Случайные процессы. ДЗ 13.

Прохоров Юрий, 776

Задача 13.1

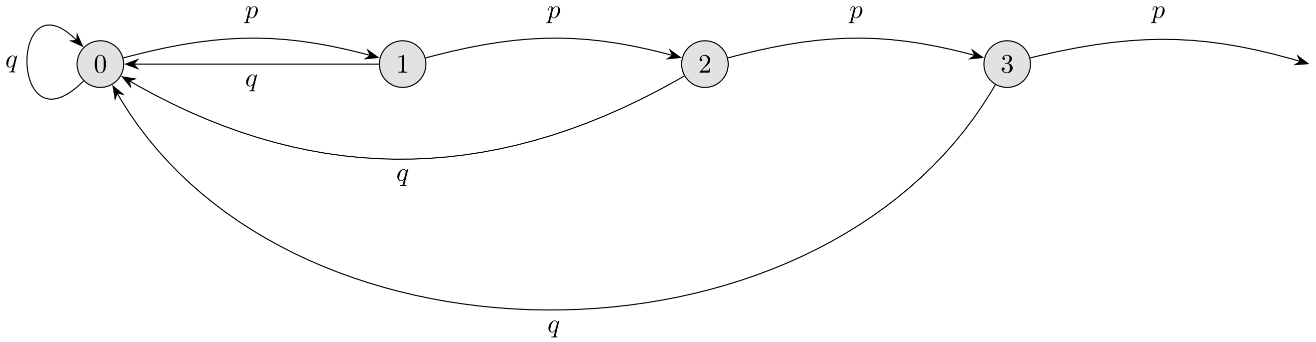
Вероятность выпадения герба на несимметричной монете равна p. Найти матожидание числа бросков до появления серии из k последовательных гербов.

Решение:

Рассмотрим случайную последовательность $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$X_0 = 0, \qquad X_n = \# \text{ число выпавших подряд гербов на } n\text{-ом шаге}$$

Она образует однородную дискретную марковскую цепь с графом, где $q = 1 - p$:



1. Данная цепь неразложима и апериодична. Несложно найти ее стационарное распределение:

   $$\pi_k = p^k q, \qquad k \geq 0$$

   Это значит, что цепь **сильно эргодична**.

   Пусть σ_k — время возвращения в k-ое состояние. Тогда среднее время возвращения:

   $$\mathbb{E}\sigma_k = \mu_k = \frac{1}{\pi_k} = \frac{1}{p^k q} = \frac{1}{p^k(1-p)}$$

2. Вычислим среднюю длину серии из последовательных гербов. Пусть случайная величина ξ — длина такой серии. Тогда

   $$\sigma_0 = \xi + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\sigma_0 - 1 = \mu_0 - 1 = \frac{p}{1-p}$$

   Тот же результат можно получить, если считать это матожидание напрямую:

   $$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (p^k q) = q \cdot \frac{p}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p}$$

3. Обозначим η_k — время, которое нужно до первого прихода в состояние k из состояния 0. В задаче нас интересует $\mathbb{E}\eta_k$.

   Посмотрим на время возвращение цепи в k-ое состояние. Оно складывается из некоторой серии последовательных гербов, возвращения в нулевое состояние и как раз времени η_k. То есть

   $$\sigma_k = \xi + 1 + \eta_k$$

   Отсюда получаем, что

   $$\mathbb{E}\eta_k = \mathbb{E}\sigma_k - \mathbb{E}\xi - 1 = \frac{1 - p^k}{p^k(1-p)}$$

Задача 13.2

Случайная последовательность неотрицательных целых чисел образована следующим образом:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1, \qquad F_{n+1} = \begin{cases} F_n + F_{n-1} & , \text{ с вер. } 1/2 \\ |F_n - F_{n-1}| & , \text{ с вер. } 1/2 \end{cases}$$

(a) Будет ли $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ марковской цепью?

(b) Будет ли $X_n = \begin{bmatrix} F_{n-1} \\ F_n \end{bmatrix}$, $n \geq 1$, ОДМЦ?

(c) Найти вероятность достижения состояния $(1,1)$, если начальное состояние $X_1 = (1,2)$.

Решение:

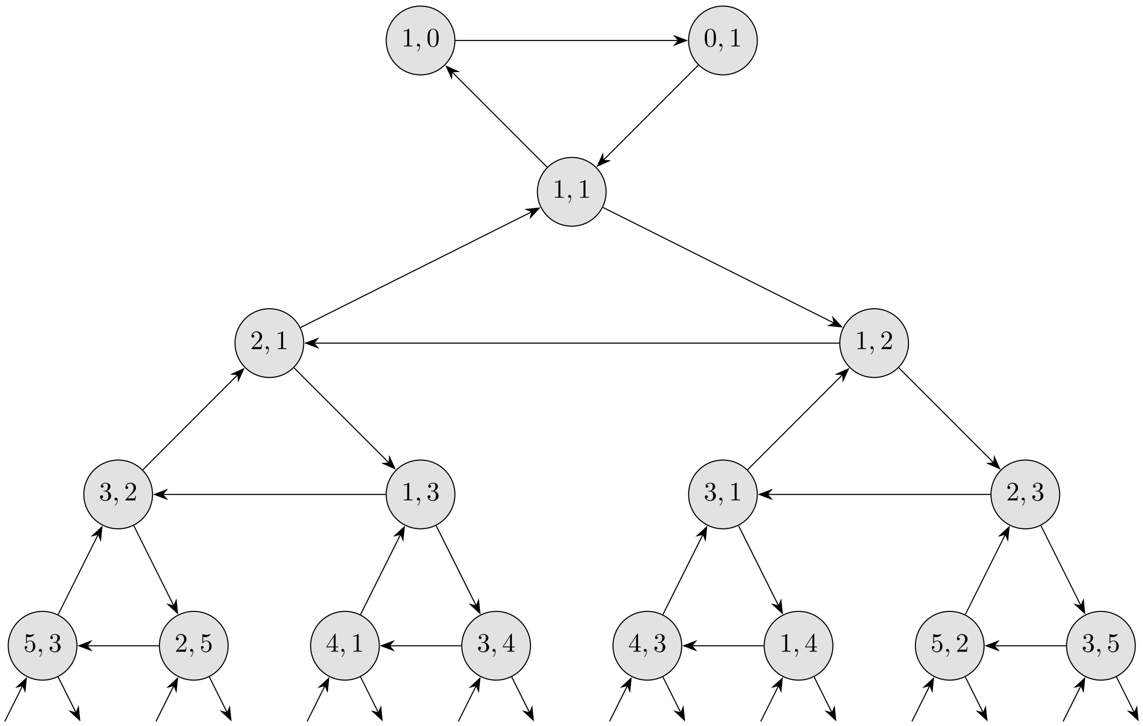
(a) Не будет, потому что, например

$$\mathbb{P}\big\{F_3 = 2 \bigm| F_2 = 1,\ F_1 = 1\big\} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}\big\{F_3 = 2 \bigm| F_2 = 1,\ F_1 = 0\big\} = 0$$

(b) Да, будет, потому что состояние X_n зависит только он состояния X_{n-1}. При этом вероятности переходов не зависят от n, поэтому цепь будет однородной.

(c) Изобразим стохастический граф этой цепи



Вероятности всех переходов равны $1/2$.

Пусть ξ — вероятность дойти в $(1,1)$ из $(1,2)$, ξ_0 — вероятность вернуться в $(1,2)$ из $(2,3)$.

Пусть η — вероятность дойти в $(1,1)$ из $(2,1)$, η_0 — вероятность вернуться в $(2,1)$ из $(1,3)$.

Тогда из симметрии цепи: $\xi_0 = \eta_0$. По формуле полной вероятности:

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot \xi_0 + \frac{1}{2} \cdot \eta, \qquad \eta = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \eta_0$$

Отсюда получаем, что искомая вероятность

$$\xi = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\xi_0$$

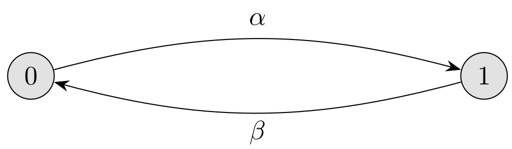
С другой стороны, заметим, что данная цепь в некотором смысле самоподобна. То есть подцепь с вершиной $(1,1)$ имеет ту же самую структуру, что и подцепь с вершиной $(1,2)$. Отсюда следует, что $\xi = \xi_0$.

В итоге получаем, что $\xi = 1$.

Данный ответ логичен, потому что цепь чем-то похожа на случайные блуждания на $\mathbb{Z}_+$ в случае $p = 1/2$. В той задаче цепь получалась нуль возвратной, поэтому скорее, всего в нашей она тоже нуль возвратна. Поэтому вероятность возвратна равна 1.

Задача 13.3

ОНМЦ задана графом $(\alpha, \beta \geq 0)$



(a) Когда ОНМЦ будет сильно эргодичной?

(b) В случае $\alpha + \beta > 0$ найти предельное распределение $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = p^*$.

(c) Что можно сказать о предельном распределении, если $\alpha = \beta = 0$?

Решение:

(a) Цепь неразложима тогда и только тогда, когда $\alpha > 0,\ \beta > 0$. По критерию сильной эргодичности:

$$\text{цепь сильно эргодична} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{цепь разложима} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 0,\ \beta > 0$$

(b) При $\alpha + \beta > 0$ найдем стационарное распределение, решив уравнение $\Lambda^T \pi = 0$.

$$\begin{bmatrix} -\alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{bmatrix} \pi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \pi = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{bmatrix}$$

В случае $\alpha > 0,\ \beta > 0$ цепь сильно эргодична, поэтому $p^* = \pi$.

Если, например, $\alpha = 0, \beta > 0$, то состояние 0 поглощающее, поэтому предельное распределение будет $p^* = [1, 0]^T = \pi$.

Таким образом, в любом случае при $\alpha + \beta > 0$:

$$p^* = \pi = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\ \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{bmatrix}$$

(c) При $\alpha = \beta = 0$ матрица $\Lambda = O$ — нулевая матрица. Поэтому

$$P(t) = e^{t\Lambda} = I$$

Значит,

$$p(t) = \left[P(t)\right]^T p(0) = p(0)$$

То есть предельное распределение совпадает с начальным.

Это логично, потому что в этом случае цепь скачков вообще не имеет переходов, то есть ОНМЦ является константным случайным процессом.

Вопросы

1. Вопрос про ОДМЦ. На семинаре мы формулировали теорему эргодичности: для любой ограниченной фукнции f
$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(X_k) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \mathbb{E}f(X) = \sum_{k\in E} \pi_k\, f(k),$$
Мы говорили, что она верна для любых сильно эргодических ОДМЦ. Как можно ослабить эргодичность, чтобы теорема была все равно выполнена?
В пособии написано, что такое свойство верно для конечных ОДМЦ, у которых единственное стационарное распределение, поэтому, кажется, что это один из вариантов ответа?

2. В пособии ОНМЦ вводятся вместе с двумя базовыми предположениями (стр. 162)

> **Базовые предположения.** Пусть дана цепь Маркова $\xi(t)$. Будем считать, что если в момент времени t процесс находится в состоянии i, то вероятность покинуть состояние i в промежуток времени $[t, t+\Delta t)$ равна $\lambda_i\Delta t + o(\Delta t)$, $\Delta t \to 0$. Кроме того, мы будем предполагать, что в момент выхода из состояния i процесс может попасть в произвольное состояние j с вероятностью $p_{i,j}$. Эту вероятность не следует путать с вероятностью перехода $p_{i,j}(t,s)$ из состояния i в состояние j на интервале времени $[t,s]$. Подчеркнем, что вероятности $p_{i,j}$ вообще не зависят от того, когда цепь в своей истории выходит из состояния i.

   Насколько сильно они сужают класс всех возможных ОНМЦ? Или они выполнены всегда?

3. Как можно интуитивно понять, что ОНМЦ живет в i-ом состоянии время $\xi_i \sim \mathrm{Exp}(\Lambda_i)$?
Связано ли это с тем, что экспоненциальное распределение — единственное непрерывное распределение, обладающее свойством отсутствия последействия?

4. На семинаре мы писали, что если i-ое состояние положительно возвратно, то $\mu_i = \frac{1}{\Lambda_i \pi_i}$. Требуется ли единственности стационарного распределения, чтобы записать такое равенство? Можно ли его записать для невозвратных состояний в виде $\frac{1}{\mu_i} = \Lambda_i \pi_i$?
То есть вопрос: верно ли, что если стационарное распределение единственно, то для любого состояния выполнено $\frac{1}{\mu_i} = \Lambda_i \pi_i$?

5. Можно ли как-то ослаблять эргодичность в сильном смысле? Например, можно ли для конечных цепей просто требовать единственности замкнутого класса?

   Если ли в случае ОНМЦ такая же эргодическая теорема, как и для ОДМЦ (та что в 1-ом вопросе)?