Случайные процессы. ДЗ 6-8.

Прохоров Юрий, 776

Задача 6.1

Пешеход хочет перейти дорогу в неположенном месте. При отсутствии машин он переходит дорогу за a секунд. Поток машин образует пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Пешеход ждет, пока зазор между машинами будет больше a секунд и потом переходит дорогу. Найти среднее время, которое пешеход будет ждать до перехода дороги (включая сам переход), т.е. найти $\mathbb{E}T_a$, где

$$T_a = \min\{t \mid K(t-a) = K(t)\}$$

Решение:

Пусть $K(t) \sim \text{ПП}(\lambda)$ — процесс, соответствующий машинам. Пусть $\xi \sim \text{Exp}(\lambda)$ — время приезда первой машины. Тогда

$$\mathbb{E}T_a = \Big/ \begin{array}{c}\text{формула полного}\\ \text{матожидания}\end{array} \Big/ = \int\limits_0^{+\infty} \mathbb{E}\big[T_a \mid \xi_1 = x\big] f_\xi(x)dx = \Big/ K(t+x) - \underbrace{K(x)}_{1} \overset{d}{=} K(t) \Big/$$

$$= \int\limits_0^a \big(x + \mathbb{E}T_a\big)\lambda e^{-\lambda x}dx + \int\limits_a^{+\infty} a\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1 - e^{-a\lambda}(a\lambda + 1)}{\lambda} + \mathbb{E}T_a(1 - e^{-a\lambda}) + ae^{-\lambda a} =$$

$$= \mathbb{E}T_a - e^{-a\lambda}\mathbb{E}T_a + \frac{1 - e^{-a\lambda}}{\lambda}$$

Отсюда получаем

$$\mathbb{E}T_a = \frac{e^{a\lambda} - 1}{\lambda}$$

Задача 6.2

Пусть $X(t),\ t \geq 0$ — такой гауссовский процесс, что

$$m_X(t) \equiv m = \text{const}, \qquad t \geq 0$$

$$R_X(t,s) = \frac{1}{1 + (t-s)^2}, \qquad t, s \geq 0$$

(a) Найти с.к.-производную $X'(t)$.

(b) Найти распределение случайного вектора $\begin{bmatrix} X(0) \\ X'(0) \end{bmatrix}$.

Решение:

(a) Ковариационная функция $X(t)$:

$$K_X(t,s) = R_X(t,s) + m_X(t)m_X(s) = \frac{1}{1+(t-s)^2} + m^2$$

является дважды непрерывно дифференцируемой, значит, по критерию с.к.-дифференцируемости, процесс $X(t)$ дифференцируем в среднем квадратичном.

Покажем, что $X'(t)$ — тоже гауссовский процесс. Для этого покажем, что любой его конечномерное распределение является нормальным. Для простоты покажем это только для случая $n = 2$. Рассмотрим

$$\eta(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \frac{X(t_1+\varepsilon) - X(t_1)}{\varepsilon} \\ \frac{X(t_2+\varepsilon) - X(t_2)}{\varepsilon} \end{bmatrix}, \qquad \eta = \begin{bmatrix} X'(t_1) \\ X'(t_2) \end{bmatrix}, \qquad \eta(\varepsilon) \xrightarrow{L_2} \eta$$

Требуется показать, что η — нормальный случайный вектор. Мы знаем, что $\eta(\varepsilon)$ — нормальный как линейное преобразование нормального случайного вектора ξ (конечномерного сечения гауссовского процесса):

$$\eta(\varepsilon) = A\xi, \qquad A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix}, \qquad \xi = \begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_1+\varepsilon) \\ X(t_2) \\ X(t_2+\varepsilon) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\big(\mu, R\big)$$

$$\mu = \begin{bmatrix} m \\ m \\ m \\ m \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1+\varepsilon^2} & R_X(t_1,t_2) & R_X(t_1,t_2+\varepsilon) \\ \frac{1}{1+\varepsilon^2} & 1 & R_X(t_1+\varepsilon,t_2) & R_X(t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon) \\ R_X(t_1,t_2) & R_X(t_1+\varepsilon,t_2) & 1 & \frac{1}{1+\varepsilon^2} \\ R_X(t_1,t_2+\varepsilon) & R_X(t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon) & \frac{1}{1+\varepsilon^2} & 1 \end{bmatrix}$$

Тогда распределение $\eta(\varepsilon)$ имеет вид $\eta(\varepsilon) \sim \mathcal{N}\big(A\mu, ARA^T\big) = \mathcal{N}\big(0, \widetilde{R}(\varepsilon)\big)$, где

$$\widetilde{R}(\varepsilon) = ARA^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{1+\varepsilon^2} & \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{R_X(t_1+\varepsilon,t_2+\varepsilon)-R_X(t_1+\varepsilon,t_2)}{\varepsilon} - \frac{R_X(t_1,t_2+\varepsilon)-R_X(t_1,t_2)}{\varepsilon}\right) \\ \text{симметрично...} & \frac{2}{1+\varepsilon^2} \end{bmatrix}$$

Так как $\eta(\varepsilon) \xrightarrow{L_2} \eta$, то $\eta(\varepsilon) \xrightarrow{d} \eta$, что эквивалентно поточечной сходимости характеристической функции. Найдем характеристическую функцию η как поточечный предел $\varphi_{\eta(\varepsilon)}(s)$ при $\varepsilon \to 0$:

$$\varphi_{\eta(\varepsilon)}(s) = \exp\left(-\frac{1}{2}s^T\widetilde{R}(\varepsilon)s\right) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \exp\left(-\frac{1}{2}s^T\widetilde{R}s\right), \forall s \in \mathbb{R}^2,$$

$$\widetilde{R}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \widetilde{R} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2} \\ \frac{\partial^2 R_X(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2} & 2 \end{bmatrix}$$

Значит, η имеет нормальное распределение с нулевым средним и корреляционной матрицей $\widetilde{R}$.

Итак, $X'(t)$ — гауссовский процесс с параметрами

$$m_{X'}(t) = \frac{d}{dt}m_X(t) = 0, \qquad R_{X'}(t,s) = \frac{\partial^2 R_X(t,s)}{\partial t\,\partial s} = \frac{2-6(t-s)^2}{\big(1+(t-s)^2\big)^3}$$

(b) Аналогично, обозначим

$$\eta(\varepsilon) = \begin{bmatrix} X(0) \\ \frac{X(\varepsilon)-X(0)}{\varepsilon} \end{bmatrix}, \qquad \eta = \begin{bmatrix} X(0) \\ X'(0) \end{bmatrix}, \qquad \eta(\varepsilon) \xrightarrow{L_2} \eta$$

Заметим, что $\eta(\varepsilon)$ — линейное преобразование нормального вектора:

$$\eta(\varepsilon) = A\xi, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{\varepsilon} & \frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix}, \qquad \xi = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(\varepsilon) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{1+\varepsilon^2} \\ \frac{1}{1+\varepsilon^2} & 1 \end{bmatrix}\right)$$

Тогда $\eta(\varepsilon)$ — нормальный вектор, параметры которого после вычислений получаются равными

$$\eta(\varepsilon) \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} \\ -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2} & \frac{2}{1+\varepsilon^2} \end{bmatrix}\right)$$

Так как $\eta(\varepsilon) \xrightarrow{L_2} \eta$, то $\eta(\varepsilon) \xrightarrow{d} \eta$, что эквивалентно поточечной сходимости характеристической функции. Легко видеть, что ковариационная матрица $\eta(\varepsilon)$ сходится к матрице $\mathrm{diag}(1,2)$ при $\varepsilon \to 0$, поэтому характеристическая функция $\varphi_{\eta(\varepsilon)}(s)$ будет поточечно сходиться к характеристической функции нормального распределения $\varphi_\eta(s)$.

Итак,

$$\eta = \begin{bmatrix} X(0) \\ X'(0) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)$$

Задача 6.3

Пусть процесс $X(t),\ t \geq 0$ дифференцируем и интегрируем в среднем квадратичном, $m_X(t)$ — его матожидание, а $R_X(t,s)$ — его корреляционная функция. Вычислить взаимную корреляцию процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$, где

$$\xi(t) = \int\limits_0^t X(s)ds, \qquad \eta(t) = X'(t)$$

Решение:

Несложно показать, используя непрерывность матожидания и скалярного произведения в L_2 относительно с.к.-сходимости, что

$$m_\xi(t) = \int\limits_0^t m_X(s)ds, \qquad m_\eta(t) = \frac{d}{dt}m_X(t)$$

Тогда взаимная корреляция

$$\begin{aligned}
R_{\xi,\eta}(t,s) &= \mathbb{E}\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\eta}(s) = \mathbb{E}\xi(t)\eta(s) - \mathbb{E}\xi(t)\cdot\mathbb{E}\eta(s) = \mathbb{E}\xi(t)\eta(s) - m_\xi(t)m_\eta(s) = \\
&= \mathbb{E}\left[\underset{\varepsilon\to 0}{\text{l.i.m.}}\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon}\cdot \underset{\substack{0<\tau_0<\tau_1<\ldots<t_n=s \\ \max|\Delta\tau_i|\to 0 \\ \tau_i'\in[\tau_i,\tau_{i+1})}}{\text{l.i.m.}}\sum_{i=1}^n X(\tau_i')\Delta\tau_i\right] - m_\xi(t)m_\eta(s) = \\
&= \lim_{\text{все 4 условия}} \mathbb{E}\left[\frac{X(t+\varepsilon)-X(t)}{\varepsilon}\cdot\sum_{i=1}^n X(\tau_i')\Delta\tau_i\right] = \\
&= \lim_{\text{3 условия}}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{E}X(t+\varepsilon)X(\tau_i') - \mathbb{E}X(t)X(\tau_i')}{\varepsilon} = \lim_{\text{3 условия}}\sum_{i=1}^n\frac{\partial R_X(t,\tau_i')}{\partial t} = \\
&= \int\limits_0^s \frac{\partial R_X(t,\tau)}{\partial t}d\tau
\end{aligned}$$

Задача 7.1

Пусть $\varphi_i(t),\ i=\overline{1,n}$ — любые неслучайные действительные функции, $a_i > 0,\ i=\overline{1,n}$. Может ли функция

$$R(t_1,t_2) = \sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2)$$

быть корреляционной функцией некоторого случайного процесса?

Решение: (двумя способами)

(a) Покажем, что $R(t_1,t_2)$ неотрицательно определена. Класс неотрицательно определенных функций двух переменных совпадает с классом корреляционных функций процессов второго порядка. Тогда получим, что $R(t_1,t_2)$ является корреляционной функцией некоторого случайного процесса второго порядка.

Покажем это для случая $n=1,\ a_1=1$. Отсюда будет сразу же следовать общий случай. Итак, исследуем

$$R(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\varphi(t_2)$$

на неотрицательную определенность. Для любых $n\in\mathbb{N}$, любых $t_1,\ldots,t_n$ и любых $z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{C}$:

$$\sum_{i,j=1}^n z_i\overline{z_j}\varphi(t_i)\varphi(t_j) = \begin{bmatrix}\varphi(t_1) & \cdots & \varphi(t_n)\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} z_1\overline{z_1} & \ldots & z_1\overline{z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{z_1}z_n & \ldots & z_n\overline{z_n}\end{bmatrix}}_{Z}\begin{bmatrix}\varphi(t_1)\\ \vdots \\ \varphi(t_n)\end{bmatrix}$$

Достаточно показать, что матрица Z является неотрицательно определенной.

Заметим, что

$$Z = zz^*, \qquad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}, \qquad z^* = \begin{bmatrix} \overline{z_1} & \cdots & \overline{z_n} \end{bmatrix}$$

Тогда для любого вектора $t \in \mathbb{C}^n$:

$$t^* Z t = t^* z z^* t = (z^* t)^* (z^* t) = |z^* t|^2 \geq 0,$$

что и означает неотрицательную определенность матрицы Z.

(b) Рассмотрим независимые случайные величины $\xi_i \sim \mathcal{N}(0, a_i)$ и построим случайный процесс

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i(t)$$

Найдем его корреляционную функцию.

$$\begin{aligned} R_X(t_1, t_2) &= \mathbb{E}X(t_1)X(t_2) - \mathbb{E}X(t_1)\mathbb{E}X(t_2) = \mathbb{E}X(t_1)X(t_2) = \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i(t_1) \cdot \sum_{j=1}^{n} \xi_j \varphi_j(t_2)\right] = \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_i(t_1)\varphi_j(t_2)\mathbb{E}\big[\xi_i \xi_j\big] = \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2) = R(t_1, t_2) \end{aligned}$$

Задача 7.2

Пусть $X(t)$ — с.к.-дифференцируемый случайный процесс. Вычислить $\mathbb{E}X(t)X'(t)$.

Решение:

Используем непрерывность матожидания и скалярного произведения относительно сходимости в L_2.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X(t)X'(t) &= \mathbb{E}\left[X(t) \cdot \underset{\varepsilon\to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{X(t+\varepsilon) - X(t)}{\varepsilon}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{E}\left[\frac{X(t)X(t+\varepsilon) - X(t)X(t)}{\varepsilon}\right] = \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{K_X(t+\varepsilon, t) - K(t,t)}{\varepsilon} = \frac{\partial K_X}{\partial t_1}(t,t), \end{aligned}$$

где $K_X(t_1, t_2)$ — ковариационная функция процесса $X(t)$.

В частности, если $X(t)$ — стационарный процесс, то K_X и R_X отличаются на константу, поэтому

$$\mathbb{E}X(t)X'(t) = \frac{\partial K_X}{\partial t_1}(t,t) = \frac{\partial R_X}{\partial t_1}(t,t) = R_X'(0) = 0$$

Последнее равенство следует из того, что $R_X(t) \leq R_X(0)$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

Задача 7.3 (теорема Кампбелла)

Рассматриваются флуктуации электрического тока, возникающие из-за случайных времен попадания электронов. Пусть поток электронов образует пуассоновский процесс с интенсивностью λ (который начался бесконечно давно), и каждый попавший электрон возбуждает ток, сила которого через x единиц времени равна $I(x)$. Тогда сила тока в момент времени t описывается случайным процессом

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} I(t - T_k),$$

где $T_k < t$ — времена попадания электронов на анод (то есть $T_k - T_{k-1} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$).

Качественно доказать, что

$$\mathbb{E}X(t) = \lambda \int\limits_0^{+\infty} I(x)dx, \qquad \mathbb{V}X(t) = \lambda \int\limits_0^{+\infty} I^2(x)dx$$

Решение:

Электроны, создающие ток в момент t, могли прийти в любое время из интервала $(-\infty, t]$. Рассмотрим приближение этого тока, создаваемое электронами из конечного интервала.

Рассмотрим n подинтервалов длины $h = \frac{1}{\sqrt{n}}$, вместе они образуют наш конечный приближающий интервал $(t - \sqrt{n}, t]$. Пусть n достаточно большое и $h \gg \frac{1}{\lambda}$ — характерное время между двумя электронами. Тогда в подинтервал времени длины h будет с вероятностью, близкой к единице, приходить либо 0 электронов, либо 1 электрон, причем

$$\mathbb{P}\{1 \text{ электрон}\} = \int\limits_0^h \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda h} \approx \lambda h$$

Тогда приближенный вклад k-го подинтервала из n штук — это случайная величина

$$\xi_{k,n} = \begin{cases} 0 & \text{, с вероятностью } 1 - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}, \\ I(t - t_k) & \text{, с вероятностью } \frac{\lambda}{\sqrt{n}}, \end{cases} \qquad k = \overline{1, n}$$

где $t_k = t - \frac{k}{\sqrt{n}}$ — одна из границ этих подинтервалов. Кроме того, $\xi_{k,n}$ независимы в совокупности при фиксированном n.

Обозначим $S_n = \sum\limits_{k=1}^n \xi_{k,n}$ — приближение $X(t)$. Покажем, что $S_n \xrightarrow{d} X(t)$. Для этого рассмотрим характеристическую функцию S_n:

$$\varphi_{S_n}(s) = \prod_{k=1}^n \varphi_{k,n}(s) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln \varphi_{k,n}(s)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln\left[1 - \frac{\lambda}{\sqrt{n}} + e^{isI(t-t_k)}\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right]\right) =$$
$$= \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln\left[1 + \underbrace{\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\left(e^{isI\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)} - 1\right)}_{\to 0 \text{ при } n\to\infty}\right]\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\left(e^{isI\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)} - 1\right) + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \xrightarrow{n\to\infty}$$
$$\xrightarrow{n\to\infty} \exp\left\{\lambda \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{isI(x)} - 1\right)dx\right\} = \varphi(s)$$

Осталось показать, что $\varphi(s)$ является характеристической функцией $X(t)$. Сделаем этого только для частного случая, когда $I(x)$ — простая финитная функция:

$$I(x) = I_j, \quad x \in A_j, \qquad j = \overline{1, m}$$

Пусть случайные величины N_j - числа электронов, прилетевших в моменты τ такие, что $t - \tau \in A_j$. Тогда $N_j \sim \mathrm{Poiss}(\lambda|A_j|)$, согласно свойству пуассоновского процесса, где $|A_j|$ — мера множества A_j. Кроме того, все N_j независимы в совокупности. Тогда

$$\varphi_X(s) = \mathbb{E}\left[e^{is\sum_{j=1}^m I_j N_j}\right] = \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^m e^{isI_jN_j}\right] = \prod_{j=1}^m \mathbb{E}\left[e^{isI_jN_j}\right] = \prod_{j=1}^m \varphi_{N_j}(sI_j) =$$
$$= \prod_{j=1}^m \exp\left(\lambda|A_j|(e^{isI_j} - 1)\right) = \exp\left(\lambda \sum_{j=1}^m \left(e^{isI_j} - 1\right) \cdot |A_j|\right) =$$
$$= \exp\left(\lambda \int\limits_0^{+\infty} \left(e^{isI(x)} - 1\right)dx\right) = \varphi(s)$$

На самом деле, приближение $X(t)$ последовательностью было не нужно, но это позволяет более качественно понять доказываемый результат.

Оказывается, что такой результат верен и для более сложных функций $I(x)$, для которых интеграл в $\varphi(x)$ сходится (без доказательства).

Тогда матожидание и дисперсию $X(t)$ легко найти дифференцированием характеристической функции:

$$\mathbb{E}X(t) = -i\,\varphi'(0) = \lambda \int\limits_0^{+\infty} I(x)dx$$

$$\mathbb{V}X(t) = \mathbb{E}X^2(t) - \big(\mathbb{E}X(t)\big)^2 = \lambda \int\limits_0^{+\infty} I^2(x)dx$$

Задача 7.4

(a) Может ли функция

$$R(\tau) = \begin{cases} A, & |\tau| < a \\ 0, & |\tau| \geq 0 \end{cases}$$

быть корреляционной функцией некоторого стационарного процесса?

(b) Изменится ли ответ, если $R(\tau)$ сгладить?

Решение:

(a) Допустим, что может. Тогда из непрерывности $R(\tau)$ в $\tau = 0$ следует ее непрерывность всюду, что в нашем случае неверно. Противоречие.

(b) Допустим, что может, и пусть $X(t)$ — соответствующий процесс. $R_X(\tau)$ непрерывна, а матожидание $X(t)$ постоянно, поэтому $X(t)$ с.к.-непрерывен.

По теореме Бохнера-Хинчина о спектральном представлении, $R_X(\tau)$ представима в виде

$$R(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\nu\tau} dS(\nu), \qquad S(\nu) = \mathbb{E}|\xi|^2 \cdot \mathbb{P}\{\Omega < \nu\}$$

для некоторых случайных величин ξ и Ω.

Кроме того, $R_X(\tau)$ абсолютно интегрируема, так как финитна, поэтому, по теореме о существовании спектральной плотности (или существовании интеграла Фурье), существует спектральная плотность $\rho(\nu) \geq 0$, где

$$R_X(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{is\nu} \rho(\nu) d\nu, \qquad \rho(\nu) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\nu} R_X(t) dt$$

В нашем случае сглаживание несильно меняет интеграл, поэтому

$$\rho(\nu) \approx \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-a}^{a} e^{-it\nu} A dt = \frac{A}{\pi} \int\limits_0^a \cos(\nu t) dt = \frac{A \sin(a\nu)}{\pi\nu}$$

Спектральная плотность всегда является неотрицательной функцией, а получившаяся функция — знакопеременная. Противоречие.

Задача 8.1

Исследовать процесс

$$X(k) = \begin{cases} \xi_1, & k \text{ четно} \\ \xi_2, & k \text{ нечетно} \end{cases}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

где случайные величины $\xi_1 = \begin{cases} +1, & \text{с вер. } 1/2 \\ -1, & \text{с вер. } 1/2 \end{cases}$ и $\xi_2 \sim \mathcal{N}(0,1)$ независимы на стационарность

(a) в широком смысле;

(b) в узком смысле.

Решение:

(a) Матожидание постоянно:

$$\mathbb{E}X(2m) = \mathbb{E}\xi_1 = 0, \qquad \mathbb{E}X(2m-1) = \mathbb{E}\xi_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{E}X(t) \equiv 0$$

Корреляционная функция не зависит даже от разницы $k_2 - k_1$:

$$R_X(2m, 2n) = \mathbb{E}\xi_1^2 = 1, \qquad R_X(2m-1, 2n-1) = \mathbb{E}\xi_2^2 = 1$$

$$R_X(2m-1, 2n) = R_X(2m, 2n-1) = \mathbb{E}\xi_1\mathbb{E}\xi_2 = 0$$

Поэтому $X(t)$ **стационарен в широком смысле**.

(b) $X(t)$ **не стационарен в узком смысле**, потому что его одномерное сечение зависит от времени:

$$X(0) = \xi_1 \overset{d}{\neq} \xi_2 = X(1)$$

Задача 8.2

Наблюдается только одна длинная реализация сложного пуасоновского процесса

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{K(t)} V_i, \qquad K(t) \sim \Pi\Pi(\lambda), \qquad V_i \sim \mathcal{U}[0, a]$$

Число a известно, а λ — нет. Предложить оценку параметра λ.

Решение: (два способа)

1. Так же, как и с обычным пуассоновским процессом, мы можем определить точки приращения:

$$S_0 = 0, \qquad S_k = \inf\big\{t > S_{k-1} \bigm| Q(t) > Q(S_{k-1})\big\}$$

   Тогда $\xi_k = S_k - S_{k-1} \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$. Зная одну длинную реализацию, мы можем получить большое количество N реализаций x_k независимых с.в. $\xi_k \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$. Так как $\mathbb{E}\xi_k = \frac{1}{\lambda}$, то

$$\sum_{k=1}^{N} x_k \approx \frac{1}{\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda \approx \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^{-1}$$

2. Заметим, что длинная траектория процесса издалека похожа на прямую: через похожие промежутки времени происходят похожие приращения. Поэтому рассмотрим процесс

$$X(t) = \frac{Q(t)}{t}, \qquad t \geq 1$$

   Его корреляционная функция:

$$R_X(t,s) = \frac{R_Q(t,s)}{ts} = \frac{\lambda \mathbb{E}V_1^2 \min(t,s)}{ts} = \frac{\lambda a^2}{3} \frac{1}{\max(t,s)}$$

Его матожидание:

$$m_X(t) = \frac{m_Q(t)}{t} = \lambda \mathbb{E} V_1 = \frac{\lambda a}{2} = m_X$$

Покажем, что процесс $X(t)$ эргодичен по матожиданию. Воспользуемся критерием эргодичности:

$$\frac{1}{(T-1)^2}\int\limits_1^T\int\limits_1^T R_X(t,s)dtds = \frac{\lambda a^2}{3}\frac{1}{(T-1)^2}\int\limits_1^T\int\limits_1^T \frac{1}{\max(t,s)}dtds \leq$$

$$\leq \frac{\lambda a^2}{3}\frac{1}{(T-1)^2}\int\limits_1^T\int\limits_1^T \frac{1}{t}dtds = \frac{\lambda a^2}{3}\frac{1}{T-1}\ln T \xrightarrow{T\to\infty} 0$$

Значит, $X(t)$ эргодичен по матожиданию, то есть

$$\frac{1}{T-1}\int\limits_1^T X(t)dt \xrightarrow{L_2} m_X = \frac{\lambda a}{2}$$

Отсюда следует, что можно сделать приближение

$$\frac{\lambda a}{2} \approx \frac{1}{T-1}\int\limits_1^T X(t)dt = \frac{1}{T-1}\int\limits_1^T \frac{Q(t)}{t}\,dt$$

Итак, оценка параметра

$$\lambda \approx \frac{2}{a}\frac{1}{T-1}\int\limits_1^T \frac{Q(t)}{t}\,dt,$$

где $Q(t)$ — наблюдаемый сигнал.

Оценки двух способов:

1. Сравним оба способа. Рассмотрим случай $\lambda = 0.5,\ a = 2$, дана траектория процесса до $T = 100$.

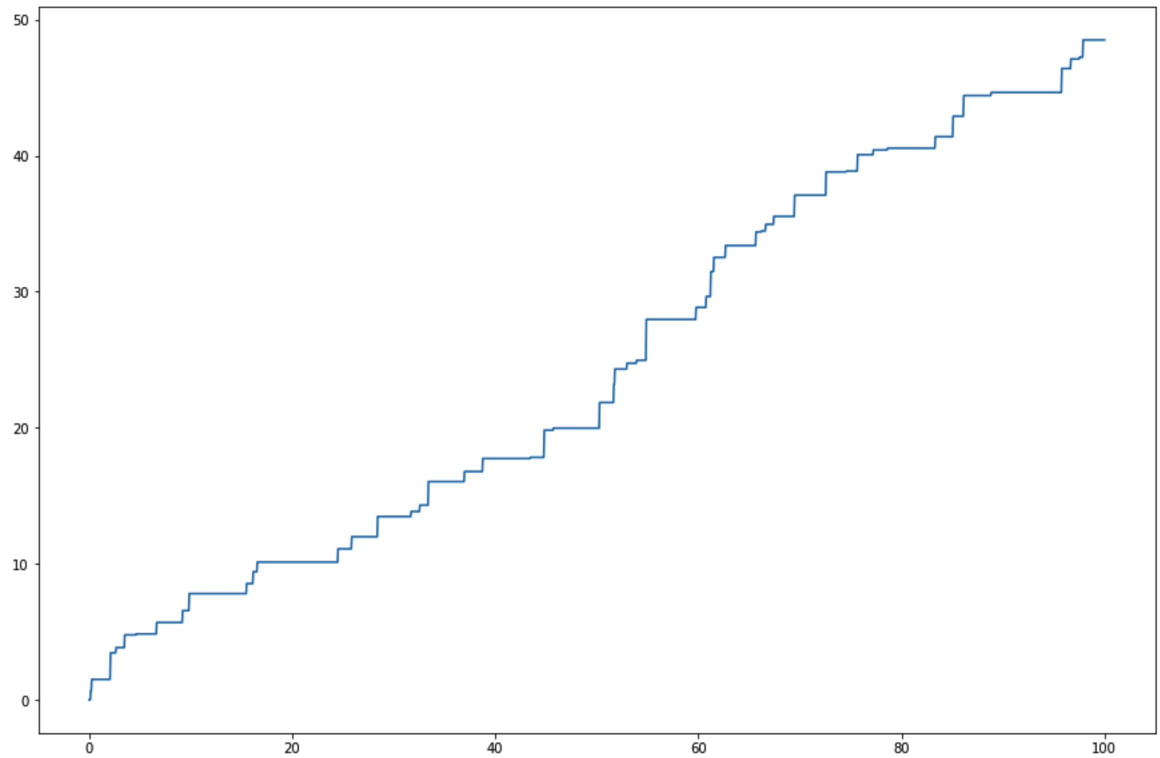

Рис. 1: Траектория процесса $Q(t)$

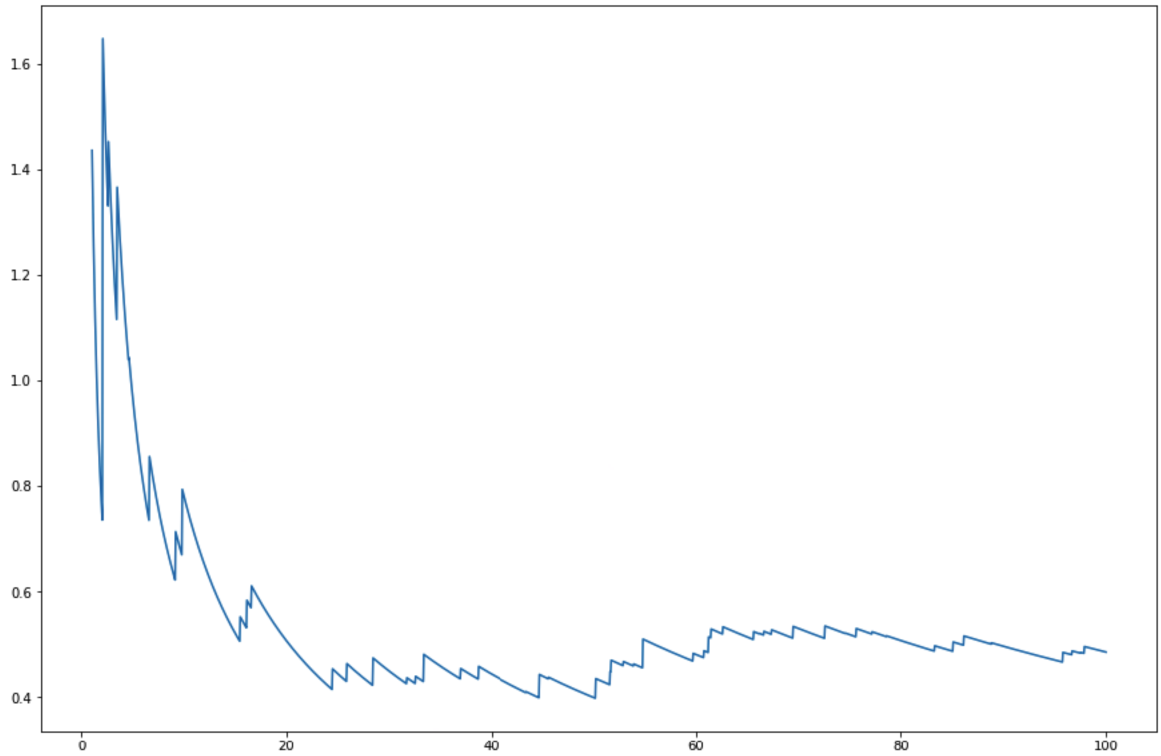

Рис. 2: Траектория процесса $X(t) = \frac{Q(t)}{t}$

Вычисление параметров обоими способами дало

$$\lambda_1 \approx 0.552, \qquad \lambda_2 \approx 0.531$$

На другой траектории случайного процесса с теми же параметрами, но уже до $T = 1000$ параметры получились

$$\lambda_1 \approx 0.489, \qquad \lambda_2 \approx 0.481$$

На остальных тестах оба способа давали примерно одинаковые результаты.

2. Получим теоретические оценки этих двух способов.
В первом случае мы вычисляем случайную величину

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{K(T)} \sum_{i=1}^{K(T)} \xi_i \right)^{-1},$$

а во втором

$$\lambda_2 = \frac{2}{a} \frac{1}{T-1} \int\limits_1^T \frac{Q(t)}{t}\, dt,$$

где интеграл от случайного процесса $Q(t)$ понимается в смысле среднего квадратичного.

Для второго способа легко видеть, что

$$\mathbb{E}\lambda_2 = \frac{2}{a} \frac{1}{T-1} \int\limits_1^T \frac{m_Q(t)}{t}\, dt = \frac{2}{a} \frac{1}{T-1} \int\limits_1^T \frac{\lambda a}{2}\, dt = \lambda$$

$$\mathbb{V}\lambda_2 = \frac{4}{a^2(T-1)^2}\,\mathbb{V}\int\limits_1^T \frac{Q(t)}{t}dt = \frac{4}{a^2(T-1)^2}\int\limits_1^T\int\limits_1^T \frac{R_Q(t,s)}{ts}dtds =$$

$$= \frac{4\lambda}{3(T-1)^2}\int\limits_1^T\int\limits_1^T \frac{1}{\max(t,s)}dtds = \frac{8\lambda}{3}\,\frac{T-1-\ln T}{(T-1)^2}$$

Заметим, что из эргодичности $\frac{Q(t)}{t}$ по матожиданию следует, что $\mathbb{V}\xi_2 \to 0$ при длине траектории $T \to \infty$.

Попробуем найти $\mathbb{E}\lambda_1$. По формуле полного матожидания:

$$\mathbb{E}\lambda_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right)^{-1}\,\middle|\,K(t)=n\right]\cdot\mathbb{P}\big\{K(t)=n\big\} = \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\mathbb{E}\left[\frac{n}{S_n}\,\middle|\,K(t)=n\right]}_{J_n}\cdot\mathbb{P}\big\{K(t)=n\big\}$$

Одним из свойств пуассоновского процесса является то, что условное распределение

$$(S_1,\ldots,S_n)\;\big|\;K(t)=n$$

совпадает с распределением вектора $(u_{(1)},\ldots,u_{(n)})$, где $u_i \sim \mathcal{U}[0,t]$ — i.i.d., а случайные величины $u_{(k)}$ — их порядковые статистики:

$$u_{(1)} = \min_{1\le i\le n} u_i,\quad \ldots,\quad u_{(n)} = \max_{1\le i\le n} u_i$$

Тогда

$$J_n = \mathbb{E}\frac{n}{u_{(n)}} = n\int\limits_0^t \frac{1}{x}f_{u_{(n)}}(x)dx$$

Найдем плотность $f_{u_{(n)}}(x)$. Функция распределения $u_{(n)}$ при $0\le x\le t$:

$$F_{u_{(n)}}(x) = \mathbb{P}\big\{u_{(n)}<x\big\} = \mathbb{P}\left\{\max_{1\le i\le n} u_i < n\right\} = \mathbb{P}\big\{u_1<x,\ldots,u_n<x\big\} = \Big/\text{независимость } u_i\Big/ =$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\mathbb{P}\{u_i<x\} = \left(\frac{x}{t}\right)^n$$

$$\Longrightarrow\qquad f_{u_{(n)}}(x) = \begin{cases}\frac{n}{t}\left(\frac{x}{t}\right)^{n-1} & ,\ 0\le x\le t\\ 0 & ,\ \text{иначе}\end{cases}$$

Тогда при $n\ge 2$:

$$J_n = n\int\limits_0^t \frac{1}{x}\frac{n}{t}\left(\frac{x}{t}\right)^{n-1}dx = \frac{n^2}{t^n}\int\limits_0^t x^{n-2}dx = \frac{n^2}{n-1}\frac{1}{t}$$

Но при $n=1$:

$$J_1 = \int\limits_0^t \frac{dx}{xt} = +\infty$$

Поэтому матожидания λ_1 не существует: $\mathbb{E}\lambda_1 = \infty$.