АМВ. ДЗ на неделю 12.

Прохоров Юрий, 771

Задача 1

Рассмотрим задачу максимизации функции $x+y$ на множестве неотрицательных x и y таких, что $2x+y \leq 3$ и $x+3y \leq 5$. Какая задача будет двойственной к этой задаче? Найдите оптимальное значение функции в прямой задаче и докажите его оптимальность с использованием двойственности.

Решение:

Исходная задача:

$$\begin{cases} x+y \longrightarrow \max \\ 2x+y \leq 3 \\ x+3y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1+x_2 \longrightarrow \max \\ 2x_1+x_2 \leq 3 \\ x_1+3x_2 \leq 5 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c^T x \longrightarrow \max \\ Ax \leq b \end{cases}$$

$$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Будем считать по определению, что векторы $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$, если каждая $u_i \leq v_i, \ \forall i$.

Приведем задачу к двойственной. Умножая все неравенства на $y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$ соответственно и складывая новые неравенства, получаем:

$$y_1\big(2x_1+x_2\big)+y_2\big(x_1+3x_2\big)+y_3\big(-x_1\big)+y_4\big(-x_2\big) \leq 3y_1+5y_2$$

$$x_1(2y_1+y_2-y_3)+x_2(y_1+3y_2-y_3) \leq 3y_1+5y_2$$

Хотим, чтобы в левой части было $c^T x$, а правую часть хотим минимизировать, согласно следующей теореме:

Теорема. *Если* $\max\,(c^T x) = d$*, то из неравенств-ограничений выводимо неравенство* $c^T x \leq d$*.*

Таким образом, двойственная задача имеет вид:

$$\begin{cases} 3y_1+5y_2 \longrightarrow \min \\ 2y_1+y_2-y_3 = 1 \\ y_1+3y_2-y_4 = 1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_4 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b^T y \longrightarrow \min \\ A^T y = c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Теорема. *Задача линейного программирования имеет следующую двойственную. Причем решение (максимум) первой задачи совпадает с решением (минимумом) второй задачи.*

$$\begin{cases} c^T x \longrightarrow \max \\ Ax \leq b \end{cases} \implies \begin{cases} b^T y \longrightarrow \min \\ A^T y = c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Можно не вводить лишних переменных y_3, y_4, а вместо равенств написать неравенства:

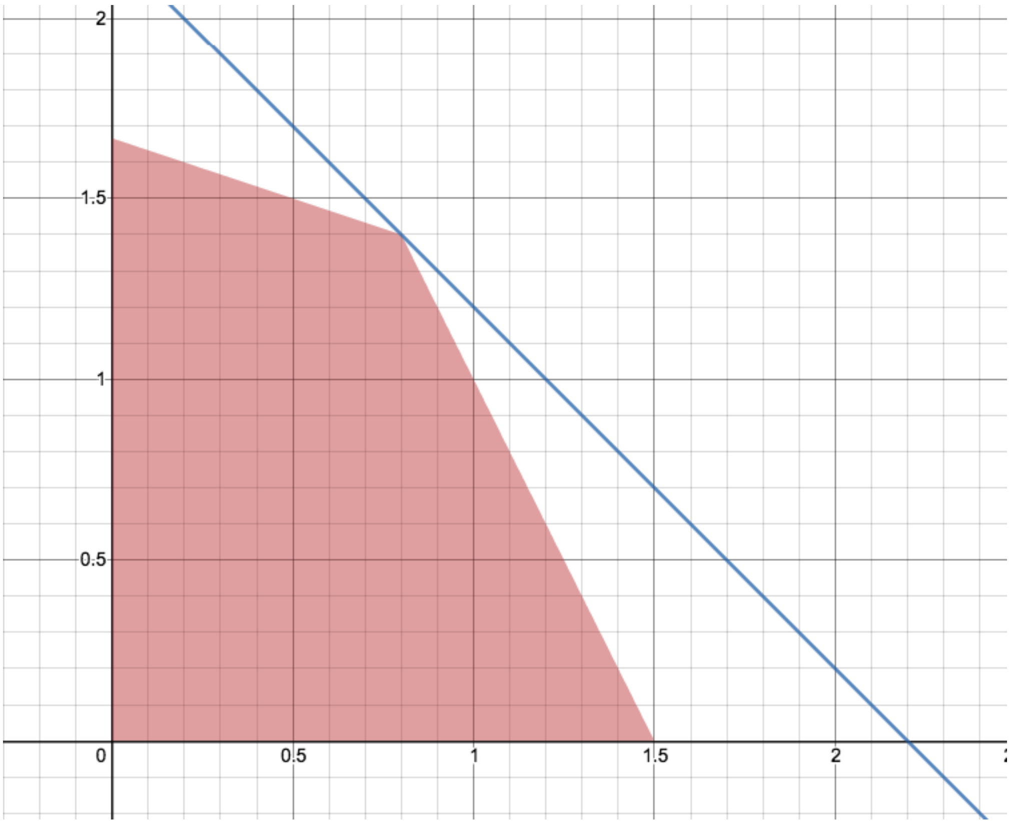
$$\begin{cases} 3y_1+5y_2 \longrightarrow \min \\ 2y_1+y_2-y_3=1 \\ y_1+3y_2-y_4=1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \\ y_3 \geq 0 \\ y_4 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y_1+5y_2 \longrightarrow \min \\ 2y_1+y_2 \geq 1 \\ y_1+3y_2 \geq 1 \\ y_1 \geq 0 \\ y_2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b^Ty \longrightarrow \min \\ A^Ty \geq c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Найдем решение этой задачи. Заметим, что в исходной задаче

$$\begin{cases} 2x_1+x_2=3 \\ x_1+3x_2=5 \end{cases} \iff x_1=\frac{4}{5},\quad x_2=\frac{7}{5}$$

Поэтому логично предположить, что $d=\frac{4}{5}+\frac{7}{5}=\frac{11}{5}$ — решение исходной задачи. Докажем, что это на самом деле так.

Неравенства исходной системы задают выпуклый многоугольник, в чем несложно убедиться геометрически. Уравнение $x+y=d$ задает прямую. При наибольшем d прямая должна касаться многоугольника, и эта точка как раз задается системой выше.



Задача 2

Задана сеть, в которой для каждой вершины $v \in V$ задано число $\varepsilon_v \in [0,1]$ такое, что суммарный выходящий из вершины поток равен произведению ε_v на суммарный входящий поток. Число $1-\varepsilon_v$ можно трактовать как долю потерь в вершине v. Предложите полиномиальный алгоритм поиска максимального потока в сети с потерями.

Решение:

Сначала допустим, что потерь нет, и запишем задачу о максимальном потоке как задачу линейного программирования. Будем считать, что в ориентированном графе m ребер и n вершин, s — источник, t — сток.

Также заданы числа $C_1, C_2, \ldots, C_m$ — пропускные способности ребер. Поток задается числами $w_1, \ldots, w_m$. Чтобы поток был корректным, необходимо и достаточно, чтобы дивергенция каждой вершины, кроме s и t, было равна нулю:

$$\forall v \in V \ (v \neq s, v \neq t) \ : \ \mathrm{div}(v) = \sum_{in} w - \sum_{out} w = 0,$$

и поток через каждое ребро не превышал его пропускную способность. Ясно, что уравнение $\mathrm{div}(v) = 0$ является линейным относительно $w_1, \ldots, w_m$.

Величину потока тогда можно записать как

$$F = \mathrm{div}(t) = -\mathrm{div}(s).$$

Итак, соответствующая задача линейного программирования:

$$\begin{cases} \mathrm{div}(t) \longrightarrow \max \\ \mathrm{div}(v) = 0, \qquad \forall v \neq s, t \\ 0 \leq w_j \leq C_j, \qquad \forall j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Пусть теперь у каждой вершины есть коэффициент потерь ε_v. Тогда условие нулевой дивергенции записывается в виде (по определению потерь):

$$\varepsilon_v \sum_{in} w = \sum_{out} w$$

Линейность уравнений не нарушается. Тогда задача линейного программирования имеет вид:

$$\begin{cases} \mathrm{div}(t) \longrightarrow \max \\ \varepsilon_v \sum\limits_{in} w = \sum\limits_{out} w, \qquad \forall v \neq s, t \\ 0 \leq w_j \leq C_j, \qquad \forall j = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Известно, что задачи линейного программирования разрешимы за полиномиальное время, поэтому и такая задача решается за полином. В итоге, алгоритм заключается в составлении задачи ЛП и ее решении.

Задача 3

На плоскости заданы точки $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 7)$, $(5, 11)$, $(7, 14)$, $(8, 15)$, $(10, 19)$. Требуется провести по этим точкам наименее уклоняющуюся прямую, т. е. такую прямую $ax+by+c = 0$, что a, b, c являются решениями задачи $\min\limits_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \max\limits_{1\leq i\leq 7} |ax_i + by_i + c|$. Предложите способ решения этой задачи с помощью вспомогательной задачи ЛП. Запишите эту задачу ЛП для указанной системы точек.

Решение:

Пусть

$$\max_{1\leq i\leq 7} |ax_i + by_i + c| = M \longrightarrow \min$$

Эта задача равносильна следующей:

$$\begin{cases} M \longrightarrow \min \\ |ax_i + by_i + c| \leq M, \qquad i = 1, \ldots, 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M \longrightarrow \min \\ -M \leq ax_i + by_i + c \leq M, \qquad i = 1, \ldots, 7 \end{cases}$$

В итоге имеем задачу линейного программирования относительно переменных a, b, c, M:

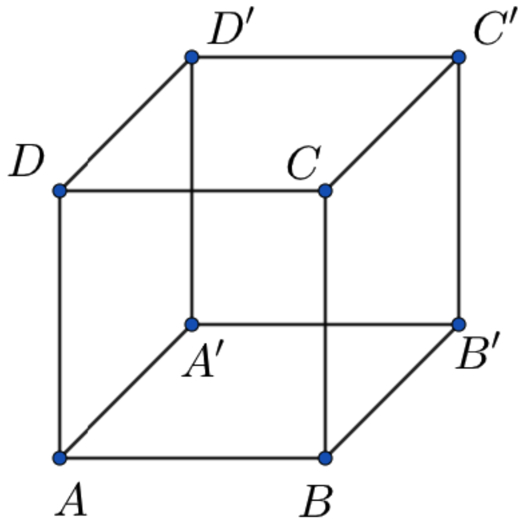
$$\begin{cases} M \longrightarrow \min \\ ax_i + by_i + c - M \leq 0, \qquad i = 1, \ldots, 7 \\ ax_i + by_i + c + M \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, 7 \end{cases}$$

Для указанной системы точек задача будет содержать 14 неравенств.

Задача 4

Многогранник P_ε задан неравенствами $0 \le x_1 \le 1$, $\varepsilon x_1 \le x_2 \le 1 - \varepsilon x_1$, $\varepsilon x_2 \le x_3 \le 1 - \varepsilon x_2$, где $\varepsilon \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. Геометрически P_ε — это деформированный куб. Покажите, что в этом многограннике есть путь по рёбрам, стартующий из начала координат и проходящий по всем вершинам, в котором величина координаты x_3 монотонно возрастает.

Решение:



Многогранник задается системой:

$$P \equiv P_\varepsilon \;:\qquad \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \varepsilon x \le y \le 1 - \varepsilon x \\ \varepsilon y \le z \le 1 - \varepsilon y \end{cases}, \qquad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$$

Многогранник P имеет 8 вершин, каждая из которых задается системой из трех уравнений как пересечение трех плоскостей. Их несложно найти:

$$A = (0,0,0), \qquad B = (0,0,1), \qquad C = (0,1,1-\varepsilon), \qquad D = (0,1,\varepsilon)$$

$$A' = (1,\varepsilon,\varepsilon^2), \qquad B' = (1,\varepsilon,1-\varepsilon^2), \qquad C' = (1,1-\varepsilon,1-\varepsilon+\varepsilon^2), \qquad D' = (1,1-\varepsilon,\varepsilon(1-\varepsilon))$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, можно убедиться, что вершины переходят в вершины куба. На рисунке выше показаны ребра в P. В силу того, что $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$:

$$0 < \varepsilon^2 < \varepsilon(1-\varepsilon) < \varepsilon < 1-\varepsilon < 1-\varepsilon(1-\varepsilon) < 1-\varepsilon^2 < 1$$

Тогда существует единственный путь, в котором третья координата монотонно возрастает:

$$A \to A' \to D' \to D \to C \to C' \to B' \to B$$

Из рисунка выше можно убедиться, что такие ребра существуют.

Задача 5

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Покажите, что при ненулевом векторе b система $\begin{cases} Ax \le b; \\ x \ge 0 \end{cases}$ совместна тогда и только тогда, когда несовместна система $\begin{cases} A^T y \ge 0; \\ y \ge 0; \\ b^T y < 0. \end{cases}$

Теорема Фредгольма. $\mathrm{Ker}A^T = \big(\mathrm{Im}A\big)^{\perp}$.

Теорема Фредгольма о неравенствах. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ b \neq 0$.

$$Ax = b \quad \textit{совместна} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A^T y = 0 \\ b^T y > 0 \end{cases} \quad \textit{несовместна}$$

Теорема Фаркаша. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ b \neq 0$.

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \textit{совместна} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A^T y \geq 0 \\ b^T y < 0 \end{cases} \quad \textit{несовместна}$$

Теорема Гордана. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

$$\begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \textit{совместна} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^T y < 0 \quad \textit{несовместна}$$

Теорема Гейла. *Пусть* $A \in \mathbb{R}^{m\times n},\ b \in \mathbb{R}^m,\ b \neq 0$.

$$Ax \leq b \quad \textit{совместна} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A^T y = 0 \\ b^T y < 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \textit{несовместна}$$

Решение: Первая система равносильна системе:

$$\begin{cases} Ax + z = b \\ x \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \big(A \mid E\big) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = b \\ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases}$$

По теореме Фаркаша, она совместна тогда и только тогда, когда несовместна система

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A^T \\ E \end{pmatrix} y \geq 0 \\ b^T y < 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} A^T y \geq 0 \\ y \geq 0 \\ b^T y < 0 \end{cases}$$

Это и требовалось доказать.

Задача 6

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Докажите, что однородная система $\begin{cases} Ax \leq 0; \\ x \geq 0; \\ x \neq 0 \end{cases}$ совместна тогда и только тогда, когда несовместна система $\begin{cases} A^T y > 0; \\ y \geq 0. \end{cases}$

Решение:

$$\begin{cases} Ax \leq 0 \\ x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} Ax + z = 0 \\ x \geq 0 \\ x \neq 0 \\ z \geq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \big(A \mid E\big) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\iff \quad \begin{cases} (A \mid E)\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \geq 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \neq 0 \ \vee \ \begin{cases} x \neq 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} (A \mid E)\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \geq 0 \\ \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \neq 0 \end{cases} \quad \bigvee \quad \begin{cases} Ax = 0 \\ x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем, то есть исходная система совместна тогда и только тогда, когда совместна хотя бы одна их этих двух систем. К этим системам можно применить теорему Гордана. В итоге имеем, что

$$\begin{cases} Ax \leq 0 \\ x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \text{совместна} \quad \iff \quad \begin{cases} A^T y < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad A^T y < 0 \ \ \text{несовместна}$$

Хотим доказать, что все это равносильно несовместности системы $\begin{cases} A^T y > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Навешивая отрицание на оба высказывания, имеем, что надо доказать

$$\begin{cases} A^T y > 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{совместна} \quad \iff \quad \begin{cases} A^T y < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad A^T y < 0 \ \ \text{совместны}$$

Заметим, что из совместности первой системы в правой части следует совместность второй, поэтому достаточно показать, что

$$\begin{cases} A^T y > 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{совместна} \quad \iff \quad \begin{cases} A^T y < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \text{совместна}$$

или, другими словами,

$$\begin{cases} Ax > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{совместна} \quad \iff \quad \begin{cases} Ay < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \text{совместна}$$

Для этого сначала докажем, что второе неравенство в левой системе можно можно заменить на такое же, но строгое (заменить $x \geq 0$ на $x > 0$). Очевидно, что если левая система со строгими неравенствами совместна, то и с нестрогим неравенством тоже. Покажем в обратную сторону. Пусть $\tilde{x}$ — решение левой системы — имеет нулевую компоненту $\tilde{x}_k = 0$. Пусть $A\tilde{x} = \tilde{b} > 0$.

Возьмем $x_\varepsilon = \tilde{x}$, но $x_k = \varepsilon > 0$. Так как все числа в матрице A конечны, а каждая компонента в векторе $\tilde{b}$ строго больше нуля, то найдется очень малое $\varepsilon > 0$, что все компоненты в $\tilde{b}$ уменьшаться слабо, то есть

$$\exists \varepsilon > 0 : \ Ax_\varepsilon = b > 0$$

Итак, можно сделать любую нулевую компоненту положительной. Теперь осталось доказать, что

$$\begin{cases} Ax > 0 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{совместна} \quad \iff \quad \begin{cases} Ay < 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \text{совместна}$$

Но это тривиально, потому что x — решение левой системы тогда и только тогда, когда $y = -x$ есть решение правой системы.

Задача 7

Доказать, что если не модифицировать построение двойственной задачи и не обрабатывать отдельно неравенства вида $x_i \leq 0$ и $x_j \geq 0$, то двойственная задача к двойственной задаче может не совпадать в точности с исходной. Доказать, что при указанной на семинаре обработке таких простейших неравенств двойственная к двойственной задача уже будет совпадать с исходной.

Замечание. Двойственная к двойственной задача всегда может быть приведена к исходной исключением некоторых переменных.

Решение:

Рассмотрим задачу ЛП:

$$\begin{cases} x \longrightarrow \max \\ x \leq 1 \end{cases} \xrightarrow[\text{задача}]{\text{двойственная}} \begin{cases} y \longrightarrow \min \\ y = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{задача}]{\text{двойственная}} \begin{cases} z_1 \longrightarrow \max \\ z_1 + z_2 = 1 \\ z_2 \geq 0 \end{cases}$$

Двойственная к двойственной не совпадает с исходной.

На семинаре мы показали, что

$$\begin{cases} c^T x \longrightarrow \max \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{задача}]{\text{двойственная}} \begin{cases} b^T y \longrightarrow \min \\ A^T y \geq c \\ y \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -b^T y \longrightarrow \max \\ -A^T y \leq -c \\ y \geq 0 \end{cases}$$

По тому же правилу строим двойственную задачу:

$$\begin{cases} -c^T z \longrightarrow \min \\ -A^{TT} z \geq -b \\ z \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c^T z \longrightarrow \max \\ Az \leq b \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Она совпадает с исходной.