Теорвер. ДЗ 2.

Прохоров Юрий, 776

Задача 1

Сначала сформулируем вспомогательное утверждение на языке теории меры. Пусть

- $\mathcal{E}$ — σ-алгебра на множестве X,
- $\mu : \mathcal{E} \to (0, +\infty)$ — конечная счетно-аддитивная мера, т.е. $0 < \mu(X) < \infty$,
- $\{D_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{E}$ — дизъюнктное покрытие X, $\mu(D_i) > 0$.

Пусть $A \in \mathcal{E}$ — произвольное. Тогда $\{A \cap D_i\}_{i=1}^{\infty}$ — дизъюнктное покрытие A. В силу счетной аддитивности получаем

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A \cap D_i).$$

При $X = \Omega,\ \mathcal{E} = \mathcal{F},\ \mu = \mathbb{P}$ получаем **формулу полной вероятности**.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — исходное вероятностное пространство (из условия). События $\{B_i\}$, C тоже даны по условию. Положим

$$X = C, \qquad \mu = \mathbb{P}_C = \mathbb{P}\{\ \cdot \mid C\}, \qquad \mathcal{E} = \mathcal{F}_C = \{F \cap C \mid F \in \mathcal{F}\}, \qquad D_i = B_i \cap C,$$

то есть $(C, \mathcal{F}_C, \mathbb{P}_C)$ — условное вероятностное пространство. Применим к нему полученное выше утверждение: $\forall A \in \mathcal{F}$ $(A \cap C \in \mathcal{F}_C)$ выполнено:

$$\mathbb{P}\{AC\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{AB_iC\}$$

$$\mathbb{P}\{A \mid C\} \cdot \mathbb{P}\{C\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A \mid B_iC\} \cdot \mathbb{P}\{B_iC\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A \mid B_iC\} \cdot \mathbb{P}\{B_i \mid C\} \cdot \mathbb{P}\{C\}$$

Делим на $\mathbb{P}\{C\} > 0$ и получаем:

$$\boxed{\mathbb{P}\{A \mid C\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A \mid B_iC\} \cdot \mathbb{P}\{B_i \mid C\}}$$

Задача 2

Обозначим события:

- $\bigcirc$ — добавили белый шар,
- $\bullet$ — добавили черный шар,
- A — вытащили белый шар.

По формуле Байеса:

$$\mathbb{P}\{\bigcirc \mid A\} = \frac{\mathbb{P}\{A \mid \bigcirc\} \cdot \mathbb{P}\{\bigcirc\}}{\mathbb{P}\{A\}}$$

Знаменатель расписываем по формуле полной вероятности:

$$\mathbb{P}\{\bigcirc \mid A\} = \frac{\mathbb{P}\{A \mid \bigcirc\} \cdot \mathbb{P}\{\bigcirc\}}{\mathbb{P}\{A \mid \bigcirc\} \cdot \mathbb{P}\{\bigcirc\} + \mathbb{P}\{A \mid \bullet\} \cdot \mathbb{P}\{\bullet\}} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Задача 3

Обозначим события:

- C — первые k шаров белые,
- A — $(k+1)$-ый шар белый,
- B_i — выбрана i-ая урна $(i = 0, \dots, m)$, $\quad \mathbb{P}\{B_i C\} > 0$ при $i \geq 1$.

По формуле из задачи 1:

$$\mathbb{P}\{A \mid C\} = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}\{A \mid B_i C\} \cdot \mathbb{P}\{B_i \mid C\}$$

По формуле Байеса и формуле полной вероятности:

$$\mathbb{P}\{B_i \mid C\} = \frac{\mathbb{P}\{C \mid B_i\} \cdot \mathbb{P}\{B_i\}}{\mathbb{P}\{C\}} = \frac{\mathbb{P}\{C \mid B_i\} \cdot \mathbb{P}\{B_i\}}{\sum\limits_{j=0}^{m} \mathbb{P}\{C \mid B_j\} \cdot \mathbb{P}\{B_j\}} = \frac{\left(\frac{i}{m}\right)^k \cdot \frac{1}{m+1}}{\sum\limits_{j=0}^{m} \left(\dfrac{j}{m}\right)^k \dfrac{1}{m+1}} = \frac{i^k}{\sum\limits_{j=1}^{m} j^k} = \frac{i^k}{1^k + 2^k + \ldots + m^k}$$

Тогда искомая вероятность:

$$\mathbb{P}\{A \mid C\} = \sum_{i=1}^{m} \frac{i}{m} \cdot \frac{i^k}{1^k + \ldots + m^k} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1^{k+1} + \ldots + m^{k+1}}{1^k + \ldots + m^k}$$

Найдем ее предел при $m \to \infty$. Воспользуемся порядком роста следующей суммы:

$$\sum_{i=1}^{m} i^k \ \sim \ \frac{m^{k+1}}{k+1}$$

Тогда

$$\mathbb{P}\{A \mid C\} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1^{k+1} + \ldots + m^{k+1}}{1^k + \ldots + m^k} \sim \frac{1}{m} \cdot \frac{m^{k+2}}{k+2} \cdot \frac{k+1}{m^{k+1}} = \frac{k+1}{k+2} = 1 - \frac{1}{k+2} \qquad \text{при } m \to \infty$$