Функан. ДЗ 10.

Прохоров Юрий, 776

Я сделал все пункты задачи 2.1, чтобы разобраться в теме.

Задача 2.1 (из задавальника)

Пусть $\mathcal{A}$ — банахова алгебра, $x, y \in \mathcal{A}$.

(a) Доказать, что если x и xy обратимы в $\mathcal{A}$, то и y обратим.

(b) Доказать, что если xy и yx обратимы, то обратимы x и y.

(c) Показать, что может быть, что $xy = e \neq yx$.

(d) Доказать, что если $\dim \mathcal{A} < \infty$, то $yx = e$ равносильно $xy = e$.

(e) Доказать, что если $e - xy$ обратим, то $e - yx$ обратим.

(f) Пусть $\lambda \in \sigma(xy),\ \ \lambda \neq 0$. Доказать, что $\lambda \in \sigma(yx)$. Показать, что при $\lambda = 0$ это свойство не всегда выполнено.

(g) Доказать, что если x обратим, то $\sigma(xy) = \sigma(yx)$.

(h) Доказать, что для спектральных радиусов $r(xy) = r(yx)$.

(i) Доказать, что если $P(x) = 0$ для комплексного многочлена, такого, что $P(0) \neq 0$, то x обратим.

Решение:

(a) Имеем, что
$$xu = ux = e, \qquad (xy)v = v(xy) = e$$
Покажем, что $y^{-1} = vx$. Надо показать два равенства.

- $(vx)y = v(xy) = e$.
- $y(vx) = \underbrace{(ux)}_{e}(yvx) = u\underbrace{(xyv)}_{e}x = \underbrace{ux}_{e} = e$.

(b) Имеем, что
$$(xy)u = u(xy) = e, \qquad (yx)v = v(yx) = e$$
Покажем, что $x^{-1} = yu$. Надо показать два равенства.

- $x(yu) = (xy)u = e$.
- $(yu)x = (yux)\underbrace{(yxv)}_{e} = y\underbrace{(uxy)}_{e}xv = (yx)v = e$.

Заметим, что можно было показать, что $x^{-1} = vy$. В силу единственности обратного элемента, получаем, что $vy = yu$.

Аналогично можно показать, что $y^{-1} = ux = xv$.

(c) Рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{A} = L(\ell_1)$. Пусть $A, B \in L(\ell_1)$ — операторы правого и левого сдвигов соответственно:
$$(Ax)(k) = \begin{cases} 0 & , \ k = 1 \\ x(k-1) & , \ k > 1 \end{cases}, \qquad (Bx)(k) = x(k+1)$$

Тогда легко видеть, что

$$BA = I, \qquad AB \neq I$$

(d) Пусть $\dim \mathcal{A} = n$. Пусть $xy = e$. Рассмотрим последовательность подпространств:

$$\mathcal{A} \supset y\mathcal{A} \supset y^2\mathcal{A} \supset \ldots \supset y^k\mathcal{A} \supset \ldots,$$

где $yL = \{yz \mid z \in L\}$ — подпространство $\mathcal{A}$, если L — подпространство.

Отсюда следует, что

$$n = \dim(\mathcal{A}) \geq \dim(y\mathcal{A}) \geq \ldots \geq \dim(y^k\mathcal{A}) \geq \ldots \geq 0$$

Так эта последовательность бесконечна и не возрастает, но может принимать только конечное число значений (от 0 до n), то существует такое число k, что

$$\dim(y^k\mathcal{A}) = \dim(y^{k+1}\mathcal{A}) \qquad \Longrightarrow \qquad y^k\mathcal{A} = y^{k+1}\mathcal{A}$$

$$\left.\begin{array}{r} y^k \in y^k\mathcal{A} \\ y^k\mathcal{A} = y^{k+1}\mathcal{A} \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \exists z \in \mathcal{A}: \quad y^k = y^{k+1}z \qquad \xRightarrow[\text{слева на } x^k]{\text{умножаем}} \qquad e = yz$$

Тогда

$$yx = (yx)\underbrace{(yz)}_{e} = y\underbrace{(xy)}_{e}z = yz = e$$

Аналогично доказывается в другую сторону.

(e) Имеем, что

$$(e - xy)z = z(e - xy) = e$$

Покажем, что $(e - yx)^{-1} = e + yzx$. Надо показать два равенства.

- $(e - yx)(e + yzx) = e + yzx - yx - yxyzx = e - yx + y\underbrace{(e - xy)z}_{e}x = e - yx + yx = e.$
- $(e + yzx)(e - yx) = e + yzx - yx - yzxyx = e - yx + y\underbrace{z(e - xy)}_{e}x = e - yx + yx = e.$

(f) Пусть $\lambda \neq 0,\ \lambda \in \sigma(xy)$, значит, элемент $\lambda e - xy$ не обратим.

Допустим, что $\lambda \notin \sigma(yx)$. Это значит, что элемент $\lambda e - yx$ обратим. Отсюда следует, что обратим элемент $e - (\frac{1}{\lambda}y)x$. Из пункта (e) следует, что обратим элемент $e - x(\frac{1}{\lambda}y) = e - \frac{1}{\lambda}xy$. Отсюда следует, что обратим элемент $\lambda e - xy$, что является противоречием.

Покажем, что для $\lambda = 0$ это свойство не выполнено. Аналогично пункту (c), рассмотрим банахову алгебру $\mathcal{A} = L(\ell_1)$. Пусть $A, B \in L(\ell_1)$ — операторы правого и левого сдвигов соответственно:

$$(Ax)(k) = \begin{cases} 0 & ,\ k = 1 \\ x(k-1) & ,\ k > 1 \end{cases}, \qquad (Bx)(k) = x(k+1)$$

Тогда

$$BA = I \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma(BA) = \sigma(I) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; (1-\lambda)I \text{ не непрерывно обратим}\right\} = \{1\}$$

Но в точечном спектре оператора AB лежит 0, т.к. есть собственный вектор e_1:

$$ABe_1 = A(Be_1) = A(0) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{Ker}(AB) \neq \{0\} \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \in \sigma_p(AB) \subset \sigma(AB)$$

(g) Из пункта (f) следует, что

$$\sigma(xy) \setminus \{0\} = \sigma(yx) \setminus \{0\}$$

Осталось показать, что если x обратим, то $0 \in \sigma(xy) \iff 0 \in \sigma(yx)$. Вместо этого, покажем, что

$$0 \in \rho(xy) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \in \rho(yx)$$

($\Rightarrow$) $0 \in \rho(xy) \implies xy$ обратим. Из пункта (a) следует, что y обратим. Так как множество обратимых элементов образует группу, то yx обратим. Значит, $0 \in \rho(yx)$.

($\Leftarrow$) $0 \in \rho(yx) \implies yx$ обратим. Аналогично пункту (a), легко доказать, что y обратим. Так как множество обратимых элементов образует группу, то xy обратим. Значит, $0 \in \rho(xy)$.

(h) Для спектрального радиуса верна теорема

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|}$$

Пусть $x = 0$ или $y = 0$ то $r(xy) = r(yx) = 0$.

Пусть все $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Тогда можно записать оценку

$$\sqrt[n]{\|(xy)^n\|} \leq \sqrt[n]{\|x\| \cdot \|(yx)^{n-1}\| \cdot \|y\|} = \|x\|^{\frac{1}{n}} \cdot \|y\|^{\frac{1}{n}} \cdot \left(\left\|(yx)^{n-1}\right\|^{\frac{1}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и используя, что

$$\|x\|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1, \qquad \|y\|^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1, \qquad \left\|(yx)^{n-1}\right\|)^{\frac{1}{n-1}} \longrightarrow r(yx)$$

получаем:

$$r(xy) \leq r(yx)$$

Аналогично, можно показать неравенство в другую сторону. Значит, $r(xy) = r(yx)$.

(i) Имеем, что $\sigma\big(P(x)\big) = \sigma(0) = \{0\}$.

По теореме об отображении спектра многочленом, $\{0\} = \sigma\big(P(x)\big) = P\big(\sigma(x)\big)$.

Допустим, x необратим, значит, $0 \in \sigma(x)$. Тогда $P(0) \in P\big(\sigma(x)\big) = \{0\}$. Значит, $P(0) = 0$, но это противоречит условию, что $P(0) \neq 0$.

Задача §7.7

Найти спектр и резольвенту оператора $A \in L\big(C[0,1]\big)$:

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^t x(s)ds$$

Решение:

1. Покажем, что оператор A **компактен** (у таких операторов проще искать спектр).

   Нужно показать, что образ единичного шара $AB_1(0)$ вполне ограничен в $C[0,1]$.

   - Множество $AB_1(0)$ **ограничено**: пусть $\|x\|_c \leq 1$, тогда

     $$\|Ax\|_c = \max_{[0,1]} \left| \int\limits_0^t x(s)ds \right| \leq \int\limits_0^1 |x(s)|\, ds \leq \int\limits_0^1 \|x\|_c\, ds \leq 1$$

     Это доказывает ограниченность оператора A.
   - Множество $AB_1(0)$ **равностепенно непрерывно**.

     Заметим, что $AB_1(0) \subset C^1[0,1]$ — непрерывно дифференцируемые функции. По формуле конечных приращений Лагранжа, для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ выполнено

     $$(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2) = (Ax)'(\xi) \cdot (t_1 - t_2) = x(\xi) \cdot (t_1 - t_2)$$

     Тогда $\forall t_1, t_2 : \ |t_1 - t_2| < \delta$ и $\forall x \in B_1(0)$ выполнена оценка

     $$\big|(Ax)(t_1) - (Ax)(t_2)\big| = \big|x(\xi) \cdot (t_1 - t_2)\big| \leq \|x\|_c \cdot |t_1 - t_2| < 1 \cdot \delta < \varepsilon$$

     Тогда если взять $\delta = \varepsilon/2$, то эта оценка будет выполнена.

- По теореме Арцела-Асколи:

$$\left.\begin{array}{r} AB_1(0) \text{ ограничено} \\ AB_1(0) \text{ равностепенно непрерывно} \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad AB_1(0) \text{ вполне ограничено}$$

2. По теореме о спектре компактного оператора (теорема 5.8.1 в учебнике Константинова):

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \{\text{возможно, } 0\}$$

Найдем точечный спектр оператора A.

- $\lambda \neq 0$.

  Требуется найти нетривиальные решения интегрального уравнения (т.е. собственные векторы)

$$\underbrace{\int\limits_0^t x(s)ds}_{f(t)} = \lambda x(t), \qquad t \in [0,1]$$

  Сведем его к задаче Коши для ОДУ:

$$\begin{cases} f(t) = \lambda f'(t) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

  Число $\lambda \neq 0$, поэтому по теореме существования и единственности решения задачи Коши, решение $f(t) \equiv 0$ единственно. Значит, есть только тривиальные решения $x(t) \equiv 0$.

- $\lambda = 0$.
  Аналогично, есть только тривиальные решения.

Значит, точечный спектр оператора A пусть: $\sigma_p(A) = \varnothing$. Так как спектр любого оператора непуст, то $\sigma(A) = \{0\}$.

3. Найдем, какому спектру принадлежит $\lambda = 0$. Так как мы показали, что $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, то $0 \notin \sigma_p(A)$. Найдем образ A:

$$\operatorname{Im} A = \big\{x \in C^1[0,1] \;\big|\; x(0) = 0\big\}$$

Тогда для любого $x \in \big[\operatorname{Im} A\big]$ выполнено $x(0) = 0$. Значит,

$$\big[\operatorname{Im} A\big] \neq C[0,1] \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \in \sigma_r(A),$$

то есть $\lambda = 0$ лежит в остаточном спектре.

4. Найдем резольвенту оператора A, т.е. отображение $R_A : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to L\big(C[0,1]\big)$.

Если решить уравнение $(A - \lambda I)x = y$ относительно x, то

$$x = (A - \lambda I)^{-1} y = R_A(\lambda) y$$

Итак, хотим для произвольного $y \in C[0,1]$ решить интегральное уравнение

$$\underbrace{\int\limits_0^t x(s)ds}_{z(t)} - \lambda x(t) = y(t), \qquad t \in [0,1]$$

Аналогично сводя его к задаче Коши, получаем

$$\begin{cases} z(t) - \lambda z'(t) = y(t) \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

Решая сначала однородное уравнение, а потом методом вариации постоянного — неоднородное, находим

$$z(t) = -\frac{1}{\lambda} e^{\frac{t}{\lambda}} \int\limits_0^t e^{-\frac{s}{\lambda}} y(s)\, ds$$

Тогда $x(t) = z'(t)$. Итого, резольвента

$$\big(R_A(\lambda)y\big)(t) = -\frac{1}{\lambda^2} e^{\frac{t}{\lambda}} \int\limits_0^t e^{-\frac{s}{\lambda}} y(s)\, ds - \frac{1}{\lambda} y(t)$$

Задача §7.11

Найти спектр оператора $A \in L\big(C[0, 2\pi]\big)$:

$$(Ax)(t) = e^{it} x(t)$$

Решение:

1. Покажем, что **точечный спектр** $\sigma_p(A)$ **пуст**.

   Допустим противное, $\exists \lambda \in \sigma_p(A)$. Значит, есть соответствующий собственный вектор:

   $$\begin{cases} e^{it} x(t) = \lambda x(t), \qquad t \in [0, 2\pi] \\ x(t) \not\equiv 0 \end{cases}$$

   Значит, $\exists t_0 \in [0, 2\pi]$, такое, что $x(t_0) \neq 0$. В силу непрерывности $x(t) \neq 0$ в целой окрестности $U(t_0)$. Значит, выполнено

   $$e^{it} = \lambda, \qquad t \in U(t_0)$$

   Такое равенство невозможно. Значит, $\sigma_p(A) = \varnothing$.

2. Покажем, что если $|\lambda| \neq 1$, то $\lambda \notin \sigma(A)$.

   Достаточно показать, что $\mathrm{Im}(A - \lambda I) = C[0, 2\pi]$. В предыдущем пункте мы уже показали, что $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$, поэтому по теореме Банаха об обратном операторе, $A - \lambda I$ будет непрерывно обратимым, что эквивалентно $\lambda \notin \sigma(A)$.

   Итак, проверим сюръективность $A - \lambda I$. Для любого $y \in C[0, 2\pi]$ ищем решение уравнения

   $$e^{it} x(t) - \lambda x(t) = y(t)$$

   Так как $|\lambda| \neq 1$, то есть решение

   $$x(t) = \frac{y(t)}{e^{it} - \lambda} \in C[0, 2\pi]$$

3. Покажем, что если $|\lambda| = 1$, то $\lambda \in \sigma_r(A)$.

   Найдем образ:

   $$\mathrm{Im}(A - \lambda I) = \Big\{ \big(e^{it} - \lambda\big) x(t) \;\Big|\; x(t) \in C[0, 2\pi] \Big\}$$

   Так как $|\lambda| = 1$, то $\lambda = e^{i\psi},\ \psi \in [0, 2\pi]$. Значит, для любого $x \in \mathrm{Im}\, A_\lambda$ выполнено $x(\psi) = 0$.

   Кроме того, это же выполнено и для любого $x \in \big[\mathrm{Im}\, A_\lambda\big]$, поэтому $\big[\mathrm{Im}\, A_\lambda\big] \neq C[0, 2\pi]$.

   Значит, $\lambda \in \sigma_r(A)$.

Итак,

$$\sigma(A) = \sigma_r(A) = \big\{ \lambda \mid |\lambda| = 1 \big\}$$

Задача §11.9

Найти сопряженный оператор к оператору $A \in L(\ell_2)$:

$$(Ax)(k) = \begin{cases} 0 & , \ k = 1 \\ x(k-1) & , \ k > 1 \end{cases}$$

Найти $\sigma(A)$ и $\sigma(A^*)$.

Решение:

1. Найдем **сопряженный оператор** (по определению для гильбертового пространства).

$$\langle Ax, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (Ax)(k)\overline{y(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k+1)} = \langle x, A^*y \rangle,$$

где оператор $A^* : \ell_2 \to \ell_2$:

$$(A^*y)(k) = y(k+1)$$

То есть сопряженным к оператору правого сдвига является оператор левого сдвига. Легко вычислить, что $\|A\| = \|A^*\| = 1$, поэтому $\sigma(A) \subset B_1(0)$ и $\sigma(A^*) \subset B_1(0)$.

2. Найдем **спектр оператора** A^*.

- Найдем точечный спектр. Для этого найдем, при каких λ существуют нетривиальные решения уравнения $A^*x = \lambda x$. Покомпонентно:

$$x(k+1) = \lambda x(k), \qquad k \in \mathbb{N}$$

Несложно получить, что $x(k) = \lambda^{k-1}x(1)$, где $x(1) \neq 0$, т.к. нас интересуют нетривиальные решения. Проверим принадлежность ℓ_2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\lambda^{k-1}x(1)\right|^2 = |x(1)|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^{2k-2} = \begin{cases} < +\infty & , \ |\lambda| < 1, \\ +\infty & , \ |\lambda| = 1 \end{cases}$$

Значит,

$$\sigma_p(A^*) = \big\{\lambda \ \big| \ |\lambda| < 1\big\}$$

Так как $\sigma(A^*) \subset B_1(0)$ замкнуто, то тогда получаем, что

$$\sigma_c(A^*) \cup \sigma_r(A^*) = \big\{\lambda \ \big| \ |\lambda| = 1\big\}$$

3. Найдем **спектр оператора** A.

- Найдем точечный спектр. Для этого найдем, при каких λ существуют нетривиальные решения уравнения $Ax = \lambda x$.

При $\lambda = 0$ из $Ax = 0$ следует, что $x = 0$, значит, $0 \neq \sigma_p(A)$.

При $\lambda \neq 0$ для первой компоненты получаем: $0 = \lambda x(1)$, значит, $x(1) = 0$. Для всех последующих компонент имеем

$$x(k) = \frac{x(k-1)}{\lambda} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda \notin \sigma_p(A)$$

Итак, точечный спектр пуст: $\sigma_p(A) = \varnothing$. Это равносильно тому, что $\forall \lambda \in \mathbb{C}: \ \ \operatorname{Ker} A_\lambda = \{0\}$.

- Найдем непрерывный и остаточный спектр. Для этого найдем, при каких λ оператор $A - \lambda I$ не является сюръективным.

Для произвольного $y \in \ell_2$ ищем решение уравнения $Ax - \lambda x = y$. Запишем покомпонентно

$$\begin{cases} -\lambda x(1) = y(1), \\ x(k-1) - \lambda x(k) = y(k), \qquad k \geq 2 \end{cases}$$

При $\lambda = 0$ первое уравнение не всегда имеет решение, поэтому $0 \in \sigma(A)$.

При $\lambda \neq 0$ несложно найти решение

$$x(k) = -\frac{1}{\lambda}\sum_{m=1}^{k}\frac{y(m)}{\lambda^{k-m}} = -\frac{y(1)}{\lambda^k} - \frac{y(2)}{\lambda^{k-1}} - \ldots - \frac{y(k)}{\lambda}$$

Если $|\lambda| < 1$, то можно взять $y = e_1$, и тогда

$$|x(k)| = \frac{1}{|\lambda|^k} \longrightarrow +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad x \notin \ell_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{Im} A_\lambda \neq \ell_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda \in \sigma(A)$$

Итак,

$$B_1(0) \supset \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) \supset \big\{\lambda \;\big|\; |\lambda| < 1\big\}$$

В силу замкнутости спектра:

$$\sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) = \big\{\lambda \;\big|\; |\lambda| \leq 1\big\}$$

Отдельно непрерывный и остаточный спектр можно было не искать. Можно было воспользоваться теоремой о спектре сопряженного оператора (над гильбертовым пространством):

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$$

4. Разделим непрерывные и остаточные спектры операторов A и A^*.

   - Докажем, что $\lambda \in \sigma_p(A^*)$ тогда и только тогда, когда $\overline{\lambda} \in \sigma_r(A)$.

     Используем теорему Фредгольма:

     $$\big(\operatorname{Im} A\big)^\perp = \operatorname{Ker} A^*$$

     Важно отметить, что в случае гильбертового пространства, левый и правый аннуляторы совпадают с ортогональным дополнением.

     $$\lambda \in \sigma_p(A^*) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{Ker}\underbrace{(A^* - \lambda I)}_{(A-\overline{\lambda}I)^*} \neq \{0\} \qquad \xLeftrightarrow[\text{Фредгольма}]{\text{теорема}} \qquad \big(\operatorname{Im}(A - \overline{\lambda}I)\big)^\perp \neq \{0\}$$

     $$\Longleftrightarrow \qquad \big[\operatorname{Im}(A - \overline{\lambda}I)\big] \neq \{0\}^\perp = X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \overline{\lambda} \in \sigma_r(A)$$

   Это утверждение верно для любого оператора A над гильбертовым пространством.

   Итак, мы получили, что

   $$\sigma_p(A^*) = \overline{\sigma_r(A)}, \qquad \sigma_p(A) = \overline{\sigma_r(A^*)}$$

5. Окончательно,

$$\begin{array}{ccc} \sigma_p(A) = \varnothing & \sigma_c(A) = \big\{|\lambda| = 1\big\} & \sigma_r(A) = \big\{|\lambda| < 1\big\} \\ \sigma_p(A^*) = \big\{|\lambda| < 1\big\} & \sigma_c(A^*) = \big\{|\lambda| = 1\big\} & \sigma_r(A^*) = \varnothing \end{array}$$