Случайные процессы. ДЗ 2.

Прохоров Юрий, 776

Задача 1

Пусть $\xi \sim \mathrm{Cauchy}(0,1)$, т.е. имеет плотность $f_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{1+x^2}$. Для случайного процесса

$$X(t) = \xi + 2t, \qquad t \geq 0$$

вычислить $\mathbb{P}\big\{\exists t \in (1,3] :\ X(t) = 0\big\}$.

Решение:

$$\mathbb{P}\{\exists t \in (1,3] :\ X(t) = 0\} = \mathbb{P}\{\exists t \in (1,3] :\ \xi = -2t\} = \mathbb{P}\{\xi \in [-6,-2)\} = \int_{-6}^{-2} \frac{1}{\pi}\frac{dx}{1+x^2} = \\ = \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg} 6 - \operatorname{arctg} 2) \approx 0.095$$

Вычисляя эту вероятность, мы предполагали, что вероятностная мера события

$$A = \big\{\exists t \in (1,3] :\ X(t) = 0\big\} = \bigcup_{t\in(1,3]} \{X(t) = 0\}$$

определена, то есть оно лежит в сигма-алгебре $\mathcal{F}$ вероятностного пространства Ω. Однако оно является несчетным объединением событий из $\mathcal{F}$, что не всегда лежит в сигма-алгебре.

В нашем случае все траектории процесса $X(t) = \xi + 2t$ являются прямыми линиями, то есть непрерывными. Тогда

$$A = \left\{\inf_{t\in[1,3]} \big|X(t)\big| = 0\right\} \setminus \{X(1) = 0\} = \Big\{\underbrace{\inf_{t\in[1,3]\bigcap\mathbb{Q}} \big|X(t)\big|}_{\text{тоже с.в. } Y} = 0\Big\} \setminus \{X(1) = 0\} \in \mathcal{F}$$

В теории меры доказывалось, что поточечный супремум последовательности измеримых функций — измеримая функция, поэтому Y — случайная величина.

Задача 2

Для случайных процессов

1. $X(t) = \sin W(t), \quad t \geq 0,$
2. $Y(t) = W^2(t) - t, \quad t \geq 0,$

где $W(t)$ — винеровский процесс, вычислить

(a) математическое ожидание;

(b) ковариационную функцию;

(c) одномерное распределение.

Решение:

1. **(a)** Так как $W(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$, то

$$m_X(t) = \mathbb{E}\sin W(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2t}\right\} dx = 0,$$

так как сходящийся интеграл от нечетной функции равен 0.

(b) Ковариационная функция (с учетом того, что матожидания нулевые) при $t \neq s$:

$$R_X(t,s) = \mathbb{E}X(t)X(s) = \mathbb{E}\sin W(t)\sin W(s) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\cos\big(W(t)-W(s)\big) - \frac{1}{2}\mathbb{E}\cos\big(W(t)+W(s)\big)$$

Так как $W(t)-W(s) \sim \mathcal{N}(0,|t-s|)$, то

$$\mathbb{E}\cos\big(W(t)-W(s)\big) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi|t-s|}}\exp\left(-\frac{x^2}{2|t-s|}\right)dx = e^{-|t-s|/2}$$

Используем значение интеграла

$$\int_0^\infty \cos x \exp\left(-\frac{x^2}{a}\right)dx = \frac{\sqrt{\pi a}}{2e^{a/4}}$$

Для вычисления второго слагаемого найдем распределение случайной величины $W(t)+W(s)$, $t > s$. Так как винеровский процесс является процессом с независимыми нормальными приращениями, то

$$\begin{pmatrix} W(s) \\ W(t)-W(s) \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & t-s \end{bmatrix}\right)$$

Делая его линейное преобразование с матрицей $A = (2 \;\; 1)$, получаем, что

$$W(t)+W(s) \sim \mathcal{N}\big(0, t+3s\big)$$

Либо можно было сказать, что $W(t)-W(s) \sim \mathcal{N}(0,t-s)$ и $2W(s) \sim \mathcal{N}(0,4s)$ независимы, поэтому дисперсия суммы равна сумме дисперсий.

Обобщая это на случай, $t < s$, получаем

$$W(t)+W(s) \sim \mathcal{N}\big(0,\sigma^2\big), \qquad \sigma^2 = \max(t,s) + 3\min(t,s)$$

Тогда аналогично находим матожидание:

$$\mathbb{E}\cos\big(W(t)+W(s)\big) = e^{-\sigma^2/2}$$

Можно убедиться, что при $t = s$ выражение подходит под общий случай:

$$R_X(t,t) = \mathbb{E}\sin^2 W(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}dx = e^{-t}\operatorname{sh} t = \frac{1}{2}(1+e^{-2t})$$

Окончательно,

$$R_X(t,s) = \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{|t-s|}{2}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(-\frac{\max(t,s)+3\min(t,s)}{2}\right)$$

(c) Одномерные функции распределения, скорее всего, не выражаются проще, чем через сумму ряда:

$$F_X(x;t) = \mathbb{P}\{\sin W(t) < x\} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{P}\{\pi - \arcsin x + 2\pi n < W(t) < 2\pi + \arcsin x + 2\pi n\} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\pi-\arcsin x+2\pi n}^{2\pi+\arcsin x+2\pi n} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}dx$$

2. **(a)** Матожидание процесса $Y(t)$:

$$m_Y(t) = \mathbb{E}\big[W^2(t) - t\big] = \mathbb{V}W(t) - t = t - t = 0$$

(b) Ковариационная функция $Y(t)$ при $t \geq s$:

$$\begin{aligned} R_Y(t,s) &= \mathbb{E}Y(t)Y(s) = \mathbb{E}\big(W^2(t)-t\big)\big(W^2(s)-s\big) = \\ &= \mathbb{E}W^2(t)W^2(s) - ts - ts + ts = \\ &= \mathbb{E}\big(W(t)-W(s)+W(s)\big)^2 W^2(s) - ts = \\ &= \mathbb{E}\big(W(t)-W(s)\big)^2 W^2(s) + 2\mathbb{E}\big(W(t)-W(s)\big)W^3(s) + \mathbb{E}W^4(s) - ts \end{aligned}$$

Далее пользуемся независимостью $W(t)-W(s)$ и $W(s)$:

$$\begin{aligned}R_Y(t,s) &= \mathbb{E}\big(W(t)-W(s)\big)^2\mathbb{E}W^2(s) + 2\mathbb{E}\big(W(t)-W(s)\big)\mathbb{E}W^3(s) + \mathbb{E}W^4(s) - ts = \\ &= (t-s)s + 0 + 3s^2 - ts = \\ &= 2s^2.\end{aligned}$$

Аналогично получается при $t \leq s$. Тогда окончательно:

$$R_Y(t,s) = 2\min(t,s)^2$$

(c) Если $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$, то $\xi^2 \sim \chi_1^2$ — распределение χ-квадрат. Его плотность:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2}, \qquad x > 0$$

Тогда

$$W(t) = \sqrt{t}\xi \qquad \Longrightarrow Y(t) = t\xi^2 - t$$

$\eta = a\xi + b \quad \Longrightarrow \quad f_\eta(x) = \frac{1}{a}f_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right).$

$$f_Y(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t(x+t)}}\exp\left(-\frac{x+t}{2t}\right), \qquad x > -t$$

Значит, мы нашли семейство одномерных плотностей.