Теорвер. ДЗ 1.

Прохоров Юрий, 776

Задача 1

Без ограничения общности будем считать, что ни у кого нет билета на место под номером 1, второй в очереди пассажир имеет билет на место #2, третий — на место #3 и так далее (всегда можно перенумеровать).

Пусть p_n — искомая вероятность. Легко видеть, что $p_2 = \frac{1}{2}$. Получим рекуррентную формулу для p_n. Расписывая по полной системе событий:

$$p_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{\text{заяц} \to \#k\} \cdot \mathbb{P}\{\text{место } \#n \text{ свободно} \mid \text{заяц} \to \#k\}$$

Что будет, если заяц сел на место $\#k$ $(2 \le k \le n-1)$? Тогда пассажиры $2, 3, \ldots, k-1$ сядут все на свои места, а k-ый пассажир будет выбирать случайное место из $\{1, k+1, \ldots, n\}$. Эта ситуация эквивалентна случаю, когда в очереди всего $n-k+1$ пассажиров, а (бывший) k-ый пассажир — новый заяц. Тогда

$$p_n = \frac{1}{n} \cdot 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot p_{n-k+1} + \frac{1}{n} \cdot 0 = \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{p_{n-k+1}}{n}$$

По индукции докажем, что $p_n = 2 \quad \forall n \ge 2$. База $(n = 2)$ очевидна. Пусть верно до $n-1$ включительно. Тогда

$$p_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{p_{n-k+1}}{n} = \frac{1}{n} + \frac{n-2}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Задача 2

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — выбранные точки. Назовем точку A *крайней*, если все оставшиеся точки лежат на полуокружности против часовой стрелки от A. Из этого определения следует, что

$$\text{точки лежат на одной полуокружности} \iff \text{ровно одна из точек крайняя}$$

$$\text{точки не лежат на одной полуокружности} \iff \text{нет крайних точек}$$

Обозначим искомую вероятность через p. Тогда

$$p = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k - \text{ крайняя}\},$$

так как события вида $[A_k -$ крайняя$]$ несовместны (потому что более одной крайней точки быть не может). Вычислим вероятность этого события:

$$\mathbb{P}\{A_k - \text{ крайняя}\} = \prod_{j \ne k} \mathbb{P}\{A_j \text{ на нужной полуокружности}\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Отсюда искомая вероятность:

$$p = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Задача 3

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, а $\mathbb{P}$ — σ-аддитивная (вероятностная) мера. Требуется доказать, что из счетной аддитивности следует конечная субаддитивность.

$$\forall \text{ дизъюнктных } \{B_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{F} \;\longrightarrow\; \mathbb{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{B_k\}$$

Возьмем произвольное дизъюнктное семейство $\{B_k\}_1^n$. Положим $B_k = \varnothing \; \forall k > n$. Тогда получим, что $\mathbb{P}$ — **конечно-аддитивная** мера.

Пусть $A \subseteq B$. Тогда, по конечной аддитивности

$$\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{B\} - \mathbb{P}\{B \setminus A\} \leq \mathbb{P}\{B\}.$$

Отсюда следует, что $\mathbb{P}$ — **монотонная** мера.

Теперь возьмем произвольное семейство $\{A_k\}_1^n$. Положим

$$B_1 = A_1, \qquad B_k = A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$$

Все $B_k \in \mathcal{F}$, так как $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, и образуют дизъюнктное семейство. По построению:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k.$$

По конечной аддитивности и монотонности:

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left\{A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right\} \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{A_k\}$$

$\Longrightarrow$ $\mathbb{P}$ — **конечно-субаддитивная** мера.