Функан. ДЗ 9.

Прохоров Юрий, 776

Задача §11.1(б)

Найти сопряженный оператор к оператору $A : \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$ вида

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^t sx(s)ds$$

Решение:

Найдем $A^* : H \to H$ по определению для гильбертового пространства $H = \mathbb{L}_2[0,1]$:

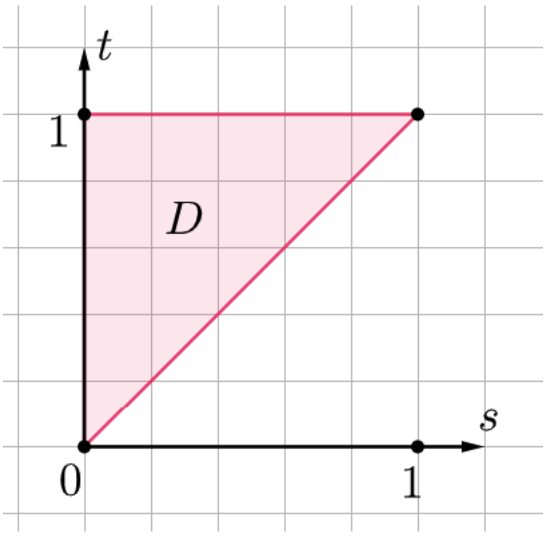
$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \qquad \forall x, y \in H$$

Распишем левую часть этого равенства:

$$\langle Ax, y\rangle = \int\limits_0^1 (Ax)(t)\overline{y(t)}dt = \int\limits_0^1 \int\limits_0^t sx(s)\overline{y(t)}\,ds\,dt = \iint\limits_D sx(s)\overline{y(t)}\,ds\,dt =$$

$$= \Big/ \begin{matrix}\text{смена порядка}\\ \text{интегрирования}\end{matrix} \Big/ = \int\limits_0^1 \int\limits_s^1 sx(s)\overline{y(t)}\,dt\,ds = \int\limits_0^1 x(s)\,\overline{s\int_s^1 y(t)dt}\,ds =$$

$$= \int\limits_0^1 x(s)\overline{(A^*y)(s)}\,ds = \langle x, A^*y\rangle$$



Сопряженный оператор $A^* : \mathbb{L}_2[0,1] \to \mathbb{L}_2[0,1]$ задается формулой

$$(A^*y)(s) = s\int\limits_s^1 y(t)dt$$

Задача §11.10

Пусть E — банахово пространство, $A \in L\big(\mathbb{L}_2[0,1], E\big)$, $C[0,1] \subset \mathrm{Im}A^*$. Найти $\mathrm{Ker}A$.

Решение:

По теореме Фредгольма, $\mathrm{Ker}A = {}^{\perp}\big(\mathrm{Im}A^*\big)$.

Если $N_1 \subset N_2$, то ${}^{\perp}N_2 \subset {}^{\perp}N_1$:

$$ {}^{\perp}N_2 = \big\{x \in X \;\big|\; f(x) = 0 \;\; \forall f \in N_2\big\} \subset \big\{x \in X \;\big|\; f(x) = 0 \;\; \forall f \in N_1\big\} = {}^{\perp}N_1 $$

Тогда $\mathrm{Ker}A = {}^{\perp}\big(\mathrm{Im}A^*\big) \subset {}^{\perp}\big(C[0,1]\big)$. Найдем $\subset {}^{\perp}\big(C[0,1]\big)$.

Покажем, что ${}^{\perp}\big(C[0,1]\big) = \{0\}$. Пусть $f \in {}^{\perp}\big(C[0,1]\big)$ и $f \neq 0$.

$$ f \in {}^{\perp}\big(C[0,1]\big) \qquad \iff \qquad \int\limits_0^1 f(t)g(t)\,dt = 0 \qquad \forall g \in C[0,1] $$

Покажем, что $\forall \varepsilon > 0$ выполнено $\|f\|_2 \leq \varepsilon$. Отсюда будет следовать противоречие: $f = 0$.

$$ \begin{aligned} \|f\|_2 &= \Big/ \begin{array}{c} \text{следствие из} \\ \text{т. Хана-Банаха} \end{array} \Big/ = \sup_{\|h\|_2 = 1} \left| \int\limits_0^1 f(t)h(t)\,dt \right| \leq \left| \int\limits_0^1 f(t)h_\varepsilon(t)\,dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} = \\ &= \Big/ \begin{array}{c} C[0,1] \text{ плотно в } \mathbb{L}_2[0,1] \\ \text{по норме } \|\cdot\|_2 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \exists g_\varepsilon \in C[0,1]: \\ \|g_\varepsilon - h_\varepsilon\|_2 \leq \dfrac{\varepsilon}{2\|f\|_2} \end{array} \Big/ \leq \\ &\leq \underbrace{\left| \int\limits_0^1 f(t)g_\varepsilon(t)\,dt \right|}_{0, \text{ т.к. } g_\varepsilon \in C[0,1]} + \left| \int\limits_0^1 f(t)\big(h_\varepsilon(t) - g_\varepsilon(t)\big)\,dt \right| + \frac{\varepsilon}{2} = \Big/ \begin{array}{c} \text{неравенство} \\ \text{Коши-Буняковского} \end{array} \Big/ \leq \\ &\leq \|f\|_2 \cdot \|g_\varepsilon - h_\varepsilon\|_2 + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} $$

Итак, ${}^{\perp}\big(C[0,1]\big) = \{0\}$, поэтому $\mathrm{Ker}A = \{0\}$.

Задача §11.14

Пусть E — рефлексивное пространство, $A \in L(E)$. Доказать, что $A^{**} = A$.

Решение:

Имеем для $A^* : E^* \to E^*$:

$$ f(Ax) = (A^*f)(x), \qquad \forall f \in E^*, \qquad \forall x \in E $$

Имеем для $A^{**} : E^{**} \to E^{**}$:

$$ F(A^*f) = (A^{**}F)(f), \qquad \forall F \in E^{**}, \qquad \forall f \in E^* $$

В силу рефлексивности E можно отождествить $E = E^{**}$. В последнем равенстве заменим F на x, где $\Phi x = F$, а $\Phi : E \to E^{**}$ — отображение Банаха. Тогда получим, что

$$ A^{**} : E \to E, \qquad (A^*f)(x) = f(A^{**}x), \qquad \forall f \in E^*, \qquad \forall x \in E $$

Отсюда и из определения A^* получаем, что

$$ f(Ax) = f(A^{**}x), \qquad \forall f \in E^*, \qquad \forall x \in E $$

По следствию из теоремы Хана-Банаха,

$$ Ax = A^{**}x, \qquad \forall x \in E $$

Это и означает, что $A = A^{**}$.

Задача 1.12 (из задавальника)

Рассматривается оператор $A : \ell_1 \to \mathbb{L}_3(0, +\infty)$ вида

$$(Ax)(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{\sqrt{k} + \sqrt{t}}, \qquad t > 0, \qquad x \in \ell_1$$

(a) Доказать, что A ограничен.

(b) Найти сопряженный оператор A^*.

(c) Исследовать множество $AB_1(0)$ на вполне ограниченность в $\mathbb{L}_3(0, +\infty)$.

(d) Исследовать множество $AB_1(0)$ на замкнутость в $\mathbb{L}_3(0, +\infty)$.

Решение:

(a) Оценим норму:

$$\|Ax\|_3 = \left(\int\limits_0^{+\infty} \big|(Ax)(t)\big|^3 dt \right)^{1/3} = \left(\int\limits_0^{+\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{\sqrt{k} + \sqrt{t}} \right|^3 dt \right)^{1/3} \le \left(\int\limits_0^{+\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x(k)|}{1 + \sqrt{t}} \right]^3 dt \right)^{1/3} =$$

$$= \left(\int\limits_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + \sqrt{t})^3} \right)^{1/3} \|x\|_1 = 1 \cdot \|x\|_1$$

Значит, $\|A\| \le 1$, то есть оператор A ограничен.

(b) Найдем сопряженный оператор. Для любых $g \in \big(\mathbb{L}_3(0, +\infty)\big)^* = \mathbb{L}_{3/2}(0, +\infty)$ и $x \in \ell_1$:

$$g(Ax) = \Big/ \begin{matrix} \text{действие функционала} \\ \text{из } \big(\mathbb{L}_3(0, +\infty)\big)^* \end{matrix} \Big/ = \int\limits_0^{+\infty} (Ax)(t)\, g(t)\, dt = \int\limits_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{\sqrt{k} + \sqrt{t}} g(t)\, dt$$

Хотим поменять местами интеграл и сумму, что получить действие функционала на ℓ_1 — так действуют элементы из образа оператора A^*. Для этого воспользуемся теоремой Лебега об ограниченной сходимости:

$$\left.\begin{matrix} f_n(t) \text{ сходятся почти всюду к } f(t) \\ |f_n(t)| \overset{\text{п.в.}}{\le} h(t), \text{ где } h \in \mathbb{L}_1(E) \end{matrix}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \int\limits_E f_n(t)dt \longrightarrow \int\limits_E f(t)dt$$

- Покажем п.в.-сходимость ряда под интегралом:

$$\left| \frac{x(k)}{\sqrt{k} + \sqrt{t}} g(t) \right| \le \frac{|x(k)|\, |g(t)|}{1 + \sqrt{t}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x(k)|\, |g(t)|}{1 + \sqrt{t}} = \frac{\|x\|_1\, |g(t)|}{1 + \sqrt{t}} < +\infty$$

  По признаку Вейерштрасса, ряд сходится для почти всех $t > 0$, так как $|g(t)| < +\infty$ почти всюду.

- Покажем, что частичные суммы мажорируются интегрируемой функцией:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{x(k)\, g(t)}{\sqrt{k} + \sqrt{t}} \right| \le \frac{\|x\|_1\, |g(t)|}{1 + \sqrt{t}}$$

  По неравенству Гельдера: $\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$\left\| \frac{1}{1 + \sqrt{t}} \cdot g(t) \right\|_1 \le \left\| \frac{1}{1 + \sqrt{t}} \right\|_3 \cdot \|g\|_{3/2} = 1 \cdot \|g\|_{3/2} < +\infty$$

Итак, можно менять местами сумму и интеграл:

$$g(Ax) = \ldots = \int\limits_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{\sqrt{k}+\sqrt{t}} g(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(t)}{\sqrt{k}+\sqrt{t}}\,dt =$$

$$= \Bigg/ \begin{matrix}\text{действие функционала} \\ \text{из } \ell_1^* = \ell_\infty\end{matrix} \Bigg/ = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \underbrace{(A^*g)(k)}_{\in \ell_\infty} = (A^*g)(x)$$

Тогда сопряженный оператор $A^* : \mathbb{L}_{3/2}(0,+\infty) \to \ell_\infty$:

$$(A^*g)(k) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(t)}{\sqrt{k}+\sqrt{t}}\,dt$$

(c) Воспользуемся критерием вполне ограниченности в $\mathbb{L}_p$-пространствах

Theorem 5 (Kolmogorov–Riesz). *Let $1 \le p < \infty$. A subset $\mathcal{F}$ of $L^p(\mathbb{R}^n)$ is totally bounded if, and only if,*

(i) $\mathcal{F}$ is bounded,

(ii) for every $\varepsilon > 0$ there is some R so that, for every $f \in \mathcal{F}$,

$$\int_{|x|>R} |f(x)|^p\,dx < \varepsilon^p,$$

(iii) for every $\varepsilon > 0$ there is some $\rho > 0$ so that, for every $f \in \mathcal{F}$ and $y \in \mathbb{R}^n$ with $|y| < \rho$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+y) - f(x)|^p\,dx < \varepsilon^p.$$

Покажем, что $AB_1(0)$ **вполне ограничено**.

(i) Ограниченность $AB_1(0)$ следует из ограниченности оператора A.

(ii) Для произвольного $\varepsilon > 0$ и $x \in \ell_1,\ \|x\|_1 \le 1$:

$$\int\limits_R^{+\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{\sqrt{k}+\sqrt{t}}\right|^3 dt \le \int\limits_R^{+\infty} \frac{\|x\|_1^3}{(1+\sqrt{t})^3} dt \le \int\limits_R^{+\infty} \frac{dt}{(1+\sqrt{t})^3} < \varepsilon^3$$

Последнее неравенство выполнено при достаточно большом $R = R(\varepsilon)$, так как последний интеграл сходится.

(iii) Для произвольного $\varepsilon > 0$, $x \in \ell_1,\ \|x\|_1 \le 1$ и $0 \le \tau \le 1$:

$$\int\limits_0^{+\infty} \big|(Ax)(t+\tau) - (Ax)(t)\big|^3 dt \le \int\limits_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| \left(\frac{1}{1+\sqrt{t}} - \frac{1}{1+\sqrt{t+\tau}}\right)^3 dt \le \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{t+\tau}-\sqrt{t}}{(1+\sqrt{t})^2}\right)^3 dt$$

Несложно показать, что последний интеграл сходится равномерно по параметру τ. По признаку Вейерштрасса,

$$\left|\left(\frac{\sqrt{t+\tau}-\sqrt{t}}{(1+\sqrt{t})^2}\right)^3\right| \le C\frac{t^{3/2}}{1+t^3}, \qquad \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{3/2}}{1+t^3}\,dt < +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \text{сходится равномерно при } \tau \in [0,1]$$

Подынтегральная функция непрерывна, поэтому значение интеграла непрерывно как функция от τ. Тогда существует предел этого интеграла при $\tau \to 0$, равный 0. Значит, найдется такое $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$, что при $\tau < \rho$ выполнено

$$\int\limits_0^{+\infty} \big|(Ax)(t+\tau) - (Ax)(t)\big|^3 dt \le \ldots \le \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{t+\tau}-\sqrt{t}}{(1+\sqrt{t})^2}\right)^3 dt < \varepsilon^3$$

Фактически мы доказали, что оператор A является **компактным**.

(d) Попытка показать, что $AB_1(0)$ **замкнуто**.

Пусть $f_n \to f$ и $\{f_n\} \subset AB_1(0)$. Тогда $f_n = Ax_n$, где $x_n \in B_1(0)$.

1. Сначала установим некоторые свойства единичного шара $B_1(0) \subset \ell_1 = c_0^*$.

$$c_0 \text{ сепарабельно} \quad \xRightarrow{\text{теорема Банаха-Алаоглу}} \quad \text{шар } B_1(0) \subset c_0^* = \ell_1 \text{ слабо* компактен}$$

$$c_0 \text{ сепарабельно} \quad \xRightarrow{\text{утверждение 5.5.3}} \quad \text{слабая* топология на шаре } B_1(0) \subset c_0^* = \ell_1 \text{ метризуема}$$

   Отсюда следует, что

$$B_1(0) \text{ слабо* компактен} \quad \Longleftrightarrow \quad B_1(0) \text{ слабо* секвенциально компактен}$$

2. Покажем, что из $\{x_n\}$ можно выделить покоординатно сходящуюся подпоследовательность.

$$\left.\begin{array}{c} \{x_n\} \subset B_1(0) \\ B_1(0) \text{ слабо* секвенциально компактен} \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \exists \{x_n'\} \subset \{x_n\}: \quad x_n' \xrightarrow{w*} x \in B_1(0)$$

$$x_n' \xrightarrow{w*} x \quad \Longleftrightarrow \quad \forall z \in c_0: \quad \langle x_n', z\rangle \to \langle x, z\rangle$$

   Беря в качестве z базисные векторы e_k, получаем, что

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad \langle x_n', e_k\rangle \to \langle x, e_k\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad x_n'(k) \to x(k),$$

   то есть $x_n' \to x$ покоординатно.

3. Покажем, что из $\{Ax_n'\}$ можно выделить сходящуюся почти всюду подпоследовательность.

   Известно, что $Ax_n' \xrightarrow{\|\cdot\|_3} f$. По неравенству Чебышева, для любого $\varepsilon > 0$:

$$\mu\big\{|Ax_n' - f| > \varepsilon\big\} = \mu\big\{|Ax_n' - f|^3 > \varepsilon^3\big\} \le \frac{1}{\varepsilon^3}\big\|Ax_n' - f\big\|_3^3 \longrightarrow 0,$$

   то есть $Ax_n' \xrightarrow{\mu} f$ — сходимость по мере.

$$Ax_n' \xrightarrow{\mu} f \quad \xRightarrow{\text{теорема Рисса}} \quad \exists \{x_n''\} \subset \{x_n'\}: \quad Ax_n'' \xrightarrow{\text{п.в.}} f$$

4. Покажем, что $Ax_n' \xrightarrow{\text{п.в.}} Ax$.

   Нужно переставить местами предел и сумму:

$$\lim_{n\to\infty} (Ax_n')(t) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_n'(k)}{\sqrt{k} + \sqrt{t}} \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n'(k)}{\sqrt{k} + \sqrt{t}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{\sqrt{k} + \sqrt{t}} = (Ax)(t)$$

   Воспользуемся теоремой Лебега об ограниченной сходимости, примененной для малого лебегового пространства ℓ_1:

$$\left.\begin{array}{c} a_n(k) \to a(k) \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ |a_n(k)| \le b(k), \text{ где } b \in \ell_1 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_n(k) \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a(k)$$

   Не получается показать, что второе условие выполняется... Допустим, что оно выполнено.
   Тогда $Ax_n' \xrightarrow{\text{п.в.}} Ax \implies Ax_n'' \xrightarrow{\text{п.в.}} Ax$.

5. Итак,

$$\left.\begin{array}{c} Ax_n'' \xrightarrow{\text{п.в.}} Ax \\ Ax_n'' \xrightarrow{\text{п.в.}} f \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad Ax \overset{\text{п.в.}}{=} f \quad \Longrightarrow \quad f \in AB_1(0)$$