Математическая статистика. ДЗ 9.

Прохоров Юрий, 776

Задача 1

Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ — простая выборка с плотностью

$$f_\theta(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)} & , \quad x \geq \theta, \\ 0 & , \quad \text{иначе.} \end{cases}$$

Построить равномерно наиболее мощный критерий уровня α_0 для проверки гипотез

$$\begin{cases} H_0: & \theta = 0 \\ H_1: & \theta > 0 \end{cases}$$

Решение:

1. Сначала построим наиболее мощный критерий уровня α_0 для проверки простых гипотез

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta = \theta_1 \end{cases}, \qquad \theta_1 > \theta_0$$

Функция правдоподобия:

$$L(\mathbf{X} \mid \theta) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(X_i) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(X_i-\theta)} \mathbb{I}\{X_i \geq \theta\} = e^{n\theta} \cdot e^{-\sum_i X_i} \cdot \mathbb{I}\{X_{(1)} \geq \theta\},$$

где $X_{(1)} = \min\limits_{i=1,\ldots,n} X_i$ — первая порядковая статистика.

Отношение правдоподобий:

$$\Lambda(\mathbf{X}) = \frac{L(\mathbf{X} \mid \theta_1)}{L(\mathbf{X} \mid \theta_0)} = e^{n(\theta_1-\theta_0)} \frac{\mathbb{I}\{X_{(1)} \geq \theta_1\}}{\mathbb{I}\{X_{(1)} \geq \theta_0\}} = \begin{cases} 0 & , \quad X_{(1)} < \theta_1 \\ e^{n(\theta_1-\theta_0)} & , \quad X_{(1)} \geq \theta_1 \end{cases}$$

2. Ищем решающее правило Неймана-Пирсона в виде

$$\delta_{c,p}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \Lambda(\mathbf{X}) > c, \\ p, & \Lambda(\mathbf{X}) = c, \\ 0, & \Lambda(\mathbf{X}) < c. \end{cases}$$

Его ошибка 1-го рода:

$$\alpha(\delta_{c,p}) = \mathbb{P}_{H_0}\{\Lambda(\mathbf{X}) > c\} + p \cdot \mathbb{P}_{H_0}\{\Lambda(\mathbf{X}) = c\}$$

По теореме Неймана-Пирсона, c и p находятся из условия

$$\alpha(\delta_{c,p}) = \alpha_0$$

Будем перебирать разные значения c:

- $c > e^{n(\theta_1-\theta_0)}$

$$\alpha = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{нет решений}$$

- $c = e^{n(\theta_1-\theta_0)}$

$$\alpha = p \cdot \mathbb{P}_{H_0}\{X_{(1)} \geq \theta_1\} = p \cdot \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{H_0}\{X_i \geq \theta_1\} = p \cdot \left[\int\limits_{\theta_1}^{+\infty} f_{\theta_0}(x)\, dx\right]^n = p \cdot e^{-n(\theta_1-\theta_0)} = \alpha_0$$

$$\Longrightarrow \qquad p = \alpha_0 e^{n(\theta_1-\theta_0)} \le 1,$$

то есть этот случай дает решение, только если выполнено неравенство $e^{-n(\theta_1-\theta_0)} \ge \alpha_0$.

Соответствующий критерий:

$$\delta_1(\mathbf{X}) = \begin{cases} \alpha_0 e^{n(\theta_1-\theta_0)} & , \quad X_{(1)} \ge \theta_1 \\ 0 & , \quad X_{(1)} < \theta_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \alpha = \alpha_0 \\ \beta = 1 - \alpha_0 e^{n(\theta_1-\theta_0)} \end{cases}$$

- $0 < c < e^{n(\theta_1-\theta_0)}$

  $\alpha = \mathbb{P}_{H_0}\{X_{(1)} \ge \theta_1\} = e^{-n(\theta_1-\theta_0)} \qquad \Longrightarrow \qquad$ возможно решение, только если $e^{-n(\theta_1-\theta_0)} \le \alpha_0$

  Соответствующий критерий:

  $$\delta_2(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(1)} \ge \theta_1 \\ 0, & X_{(1)} < \theta_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \alpha = e^{-n(\theta_1-\theta_0)} \\ \beta = 0 \end{cases}$$

  Видим, что этот критерий является наиболее мощным уровня α_0, если $e^{-n(\theta_1-\theta_0)} \le \alpha_0$.

- $c = 0$

  $$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}\{X_{(1)} \ge \theta_1\} + p \cdot \mathbb{P}_{H_0}\{X_{(1)} < \theta_1\} = e^{-n(\theta_1-\theta_0)} + p\big(1 - e^{-n(\theta_1-\theta_0)}\big) = \alpha_0$$

  $$\Longrightarrow \qquad p = \frac{\alpha_0 - e^{-n(\theta_1-\theta_0)}}{1 - e^{-n(\theta_1-\theta_0)}} \in [0,1], \qquad e^{-n(\theta_1-\theta_0)} \le \alpha_0$$

  Соответствующий критерий:

  $$\delta_3(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & , \quad X_{(1)} \ge \theta_1 \\ \frac{\alpha_0 - e^{-n(\theta_1-\theta_0)}}{1 - e^{-n(\theta_1-\theta_0)}} & , \quad X_{(1)} < \theta_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \alpha = \alpha_0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

3. Итак, мы получили 3 кандидата на наиболее мощных критерий: δ_1, δ_2 и δ_3. На каждый есть ограничения, когда их можно использовать.

   - $e^{-n(\theta_1-\theta_0)} \ge \alpha_0$

     Под этот случай подходит только критерий δ_1, и он является наиболее мощным критерием.

   - $e^{-n(\theta_1-\theta_0)} \le \alpha_0$

     Под этот случай подходят δ_2 и δ_3. Мощность у них одинакова (и равна 1), и оба критерия удовлетворяют ограничению на ошибку 1-го рода. Значит, оба являются наиболее мощными критериями уровня α_0.

     Мы далее будем использовать δ_2, потому что у него меньше ошибка 1-го рода, и у него проще запись.

     Формально, с помощью теоремы Неймана-Пирсона мы нашли только критерии δ_1 и δ_3. Критерий δ_2 не удовлетворяет требованиям этой теоремы, но, тем не менее, является наиболее мощным.

   Итак, мы можем объединить записи критериев δ_1 и δ_2, чтобы получить ответ:

   $$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} \min\big(1, \alpha_0 e^{n(\theta_1-\theta_0)}\big) & , \quad X_{(1)} \ge \theta_1 \\ 0 & , \quad X_{(1)} < \theta_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \alpha = \min\big(\alpha_0, e^{-n(\theta_1-\theta_0)}\big) \\ \beta = 1 - \min\big(1, \alpha_0 e^{n(\theta_1-\theta_0)}\big) \end{cases}$$

   Этот критерий зависит от θ_1, поэтому его нельзя обобщить на случай сложной односторонней альтернативы, как в исходном условии задачи.

4. Попробуем найти критерий, который тоже является наиболее мощным, но к тому же не зависит от параметра θ_1. Также будем искать его в детерминированом виде:

   $$\widetilde{\delta}_c(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(1)} \ge c \\ 0, & X_{(1)} < c \end{cases}, \qquad c \ge \theta_0$$

   Константу c подберем так, чтобы этот критерий был уровня α_0, то есть его ошибка 1-го рода была равна α_0:

   $$\alpha = \mathbb{E}_{H_0}\big[\widetilde{\delta}_c(\mathbf{X})\big] = \mathbb{P}_{H_0}\{X_{(1)} \ge c\} = e^{-n(c-\theta_0)} = \alpha_0 \qquad \Longrightarrow \qquad c = \theta_0 - \frac{\ln \alpha_0}{n}$$

Найдем ошибку второго рода этого критерия.

$$\begin{array}{lll} c \geq \theta_1 & \Longrightarrow & \beta = 1 - \mathbb{P}_{H_1}\{X_{(1)} \geq c\} = 1 - e^{-n(c-\theta_1)} = 1 - \alpha_0 e^{n(\theta_1-\theta_0)} \\ c \leq \theta_1 & \Longrightarrow & \beta = 0 \end{array}$$

Заметим, что

$$c \geq \theta_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad e^{-n(\theta_1-\theta_0)} \geq \alpha_0$$

Поэтому видно, что ошибка 2-го рода этого критерия совпадает с ошибкой 2-го рода оптимального критерия Неймана-Пирсона, построенного ранее. Значит, критерий $\widetilde{\delta}$ также является наиболее мощным критерием уровня α_0.

5. Заметим, что критерий

$$\widetilde{\delta}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(1)} \geq \theta_0 - \frac{\ln \alpha_0}{n} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

не зависит от θ_1 при условии $\theta_1 > \theta_0$. Это означает, что данный критерий можно использовать для проверки гипотез

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Покажем, что критерий $\widetilde{\delta}$ является **равномерно наиболее мощным критерием** уровня α_0, т.е. что выполнено:

$$W_{\widetilde{\delta}}(\theta) \geq W_{\delta}(\theta) \qquad \forall \theta > \theta_0, \;\; \forall \text{ критерия } \delta$$

Это выполнено, потому что для любого $\theta > \theta_0$ критерий $\widetilde{\delta}$ имеет максимальную мощность.

Задача 2

Пусть $\mathbf{X} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ — простая выборка из распределения $\mathcal{U}[\theta, \theta+1]$. Построить равномерно наиболее мощный критерий уровня α_0 для проверки гипотез

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

Решение:

1. Рассмотрим случай простой гипотезы:

$$\begin{cases} H_0: & \theta = \theta_0 \\ H_1: & \theta = \theta_1 \end{cases}, \qquad \theta_1 > \theta_0$$

Функция правдоподобия:

$$L(\mathbf{X} \mid \theta) = \mathbb{I}\{X_{(1)} \geq \theta, \; X_{(n)} \leq \theta + 1\},$$

где $X_{(i)}$ — i-ая порядковая статистика набора $\{X_i\}$.

Отношение правдоподобий вычислим в двух случаях:

(a) $\theta_1 < \theta_0 + 1$

$$\Lambda(\mathbf{X}) = \frac{\mathbb{I}\{X_{(1)} \geq \theta_1, \; X_{(n)} \leq \theta_1 + 1\}}{\mathbb{I}\{X_{(1)} \geq \theta_0, \; X_{(n)} \leq \theta_0 + 1\}} = \begin{cases} 0 & , \quad X_{(1)} < \theta_1 \\ 1 & , \quad X_{(1)} \geq \theta_1, \; X_{(n)} \leq \theta_0 + 1 \\ \infty & , \quad X_{(n)} > \theta_0 + 1 \end{cases}$$

(b) $\theta_1 \geq \theta_0 + 1$

$$\Lambda(\mathbf{X}) = \frac{\mathbb{I}\{X_{(1)} \geq \theta_1, \; X_{(n)} \leq \theta_1 + 1\}}{\mathbb{I}\{X_{(1)} \geq \theta_0, \; X_{(n)} \leq \theta_0 + 1\}} = \begin{cases} 0 & , \quad X_{(1)} < \theta_1 \\ \infty & , \quad X_{(n)} > \theta_0 + 1 \end{cases}$$

Заметим, что в обоих случаях можно ограничиться записью, как для случая (a).

2. Ищем решающее правило Неймана-Пирсона в виде

$$\delta_{c,p}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & \Lambda(\mathbf{X}) > c, \\ p, & \Lambda(\mathbf{X}) = c, \\ 0, & \Lambda(\mathbf{X}) < c. \end{cases}$$

Его ошибка 1-го рода:

$$\alpha(\delta_{c,p}) = \mathbb{P}_{H_0}\{\Lambda(\mathbf{X}) > c\} + p \cdot \mathbb{P}_{H_0}\{\Lambda(\mathbf{X}) = c\}$$

По теореме Неймана-Пирсона, c и p находятся из условия

$$\alpha(\delta_{c,p}) = \alpha_0$$

Будем перебирать разные значения c:

- $c > 1$

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}\{X_{(n)} > \theta_0 + 1\} = 0$$

Соответствующий критерий

$$\delta_1(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(n)} > \theta_0 + 1 \\ 0, & X_{(n)} \le \theta_0 + 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = \begin{cases} (\theta_0 + 1 - \theta_1)^n & , \ \theta_1 < \theta_0 + 1 \\ 0 & , \ \theta_1 \ge \theta_0 + 1 \end{cases} \end{cases}$$

- $c = 1$

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}\{X_{(n)} > \theta_0 + 1\} + p \cdot \mathbb{P}_{H_0}\{X_{(1)} \ge \theta_1,\ X_{(n)} \le \theta_0 + 1\} = 0 + p \cdot \mathbb{P}_{H_0}\{X_{(1)} \ge \theta_1\} =$$
$$= \begin{cases} p(\theta_0 + 1 - \theta_1)^n & , \ \theta_1 < \theta_0 + 1 \\ 0 & , \ \theta_1 \ge \theta_0 + 1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad p = \alpha_0(\theta_0 + 1 - \theta_1)^{-n} \le 1$$

Решение есть только при выполнении неравенств

$$\theta_1 < \theta_0 + 1, \qquad (\theta_0 + 1 - \theta_1)^n \ge \alpha_0$$

Соответствующий критерий

$$\delta_2(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & , \ X_{(n)} > \theta_0 + 1 \\ \alpha_0(\theta_0 + 1 - \theta_1)^{-n} & , \ X_{(1)} \ge \theta_1,\ X_{(n)} \le \theta_0 + 1 \\ 0 & , \ X_{(1)} < \theta_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \alpha = \alpha_0 \\ \beta = (\theta_0 + 1 - \theta_1)^n - \alpha_0 \end{cases}$$

- $0 < c < 1$

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}\{X_{(1)} \ge \theta_1\} + p \cdot 0 = \begin{cases} (\theta_0 + 1 - \theta_1)^n & , \ \theta_1 < \theta_0 + 1 \\ 0 & , \ \theta_1 \ge \theta_0 + 1 \end{cases}$$

Решение возможно при выполнении неравенств

$$\theta_1 < \theta_0 + 1, \qquad (\theta_0 + 1 - \theta_1)^n \le \alpha_0$$

Соответствующий критерий

$$\delta_3(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(1)} \ge \theta_1 \\ 0, & X_{(1)} < \theta_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \alpha = (\theta_0 + 1 - \theta_1)^n \\ \beta = 0 \end{cases}$$

- $c = 0$

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}\{X_{(1)} \ge \theta_1\} + p \cdot \mathbb{P}_{H_0}\{X_{(1)} < \theta_1\} = \begin{cases} (\theta_0 + 1 - \theta_1)^n + p\big[1 - (\theta_0 + 1 - \theta_1)^n\big] & , \ \theta_1 < \theta_0 + 1 \\ p & , \ \theta_1 \ge \theta_0 + 1 \end{cases}$$

(a) $\theta_1 < \theta_0 + 1$

$$p = \frac{\alpha_0 - (\theta_0 + 1 - \theta_1)^n}{1 - (\theta_0 + 1 - \theta_1)^n} \qquad \Longrightarrow \qquad (\theta_0 + 1 - \theta_1)^n \le \alpha_0$$

Соответствующий критерий

$$\delta_{4a}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & , \ X_{(1)} \ge \theta_1 \\ \frac{\alpha_0 - (\theta_0+1-\theta_1)^n}{1-(\theta_0+1-\theta_1)^n} & , \ X_{(1)} < \theta_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \alpha = \alpha_0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

(b) $\theta_1 \ge \theta_0 + 1$

$$p = \alpha_0$$

Соответствующий критерий

$$\delta_{4b}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & , \ X_{(1)} \ge \theta_1 \\ \alpha_0 & , \ X_{(1)} < \theta_1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \alpha = \alpha_0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

- $c < 0$

$$\alpha = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{нет решений}$$

3. Выберем подходящие критерии. Рассмотрим отдельно случаи (a) и (b):

(a) $\theta_1 < \theta_0 + 1$

Подходят критерии $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_{4a}$. Далее рассмотрим два случая

- $(\theta_0 + 1 - \theta_1)^n \le \alpha_0$

  Сюда относятся критерии $\delta_1, \delta_3, \delta_{4a}$. Критерий δ_1 точно не подходит, потому что у него ненулевая ошибка 2-го рода, в отличие от двух других. Критерии δ_3 и δ_{4a} оба являются наиболее мощными уровня α_0, но нам удобнее пользоваться критерием δ_3.
- $(\theta_0 + 1 - \theta_1)^n \ge \alpha_0$

  Сюда относятся критерии δ_1, δ_2. Мощность δ_2 больше (т.е. ошибка 2-го рода β меньше), значит, δ_2 является наиболее мощным критерием.

Эти два случая можно объединить в один критерий:

$$\delta_a(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & , \ X_{(n)} > \theta_0 + 1 \\ \min\Big(1, \ \alpha_0(\theta_0 + 1 - \theta_1)^{-n}\Big) & , \ X_{(1)} \ge \theta_1, \ X_{(n)} \le \theta_0 + 1 \\ 0 & , \ X_{(1)} < \theta_1 \end{cases}$$

(b) $\theta_1 \ge \theta_0 + 1$

Подходят критерии δ_1, δ_{4b}. У обоих $\beta = 0$, поэтому оба являются наиболее мощными критериями уровня α_0. Возьмем δ_1, потому что у него ниже ошибка 1-го рода.

$$\delta_b(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(n)} > \theta_0 + 1 \\ 0, & X_{(n)} \le \theta_0 + 1 \end{cases}$$

Можно увидеть, что оба случая (a) и (b) можно объединить в один **общий ответ**:

$$\delta(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(n)} > \theta_0 + 1 \\ p, & X_{(1)} \ge \theta_1, \ X_{(n)} \le \theta_0 + 1 \\ 0, & X_{(1)} < \theta_1 \end{cases}, \qquad p = \begin{cases} \min\Big(1, \ \alpha_0(\theta_0 + 1 - \theta_1)^{-n}\Big) & , \ \theta_1 < \theta_0 + 1 \\ 1 & , \ \theta_1 \ge \theta_0 + 1 \end{cases}$$

Это **наиболее мощный критерий** уровня α_0 для проверки простых гипотез.

Этот критерий зависит от θ_1, поэтому его нельзя обобщить на случай сложной односторонней альтернативы, как в исходном условии задачи.

Как избавится от параметра θ_1 я не придумал. Я пробовал критерии вида

$$\widetilde{\delta}_c(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(n)} \ge c \\ 0, & X_{(n)} < c \end{cases}, \qquad \widetilde{\widetilde{\delta}}_c(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1, & X_{(1)} \ge c \\ 0, & X_{(1)} < c \end{cases},$$

но в обоих случаях не получается нужная ошибка 2-го рода.