Случайные процессы. ДЗ 4.

Прохоров Юрий, 776

Задача 1

Пусть $K(t) \sim \Pi\Pi(\lambda)$ — пуассоновский процесс. Доказать, что

$$\mathbb{P}\{K(t) \geq n\} = \int\limits_0^{\lambda t} \frac{e^{-u}u^{n-1}}{(n-1)!}du$$

Решение: (двумя способами)

(a) Запишем пуассоновский процесс $K(t)$ в виде

$$K(t) = \max\left\{n \;\middle|\; S_n < t\right\}, \qquad S_n \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$$

Тогда

$$\mathbb{P}\{K(t) \geq n\} = \mathbb{P}\{S_n < t\} = \int\limits_0^t f_{S_n}(x)dx = \int\limits_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda x}dx = \int\limits_0^{\lambda t} \frac{e^{-u}u^{n-1}}{(n-1)!}du$$

(b) Определим функцию

$$p_k(\mu) = \mathbb{P}\{\text{Poiss}(\mu) = k\} = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Заметим, что

$$\frac{d}{d\mu}p_k(\mu) = \frac{\mu^{k-1}e^{-\mu}}{(k-1)!} - \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!} = p_{k-1}(\mu) - p_k(\mu), \qquad k = 0, 1, \ldots, \qquad p_{-1}(\mu) \equiv 0$$

Просуммируем последнее уравнение от $k = 0$ до n:

$$\frac{d}{d\mu}\mathbb{P}\{\text{Poiss}(\mu) \leq n\} = -p_k(\mu)$$

Интегрируем и получаем

$$\mathbb{P}\{\text{Poiss}(\mu) \leq n\} = C - \int\limits_0^{\mu} \frac{u^k e^{-u}}{k!}du,$$

где константа C находится из начального условия $\mathbb{P}\{\text{Poiss}(0) \leq n\} = 1$, т.е. $C = 1$.

Тогда при $\mu = \lambda t$ и получаем

$$\mathbb{P}\{K(t) \geq n\} = 1 - \mathbb{P}\{\text{Poiss}(\lambda t) \leq n - 1\} = \int\limits_0^{\lambda t} \frac{e^{-u}u^{n-1}}{(n-1)!}du$$

Задача 2

(a) Пусть по n ящикам случайно размещаются N шаров, где $N \sim \text{Poiss}(\lambda)$. Показать, что вероятность получить при этом ровно m пустых ящиков равна

$$\mathbb{P}\{m \text{ пустых}\} = C_n^m e^{-\frac{\lambda m}{n}}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{n}}\right)^{n-m} \qquad (*)$$

(b) Пусть по n ящикам случайно размещается фиксированное число r шаров. Показать, что вероятность получить при этом ровно m пустых ящиков равна коэффициенту при $e^{-\lambda}\frac{\lambda^r}{r!}$ в разложении $(*)$ в ряд.

(c) Показать, что число способов разместить r шаров по n ящикам так, чтобы m ящиков были пустыми, равно

$$C_n^m \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{n-m}^k (n-m-k)^r$$

Решение:

(a) Пусть случайные величины N_i — число шаров в i-ом ящике.

Если рассуждать нестрого, то аналогично задаче про мух и тараканов в супе с 4 семинара, случайные величины $N_1, \ldots, N_n$ независимы и одинаково распределены: $N_i \sim \mathrm{Poiss}(\mu)$. Кроме того,

$$N = N_1 + \ldots + N_n \sim \mathrm{Poiss}(n\mu) \qquad \Longrightarrow \qquad \mu = \frac{\lambda}{n}$$

Найдем распределение N_i:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{N_i = k\} &= \Big/ \begin{array}{c}\text{формула полного}\\ \text{матожидания}\end{array} \Big/ = \sum_{s=k}^{\infty} \mathbb{P}\{N_i = k \mid N = s\} \cdot \mathbb{P}\{N = s\} = \\
&= \sum_{s=k}^{\infty} C_s^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{s-k} \frac{\lambda^s e^{-\lambda}}{s!} = \sum_{s=0}^{\infty} C_{s+k}^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^s \frac{\lambda^{s+k} e^{-\lambda}}{(s+k)!} = \\
&= \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^s}{s!} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^s = \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} e^{\lambda(1-1/n)} = \frac{(\lambda/n)^k e^{-\lambda/n}}{k!}
\end{aligned}$$

Значит, $N_i \sim \mathrm{Poiss}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$. Опустим вопрос о доказательстве независимости N_i (скорее всего это можно сделать через производящие функции). Тогда

$$\mathbb{P}\{m \text{ пустых}\} = C_n^m \left(\mathbb{P}\{N_i = 0\}\right)^m \left(1 - \mathbb{P}\{N_i = 0\}\right)^{n-m} = C_n^m e^{-\lambda m/n} \left(1 - e^{-\lambda/n}\right)^{n-m}$$

(b) В $(*)$ по формуле полного матожидания:

$$(*) = \mathbb{P}\{m \text{ пустых}\} = \sum_{r=0}^{\infty} \underbrace{\mathbb{P}\{m \text{ пустых} \mid N = r\}}_{\text{искомая вероятность}} \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}$$

(c) Требуется вычислить вероятность из пункта (b) и умножить ее на n^r. Обозначим ее p_r и запишем равенство

$$(*) = C_n^m e^{-\lambda m/n} \left(1 - e^{-\lambda/n}\right)^{n-m} = \sum_{r=0}^{\infty} p_r \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}$$

Разложим левую часть в ряд. Сначала разложим вторую скобку в сумму, а потом экспоненту в ряд

$$\begin{aligned}
(*) &= C_n^m e^{-\lambda m/n} \sum_{k=0}^{n-m} C_{n-m}^k (-1)^k e^{-\lambda k/n} = C_n^m \sum_{k=0}^{n-m} C_{n-m}^k (-1)^k e^{-\lambda(m+k)/n} = \\
&= C_n^m \sum_{k=0}^{n-m} C_{n-m}^k (-1)^k \underbrace{e^{\lambda(n-m-k)/n}}_{\text{в ряд}} e^{-\lambda} = \sum_{r=0}^{\infty} \underbrace{\left[C_n^m \sum_{k=0}^{n-m} C_{n-m}^k (-1)^k \frac{(n-m-k)^r}{n^r} \right]}_{p_r} \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}
\end{aligned}$$

Число нужных размещений получается умножением вероятности p_r на общее число размещений n^r:

$$p_r n^r = C_n^m \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{n-m}^k (n-m-k)^r$$

Задача 3

Пусть последовательность с.в. $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ — i.i.d. и

$$\mathbb{P}\{X_k = j\} = p_j, \qquad j \in \mathbb{N}$$

Пусть $K(t) \sim \text{ПП}(\lambda)$. Пусть случайные процессы $N_j(t)$ равны числу величин из набора $\{X_1, \ldots, X_{K(t)}\}$, равных j. Тогда ясно, что

$$K(t) = \sum_{j=1}^{\infty} N_j(t)$$

Доказать, что $N_j(t) \sim \text{ПП}(\lambda p_j)$ и все они взаимно независимы.

Решение:

Ясно, что случайный процесс $N_j(t)$ можно записать в виде

$$N_j(t) = \sum_{k=1}^{K(t)} \mathbb{I}\{X_k = j\},$$

где случайные величины $I_k = \mathbb{I}\{X_k = j\}$ независимы и одинаково распределены как одинаковые функции от независимых одинаково распределенных случайных величин. Значит, $N_j(t)$ — сложный пуассоновский процесс.

Далее, $I_k \sim \text{Be}(p_j)$. Свойством пуассоновского процесса является устойчивость относительно случайного прореживания, значит, $N_j(t) \sim \text{ПП}(\lambda p_j)$.

Покажем их независимость. Запишем производящую функцию $K(t)$ при $|z| < 1$:

$$\Phi_{K(t)}(z) = \ldots = e^{-\lambda t(1-z)} = \prod_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda p_j t(1-z)} = \prod_{j=1}^{\infty} \Phi_{N_j(t)}(z)$$

Следует ли отсюда независимость $N_j(t)$?