Случайные процессы. ДЗ 5.

Прохоров Юрий, 776

Задача 1

Доказать, что для процесса Леви $X(t),\ t \geq 0$ выполнено (при условии существования соответствующих моментных характеристик):

(a) $\mathbb{E}X(t) = t\mathbb{E}X(1)$;

(b) $\mathbb{V}X(t) = t\mathbb{V}X(1)$;

(c) $R_X(t,s) = \min(t,s)\mathbb{V}X(1)$.

Решение:

(a) Пусть $\varphi_t(s) \equiv \varphi_{X(t)}(s)$ — характеристическая функция. Тогда

$$\varphi_t(s) = \mathbb{E}e^{isX(t)} \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_t'(0) = i\mathbb{E}X(t)$$

С другой стороны, для процесса Леви выполнено

$$\varphi_t(s) = \big[\varphi_1(s)\big]^t \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi_t'(0) = t\varphi_1'(0)$$

Тогда

$$\mathbb{E}X(t) = \frac{1}{i}\,\varphi_t'(0) = \frac{t}{i}\,\varphi_1'(0) = t\mathbb{E}X(1)$$

(b) Аналогично, второй момент выражается через характеристическую функцию

$$\varphi_t''(0) = -\mathbb{E}X^2(t)$$

И для процессов Леви имеется связь

$$\varphi_t(s) = \big[\varphi_1(s)\big]^t, \qquad \varphi_t'(s) = t\big[\varphi_1(s)\big]^{t-1}\varphi_1'(s), \qquad \varphi_t''(0) = t(t-1)\big(\varphi_1'(0)\big)^2 + t\varphi_1''(0)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathbb{V}X(t) &= \mathbb{E}X^2(t) - \big(\mathbb{E}X(t)\big)^2 = -\varphi_t''(0) - t^2\big(\mathbb{E}X(1)\big)^2 = -t(t-1)\big(\varphi_1'(0)\big)^2 - t\varphi_1''(0) - t^2\big(\mathbb{E}X(1)\big)^2 = \\ &= t(t-1)\big(\mathbb{E}X(1)\big)^2 + t\mathbb{E}X^2(1) - t^2\big(\mathbb{E}X(1)\big)^2 = t\mathbb{E}X^2(1) - t\big(\mathbb{E}X(1)\big)^2 = \\ &= t\mathbb{V}X(1)\end{aligned}$$

(c) Используя независимость приращений процесса Леви, получаем при $t < s$

$$\begin{aligned}R_X(t,s) &= \mathbb{E}X(t)X(s) - \mathbb{E}X(t)\cdot\mathbb{E}X(s) = \mathbb{E}X(t)\big(X(s) - X(t) + X(t)\big) - \mathbb{E}X(t)\cdot\mathbb{E}X(s) = \\ &= \mathbb{E}X(t)\mathbb{E}\big(X(s) - X(t)\big) + \mathbb{E}X^2(t) - \mathbb{E}X(t)\cdot\mathbb{E}X(s) = \\ &= \mathbb{E}X^2(t) - \big(\mathbb{E}X(t)\big)^2 = \mathbb{V}X(t) = t\mathbb{V}X(1)\end{aligned}$$

В общем случае:

$$R_X(t,s) = \min(t,s)\mathbb{V}X(1)$$

Задача 2

Вычислить корреляционную функцию сложного пуассоновского процесса $Q(t)$.

Решение:

Сначала вычислим матожидание

$$\begin{aligned}
m_Q(t) = \mathbb{E}Q(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{K(t)} V_i \;\middle|\; K(t) = n\right] \mathbb{P}\{K(t) = n\} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}V_1 \mathbb{P}\{K(t) = n\} = \mathbb{E}V_1 \cdot \mathbb{E}K(t) = \\
&= \lambda t \mathbb{E}V_1
\end{aligned}$$

Вычислим второй момент:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Q^2(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{K(t)} V_i\right)^2 \;\middle|\; K(t) = n\right] \mathbb{P}\{K(t) = n\} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{E}V_1^2 \mathbb{P}\{K(t) = n\} = \mathbb{E}V_1^2 \cdot \mathbb{E}K(t) = \\
&= \lambda t \mathbb{E}V_1^2
\end{aligned}$$

Теперь вычислим корреляционную функцию, используя независимость приращений процесса Леви. При $t < s$:

$$\begin{aligned}
R_X(t,s) &= \mathbb{E}Q(t)Q(s) - \mathbb{E}Q(t) \cdot \mathbb{E}Q(s) = \mathbb{E}Q(t)\big(Q(s) - Q(t) + Q(t)\big) - \mathbb{E}Q(t) \cdot \mathbb{E}Q(s) = \\
&= m_X(t)m_X(s-t) + \mathbb{E}Q^2(t) - m_X(t)m_X(s) = \\
&= \lambda t \mathbb{E}V_1^2
\end{aligned}$$

В общем случае имеем

$$R_X(t,s) = \lambda \min(t,s) \mathbb{E}V_1^2$$

Задача 3

Пусть $W(t)$ — винеровский процесс. Является ли процесс

$$X(t) = \exp\left(W(t) - \frac{t}{2}\right), \qquad t \geq 0$$

непрерывным в среднем квадратичном?

Решение:

Сначала получим вспомогательный результат. Пусть $\xi \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Вычислим $\mathbb{E}e^{\xi}$.

$$\mathbb{E}e^{\xi} = \varphi_{\xi}(-i) = \exp\left\{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right\}\Bigg|_{t=-i} = \exp\left\{a + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$$

Вычислим ковариационную функцию при $t \leq s$:

$$K_X(t,s) = \mathbb{E}X(t)X(s) = \mathbb{E}\exp\left(W(t) + W(s) - t\right)$$

Найдем распределение $W(t) + W(s)$. Оно нормальное, т.к. является линейным преобразованием нормального случайного вектора:

$$W(t) + W(s) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(t) \\ W(s) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} W(t) \\ W(s) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t & t \\ t & s \end{bmatrix}\right)$$

Тогда легко видеть, что
$$W(t) + W(s) \sim \mathcal{N}(0, 3t + s)$$
Тогда при $t \le s$:
$$K_X(t, s) = \mathbb{E}e^{W(t)+W(s)-t} = e^{-t}e^{\frac{3t+s}{2}} = \exp\left\{\frac{t+s}{2}\right\}$$
Аналогичный результат получается при $t \ge s$. Итак, ковариационная функция
$$K_X(t, s) = \exp\left\{\frac{t+s}{2}\right\}$$
непрерывна всюду. Тогда, по критерию с.к.-непрерывности, процесс $X(t)$ с.к.-непрерывен.

Интересно также заметить, что матожидание данного случайного процесса постоянно:
$$m_X(t) = \mathbb{E}e^{W(t)-t/2} = e^{-t/2}e^{t/2} = 1$$