Случайные процессы. ДЗ 1.

Прохоров Юрий, 776

Задача 1

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые с.в., $X_i \sim \mathrm{Be}(p)$. Найти конечномерные распределения случайного процесса $X(t) = X_t$, где $t \in \mathbb{N}$, то есть вычислить вероятности $\mathbb{P}\{X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n\}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$.

Решение:

Пусть $n \in \mathbb{N}$, и $I = \{i \mid x_i = 1\},\ J = \{j \mid x_j = 0\}$. Тогда для любых $t_i \in \mathbb{N}$ искомая вероятность

$$\mathbb{P}\{X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n\} = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{i \in I}\{X_{t_i} = 1\} \ \cup \bigcap_{j \in J}\{X_{t_j} = 0\}\right\} = p^{|I|}(1-p)^{|J|}$$

Можно записать в виде

$$\mathbb{P}\{X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_n} = x_n\} = p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k = x_1 + \ldots + x_n$$

Процесс, рассматриваемый в данной задаче, отличается от процесса $Y(t) = \xi,\ t \in \mathbb{N},\ \xi \sim \mathrm{Be}(p)$. Несмотря на то что в любой момент времени у них одинаковые сечения, траектории этих процессов различны:

- траекториями процесса $Y(t)$ являются только две стационарные последовательности $Y(t) \equiv 1$ и $Y(t) \equiv 0$;
- траекториями процесса $X(t)$ являются всевозможные последовательности нулей и единиц.

Задача 2

Для случайного процесса $X(t) = c + t\xi,\ t \geq 0,\ c = \mathrm{const}$, где

$$\xi = \begin{cases} +1, & \text{с вер. } \frac{1}{2} \\ -1, & \text{с вер. } \frac{1}{2} \end{cases}$$

найти конечномерные распределения.

Решение:

Пусть $t_1, \ldots, t_n \geq 0$. В момент $t_i > 0$ процесс может принимать два равновероятных значения $c - t_i$ и $c + t_i$. Разные сечения этого процесса не являются независимыми случайными величинами.

Запишем произвольную конечномерную функцию распределения:

$$F(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{P}\big\{X(t_1) < x_1, \ldots, X(t_n) < x_n\big\} = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n}\{c + t_i\xi < x_i\}\right\} = (*)$$

Если какое-то $t_i = 0$, то соответствующее событие достоверно при $x_i > c$ и невозможно при $x_i \leq c$. Будет обозначать, что $I = \{i \mid t_i > 0\}$ и $J = \{1, \ldots, n\} \setminus I$. Обозначим через $\mathbb{I}$ индикаторную функцию предиката, т.е. $\mathbb{I}\{c < x\} = \begin{cases} 1, & x > c \\ 0, & x \leq c \end{cases}$. Тогда $(*)$ записывается в виде

$$(*) = \prod_{j \in J}\mathbb{I}\{c < x_j\} \cdot \mathbb{P}\left\{\bigcap_{i \in I}\left\{\xi < \frac{x_i - c}{t_i}\right\}\right\} = \prod_{j \in J}\mathbb{I}\{c < x_j\} \cdot \mathbb{P}\Big\{\xi < \underbrace{\min_{i \in I}\frac{x_i - c}{t_i}}_{A}\Big\} =$$

$$= \prod_{t_j = 0}\mathbb{I}\{c < x_j\} \cdot \mathbb{P}\{\xi < A\} = (*)$$

$$(*) = \begin{cases} 0, & \text{хотя бы одно } x_j \leq c, \text{где } j \in J, \\ 0, & A \leq -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 < A \leq 1, \\ 1, & A > 1. \end{cases} \qquad\qquad A = \min_{t_i > 0} \frac{x_i - c}{t_i}$$

В последних трех случаях считается, что не выполнено условие первого случая.

Задача 3

Даны два случайный процесса:

$$X(t) \equiv 0, \qquad t \in [0,1]$$
$$Y(t) = \mathbb{I}\{w = t\}, \quad w \sim \mathcal{U}[0,1], \quad t \in [0,1]$$

(a) Показать, что процессы $X(t)$ и $Y(t)$ эквивалентны, т.е.

$$\mathbb{P}\big\{X(t) = Y(t)\big\} = 1 \qquad \forall t \in [0,1]$$

(b) Показать, что с вероятностью 1 траектории процессов $X(t)$ и $Y(t)$ различны, т.е.

$$\mathbb{P}\big\{X(t) = Y(t) \quad \forall t \in [0,1]\big\} = 0$$

(c) Доказать, что семейства конечномерных распределений эквивалентных процессов совпадают.

Решение:

(a) Вычислим искомую вероятность:

$$\mathbb{P}\{X(t) = Y(t)\} = \mathbb{P}\big\{\mathbb{I}\{w = t\} = 0\big\} = \mathbb{P}\{w \neq t\} = 1$$

Значит, процессы X и Y эквивалентны.

(b) Вычислим исходную вероятность:

$$\mathbb{P}\big\{X(t) = Y(t) \ \ \forall t\big\} = \mathbb{P}\{w \neq t \quad \forall t \in [0,1]\} = 0$$

Последняя вероятность равна 0, потому что $w \in [0,1]$.

(c) Пусть эквивалентные процессы $X(t)$ и $Y(t)$, $t \in T$, определены на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Вычислим произвольную конечномерную функцию распределения X:

$$F_X(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n) = \mathbb{P}\big\{X(t_1) < x_1, \ldots, X(t_n) < x_n\big\} = (*)$$

В силу эквивалентности X и Y последняя вероятность равна такой для процесса Y:

$$(*) = \mathbb{P}\big\{Y(t_1) < x_1, \ldots, Y(t_n) < x_n\big\} = F_Y(x_1, \ldots, x_n; t_1, \ldots, t_n)$$

Данное равенство означает, что для любой конечномерной функции распределения X есть тождественная ей конечномерная функция распределения Y. Обратное тоже верно. Значит, семейства конечномерных распределений совпадают.