесконечную возрастающую цепь.