Теорвер. ДЗ 6.

ПРОХОРОВ ЮРИЙ, 776

Нормальное распределение

Для случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ функция плотности распределения ($\sigma > 0$):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad \mathbb{E}\xi = \mathrm{med}(\xi) = \mathrm{mode}(\xi) = m, \qquad \mathbb{V}\xi = \sigma^2$$

Для n-мерного случайного вектора $\xi \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma)$ функция плотности распределения ($\Sigma \succ 0$):

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \Sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{m})\right), \qquad \mathbb{E}\xi = \mathrm{mode}(\xi) = \mathbf{m}, \qquad \mathbb{V}\xi = \Sigma$$

Линейное преобразование нормального случайного вектора:

$$\eta = A\xi + b, \;\; \xi \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma) \qquad \Longrightarrow \qquad \eta \sim \mathcal{N}(A\mathbf{m} + b, A\Sigma A^T)$$

Опр. Случайный вектор ξ имеет *нормальное распределение* с параметрами $(\mathbf{m}, \Sigma)$, если его характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_\xi(\mathbf{t}) = \exp\left(i\mathbf{t}^T\mathbf{m} - \frac{1}{2}\mathbf{t}^T\Sigma\mathbf{t}\right)$$

В случае, когда $\Sigma \succ 0$, данное определение эквивалентно классическому (через функцию плотности). Оно обобщает его на случай вырожденных матриц Σ.

Свойства:

1. Если X — нормальный случайный вектор, то $Y = AX + b$ — тоже. При этом

$$Y = AX + b, \;\; X \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, \Sigma) \qquad \Longrightarrow \qquad Y \sim \mathcal{N}(A\mathbf{m} + b, A\Sigma A^T)$$

2. Пусть $X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2),\; i = \overline{1, n}$ — независимые нормальные случайные величины. Тогда

$$X_1 + \ldots + X_n \sim \mathcal{N}\big(m_1^2 + \ldots + m_n^2,\; \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2\big)$$

3. Пусть X, Y — подвекторы нормального случайного вектора:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{m}_X \\ \mathbf{m}_Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{XX} & \Sigma_{XY} \\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY} \end{bmatrix}\right)$$

Тогда маргинальные распределения X и Y являются нормальными:

$$X \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_X, \Sigma_{XX}), \qquad Y \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_Y, \Sigma_{YY}),$$

и условное распределение вида $Y|X = x$ тоже является нормальным с параметрами $(\mathbf{m}, \Sigma)$:

$$\mathbf{m} = \mathbb{E}[Y \mid X = x] = \mathbf{m}_Y + \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}(x - \mathbf{m}_X)$$

$$\Sigma = \mathbb{V}[Y \mid X = x] = \Sigma_{YY} - \Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}$$

Здесь $\mathbb{E}[Y \mid X = x]$ и $\mathbb{V}[Y \mid X = x]$ — условные матожидания и дисперсия соответственно.

4. Для нормальных случайных величин X, Y:

$$X, Y \text{ независимы} \qquad \Longleftrightarrow \qquad X, Y \text{ не коррелируют}$$

Условные матожидания

Материалы этого и следующего разделов взяты из конспекта семинара 6 и из пособия В.В.Некруткина “Условные математические ожидания относительно σ-алгебр и отображений”, которое можно найти здесь.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство.

Опр. Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ — σ-алгебра. *Условным матожиданием* с.в. ξ *относительно* σ*-алгебры* $\mathcal{A}$ называется случайная величина $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{A}]$, такая что:

- $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{A}]$ измерима относительно $\mathcal{A}$;
- $\forall B \in \mathcal{A} \quad \to \quad \int_B \mathbb{E}[\xi|\mathcal{A}](w)d\mathbb{P}(w) = \int_B \xi(w)d\mathbb{P}(w).$

Условное матожидание определено с точностью до значений на множестве $\mathbb{P}$-меры нуль.

Сама случайная величина ξ не всегда удовлетворяет этому определению, так как в общем случае ξ не измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{A}$.

Опр. *Условной вероятностью события* C *относительно* σ*-алгебры* $\mathcal{A}$ называется случайная величина

$$\mathbb{P}\{C|\mathcal{A}\} = \mathbb{E}[\mathbb{I}_C|\mathcal{A}]$$

Опр. σ*-алгеброй, порожденной случайной величиной* η называется

$$\mathcal{F}_\eta = \left\{\eta^{-1}(B) \;\middle|\; B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}$$

Так как η — $\mathcal{F}$-измеримое отображение, то $\mathcal{F}_\eta \subset \mathcal{F}$.

Утв. 1 $\xi \in \mathcal{F}_\eta \iff \exists$ борелевская функция $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такая что $\xi = m(\eta)$.

Опр. *Функцией регрессии* ξ *на* η (в конспекте семинара — условным матожиданием) $\mathbb{E}[\xi|\eta = y]$ называется такая борелевская функция $m(y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \to \quad \int_{\eta^{-1}(B)} \xi(w)d\mathbb{P}(w) = \int_B m(y)d\mathbb{P}_\eta(y)$$

Функция $m(y)$ — та самая функция из утверждения 1. Связь прояснится в следующем определении.

Функция $m(y)$ определена на $\mathbb{R}$ с точностью до значений на множестве $\mathbb{P}_\eta$-меры нуль, где $\mathbb{P}_\eta(B) = \mathbb{P}\{\eta \in B\}$ — распределение случайной величины η.

Опр. *Условным матожиданием* ξ *относительно* η называется случайная величина $\mathbb{E}[\xi|\eta]$, равная

(a) $m(\eta)$, где $m(y) = \mathbb{E}[\xi|\eta = y]$;

(b) $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_\eta]$.

Определения (a) и (b) условного матожидания $\mathbb{E}[\xi|\eta]$ эквивалентны.

Объясним связь этого определения и утверждения 1. $\mathbb{E}[\xi|\eta]$ — $\mathcal{F}_\eta$-измеримая функция по определению (b), поэтому функцию в определении (a) можно взять из утверждения 1.

Итак, важно понимать, что условное матожидание относительно случайной величины — частный случай условного матожидания относительно σ-алгебры. Выпишем полезные свойства этих условных матожиданий.

Свойства: (ξ_1, ξ_2, η — с.в. с конечными матожиданиями)

1. Условное матожидание единственно с точностью до значений на множестве $\mathbb{P}$-меры нуль;
2. $\mathbb{E}[a\xi_1 + b\xi_2 \mid \eta] = a\mathbb{E}[\xi_1|\eta] + b\mathbb{E}[\xi_2|\eta]$;
3. Если $\xi_1 \le \xi_2$ п.в., то $\mathbb{E}[\xi_1|\eta] \le \mathbb{E}[\xi_2|\eta]$ п.в.;

4. Неравенство Йенсена: если $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — выпуклая борелевская функция, а $\mathbb{E}|\varphi(\xi)| < \infty$, то

$$\mathbb{E}\big[\varphi(\xi) \bigm| \mathcal{A}\big] \geq \varphi\big(\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}]\big) \qquad \mathbb{P}\text{-почти всюду на } \Omega$$

5. Если ξ измерима относительно $\mathcal{A}$ и $\mathbb{E}|\xi\eta| < \infty$, то $\mathbb{E}[\xi\eta \mid \mathcal{A}] = \xi\mathbb{E}[\eta \mid \mathcal{A}]$ п.в.;

6. Формулы полного матожидания и полной вероятности:

$$\boxed{\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\xi|\eta]\big], \qquad \mathbb{P}\{B\} = \mathbb{E}\big[\mathbb{P}\{B|\mathcal{A}\}\big]}$$

7. Если ξ и η — независимые с.в., то $\mathbb{E}[\xi|\eta] = \mathbb{E}\xi$ п.в.;

8. $\mathbb{E}[\xi|\xi] = \xi$ п.в.

Заметим, что пока никаких содержательных утверждений мы не получили. Перечисленные выше свойства вытекают напрямую из определения. Пока вообще непонятно, как на практике искать $\mathbb{E}[\xi|\eta]$. Это обсудим чуть ниже.

Условное матожидание относительно случайного вектора

Пусть $\vec{\eta} : \Omega \to \mathbb{R}^n, \;\; \vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^T$ — случайный вектор.

Все определения, утверждения и свойства переносятся.

Опр. *σ-алгеброй, порожденной случайным вектором $\vec{\eta}$* называется

$$\mathcal{F}_{\vec{\eta}} = \big\{\vec{\eta}^{\;-1}(B) \bigm| B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big\}$$

Как и ранее, так как $\vec{\eta}$ — отображение, измеримое относительно пары $\big(\mathcal{F},\ \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\big)$, то $\mathcal{F}_{\vec{\eta}} \subset \mathcal{F}$.

Опр. *Функцией регрессии ξ на $\vec{\eta}$* $\mathbb{E}[\xi|\vec{\eta} = \vec{y}]$ называется такая борелевская функция $m(\vec{y}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad \to \quad \int_{\vec{\eta}^{\;-1}(B)} \xi(w) d\mathbb{P}(w) = \int_B m(\vec{y}) d\mathbb{P}_\eta(\vec{y})$$

Опр. *Условным матожиданием ξ относительно $\vec{\eta}$* называется случайная величина $\mathbb{E}\big[\xi \mid \vec{\eta}\big]$, равная

(a) $m(\vec{\eta})$, где $m(\vec{y}) = \mathbb{E}[\xi|\vec{\eta} = \vec{y}]$;

(b) $\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_{\vec{\eta}}]$.

Отметим, что условное матожидание относительно случайного вектора — это именно случайная величина, а не случайный вектор.

Утв. 1' $\xi \in \mathcal{F}_{\vec{\eta}} \iff \exists$ борелевская функция $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такая что $\xi = m(\vec{\eta})$.

Связь с интуитивным определением

Зададимся вопросом, как найти $\mathbb{E}[\xi \mid A]$ — условное матожидание относительно события $A \subset \Omega$, где ξ — случайная величина. Интуитивно понятно, что это число должно являться в некотором смысле средним значением с.в. ξ на множестве A. Поэтому естественно ожидать следующее выражение:

$$\mathbb{E}[\xi \mid A] \approx \sum_i x_i \cdot \frac{\mathbb{P}\{D_i\}}{\mathbb{P}\{A\}}, \qquad (*)$$

где $A = \bigcup_i D_i,\ x_i$ — значения ξ на D_i. То есть мы разбиваем A на подмножества, на которых ξ постоянна, и умножаем на вероятность попасть в эти подмножества (при условии, что мы находимся в A).

Проведем строгие рассуждения. Заметим, что нашу задачу можно переформулировать через известные термины:

$$\mathbb{E}[\xi \mid A] = \mathbb{E}[\xi \mid \mathbb{I}_A = 1] = m(1),$$

где m — функция регрессии ξ на $\mathbb{I}_A$.

В определение функции $m(y)$ подставим множество $B = \{1\}$. Тогда $\mathbb{I}_A^{-1}(1) = A$, поэтому

$$\int_A \xi(w) d\mathbb{P}(w) = \int_{\{1\}} m(y) d\mathbb{P}_{\mathbb{I}_A}(y) = m(1) \cdot \mathbb{P}_{\mathbb{I}_A}\{1\} = m(1) \cdot \mathbb{P}\{A\}$$

Отсюда получаем, что если $\mathbb{P}\{A\} > 0$, то

$$\mathbb{E}[\xi \mid A] = \frac{1}{\mathbb{P}\{A\}} \int_A \xi(w) d\mathbb{P}(w)$$

Это выражение соответствует формуле $(*)$, которую мы и ожидали получить. Это выражение можно записать в следующем виде:

Опр. *Условным матожиданием с.в. ξ относительно события A* ($\mathbb{P}\{A\} > 0$) называется

$$\mathbb{E}[\xi \mid A] = \frac{\mathbb{E}[\xi \cdot \mathbb{I}_A]}{\mathbb{P}\{A\}}$$

На самом деле это скорее утверждение, которое мы доказали, нежели определение.

Формулы полной вероятности и полного матожидания

Пусть ξ — случайная величина, а $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ — σ-алгебра. Тогда положив в определении $\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}]$ множество $B = \Omega$, мгновенно получаем формулу полного матожидания

$$\int_\Omega \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}](w) d\mathbb{P}(w) = \int_\Omega \xi(w) d\mathbb{P}(w) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}]\big] = \mathbb{E}\xi$$

Аналогично получается формула полной вероятности. Однако возникает вопрос, а что вообще такое $\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}]$? Как его искать?

Исследуем структуру $\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}]$ и формулы полной вероятности в некоторых частных случаях.

Утв. 2 (случай дискретной случайной величины)
Пусть ξ — произвольная с.в., а η — дискретная случайная величина со значениями $\{x_k\}$. Тогда справедлива *формула полного матожидания*:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_k \mathbb{E}[\xi \mid \eta = x_k] \cdot \mathbb{P}\{\eta = x_k\}$$

и для произвольного события $A \in \mathcal{F}$ справедлива *формула полной вероятности*:

$$\mathbb{P}\{A\} = \sum_k \mathbb{P}\{A \mid \eta = x_k\} \cdot \mathbb{P}\{\eta = x_k\}$$

Не приводя строгого доказательства, объясним почему так происходит. Сигма-алгеброй в этом случае является

$$\mathcal{F}_\eta = \sigma\Big(\eta^{-1}(x_1), \eta^{-1}(x_2), \dots\Big),$$

то есть σ-алгебра порождена не более чем счетным разбиением $\Omega = \bigcup_k \{\eta = x_k\}$. Кроме того, по определению $\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_\eta]$ измерима относительно $\mathcal{F}_\eta$, поэтому (см. упражнение 2 из конспекта семинара) условное матожидание представимо в виде

$$\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{F}_\eta] = \sum_k z_k \mathbb{I}_{\{\eta = x_k\}}, \qquad z_k = \mathbb{E}[\xi \mid \eta = x_k]$$

Можно доказать, что числа z_k имеют такой вид. Далее по свойству линейности матожидания получаем конечное выражение.

Утв. 3 (случай непрерывной случайной величины)
Пусть ξ, η — непрерывные с.в. с плотностями f_ξ, f_η. Тогда справедлива *формула полного матожидания*:

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[\xi \mid \eta = x] f_\eta(x) dx$$

и для события $A \in \mathcal{F}$ справедлива *формула полной вероятности*:

$$\mathbb{P}\{A\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\{A \mid \eta = x\} f_\eta(x) dx$$

Утв. 4 (теорема Байеса)
Для непрерывных случайных величин ξ и η справедлива *формула Байеса*:

$$f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi|\eta}(x \mid y) f_\eta(y) dy$$

Заметим, что последнее равенство легко получить напрямую. Подынтегральное выражение равно совместной плотности распределения $f_{(\xi,\eta)}(x, y)$, а его интегрирование как раз дает маргинальное распределение.

Эти формулы удобно применять при решении задач, потому что часто условные матожидания вида $\mathbb{E}[\xi \mid \eta = y]$ проще находить, чем просто $\mathbb{E}\xi$ (например, когда ξ явно зависит от η, можно заменить η на y и убрать условие).

Пространство $\mathbb{L}^2$

Опр. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство. Обозначим через $L^2 \equiv L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ множество всех случайных величин на Ω с конечным вторым моментом:

$$L^2 = \big\{\text{с.в. } \xi : \Omega \to \mathbb{R} \bigm| \mathbb{E}[\xi^2] < +\infty\big\}$$

Утв. 5 L^2 — линейное пространство (относительно сложения с.в. и умножения на вещественное число).

Введем на L^2 функцию:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2 \times L^2 \to \mathbb{R}, \qquad \langle \xi, \eta \rangle = \mathbb{E}[\xi\eta]$$

Наша цель: ввести на L^2 скалярное произведение, то есть функцию, удовлетворяющую аксиомам:

1. $\langle \xi, \eta \rangle = \langle \eta, \xi \rangle \qquad \forall \xi, \eta \in L^2$
2. $\langle \xi_1 + \xi_2, \eta \rangle = \langle \xi_1, \eta \rangle + \langle \xi_2, \eta \rangle \qquad \forall \xi_1, \xi_2, \eta \in L^2$

   $\langle \lambda\xi, \eta \rangle = \lambda\langle \xi, \eta \rangle \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \xi, \eta \in L^2$
3. $\langle \xi, \xi \rangle > 0 \qquad \forall \xi \neq 0$

Утв. 6 Функция $\langle \xi, \eta \rangle = \mathbb{E}[\xi\eta]$ удовлетворяет аксиомам 1 и 2 скалярного произведения.

С аксиомой 3 возникает проблема:

$$\langle \xi, \xi \rangle = 0 \iff \mathbb{E}[\xi^2] = 0 \iff \mathbb{P}\{\xi = 0\} = 1 \iff \xi(w) = 0 \text{ п.в. на } \Omega,$$

то есть существуют случайные величины $\xi \not\equiv 0$, для которых $\langle \xi, \xi \rangle = 0$.

Чтобы обойти эту проблему, будем рассматривать классы эквивалентности случайных величин относительно равенства почти всюду:

$$[\xi] = \big\{\eta \in L^2 \bigm| \xi = \eta \text{ п.в. на } \Omega\big\}$$

Отметим, что равенство почти всюду означает, что $\mathbb{P}\{\xi \neq \eta\} = 0$, то есть мера множества на, котором ξ и η различны, равна 0.

Опр. Множество классов эквивалентности случайных величин ($\mathbb{E}[\xi^2] < \infty$) относительно равенства почти всюду называется *пространством* $\mathbb{L}^2$.

Далее будем отождествлять случайные величины ξ и их классы эквивалентности $[\xi]$.

Заметим, что функция $\langle \xi, \eta \rangle = \mathbb{E}[\xi\eta]$ не зависит от значений ξ и η на множестве меры 0 (так как матожидание — интеграл Лебега по мере $\mathbb{P}$). Значит, определим

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{L}^2 \times \mathbb{L}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \langle [\xi], [\eta] \rangle = \langle \xi, \eta \rangle = \mathbb{E}[\xi\eta],$$

то есть скалярным произведением двух классов эквивалентности назовем матожидание произведения любых двух с.в. из этих классов.

Таким образом, пространство $\mathbb{L}^2$ с функцией $\langle \cdot, \cdot \rangle$ является *предгильбертовым* пространством.
Предгильбертово пространство — линейное пространство со скалярным произведением (inner product space).

Утв. 7 $\mathbb{L}^2$ — гильбертово пространство.
Гильбертово пространство — полное предгильбертово пространство. Другими словами, скалярное произведение порождает норму, которая порождает метрику:

$$\|\xi\| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}, \qquad \rho(\xi, \eta) = \|\xi - \eta\|,$$

то есть предгильбертово пространство является метрическим. Под полнотой понимается полнота метрического пространства с порожденной метрикой.

Утв. 8 Пусть $\{\xi_n\}, \{\eta_n\} \subset L^2$ — последовательности случайных величин таких, что

$$\mathbb{E}\big[(\xi_n - \xi)^2\big] \longrightarrow 0, \qquad \mathbb{E}\big[(\eta_n - \eta)^2\big] \longrightarrow 0$$

Тогда

1. $\xi, \eta \in L^2$;
2. $\mathbb{E}[\xi_n] \longrightarrow \mathbb{E}[\xi]$;
3. $\mathbb{E}[\xi_n \eta_n] \longrightarrow \mathbb{E}[\xi\eta]$;
4. $\operatorname{cov}(\xi_n, \eta_n) \longrightarrow \operatorname{cov}(\xi, \eta)$;
5. $\mathbb{V}[\xi_n] \longrightarrow \mathbb{V}[\xi]$.

Неравенство Коши-Буняковского. Для любых $\xi, \eta \in L^2$:

$$\mathbb{E}[\xi\eta] \leq \sqrt{\mathbb{E}\xi^2 \cdot \mathbb{E}\eta^2}$$

в частности, для центрированных случайных величин:

$$\operatorname{cov}(\xi\eta) \leq \sqrt{\mathbb{V}\xi \cdot \mathbb{V}\eta}$$

Опр. С.в. $\xi, \eta \in L^2$ называются *ортогональными* ($\xi \perp \eta$), если $\langle \xi, \eta \rangle = \mathbb{E}[\xi\eta] = 0$.

Опр. *Проекцией* ξ на η называется $\pi_\eta(\xi) = \dfrac{\langle \xi, \eta \rangle}{\|\eta\|^2} \cdot \eta$.

Условное матожидание в $\mathbb{L}^2$

Пусть H — произвольное гильбертово пространство, $M \subset H$ — его подпространство. Тогда

$$N = M^\perp = \{y \mid y \perp x \quad \forall x \in M\} \text{ — ортогональное дополнение}$$

При этом H раскладывается в *прямую сумму* $H = M \oplus N$, и $\forall z \in H \quad \exists$ единственное разложение $z = x + y$, где $x \in M,\ y \in N$ (x, y — *проекции* z на M, N соответственно).

Пусть $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ — σ-алгебра. Изучим, какой вид имеет условное матожидание $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{A}]$, когда $\xi \in L^2$.

Утв. 9 Если $\xi \in L^2$, то $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{A}] \in \mathbb{L}^2$ и единственно.

Доказательство.
Функция $\varphi(x) = x^2$ выпукла, тогда по неравенству Йенсена:

$$\big(\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}]\big)^2 \leq \mathbb{E}\big[\xi^2 \mid \mathcal{A}\big] \qquad \text{п.в.}$$

Беря матожидание от обоих частей неравенства, получаем по формуле полного матожидания:

$$\mathbb{E}\Big[\big(\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}]\big)^2\Big] \leq \mathbb{E}\xi^2 < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}] \in L^2$$

Единственность в $\mathbb{L}^2$ получаем из того, что условное матожидание единственно с точностью до значений на множестве меры нуль. □

Рассмотрим множество $M_\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$, состоящее из всех с.в., измеримых относительно $\mathcal{A}$. Сумма измеримых функций — измеримая функция, измеримая функция, умноженная на число — тоже, поэтому $M_\mathcal{A}$ — замкнутое подпространство гильбертового пространства $\mathbb{L}^2$.

Значит, можно находить проекцию на $M_\mathcal{A}$ и строить к нему ортогональное дополнение.

Утв. 10 Если $\xi \in L^2$, то $\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}]$ — проекция ξ на подпространство $M_\mathcal{A}$.

Доказательство.
По общему свойству проекции, $\xi' = \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}]$ — проекция ξ на $M_\mathcal{A} \iff \xi - \xi' \in M_\mathcal{A}^\perp \iff$

$$\forall \eta \in M_\mathcal{A} \quad \to \quad \langle \xi - \xi', \eta \rangle = 0$$

Проверим последнее равенство. По линейности и свойству 5 условного матожидания (η измерима отн. $\mathcal{A}$, поэтому ее можно занести под знак матожидания во втором равенстве):

$$\mathbb{E}\Big[\big(\xi - \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}]\big)\eta\Big] = \mathbb{E}[\xi\eta] - \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}]\eta\big] = \mathbb{E}[\xi\eta] - \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[\xi\eta \mid \mathcal{A}]\big] = \mathbb{E}[\xi\eta] - \mathbb{E}[\xi\eta] = 0$$

Предпоследнее равенство получено по формуле полного матожидания. □

Как интерпретировать полученный результат? Нетрудно доказать, что

$$\mathbb{E}\Big[\big(\xi - \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}]\big)^2\Big] = \min_{\eta \in M_{\mathcal{A}}} \mathbb{E}\big[(\xi - \eta)^2\big]$$

Таким образом, условное матожидание $\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{A}]$ — наилучшее приближение случайной величины в “менее богатой” σ-алгебре по среднеквадратичной метрике.

Пространство $\mathbb{L}_0^2$

Опр. Обозначим через L_0^2 множество всех центрированных случайных величин с конечным вторым моментом:

$$L_0^2 = \big\{\xi \in L^2 \;\big|\; \mathbb{E}\xi = 0\big\}$$

Скалярное произведение в L_0^2 является ковариацией:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \mathbb{E}[\xi\eta] = \operatorname{cov}(\xi, \eta), \qquad \xi, \eta \in L_0^2$$

Что будет, если попробовать задать так скалярное произведение на всем пространстве L^2?

Утв. 11 Функция $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$ удовлетворяем аксиомам 1 и 2 скалярного произведения на L^2.

Рассмотрим аксиому 3:

$$\operatorname{cov}(\xi, \xi) = \mathbb{V}\xi = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \xi \equiv \text{const} \;\; \text{п.в.}$$

Поэтому, если рассмотреть в L^2 следующие классы эквивалентности:

$$[[\xi]] = \big\{\eta \in L^2 \;\big|\; \xi - \eta \equiv \text{const п.в.}\big\}, \tag{$*$}$$

то на полученном фактор-пространстве ковариация уже будет скалярным произведением.

Обозначение $[\xi]$ сохраним для классов эквивалентности относительно равенства почти всюду.

Опр. Множество классов эквивалентности $(*)$ в L^2 со скалярным произведением $\operatorname{cov}(\xi, \eta)$ называется *пространством* $\mathbb{L}_0^2$.

Отметим, что $\mathbb{L}_0^2$ — подпространство $\mathbb{L}^2$ в следующем смысле. Рассмотрим в $\mathbb{L}^2$ подпространство M, факторизовав множество L_0^2 по равенству почти всюду. Тогда из $\mathbb{L}_0^2$ в M легко построить изоморфизм:

$$\varphi : [[\xi]] \longmapsto [\xi - \mathbb{E}\xi]$$

Изоморфизм — взаимно однозначное соответствие, сохраняющее скалярное произведение.

Несложно убедиться, что M — замкнутое подпространство $\mathbb{L}^2$, а $\mathbb{L}^2$ — полно. Значит, и M полно. Изоморфизм сохраняет полноту, поэтому $\mathbb{L}_0^2$ полно.

Утв. 12 $\mathbb{L}_0^2$ — гильбертово пространство.

Как и в $\mathbb{L}^2$, можно для удобства отождествлять случайные величины и их классы эквивалентности в $\mathbb{L}_0^2$.

Примеры

Пример 1 (*формула свертки*)

Пусть ξ, η — непрерывные случайные величины с плотностями f_ξ, f_η. Найти плотность $\xi + \eta$.

Решение:

Найдем функцию распределения. По формуле полной вероятности:

$$F_{\xi+\eta}(x) = \mathbb{P}\{\xi + \eta < x\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\{\xi + \eta < x \mid \eta = y\} f_\eta(y) dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}\{\xi < x - y\} f_\eta(y) dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_\xi(x - y) f_\eta(y) dy$$

Дифференцируя по x находим плотность (применяем теорему о дифференцировании несобственного интеграла по параметру):

$$\boxed{f_{\xi+\eta}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x - y) f_\eta(y) dy}$$

Данная формула называется *формулой свертки*.

Пример 2 (*нормальные случайные величины*)

Пусть (X, Y) — нормальный случайный вектор с распределением:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} m_X \\ m_Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Найти $\mathbb{E}[X \mid Y = \alpha],\ \alpha \in \mathbb{R}$.

Решение:

Рассмотрим X, Y как элементы пространства $\mathbb{L}_0^2$. Представим $X = X_\parallel + X_\perp$, где

$$X_\parallel = \pi_Y(X) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\operatorname{cov}(Y, Y)} \cdot Y = \frac{\rho}{1} Y = \rho Y \quad — \quad \text{проекция } X \text{ на } Y \text{ в } \mathbb{L}_0^2$$

$$X_\perp = X - X_\parallel = X - \rho Y$$

По построению, $\operatorname{cov}(X_\perp, Y) = 0$, значит, с.в. $X_\perp$ и Y не коррелируют. $X_\perp$ — линейная комбинация нормально распределенных с.в., значит, $X_\perp$ — нормальная с.в. Для нормальных с.в. из некоррелированности следует независимость. Значит, $X_\perp$ и Y независимы.

В силу линейности условного матожидания:

$$\mathbb{E}[X \mid Y = \alpha] = \mathbb{E}[X_\parallel \mid Y = \alpha] + \mathbb{E}[X_\perp \mid Y = \alpha] = \mathbb{E}[\rho Y \mid Y = \alpha] + \mathbb{E}[X_\perp] = \alpha\rho + m_X - \rho m_Y$$

Заметим, что полученный результат согласуется с общей формулой для условного распределения компонент нормального случайного вектора.

В задачах будут ссылки на определения и утверждения из конспекта 6 семинара.

Утв. Пусть ξ — случайная величина. Тогда $\mathbb{E}[\xi \mid \xi] = \xi$ почти всюду.

Доказательство.
По определению условного матожидания (опр. 8a), $\mathbb{E}[\xi|\xi] = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_\xi]$, где $\mathcal{F}_\xi = \{\xi^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ — σ-алгебра, порожденная случайной величиной ξ. Условным матожиданием относительно σ-алгебры называется такая с.в., что

- $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_\xi]$ измерима относительно $\mathcal{F}_\xi$;
- $\forall B \in \mathcal{F}_\xi \quad \to \quad \int_B \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_\xi] d\mathbb{P} = \int_B \xi d\mathbb{P}$

Заметим, что ξ удовлетворяет этому определению, так как ξ $\mathcal{F}_\xi$-измерима. Покажем, что любая функция $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_\xi]$, удовлетворяющая этому определению, равна ξ почти всюду на Ω.

Пусть $\eta = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_\xi] - \xi$. η измерима относительно $\mathcal{F}_\xi$ как разность измеримых функций. Допустим, $\eta \not\equiv 0$ почти всюду. Без ограничения общности, пусть $\mathbb{P}\{\eta > 0\} > 0$. В силу определения условного матожидания:

$$B = \eta^{-1}\big((0, +\infty)\big) \in \mathcal{F}_\xi \qquad \Longrightarrow \qquad \int_B \eta(w) d\mathbb{P}(w) = 0$$

Однако, так как $\mathbb{P}\{B\} > 0$ и $\eta > 0$ на B, то и интеграл строго положителен (я доказывал это в одном из прошлых дз). Это противоречие.

Значит, $\eta = 0$ п.в., то есть $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}_\xi] = \xi$ почти всюду. □

Отметим, что такая же техника не пройдет для матожидания относительно произвольной σ-алгебры $\mathcal{A}$, так как ξ не всегда измеримо относительно $\mathcal{A}$.

Задача 1

(a) Пусть с.в. $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ — iid. Доказать, что почти всюду на Ω выполнены равенства

$$\mathbb{E}\big[\xi \big| \xi + \eta\big] = \mathbb{E}\big[\eta \big| \xi + \eta\big] = \frac{\xi + \eta}{2}$$

(b) Пусть с.в. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — iid, $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ и $\mathbb{E}[\xi_i] < \infty \ \ \forall i \in \mathbb{N}$. Доказать, что почти всюду на Ω выполнено равенство

$$\mathbb{E}\big[\xi_1 \big| S_n, S_{n+1}, \ldots\big] = \frac{S_n}{n}$$

Решение:

(a) В силу симметрии задачи, $\mathbb{E}[\xi \mid \xi + \eta] = \mathbb{E}[\eta \mid \xi + \eta]$. В силу линейности условного матожидания:

$$\mathbb{E}[\xi \mid \xi + \eta] = \frac{1}{2}\Big(\mathbb{E}\big[\xi \mid \xi + \eta\big] + \mathbb{E}\big[\eta \mid \xi + \eta\big]\Big) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{E}\big[\xi + \eta \mid \xi + \eta\big] \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{\xi + \eta}{2}$$

Последнее равенство выполнено в силу утверждения выше.

(b) Аналогично пункту (a), получаем равенство

$$\mathbb{E}\big[\xi_1 \mid S_n\big] = \frac{S_n}{n}$$

Так как точного определения условного матожидания он нескольких случайных величин не дано, то обоснуем равенство $\mathbb{E}\big[\xi_1 \big| S_n, S_{n+1}, \ldots\big] = \mathbb{E}\big[\xi_1 \big| S_n\big]$ неформально.

Добавление условий на $S_{n+1}, S_{n+2}, \ldots$ после добавления условия на S_n не влияет на ξ_1, а только влияет на $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots$

Задача 2

Пусть с.в. $X_1, X_2, \ldots$ — iid и $\mathbb{E}[X_i] < \infty$. С.в. $N \in \mathbb{Z}_+$ независима с $X_1, X_2, \ldots$ в совокупности, $S = \sum\limits_{i=1}^{N} X_i$.

(a) Найти $\mathbb{E}S$;

(b) Найти $\mathbb{V}S$.

Решение:

(a) Пусть сначала все $\mathbb{P}\{D_i\} > 0$. Тогда по формуле полной вероятности для разбиения $D = \{D_i\}_{i=0}^{\infty}$, $D_i = \{w \mid N(w) = i\}$:

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[S|D]\big] = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[S|D_i]\mathbb{P}\{D_i\}$$

Последнее равенство следует из того, что с.в. $\mathbb{E}[S|D]$ измерима относительно разбиения D по определению (опр. 5). Тогда $\mathbb{E}[S|D]$ принимает не более чем счетное число значений (упр. 2), т.е. является дискретной с.в., поэтому ее матожидание можно представить в виде суммы.

$$\mathbb{E}S = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[S|N=i]\mathbb{P}\{N=i\} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}[X_1 + \ldots + X_i]\mathbb{P}\{N=i\} = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \mathbb{E}X \cdot \mathbb{P}\{N=i\} = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}N$$

Если N принимает некоторые значения с вероятностью 0, то переопределим N так, что этого не происходило (матожидание, будучи интегралом Лебега, не зависит от значений N на множестве меры 0).

Если N вообще не принимает каких-то значений, то соответствующие слагаемые будут отсутствовать в сумме, а ответ будет тем же.

Далее такие подробные выкладки будем опускать, заменяя их словами “по формуле условного матожидания”.

Итак,

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}N$$

(b) По формуле условного матожидания:

$$\mathbb{V}S = \mathbb{E}[S^2] - \big(\mathbb{E}S\big)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}[S^2 \mid N = j]\mathbb{P}\{N=j\} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\big[(X_1 + \ldots + X_j)^2\big]\mathbb{P}\{N=j\} =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \Big[j \cdot \mathbb{E}[X^2] + j(j-1)\big(\mathbb{E}X\big)^2\Big]\mathbb{P}\{N=j\} = \mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[N] + (\mathbb{E}[X])^2 \sum_{j=0}^{\infty} j^2 \cdot \mathbb{P}\{N=j\} - (\mathbb{E}[X])^2\mathbb{E}[N] =$$

$$= \mathbb{V}[X] \cdot \mathbb{E}[N] + \big(\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[N]\big)^2$$

Задача 3

Пусть $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\eta \sim \mathrm{Exp}(\mu)$ — независимые с.в.

(a) Найти $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[XY|X]\big]$;

(b) Найти $\mathbb{V}\big[\mathbb{E}[XY|X]\big]$.

Решение:

(a) Решим двумя способами.

1. По формуле полного матожидания и в силу независимости X и Y:

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[XY|X]\big] = \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\lambda\mu}$$

2. Рассмотрим боролевскую функцию (опр. 7) $m(x) = \mathbb{E}\big[XY \mid X = x\big]$:

$$m(x) = \mathbb{E}\big[xY \mid X = x\big] = x \cdot \mathbb{E}[Y \mid X = x] = \Big/\text{независимость}\Big/ = x \cdot \mathbb{E}[Y] = \frac{x}{\mu}$$

Тогда условное матожидание (опр. 8б):

$$Z = \mathbb{E}[XY \mid X] = m(X) = \frac{X}{\mu}$$

Искомая величина:

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[XY|X]\big] = \mathbb{E}Z = \frac{1}{\mu} \cdot \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda\mu}$$

(b)

$$\mathbb{V}Z = \mathbb{V}\left[\frac{X}{\mu}\right] = \frac{\mathbb{V}X}{\mu^2} = \frac{1}{\lambda^2\mu^2}$$

Задача 4

Пусть X — случайный нормальный вектор:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 14 \end{bmatrix}\right)$$

(a) Найти распределение с.в. $Y_1 = X_1 + X_2 - X_3$;

(b) Найти распределение с.в. $Y_2 = X_1 + X_2 + X_3$;

(c) Найти $\mathbb{E}\big[Y_2\big|X_1 = 5, X_2 = 3\big]$;

(d) Найти $\mathbb{E}\big[Y_2\big|X_1 = 5, X_2 < 3\big]$.

Решение:

Здесь матрица Σ вырождена, поэтому “нормальность” вектора определяется через характеристическую функцию.

(a), (b) Сделаем линейное преобразование вектора (то, что матрица A вырождена, неважно):

$$Y = AX, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Тогда вектор Y имеет нормальное распределение:

$$Y \sim \mathcal{N}(A\mathbf{m}, A\Sigma A^T), \qquad A\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad A\Sigma A^T = 14\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Беря маргинальные распределения, получаем, что

$$Y_1 \sim \mathcal{N}(4, 0) \qquad \Longleftrightarrow \qquad Y_1 \equiv 4$$

$$Y_2 \sim \mathcal{N}(6, 56)$$

(c) Решим тремя способами:

1. Упростим выражение:

$$\mathbb{E}[Y_2|X_1 = 5, X_2 = 3] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3|X_1 = 5, X_2 = 3] = 8 + \mathbb{E}[X_3|X_1 = 5, X_2 = 3]$$

Представим X_3 в виде $X_3 = X_\parallel + X_\perp$, где $X_\parallel$ — проекция X_3 на X_1, X_2, а $X_\perp$ ортогонально X_1, X_2.

Найдем $X_{\parallel}$. $X_{\parallel} = \pi_{X_1}(X_3) + \pi_{X_2}(X_3)$ — сумма проекций, если $X_1 \perp X_2$, но в нашем случае они не ортогональны. Поэтому ортогонализуем их (методом Грама-Шмидта):

$$\pi_{X_2}(X_1) = \frac{\operatorname{cov}(X_1, X_2)}{\operatorname{cov}(X_2, X_2)} X_2 = \frac{2}{5} X_2, \qquad \widetilde{X_1} = X_1 - \pi_{X_2}(X_1) = X_1 - \frac{2}{5} X_2$$

Теперь $\widetilde{X_1}$ и X_2 ортогональны. Найдем проекции X_3 на них:

$$\pi_{\widetilde{X_1}}(X_3) = \frac{\operatorname{cov}\left(X_1 - \frac{2}{5}X_2, X_3\right)}{\operatorname{cov}\left(X_1 - \frac{2}{5}X_2, X_1 - \frac{2}{5}X_2\right)} \widetilde{X_1} = \frac{7 - \frac{2}{5}7}{5 - \frac{4}{5}2 + \frac{4}{25}5} \widetilde{X_1} = X_1 - \frac{2}{5} X_2$$

$$\pi_{X_2}(X_3) = \frac{\operatorname{cov}(X_2, X_3)}{\operatorname{cov}(X_2, X_2)} X_2 = \frac{7}{5} X_2$$

Отсюда находим $X_{\parallel}$ как их сумму:

$$X_{\parallel} = X_1 + X_2, \qquad X_{\perp} = X_3 - X_{\parallel} = X_3 - X_1 - X_2$$

По построению $X_{\perp} \perp X_1, X_2$, значит, $X_{\perp}$ не коррелирует со случайным вектором (X_1, X_2). Так как это нормальные с.в., то это значит, что они независимы. Отсюда

$$\mathbb{E}[Y_2 | X_1 = 5, X_2 = 3] = 8 + \mathbb{E}[X_{\parallel} | X_1 = 5, X_2 = 3] + \mathbb{E}[X_{\perp}] = 8 + 8 + 1 - 2 - 3 = 12$$

2. По свойству условного распределения нормальной случайной величины:

$$\mathbb{E}[X_3 | X_1 = 5, X_2 = 3] = 1 + \begin{bmatrix} 7 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right) = 4$$

Отсюда

$$\mathbb{E}[Y_2 | X_1 = 5, X_2 = 3] = 8 + \mathbb{E}[X_3 | X_1 = 5, X_2 = 3] = 12$$

3. Из пункта (a) мы знаем, что $X_1 + X_2 - X_3 \equiv 4$. Из условия $X_1 = 5, X_2 = 3$ тогда следует, что $X_3 = 4$, значит

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2 + X_3 | X_1 = 5, X_2 = 3] = 5 + 3 + 4 = 12$$

(d) Обозначим искомую величину за E.

$$E = \mathbb{E}[Y_2 | X_1 = 5, X_2 < 3] = 5 + \mathbb{E}[X_2 + X_3 | X_1 = 5, X_2 < 3]$$

Учтем, что $X_1 + X_2 - X_3 \equiv 4$, что мы получили в пункте (a). Тогда $X_3 = 5 + X_2 - 4 = 1 + X_2$. Тогда

$$E = 6 + 2\mathbb{E}[X_2 | X_1 = 5, X_2 < 3]$$

Мы понизили размерность задачи. Теперь у нас есть двумерный случайный вектор (X_1, X_2):

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \right)$$

На рисунке 1 ниже изображены линии уровня функции плотности вероятности этого случайного вектора. Черным цветом изображена линия $X_1 = 5, X_2 < 3$, вдоль которой требуется найти матожидание X_2.

Найдем условную плотность распределения вдоль $X_1 = 5$:

$$f_{X_2 | X_1}(x_2 | 5) = \frac{f_{(X_1, X_2)}(5, x_2)}{f_{X_1}(5)},$$

где $f_{(X_1, X_2)}$ — плотность совместного распределения, а f_{X_1} — плотность маргинального распределения X_1.

Плотность совместного распределения имеет вид:

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{21}} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - 2 & x_2 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 3 \end{bmatrix} \right)$$

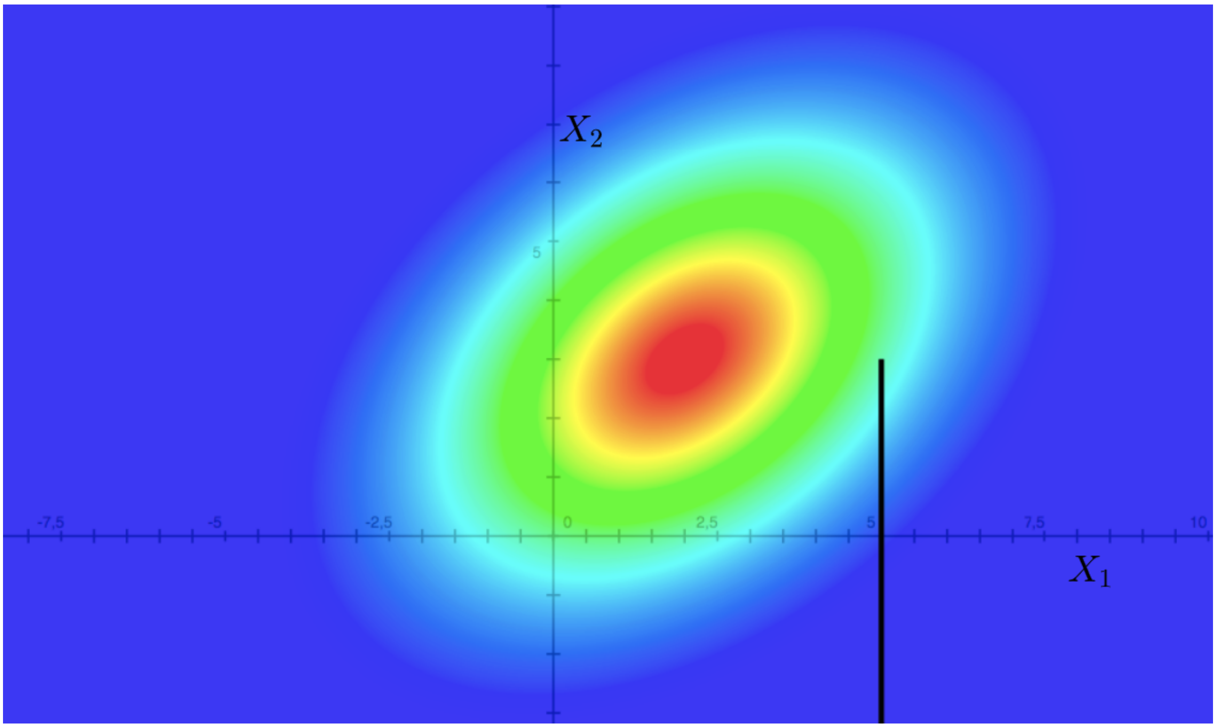

Рис. 1: Плотность совместного распределения (X_1, X_2).

$$f_{(X_1,X_2)}(5, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{21}} \exp\left(-\frac{5}{42}x_2^2 + x_2 - 3\right)$$

Маргинальная плотность X_1:

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} \exp\left(-\frac{(x_1-2)^2}{10}\right), \qquad f_{X_1}(5) = \frac{e^{-9/10}}{\sqrt{10\pi}}$$

$$f_{X_2|X_1}(x_2|5) = \sqrt{\frac{5}{42\pi}} \exp\left(-\frac{5}{42}x_2^2 + x_2 - \frac{21}{10}\right) = h(x_2)$$

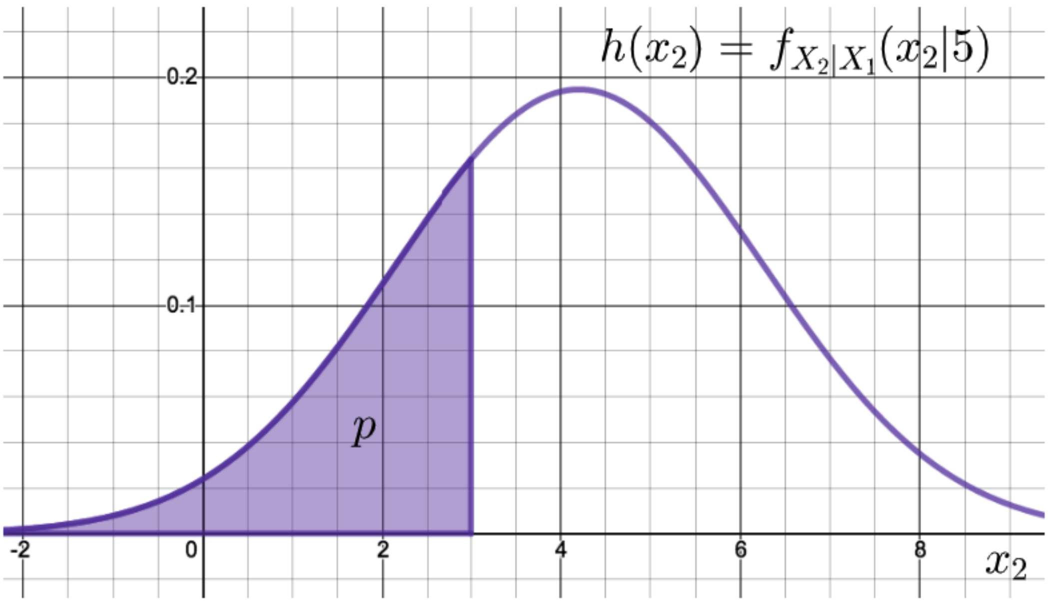

Рис. 2: Плотность условного распределения $X_2|X_1 = 5$.

Найдем вероятность попасть в область, где $X_2 < 3$:

$$p = \int\limits_{-\infty}^{3} h(x_2)dx_2 \approx 0.2791 \quad \text{(точно вычислить нельзя)}$$

Тогда искомая величина (по определению матожидания относительно события ненулевой вероятности):

$$E = \frac{1}{p}\int\limits_{-\infty}^{3} x_2 h(x_2)dx_2 \approx \frac{0.4834}{p} \approx 1.73205$$