Функан. ДЗ 6.

Прохоров Юрий, 776

---

1. Линейные операторы

Опр. Пусть X и Y — линейные пространства. Линейное отображение $A : X \to Y$ называется *линейным оператором.*

Опр. Пусть X, Y — ЛП, $A : X \to Y$ — линейный оператор. *Ядром* оператора A называется

$$\mathrm{Ker}A = \left\{x \in X \;\middle|\; Ax = 0\right\}$$

Опр. Пусть X, Y — ЛП, $A : X \to Y$ — линейный оператор. *Образом* или *множеством значений* оператора A называется

$$\mathrm{Im}A = \left\{Ax \;\middle|\; x \in X\right\}$$

$\mathrm{Ker}A$ — подпространство X, $\mathrm{Im}A$ — подпространство Y.

Опр. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *ограниченным*, если образ $A(S) \subset Y$ любого ограниченного в X множества $S \subset X$ ограничен в Y.

Опр. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП. *Нормой линейного оператора* $A : X \to Y$ называется

$$\|A\| = \inf\left\{L > 0 \;\middle|\; \|Ax\|_Y \le L\|x\|_X \quad \forall x \in X\right\}$$

Утв. 1.1 Эквивалентные определения операторной нормы:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \|Ax\|_Y = \sup_{x \ne 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y$$

Утв. 1.2 Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП, $A : X \to Y$ — линейный оператор. Тогда следующие свойства эквивалентны:

(1) оператор A непрерывен на X;

(2) оператор A непрерывен в $x = 0$;

(3) оператор A ограничен;

(4) образ единичного шара $B_1^X(0) \subset X$ ограничен в Y;

(5) норма оператора A конечна: $\|A\| < +\infty$.

Утв. 1.3 Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП, $A : X \to Y$ — линейный оператор. Тогда

- если $\dim X < +\infty$, то $\|A\| < +\infty$;
- если $\dim \mathrm{Im}A < +\infty$ и $\mathrm{Ker}A$ замкнуто, то $\|A\| < +\infty$.

Опр. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП. Обозначим

- $L(X, Y)$ — множество линейных ограниченных операторов $X \to Y$;
- $L(X)$ — множество линейных ограниченных операторов $X \to X$.

Утв. 1.4 Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП. Тогда множество $L(X, Y)$ с операторной нормой $\|\cdot\|$ является линейным нормированным пространством.

Утв. 1.5 Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП. Тогда

- если Y — банахово пространство, то $L(X,Y)$ — банахово;
- если Y — не банахово и $X \neq \{0\}$, то $L(X,Y)$ — не банахово.

Опр. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — ЛНП. Множество $L(X,\mathbb{C})$ называется *сопряженным пространством* (к пространству X) и обозначается X^*.

Опр. Элемент пространства X^* называется *линейным (непрерывным) функционалом.*

Опр. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП. Последовательность линейных операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(X,Y)$ называется

- *поточечно ограниченной*, если $\forall x \in X \ \rightarrow \ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n x\|_Y < +\infty$;
- *ограниченной* в $L(X,Y)$, если $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < +\infty$;
- *поточечно сходящейся*, если $\forall x \in X$ последовательность $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в Y;
- *поточечно фундаментальной*, если $\forall x \in X$ последовательность $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в Y.

Поточечный предел линейных ограниченных операторов — всегда линейный оператор, но не всегда ограниченный.

Теорема Банаха-Штейнгауза. Пусть X — банахово пространство, Y — произвольное ЛНП. Тогда если последовательность операторов $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ поточечно ограничена, то она ограничена в $L(X,Y)$.

Теорема 2. Пусть X — банахово пространство, Y — произвольное ЛНП, и последовательность операторов $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L(X,Y)$ сходится поточечно.

Тогда ее поточечный предел непрерывен: $A \in L(X,Y)$ и выполнено неравенство

$$\|A\| \leq \varliminf_{n\to\infty} \|A_n\|$$

Опр. Пусть X, Y — ЛНП. Пространство $L(X,Y)$ называется *полным относительно поточечной сходимости*, если любая поточечно фундаментальная последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(X,Y)$ поточечно сходится к некоторому $A \in L(X,Y)$.

Теорема 3. Пусть X, Y — банаховы пространства. Тогда $L(X,Y)$ полно относительно поточечной сходимости.

2. Обратимость линейных операторов

Опр. Пусть X, Y — линейные пространства, $A : X \to Y$ — линейный оператор. Отображение

$$A_{\text{right}}^{-1} : \mathrm{Im}A \to X$$

называется *правым обратным оператором* для оператора A, если $\forall y \in \mathrm{Im}A \ \rightarrow \ A\big(A_{\text{right}}^{-1} y\big) = y$.

Опр. Пусть X, Y — линейные пространства, $A : X \to Y$ — линейный оператор. Отображение

$$A_{\text{left}}^{-1} : \mathrm{Im}A \to X$$

называется *левым обратным оператором* для оператора A, если $\forall x \in X \ \rightarrow \ A_{\text{left}}^{-1}\big(Ax\big) = x$.

Правый обратный оператор существует всегда, но он может быть не единственным и нелинейным. Левый обратный существует, только если A инъективно.

Опр. Пусть X, Y — ЛП, $A : X \to Y$ — линейный оператор. Оператор $A^{-1} : \mathrm{Im}A \to X$ называется *обратным* для оператора A, если он одновременно является правым и левым обратным.

Утв. 2.1 Пусть X, Y — ЛП, $A : X \to Y$ — линейный оператор. Тогда

$$A^{-1} \text{ существует} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{Ker}A = \{0\}$$

При этом A^{-1} единственен и линеен.

Опр. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *непрерывно обратимым*, если $\exists\ A^{-1} \in L(\mathrm{Im}A, X)$.

Опр. Пусть X, Y — ЛНП. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *ограниченным снизу*, если

$$\exists L > 0 : \quad \forall x \in X \quad \to \quad \|Ax\|_Y \geq L\|x\|_Y$$

Утв. 2.2 Пусть X, Y — ЛНП, $A : X \to Y$ — линейный оператор. Тогда

$$A \text{ непрерывно обратим} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \text{ ограничен снизу}$$

Утв. 2.3 Пусть X — банахово пространство, Y — произвольное ЛНП, и $A \in L(X, Y)$ непрерывно обратим. Тогда $\mathrm{Im}A$ — замкнутое подпространство Y.

Теорема Банаха об обратном операторе. Пусть X, Y — банаховы пространства, и линейный оператор $A \in L(X, Y)$. Тогда

$$A \text{ непрерывно обратим} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \mathrm{Ker}A = \{0\} \\ \mathrm{Im}A = Y \end{cases}$$

3. Компактный оператор

Опр. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП. Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *компактным*, если образ $A(S)$ любого ограниченного в X множества $S \subset X$ является вполне ограниченным в Y.

- Любой компактный оператор является ограниченным.
- Эквивалентное определение: образ $A\big(B_1(0)\big)$ единичного шара $B_1(0) \subset X$ вполне ограничен в Y.

Опр. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ЛНП. Обозначим

- $K(X, Y)$ — множество компактных операторов $X \to Y$;
- $K(X)$ — множество компактных операторов $X \to X$.

Утв. 3.1 Пусть X, Y — ЛНП. Тогда $K(X, Y)$ — замкнутое подпространство $L(X, Y)$.

Утв. 3.2 Пусть X, Y — ЛНП, и оператор $A \in L(X, Y)$. Тогда если $\dim \mathrm{Im}A < +\infty$, то A — компактный оператор.

Утв. 3.3 Пусть X, Y — банаховы пространства, оператор $A \in K(X, Y)$ и его образ $\mathrm{Im}A$ замкнут. Тогда $\dim \mathrm{Im}A < +\infty$.

Утв. 3.4 Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $A \in K(X, Y),\ B \in L(Z, X),\ C \in L(Y, Z)$. Тогда

$$AB \in K(Z, Y), \qquad CA \in K(X, Z)$$

То есть композиция компактного и непрерывного операторов между банаховыми пространствами — компактный оператор.

Задача §7.5

Пусть оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$ действует по правилу

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$$

(a) Найти множество значений $\operatorname{Im} A$ оператора A.

(b) Существует ли обратный оператор $A^{-1} : \operatorname{Im} A \to C[0,1]$?

(c) Ограничен ли обратный оператор A^{-1}?

Решение:

(a) Покажем, что $\mathrm{Im}A = \left\{ y \in C^1[0,1] \;\middle|\; y(0) = 0 \right\} = M$.

Пусть $y(t) \in \mathrm{Im}A$. Тогда $\exists x(t) \in C[0,1]$:

$$y(t) = (Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds \qquad \Longrightarrow \qquad y(0) = 0$$

Кроме того, интеграл с переменным верхним пределом от непрерывной функции — непрерывно дифференцируемая функция, поэтому $y \in M$. Значит, $\mathrm{Im}A \subset M$.

Пусть $y(t) \in M$. Тогда $y'(t) \in C[0,1]$ и выполнено, в силу формулы Ньютона-Лейбница:

$$y(t) = y(t) - y(0) = \int_0^t y'(s)ds = (Ay')(t)$$

Значит, $y \in \mathrm{Im}A$ и $M \subset \mathrm{Im}A$.

(b) Покажем, что обратный оператор A^{-1} **существует**.

Обратный оператор существует тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}A = \{0\}$. Покажем это.

Пусть $(Ax)(t) \equiv 0$. Продифференцируем $(Ax)(t)$ по t:

$$0 \equiv \frac{d}{dt}(Ax)(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t x(s)ds = x(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Ker}A = \{0\}$$

(c) Покажем, что обратный оператор A^{-1} **неограничен**.

Сначала найдем обратный оператор A^{-1}. Пусть $y(t) \in \mathrm{Im}A$. Тогда, как мы получили в пункте (a),

$$y(t) = \int_0^t y'(s)ds \qquad \Longrightarrow \qquad (A^{-1}y)(t) = y'(t)$$

Теорема Банаха об обратном операторе тут не работает, потому что $\left(\mathrm{Im}A, \|\cdot\|_\infty\right)$ — не банахово пространство.

Покажем, что $\|A^{-1}\| = \infty$, что эквивалентно неограниченности линейного оператора. Найдем последовательность $\{y_n(t)\} \subset \mathrm{Im}A$, такую что $\|y_n\|_\infty = 1 \ \forall n$ и $\|A^{-1}y_n\|_\infty \to \infty$.

Подходит следующая последовательность:

$$y_n(t) = \sin 2nt, \qquad \|y_n\|_\infty = 1, \qquad \|A^{-1}y_n\|_\infty = \|2n\cos 2nt\|_\infty = 2n \to \infty$$

Задача §7.8

Пусть оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$ действует по правилу

$$(Ax)(t) = x(t) + \int\limits_0^1 e^{s+t}x(s)ds$$

(a) Доказать, что A непрерывно обратим.

(b) Найти A^{-1}.

Решение:

(a) Покажем, что A **непрерывно обратим**. Воспользуемся теоремой Банаха об обратном операторе.

1. Покажем, что A — линейный **ограниченный** оператор, то есть $A \in L\big(C[0,1]\big)$.

   Оценим его норму:

   $$\|Ax\|_\infty \le \|x\|_\infty + \left\|\int_0^1 e^{s+t}x(s)ds\right\|_\infty \le \|x\|_\infty + e^2\|x\|_\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \|A\| \le 1 + e^2 < +\infty$$

   Так как конечность операторной нормы эквивалентна ограниченности, то $A \in L\big(C[0,1]\big)$.

2. Покажем, что A **инъективен**, то есть $\mathrm{Ker}A = \{0\}$.

   Пусть $(Ax)(t) \equiv 0$. Тогда $\forall t \in [0,1]$:

   $$x(t) = \underbrace{-\int_0^1 e^s x(s)ds}_{\text{const}} \cdot e^t = ce^t \qquad \Longrightarrow \qquad c = -\int_0^1 e^s ce^s ds = \frac{c}{2}(1-e^2) \qquad \Longrightarrow \qquad c = 0$$

   Значит, $x(t) = ce^t \equiv 0$.

3. Покажем, что A **сюръективен**, то есть $\mathrm{Im}A = C[0,1]$.

   Пусть $y(t) \in C[0,1]$. Тогда, аналогично вводя константу c, получаем

   $$y(t) = x(t) + e^t\int_0^1 e^s x(s)ds \qquad \Longrightarrow \qquad x(t) = y(t) + ce^t$$

   Условие на константу:

   $$c = -\int_0^1 e^s(y(s) + ce^s)ds = \frac{c}{2}(1-e^2) - \int_0^1 e^s y(s)ds \qquad \Longrightarrow \qquad c = -\frac{2}{1+e^2}\int_0^1 e^s y(s)ds$$

   Для произвольного $y(t) \in C[0,1]$ мы нашли прообраз $x(t) = y(t) + ce^t$.

4. Так как $C[0,1]$ — банахово пространство, а оператор A удовлетворяет условиям $1, 2, 3$, то по теореме Банаха об обратном операторе, оператор A непрерывно обратим.

(b) В пункте (a3) мы нашли (единственный) прообраз произвольного $y(t) \in C[0,1]$. Тогда обратный оператор A^{-1} действует по правилу:

$$(A^{-1}y)(t) = y(t) - \frac{2}{1+e^2}\int\limits_0^1 e^{s+t}y(s)ds$$

Задача 2.8 (из задавальника)

Пусть X — бесконечномерное ЛНП, Y — нетривиальное ЛНП. Доказать, что существует неограниченный линейный оператор $A : X \to Y$.

Решение:

Так как в любом линейном пространстве существует базис Гамеля, то он есть и в X. Пусть Γ — базис Гамеля. Так X бесконечномерно, то Γ — бесконечное множество.

Без ограничения общности будем считать, что $\forall v \in \Gamma \;\; \to \;\; \|v\|_X = 1$ (можно все базисные векторы поделить на норму).

Возьмем любой вектор $y_0 \in Y$, такой что $\|y_0\|_Y = 1$. Возьмем $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Gamma$ — произвольное счетное подмножество базиса Гамеля. Определим оператор $A : X \to Y$:

$$\forall v \in \Gamma \quad \to \quad Av = \begin{cases} ny_0 & , \ v = v_n \\ 0 & , \ v \notin \{v_n\}_{n=1}^{\infty} \end{cases}$$

Для произвольных $x \in X$ возьмем единственное разложение $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \xi_i, \ \xi_i \in \Gamma$ и определим оператор A:

$$Ax = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i A\xi_i$$

Линейность A следует из построения оператора и единственности разложения по базису Гамеля.

Покажем, что A неограничен. Покажем, что $\|A\| = \infty$:

$$\|v_n\|_X = 1, \qquad \|Av_n\|_Y = n\|y_0\|_Y = n \to \infty$$

Значит, мы построили линейный неограниченный оператор $A : X \to Y$.

Задача §12.7

Может ли оператор $A : C[0,1] \to C[0,1]$

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 K(t,s)x(s)ds,$$

где $K(t,s) \in C([0,1]^2)$, иметь ограниченный обратный?

Решение:

1. Покажем, что оператор A **компактен**.

   Для этого, согласно определению компактного оператора, достаточно показать, что образ единичного шара $AB_1(0)$ вполне ограничен. Воспользуемся теоремой Арцела-Асколи.

   - Покажем, что $AB_1(0)$ **ограничено**.

     Функция $K(t,s)$ непрерывна, значит она ограничена на $[0,1]^2$ константой: $|K(t,s)| \le M$. Тогда для произвольного $x \in B_1(0)$:

     $$\|Ax\|_\infty = \left\| \int_0^1 K(t,s)x(s)ds \right\|_\infty \le M\|x\|_\infty \le M$$

   - Покажем, что $AB_1(0)$ **равностепенно непрерывно**.

     Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное.

     По теореме Кантора, $K(t,s)$ равномерно непрерывна на $[0,1]^2$, поэтому $\exists\ \delta > 0$, такое что

     $$\forall t_1, t_2 : \ (|t_1 - t_2| < \delta) \quad \to \quad \big|K(t_1,s) - K(t_2,s)\big| < \frac{\varepsilon}{M}$$

     Тогда $\forall t_1, t_2 : \ (|t_1 - t_2| < \delta)$ и $\forall x \in B_1(0)$:

     $$\big|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)\big| \le \int_0^1 \big|K(t_1,s) - K(t_2,s)\big|\big|x(s)\big|ds < 1 \cdot \frac{\varepsilon}{M} \cdot \|x\|_\infty \le \varepsilon$$

   По теореме Арцела-Асколи, множество $AB_1(0)$ вполне ограничено. Значит, оператор A является компактным.

2. Покажем, что компактный оператор A **не может иметь** ограниченного обратного.

   Допустим противное, $\exists\ A^{-1} \in L\big(C[0,1]\big)$. Пространство $X = C[0,1]$ банахово, поэтому

   $$A \in K(X),\ A^{-1} \in L(X) \qquad \Longrightarrow \qquad I = AA^{-1} \in K(X)$$

   Тогда множество $IS_1(0) = S_1(0)$ — единичная сфера — вполне ограниченное множество в $C[0,1]$. Единичная сфера замкнута как пересечение двух замкнутых множеств:

   $$S_1(0) = B_1(0) \cap (X \setminus O_1(0))$$

   По критерию компактности, $S_1(0)$ замкнуто и вполне ограничено в банаховом пространстве $C[0,1]$, значит, $S_1(0)$ — компакт.

   Однако это противоречит теореме Рисса: единичная сфера в бесконечномерном ЛНП не является компактом.

Задача §12.11

Пусть E — банахово пространство, H — гильбертово пространство, $A \in K(E,H)$ (компактный оператор). Доказать, что существует последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L(E,H)$, такая что

- $\dim \mathrm{Im} A_n < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$;
- $\big\|A_n - A\big\| \to 0$ при $n \to \infty$ (сходимость по операторной норме).

Решение:

A — компактный оператор, значит, множество $AB_1(0)$ вполне ограничено. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть $\{y_i\}_{i=1}^N \subset AB_1(0)$.

Рассмотрим подпространство $L_\varepsilon = \mathrm{Lin}\{y_1, \ldots, y_N\} \subset H$. L_ε конечномерно, поэтому замкнуто. По теорема Рисса об ортогональном дополнении: $H = L_\varepsilon \oplus L_\varepsilon^\perp$.

Тогда можно определить оператор $P_\varepsilon : E \to H$ — ортогональная проекция на L_ε. Его образ $\mathrm{Im} P_\varepsilon = L_\varepsilon$ — конечномерен. Кроме того, $\|P_\varepsilon\| = 1$ (так как $\|Px\|_H \le \|x\|_H$ и равенство достигается). Значит $P_\varepsilon \in L(H)$.

Рассмотрим последовательность операторов $A_n = P_{1/n}A$. Каждый из них непрерывен как композиция компактного и непрерывного и имеет конечномерный образ. Покажем, что она сходится по операторной норме к A. Оценим норму оператора $\|A_n - A\|$.

Для произвольного $x \in B_1(0)$: (y_k — элемент конечной $\frac{1}{n}$-сети $AB_1(0)$, близкий к Ax)

$$\|A_n x - Ax\|_H \le \|A_n x - y_k\|_H + \|Ax - y_k\|_H = \|P_{1/n}(Ax - y_k)\| + \|Ax - y_k\| \le$$
$$\le \|P_{1/n}\|\|Ax - y_k\| + \|Ax - y_k\| \le 1 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Поэтому $\|A_n - A\| \to 0$.