АМВ. ДЗ на неделю 10.

Прохоров Юрий, 771

Задача 1

На рисунке изображен потоковый граф (метка $\frac{f}{u}$ на ребре означает поток и пропускную способность, соответственно).

(i) Чему равен поток f?

(ii) Изобразите остаточный граф, соответствующий потоку f.

(iii) Максимален ли поток f?

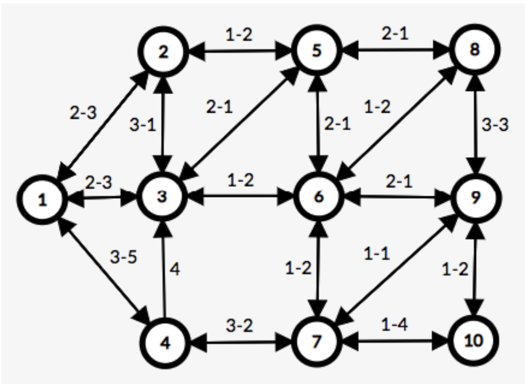
(iv) С помощью алгоритма Форда-Фалкерсона найдите максимальный поток. На каждом шаге должен быть построен остаточный граф и указан увеличивающий путь.

(v) Укажите модификацию алгоритма Форда-Фалкерсона для нахождения минимального разреза. По шагам постройте минимальный разрез между s и t. Найдите его пропускную способность.

Решение:

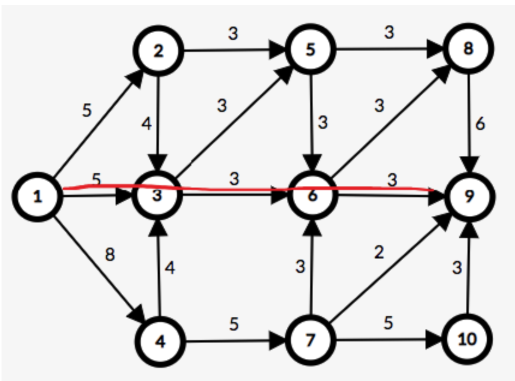
(i) Поток $= \mathrm{div}(s) = 2 + 2 + 3 = 7$. На рисунке $s = 1,\ t = 9$.

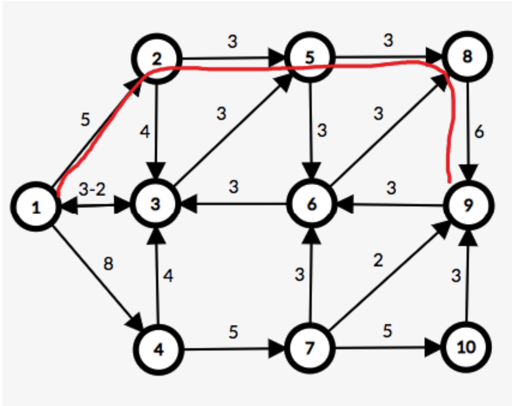
(ii) Запись x-y над невертикальным ребром означает, что влево идет ребро x, а вправо — ребро y. Над вертикальным ребром эта запись означает, что вниз идет ребро x, а вверх — y.

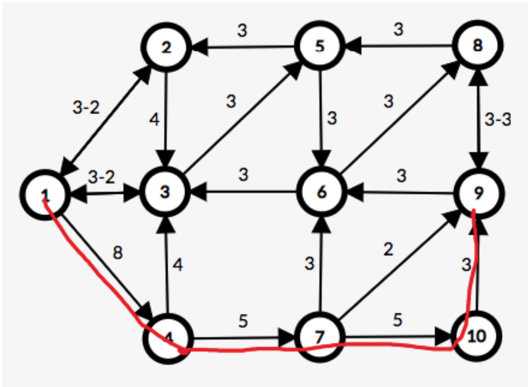


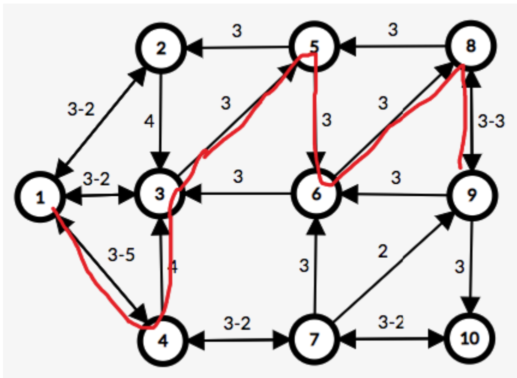
(iii) Нет, не максимален. По пути $1 \to 3 \to 6 \to 9$ можно пустить дополнительный поток величины 1.

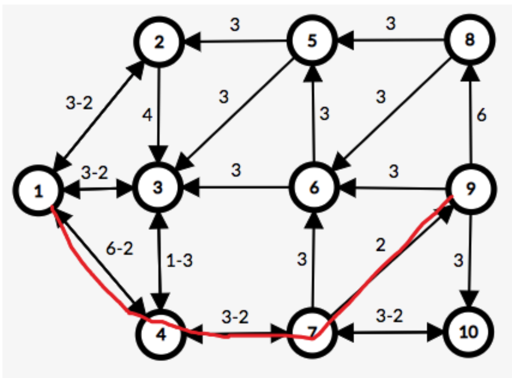
(iv)

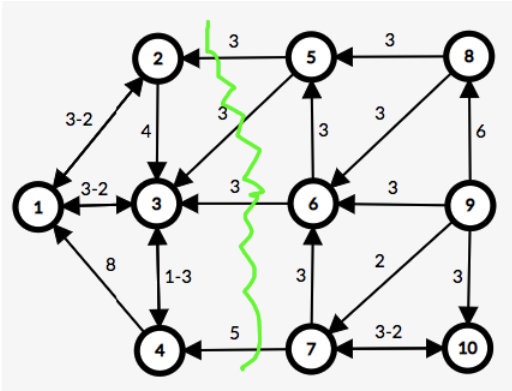



2
3
5
3
8
5
4
3
3
3
6
1
3-2
3
3
6
3
9
8
4
3
2
3
4
5
7
5
10


2
3
5
3
8
3-2
4
3
3
3
3-3
1
3-2
3
3
6
3
9
8
4
3
2
3
4
5
7
5
10


2
3
5
3
8
3-2
4
3
3
3
3-3
1
3-2
3
3
6
3
9
3-5
4
3
2
3
4
3-2
7
3-2
10


2
3
5
3
8
3-2
4
3
3
3
6
1
3-2
3
3
6
3
9
6-2
1-3
3
2
3
4
3-2
7
3-2
10



По теореме Форда-Фалкерсона, максимальный поток равен пропускной способности минимального разреза, то есть 14.

(v) В этой задаче будем понимать под минимальным разрезом такой s-t разрез, что суммарная пропускная способность всех ребер из левой части в правую минимальна (иначе неясно, что такое минимальный разрез в ориентированном графе). Чтобы найти такой минимальный разрез, нужно найти множество вершин, достижимых из начальной в последней остаточной сети. На последней картинке этот разрез отмечен зеленым цветом. Его пропускная способность равна 14.

Задача 2

В больнице каждому из 169 пациентов нужно перелить по одной дозе крови. В наличии имеется 170 доз. Распределение по группам таково.

Группа	I	II	III	IV
В наличии	45	32	38	55
Запрос	42	39	38	50

При этом пациенты, имеющие кровь группы I, могут получать только кровь группы I. Пациенты, имеющие кровь группы II (группы III), могут получать только кровь групп I и II (групп I и III, соответственно). Наконец, пациенты с IV группой могут получать кровь любой группы.

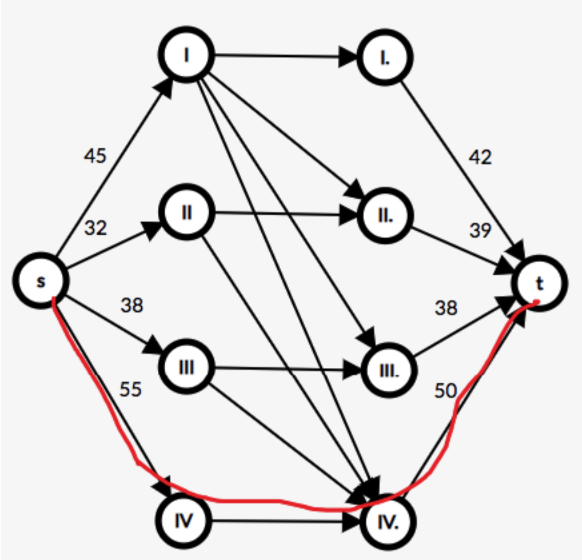
(i) Распределите дозы, чтобы обслужить максимальное число пациентов с помощью решения подходящей задачи о максимальном потоке. Решение нужно аккуратно оформить: должна быть нарисована потоковая сеть и показаны все шаги алгоритма ФФ, начиная с нулевого потока, т. е. должны быть построены остаточные графы и показаны увеличивающие пути.

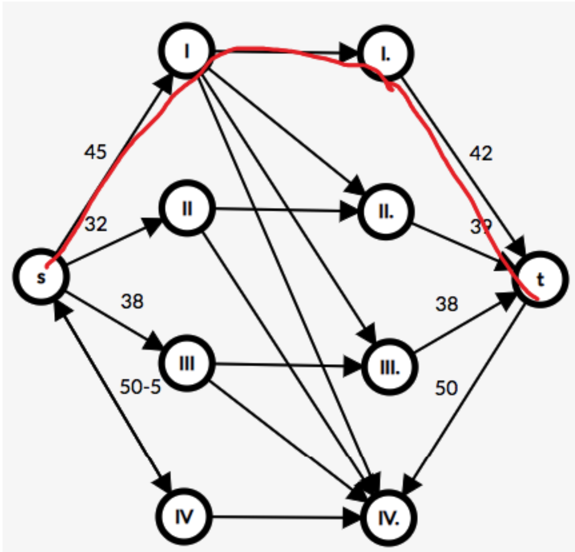
(ii) Если всех пациентов обслужить нельзя, то приведите простое объяснение этому, доступное администрации больницы.

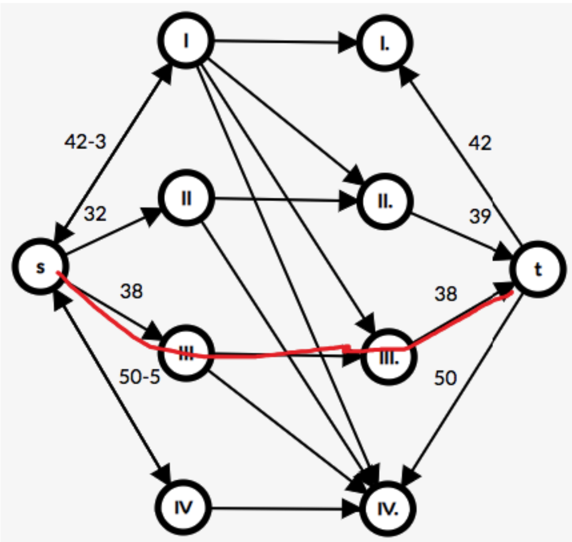
Решение:

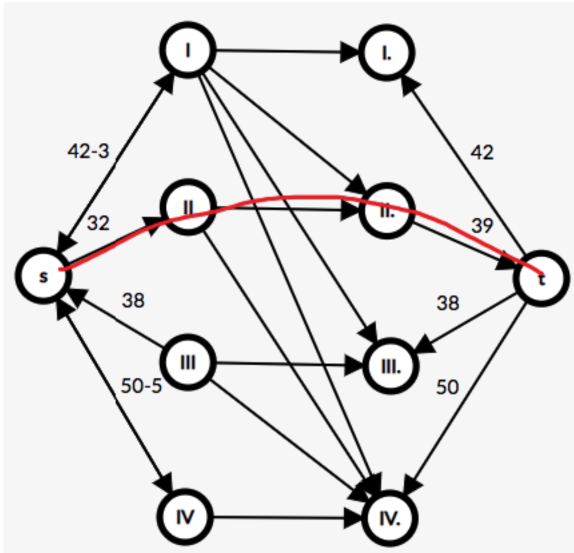
(i) Максимальное число пациентов, которое можно обслужить, равно максимальному потоку в следующей сети. В ней в ребрах по середине бесконечные пропускные способности (над ними ничего не написано). При построении остаточной сети нужно было еще добавлять обратные ребра для бесконечных ребер, но я забыл про них. На работу алгоритма они не влияют.

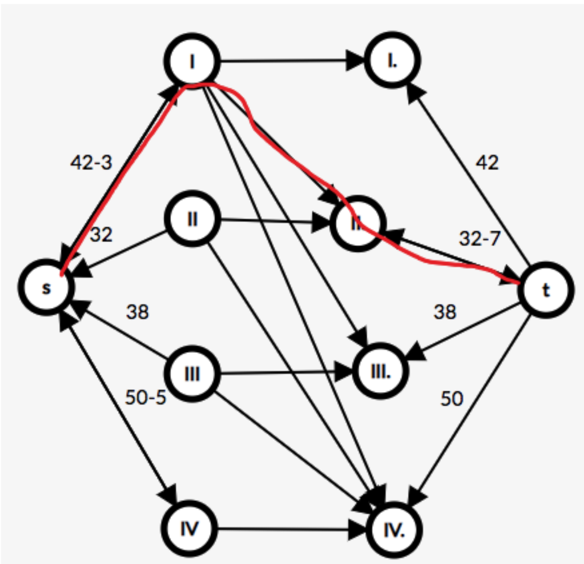
(ii) Кровь IV-ой группы могут принимать только пациенты с IV-ой группой крови. Однако таких доз в наличии на 5 больше чем нужно, то есть хотя бы 5 доз останутся лишними, как бы мы не распределяли дозы. А всего доз на 1 больше, чем запросов на них. Поэтому как минимум 4 пациентов обслужить не получится.

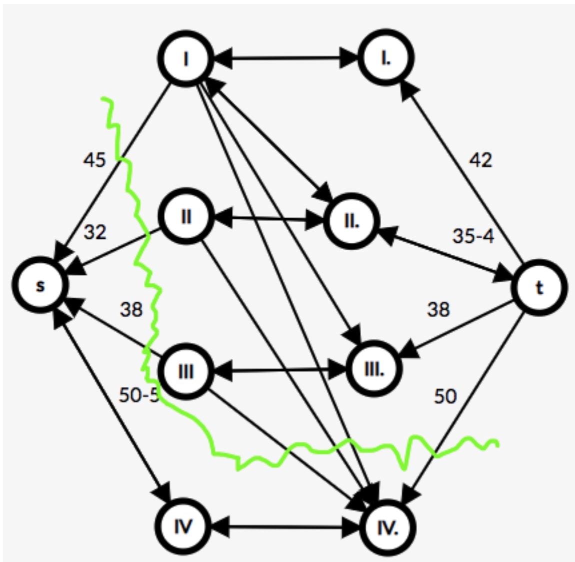

s
I
II
III
IV
I.
II.
III.
IV.
t
45
32
38
55
42
39
38
50


s
I
II
III
IV
I.
II.
III.
IV.
t
45
32
38
50-5
42
39
38
50


s
I
II
III
IV
I.
II.
III.
IV.
t
42-3
32
38
50-5
42
39
38
50


s
I
II
III
IV
I.
II.
III.
IV.
t
42-3
32
38
50-5
42
39
38
50


s
I
II
III
IV
I.
II.
III.
IV.
t
42-3
32
38
50-5
42
32-7
38
50


s
I
II
III
IV
I.
II.
III.
IV.
t
45
32
38
50-5
42
35-4
38
50

Задача 3

Граф называется рёберно k-связным, если минимальное число рёбер, которое нужно удалить для того, чтобы он стал несвязным, равно k. Аналогично определяется вершинная k-связность (удалять нужно вершины).

Постройте полиномиальный алгоритм или докажите $\mathcal{NP}$-полноту проверки: (i) рёберной k-связности; (ii) вершинной k-связности.

Решение:

(i) Докажем, что граф является реберно k-связным тогда и только тогда, когда вес минимального разреза в ем равен k.

Пусть граф G реберно k-связен. Рассмотрим разрез графа, который получается, если удалить эти k ребер. Допустим, он не минимальный. Тогда есть другой разрез, вес которого $< k$. Тогда и граф имеет реберную связность $< k$, так как можно удалить ребра минимального разреза, чтобы граф стал несвязным. Противоречие.

Пусть вес минимального разреза равен k. Если мы удалим ребра этого разреза, то граф станет несвязным. Допустим, можно удалить меньше ребер. Но тогда минимальный разрез имеет вес $< k$. Противоречие.

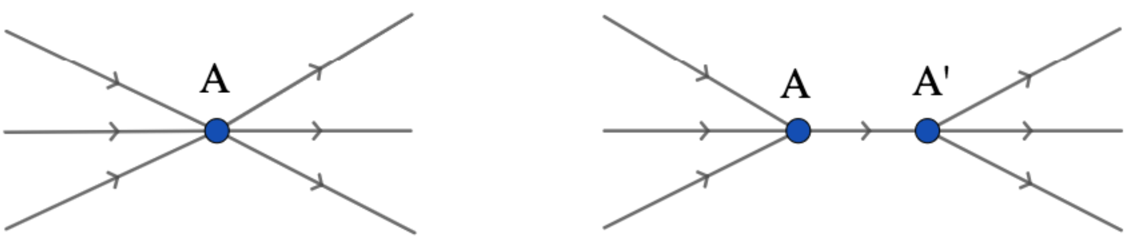
Чтобы применять алгоритм Форда-Фалкерсона, нужно указать источник и сток. Для этого переберем сделаем граф ориентированным (заменим каждое ребро на два) и переберем все возможные пары источник-сток.

Алгоритм:

1. Для всех $\Theta\left(|V|^2\right)$ пар источник-сток с помощью алгоритма Эдмондса-Карпа (модификации алгоритма Форда-Фалкерсона с помощью BFS) найти минимальный разрез. (Вес каждого ребра считать равным 1.)
2. Выбрать из них минимум — вес минимального разреза.
3. Если вес минимального разреза равен k, то граф реберно k-связен, иначе — нет.

Алгоритм Эдмондса-Карпа работает за $O\left(|V||E|^2\right)$, то есть за полином, значит, и весь алгоритм работает за полином.

(ii) Сделаем граф ориентированным: каждое ребро заменим на два ориентированных (туда-обратно). Заменим каждую вершину на две следующим образом:



Потом уберем ориентацию на ребрах. Обозначим исходный граф как G, а преобразованный граф как G'. Путь в G проходит через вершину A тогда и только тогда, когда в G' он проходит через ребро $[AA']$. Докажем, что граф G является вершинно k-связным тогда и только тогда, когда минимальный разрез в G' содержит k ребер, то есть реберно k-связен.

Пусть G вершинно k-связен. Тогда существует такая пара вершин (u, v), что после удаления k вершин из u недостижима v. Тогда после удаления k соответствующих вершинам ребер, в G' из u также будет недостижима v в силу построения. Если бы можно было удалить $< k$ ребер в G', то и в G можно было бы удалить соответствующие вершины.

В обратную сторону аналогично.

Алгоритм:

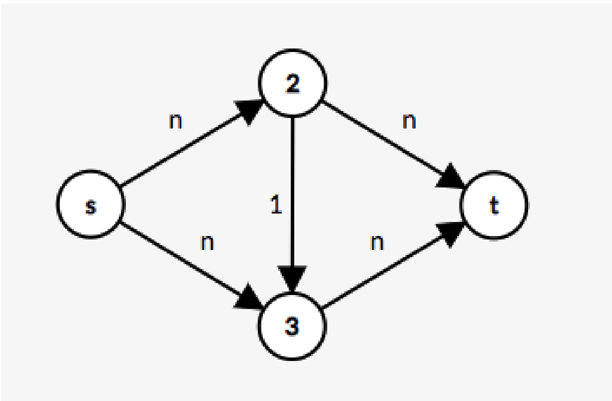
1. Сделать граф ориентированным.
2. Раздвоить каждую вершину.
3. Убрать ориентацию на ребрах.
4. Проверить граф на k-связность алгоритмом из предыдущего пункта.

Другими словами, мы построили полиномиальную сводимость.

Задача 4

Покажите на примере конкретной потоковой сети, что алгоритм Форда-Фалкерсона не является полиномиальным.

Решение:



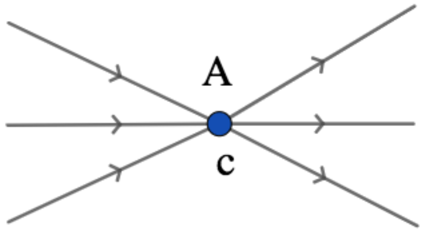
В такой сети алгоритм Форда-Фалкерсона может находить увеличивающий путь, проходящий через единичное ребро. Таким образом, для нахождения максимального потока величины $2n$ понадобится $2n$ итераций, так как каждый раз поток увеличивается только на 1. Это не полином от длины входа (число ребер, число вершин, двоичная запись n).

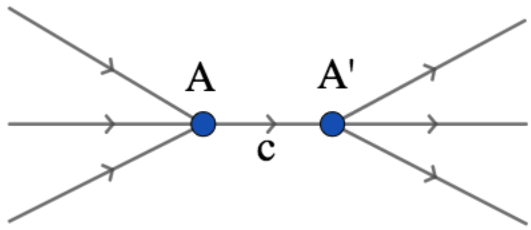
Задача 5

Рассмотрим следующую задачу. В потоковой сети нет ограничений пропускной способности на дугах, но есть ограничения пропускной способности вершин. Формально, для каждой вершины v, отличной от истока и стока, задано целое неотрицательное число $c(v)$, и для потока в сети должно выполняться $\sum\limits_u f(u,v) = \sum\limits_u f(v,u) \leq c(v)$. Опишите алгоритм нахождения максимального потока в такой сети.

Решение:

Будем считать, что пропускная способность всех ребер графа равна ∞. Для каждой вершины графа проведем следующее преобразование:





То есть заменим одну вершину A на две: A и A'. Теперь можно пользоваться алгоритмом Форда-Фалкерсона.

Задача 6

Задан двудольный неориентированный граф, в котором обе доли имеют n вершин, а степени (количество инцидентных рёбер) всех вершин равны d, т. е. однородный двудольный граф степени d. Приведите полиномиальный алгоритм, который раскрасит рёбра в d цветов так, чтобы из каждой вершины исходили рёбра разных цветов. Оцените сложность предложенного алгоритма.

Указание: можно использовать задачу о поиске паросочетания. Для этого используется лемма Холла, находится совершенное паросочетание, окрашивается в один цвет, и отбрасывается. Затем процедура повторяется.

Решение:

Пусть $G = (V, E)$ — двудольный граф с равными долями, L — множество вершин левой доли, R — множество вершин правой доли. **Совершенным паросочетанием** называется паросочетание, в которое входят все вершины графа.

Пусть $X \subseteq V$. В качестве $N(X)$ обозначим **множество соседей** вершин из X, то есть:

$$N(X) = \big\{ y \in V \mid (x, y) \in E,\ x \in X \big\}$$

Теорема (лемма) Холла.

Совершенное паросочетание существует тогда и только тогда, когда:

$$\forall A \subseteq L \ : \ |A| \leq |N(A)|.$$

————————

• Покажем, что данный в условии граф G содержит d непересекающихся совершенных паросочетаний по индукции по степени вершин.

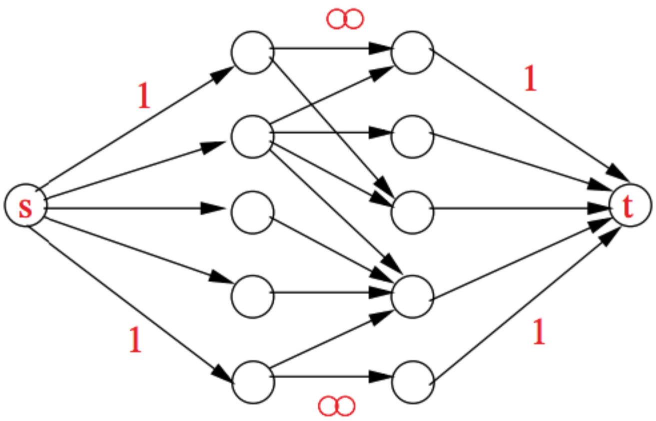
База: $k = 1$. По лемме о рукопожатиях, граф состоит из n ребер, и каждая вершина с чем-то соединена. Значит, совершенное паросочетание в нем есть.

Пусть при степени каждой вершины $k \geq 1$ в графе есть k непересекающихся совершенных паросочетаний. Покажем, что это верно при степенях вершин $k + 1$.

Покажем, что для такого графа выполнятся теорема (лемма) Холла. Пусть $A \subseteq L$, $|A| = s$. Всего из множества A выходит $s(k + 1)$ ребер. Пусть $|N(A)| < s$. Тогда в $N(A)$ есть вершина, имеющая степень больше $k + 1$ — противоречие. Значит, $|A| \leq |N(A)|$ и, аналогично, $|A| \geq |N(A)|$. Тогда $|A| = |N(A)|$.

По теореме Холла, в G есть совершенное паросочетание. Выделим его и удалим из графа эти ребра. Тогда в оставшемся графе степени каждой вершины станут равны k, так как мы удалили совершенное паросочетание. По предположению, в нем есть непересающиеся k совершенных паросочетаний. Ясно, что с удаленным они тоже не пересекаются.

• Сведем задачу к поиску максимального потока в сети. Дополним граф до сети следующим образом: (картинка из лекции по этой теме какого-то испанского института)



В такой сети мы можем за $O\left(|V||E|^2\right)$ с помощью алгоритма Эдмондса-Карпа найти максимальное паросочетание, которое будет совершенным, как доказана выше.

Алгоритм:

Повторить d раз ($i = 1, \dots, d$):

1. Дополнить граф до сети, как показано выше.
2. Алгоритмом Эдмондса-Карпа найти в ней максимальный поток, соответствующий совершенному паросочетанию.
3. Окрасить эти ребра в i-ый цвет.
4. Удалить эти ребра из графа.

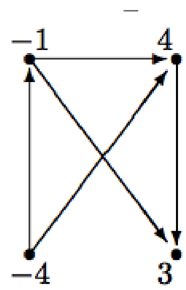
Корректность была доказана по ходу объяснения алгоритма. Оценим временную сложность. Изначально граф имеет nd ребер. После k шагов граф содержит $n(d-k)$ ребер. Алгоритм Эдмондса-Карпа при этом работает за $O\big(n^3(d-k)^2\big)$. Итоговая асимптотика:

$$T(n) = \sum_{k=1}^{d} O\big(n^3(d-k)^2\big) = O\big(n^3 d^3\big) = O\left(|E|^3\right)$$

Задача 7

Задача 79 из канонического задания.

Задача 79. $(0.02 + 0.01 + 0.02)$ Последовательность выполнения проектов задана ациклическим орграфом $G = (V, E)$ (если в орграфе есть ребро (u, v), то проект v не может начаться, пока не будет выполнен проект u). Выполнение проекта v приносит прибыль $p(v)$ (она может быть и отрицательна). Требуется выбрать подмножество проектов, приносящих максимальную суммарную прибыль, т. е. найти такое подмножество проектов $M \subseteq V$, что $M = argmax_{S \subseteq V}\{p(S) \overset{def}{=} \sum_{v \in S} p(v)\}$.

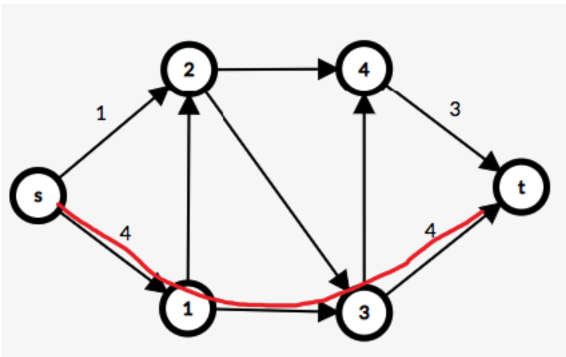


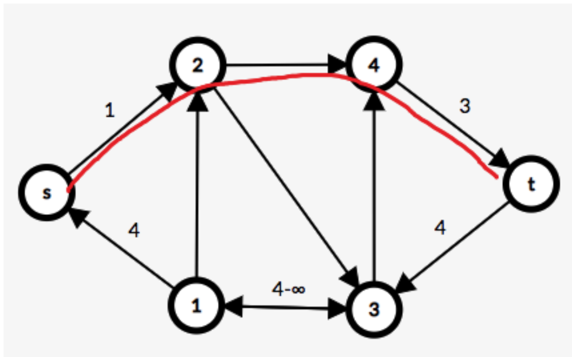
Оказывается, что эту задачу можно свести к задаче о минимальном разрезе. **Конструкция.** *Дополняем граф G источником s и стоком t, и задаем* **бесконечные** *пропускные способности на ребрах G. Далее, для всех вершин $v \in V$, если $p(v) < 0$, то задаем ребро (s, v) с пропускной способностью $-p(v)$, а если $p(v) > 0$, то задаем ребро (v, t) с пропускной способностью $p(v)$.*

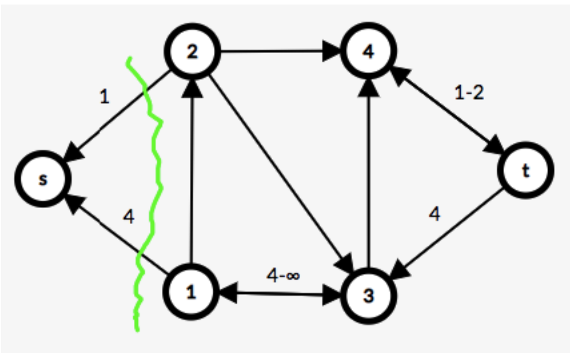
(i) С помощью алгоритма Форда-Фалкерсона найдите максимальный поток в полученной сети. Начальный поток нулевой. Приведите подробное описание: на каждом шаге процедуры на вспомогательных чертежах изобразите остаточные графы и укажите увеличивающие пути.
(ii) Затем, используя алгоритм Форда-Фалкерсона, найдите минимальный разрез.
(iii) Обоснуйте конструкцию в общем случае.

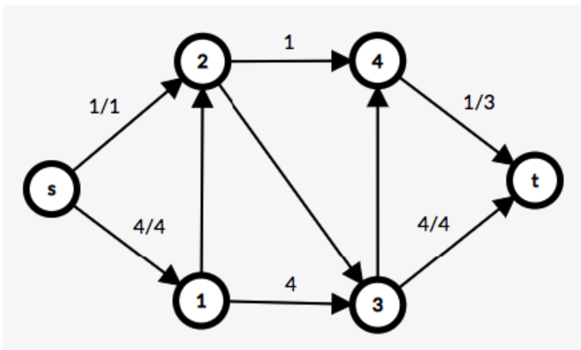
Решение:

(i) Ребра, над которыми ничего не подписано, имеют бесконечную пропускную способность.









Максимальный поток равен 5.

(ii) Минимальный разрез выделен зеленым цветом. Проекты, которые нужно сделать, лежат в части минимального разреза, содержащей сток t.

(iii) Докажем, что искомое множество проектов лежит в сточной части минимального разреза.

Рассмотрим какой-нибудь разрез (L, R) графа. Обозначим за L_+, R_+ положительные проекты, а за L_-, R_- — отрицательные. Вычислим пропускную способность разреза. Она складывается из пропускных способностей ребер из s в R_- и из L_+ в t. То она есть равна $\big(p(R_-) + p(L_+)\big)$. Проекты в сточной части разреза дают прибыль $\big(p(R_+) - p(R_-)\big)$. Покажем, что ее максимизация эквивалентна минимизации пропускной способности разреза.

$$p_+ = p(R_+) + p(L_+), \qquad p_- = p(R_-) + p(L_-)$$

$$\operatorname{argmax}\big(p(R_+) - p(R_-)\big) = \operatorname{argmax}\big(p_+ - p(L_+) - p(R_-)\big) = \operatorname{argmin}\big(p(L_+) + p(R_-)\big)$$

Это и требовалось доказать.