CONTENTS | 目次

SECTION 1-1

変数・定数

押さえるポイント　**変数と定数の違いを理解し，どちらか判断できるようになる。**

変数と定数の理解は，関数（1-3 参照）という概念の基本になるので，今後，数学だけでなくプログラミングにおいて非常に重要となってきます。

《定義》
- 「変数」とは一定ではなくさまざまな値を取り得る値
- 「定数」とは決められた値

図 1.1.1　変数と定数

変数は「箱」によく例えられます。図 1.1.1 であれば，x という変数（＝箱）のなかに，3，1.5，−5 のようなさまざまな値が入り得る，ということです。**定数は，決められた値であり，例えば 4 や a など，固定化された値を取ります。**

図 1.1.1 のような a は，具体的な数値でないので，変数なのでは？ と思う人もいるかもしれません。ただ，ここでは 1 や 2 などの数値の仮の姿として，a というマスクをかぶっているようなイメージで捉えるといいでしょう。

さて，具体的な例を考えていきましょう。まず，x についての 1 次関数 $y = ax + b$ について考えていきます。これは，x が変化したときに y はどのように変化していくのかを調べる関数です。つまり，x と y の関係を調べるための数式と

πr^2

いうことです。ここで x はさまざまに変化していくので変数であり，a や b は一定の値を取り続けるので定数です。**このように数学では慣習的に変数を x や y で表し，定数を a や b で表すことが多い**です。

次は，円の半径が変化していくとどのようにその円の面積が変化していくかを調べます。円の半径を r，円周率（3.1415…という数値）を π とすると，円の面積は πr^2 で表されます。この場合，円周率 π はどんなときも変化しない一定の値なので定数，半径 r はその時々の円の半径によって変わるので変数です。

2 つの例のように，変数は着目したい（調べたい）ことの値であり，一定の値を取る定数は特に着目しない数ともいえます。

人工知能ではこう使われる！

- 人工知能のモデルの一つである「ニューラルネットワーク」では，「重み（w）」という概念があり，コンピュータが自動的に「重み（w）」を学習します。
- コンピュータが「重み（w）」を学習しているときは重みが「変数」として，学習したモデルを利用するときは重みが「定数」として扱われます。

a　b　S(cm²)

演習問題

1-1　縦の長さが a cm，横の長さが b cm の長方形の面積 S（cm^2）は $S = ab$ で表されます。縦の長さを固定し，横の長さをさまざまに変化させてそのときの長方形の面積を調べます。このときの a, b のうち，変数と定数をそれぞれ挙げなさい。　a 定

解答・解説

変数：b，定数：a　…(答)

横の長さである b を変化させていくので，b が変数です。縦の長さである a は固定（一定）されているので，a は定数です。

SECTION
1-2 1次式と2次式

押さえるポイント

- 1次式は直線，2次式は放物線のグラフで図示され，一番大きな次数（じすう）についている係数（けいすう）の正負によってグラフの向きが異なる。
- n 次式はどのような式で表されるか理解し，表現することができる。

次数 係数

数学や人工知能ではさまざまな式を取り扱いますが，今回はその中でもあらゆる式の考え方の基礎となる1次式や2次式について学習します。人工知能分野では，特に2次式が頻繁に登場します。

まず，項（こう）という概念をおさらいします。**項とは数や文字，もしくはそれらの積で表される式**のことです。例えば，3，a，$3a$，$-4ab$，$\frac{x}{3}$，a^2 などです。このとき，項の中で掛けられている変数の数を次数といいます。例えば，a と b を変数とすると，ある項が3なら変数が1つもないので0次，a なら1次，$-4ab$ なら2次と定義されます。同様に，a^2 は2次となります。さらに各項で変数の文字ではない部分を係数といいます。例えば，3ならそのまま3が係数ですし，$3a$ なら3，$\frac{x}{3}$ なら $\frac{x}{3}=\frac{1}{3}\times x$ と表現されるので $\frac{1}{3}$ が係数となります。

次に，単項式と多項式という概念をおさらいしましょう。**単項式は1つの項でできた式**のことです。例えば，3，a，$3a$，$-4ab$，$\frac{x}{3}$ などです。次に**多項式は複数の項が和（記号だと＋）によって合体したもの**です。例えば，a，b を変数とすると，

+

$$3a-2b+4a^2b+6 \quad \cdots (1.2.1)$$

は多項式です。$3a$ と $-2b$ と $4a^2b$ と6が＋によって結合しています。さて，多項式(1.2.1)の係数と次数を調べていきましょう。

4つの項

$$\boxed{3a}+\boxed{(-2b)}+\boxed{4a^2b}+\boxed{6}$$

係数	3	−2	4	6
次数	1	1	3	0（定数項）

図 1.2.1　式(1.2.1)の係数と次数

係数は，図1.2.1に示したようになります。**多項式の次数は，その多項式に含まれる項の中で，最も次数が高い項の次数を採用します。**従って，式(1.2.1)の次数は3次となります。

ここから，変数を x に設定して，x の1次式と2次式を確認してみましょう。

《定義》 x についての1次式

$$ax+b \ (\text{ただし } a\neq 0)$$

今回，a や b は定数として捉えてください。1次式とは式の最高次数が1次である式のことです。この式を見てみると，ax の次数は1次，b の次数は文字 x がないので0次，従って，この式は1次式ですね。さて，$y=ax+b$ と置いたとき，この式をグラフで図示してみましょう。

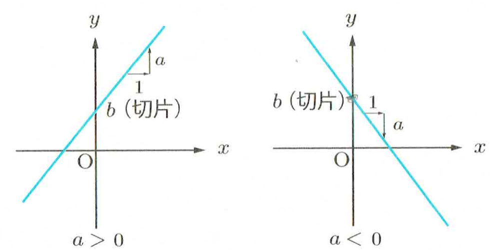


図 1.2.2　1次関数のグラフ

1次式の特徴は，x と y の関係を表すグラフをかくと直線になることです。このとき，係数 a はその直線の傾きを，b は $x=0$ のときの y の値である切片を表します。

次に，x の 2 次式を確認しましょう。

《定義》 x についての 2 次式

$$ax^2 + bx + c \ (\text{ただし } a \neq 0)$$

前回同様，a，b，c は定数です。2 次式は式の最高次数が 2 次である式です。$a \neq 0$ なのは，$a = 0$ だと 1 次式になってしまうからですね。さて，今回も前回同様，$y = ax^2 + bx + c$ と置いたとき，この式をグラフで図示してみましょう。

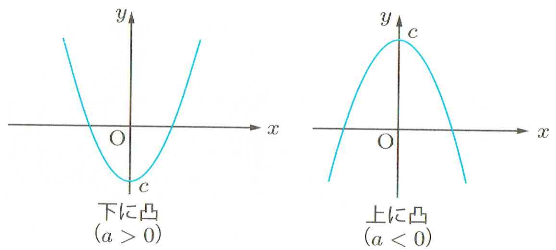


図 1.2.3　2 次関数のグラフ

以上のようになりました。**2 次式の特徴は**，$y = ax^2 + bx + c$ とすると，x と y の関係を表すグラフが物を投げたときの軌道の形である**放物線になる**ことです。$a > 0$ のとき放物線は下に凸，$a < 0$ のとき上に凸となります。

さて，最後に n 次式です。その式の項の最高次数が n 次である式のことを指します。

《定義》 x についての n 次式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ (\text{ただし } a_0 \neq 0)$$

a_0〜a_n はすべて定数です。なんだかぐっと難しくなった気がしますが，こういうときは具体例を考えると分かりやすいです。$n = 4$ と仮定すると，式は $a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ となり，見慣れた感じがしますね。$n = 5, 6, 7 \cdots$ となっても同様です。

演習問題

1-2 次の問にそれぞれ答えなさい。

❶ 以下の式は単項式，多項式のどちらか述べなさい。また，全ての係数を挙げてその式の次数を答えなさい。なお，変数は a, b, x とします。

(1) 単項式 $-3ab$　　(2) $2ab + b + 4$　　(3) $3x^2 + 4$

❷ 次の式は x についての 2 次式です。全ての係数を挙げなさい。

$3ax^2 + x + 2ab$

解答・解説

❶ (1) 単項式，係数 -3，次数 2 次

(2) 多項式，係数 2，1，4，次数 2 次

多項式では最も次数の高い項の次数をその多項式の次数とします（今回は $2ab$）。

多項式では全ての項の係数を答えます。

(3) 多項式，係数 3，4，次数 2 次

この式は x についての 2 次式ですね。

❷

$$\begin{array}{cccccc} & \underline{3ax^2} & + & \underline{x} & + & \underline{2ab} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{係数は} & 3a & & 1 & & 2ab \end{array} \quad \text{なので}$$

$\underline{3a,\ 1,\ 2ab \ \cdots \text{（答）}}$

問題文の「x についての」がミソです。この多項式では x 以外の文字は数字と同じように扱います。また x の係数は省略されている 1 です。

SECTION 1-3

関数の概念

押さえるポイント

☑ **関数とはある入力に対して1つの結果を出力する概念である。**

中学や高校でさまざまな関数を学んだと思いますが，関数がどのような意味を持つのかを詳しく考えたことがある方は少ないと思います。**「ある x によって1つの y が決定する規則があるとき y は x の関数である」**といい，$y = f(x)$ と表します。下の図でイメージをつかむと分かりやすいかもしれません。

$y=f(x)$

$$x \rightarrow \boxed{f(x)} \rightarrow y$$

入力　変換　出力

図 1.3.1　関数の入力と出力

例えば，$y = f(x)$，$f(x) = 2x$ という関数を考えます。x に 0 を入力（$x = 0$ を代入）すると，$y = 2 \times 0$ なので $y = 0$ と，y の値が決まります。同様に x に 2 を入力すれば $y = 4$ と，y の値が決まります。

$$x \rightarrow \boxed{f(x) = 2x} \rightarrow y$$

入力　変換　出力

$$0 \rightarrow \boxed{f(0) = 2 \times 0} \rightarrow 0$$

入力　変換　出力

$$2 \rightarrow \boxed{f(2) = 2 \times 2} \rightarrow 4$$

入力　変換　出力

図 1.3.2　関数と代入した例

このように，入力 x が決まると出力 y も必ず1つに決まるものを関数といいます。逆に，出力 y の値が2つ以上出てしまうものは関数とはいいません。

関数は無限に存在しますが，いくつか有名なものがあります。一番簡単なものには1次関数や2次関数があり，そのほか，指数関数，対数関数，三角関数，…などが有名ですが，これらの関数は後の SECTION で扱っていきます。

人工知能ではこう使われる！

- 人工知能にかぎらず，プログラミングで関数は必須の概念です。
- プログラミングにおいての関数は，数学の概念がさらに拡張され，ある値が入力されると，「真（True）」または「偽（False）」という値が出力される場合もありますし，文字列が出力される場合もあります。

演習問題　1.23

1-3 次の中から y が x の関数となっているものを全て選びなさい。

a. ある数 x の整数部分 y

b. 年齢が x 歳の人の体重 y kg

c. ある整数 x の正の約数（割り切れる数）の個数 y

解答・解説

a，c　…(答)

a. 例えば，$x = 2.34$ のときは $y = 2$，$x = \pi$（3.1415…）のときは $y = 3$ となりますね。x が決まれば，y は1つの値に決まるので，これは関数です。

b. 人の年齢と体重には直接的な関係はなく，これは関数とはいえません。

c. 例えば，$x = 12$ とすると，12 の正の約数は，1，2，3，4，6，12 の 6 つですね。このように，整数の約数の個数は1つに決まるので，これも関数といえます。このように，数式で表すことができない関数もあります。

SECTION 1-4

平方根（$\sqrt{\ }$）

> **押さえるポイント**
> - 2乗したら元の数になる値のことを，元の数の平方根（へいほうこん）という。
> - $\sqrt{\ }$ という記号は平方根を示している。

面積が $36\,\mathrm{m}^2$ の正方形の1辺の長さは何 m でしょう。正方形の面積は1辺の長さの2乗なので，2乗したら36になる数を探せばよく，すぐに，6と-6だと分かります。辺の長さなので，負の値は取ることができず，6 m が答えです。36に対する6や-6のように，**2乗したら a になる数を a の平方根**といいます。

aの平方根

《定義》

数 a に対して，$a=b^2$ を満たす b を a の平方根という。実数では，正の数の平方根は必ず2つ存在する。

$\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$

それでは3の平方根を求めてみましょう。しかしこれは整数や小数，分数では正確な値を表せません。なので3の正の平方根を $\sqrt{\ }$（根号）を用いて $\sqrt{3}$，負の平方根を $-\sqrt{3}$（読みはそれぞれルート3，マイナスルート3）と表します。つまり，**根号（$\sqrt{\ }$）を用いると，正の数 a の正の平方根を $\sqrt{a}$，負の平方根を $-\sqrt{a}$ と表せます。また，2つまとめて表したいときは $\pm\sqrt{a}$ と表せます。**

$\pm\sqrt{3}$

《公式》

以下 $a>0$，$b>0$，$c>0$ とする。

① $\sqrt{a^2}=a$　② $a\times\sqrt{b}=a\sqrt{b}$

③ $b\sqrt{a}+c\sqrt{a}=(b+c)\sqrt{a}$　④ $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

⑤ $\sqrt{a}\div\sqrt{c}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}=\sqrt{\dfrac{a}{c}}$　⑥ $\sqrt{a^2\times b}=a\sqrt{b}$

$\pm\sqrt{5}$

例えば，5の平方根を表したければ $\pm\sqrt{5}$ と書きます。式②より，$2\sqrt{2}$ は $2\times\sqrt{2}$ を表していると分かります。$2+\sqrt{2}$ ではないので注意しましょう。根号同士の掛け算や割り算はそのまま根号の中身同士を計算できます（式④，⑤）。式⑥を用いると，例えば $\sqrt{12}$ を簡単な表現に書き換えられます。$12=2^2\times3$ より，$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$ と書き直せます。しかし，足し算や引き算は根号の中身が一致していないと，式③が利用できないので，$\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ はこれ以上簡単に表現することができません。　$\sqrt{12}$.　$\sqrt{2^2\times3}$　$2\sqrt{3}$

演習問題

1-4 次の問にそれぞれ答えなさい。

❶ 9の平方根を求めなさい。$\pm\sqrt{81}$

❷ 次の計算をしなさい。ただし答えは根号（ルート）の中の数字が最小になるようにすること。

(1) $\sqrt{18}+\sqrt{2}$　(2) $3\sqrt{6}\times2\sqrt{2}$　$(3\times2)\sqrt{6\times2}$

$\sqrt{18\times2}$　$=6\sqrt{12}$

$\sqrt{38}=6\sqrt{2}$　$=6+3\sqrt{3}$　$=12\sqrt{3}$

解答・解説

❶ 2乗したら9になる数を探せばよいです。$3^2=9$，$(-3)^2=9$ なので答えは「3」と「-3」です。

❷ (1) $\sqrt{18}+\sqrt{2}$

$=3\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$=\underline{4\sqrt{2}}$　…（答）

> 一見 $\sqrt{\ }$ の中が違うので足し算できないように思われますが，$\sqrt{18}$ を簡単にすると $\sqrt{\ }$ の中がそろうので計算できます。

(2) $3\sqrt{6}\times2\sqrt{2}$

$=6\sqrt{12}$

$=6\times2\sqrt{3}$

$=\underline{12\sqrt{3}}$　…（答）

> 整数部分は整数部分同士で掛け合わせ，$\sqrt{\ }$ は $\sqrt{\ }$ 同士で掛け合わせます。

> $\sqrt{\ }$ の中を簡単にします。外に出た2は元から外にあった6と掛け算します。

SECTION 1-5

累乗と累乗根

押さえるポイント ☑ **累乗（るいじょう）と累乗根（るいじょうこん）の公式を理解し，正しく計算できるようになる。**

累乗

そろそろ高校数学の難しい分野に突入します。まずは**累乗**と**累乗根**について扱います。累乗は，2 乗，3 乗など，○乗と表現される数学的な表現です。皆さんご存じの通り，$2^2 = 2 \times 2 = 4$ ですし，$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ です。つまり **a を p 個掛け合わせたものを a の p 乗といい a^p と書きます**。このとき，a を底（てい），p を指数（しすう）といいます。この指数は整数である必要はなく分数でも負の数でもよいのです。

次に累乗根についてです。**p 乗すると a になる数を a の p 乗根といい，$\sqrt[p]{a}$ と書きます**。例えば，$4 \times 4 \times 4 = 64$ なので，$\sqrt[3]{64} = 4$ となり，「4 は 64 の 3 乗根」といいます。2 乗根は別名平方根で，$\sqrt[2]{a}$ の 2 を省略して $\sqrt{a}$ と書きます。平方根は，累乗根の特殊な場合だったのです。指数や累乗根の性質を下にまとめました。

《公式》

以下 $a > 0$，$b > 0$ とする。

① $a^0 = 1$　　② $a^p a^q = a^{p+q}$

③ $(a^p)^q = a^{pq}$　　④ $(ab)^p = a^p b^p$

⑤ $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$　　⑥ $\sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab}$

⑦ $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[pq]{a}$　　⑧ $\sqrt[p]{a} = a^{\frac{1}{p}}$

直感的に理解しにくいのは，式⑤でしょうか。指数が負になっても，全体としての値が負になることはありません。指数の絶対値を分母に，1 を分子にした分数と同じです。例えば，

$$2^{-1} \times 2^2 = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$2^{-1} \times 2^2$　$(-2) \times 4$

$-8 = 2 = 2$

となります。これは，式②を使って，

$$2^{-1} \times 2^2 = 2^{(-1+2)} = 2$$

と計算することもできます。　2×2　−2 4

式③, ⑧ですが，指数と累乗根の関係を表しています。つまり，$\sqrt{a}$ とは $a^{\frac{1}{2}}$ のことだったのです。確かにどちらも 2 乗してみると一致します。

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a$$

では実際に問題を解いて指数の計算に慣れていきましょう。

演習問題

1-5 次の計算をしなさい。ただし答えは根号（ルート）の中の数字が最小になるようにすること。

❶ $4^4 \times 2^{-1} \div 2^2$　❷ $\sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{9}$　❸ $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

4×4×4×4　2×(−1)

256×　−2 ÷ 4

解答・解説

❶ $4^4 \times 2^{-1} \div 2^2$

$= (2^2)^4 \times 2^{-1} \times 2^{-2}$

$= 2^8 \times 2^{-1} \times 2^{-2}$

$= 2^{(8-1-2)} = \underline{2^5 (= 32)}$ …（答）

底がそろっていない場合はまず，底をそろえます。割り算は掛け算に直しますが，そのとき指数の符号が逆転することに注意しましょう。

底がそろっている掛け算の場合，指数を足すときれいな形になります。

❷ $\sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{9}$

$= 81^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{1}{3}}$

$= (3^4)^{\frac{1}{3}} \times (3^2)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{4}{3}} \times 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\left(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)} = \underline{3^2 (= 9)}$ …（答）

累乗根を指数に直しつつ底をそろえます。

❸ $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

$= \sqrt[6]{64}$

$= 64^{\frac{1}{6}} = (2^6)^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{6}{6}} = \underline{2}$ …（答）

$\sqrt{\ }$ は $\sqrt[2]{\ }$ のことです。

SECTION 1-6

指数関数と対数関数（log）

押さえるポイント

- 指数関数（しすうかんすう）や対数関数（たいすうかんすう）は a が 1 より小さいか大きいかによってグラフの形が大きく変化する。
- 対数関数は log を用いて表現される。

次に，指数を変数とした関数である**指数関数**について学んでいきます。

《定義》

$a > 0,\ a \neq 1$ として

$$y = a^x$$

と表される関数を指数関数という。

指数関数のグラフは以下のようになります。

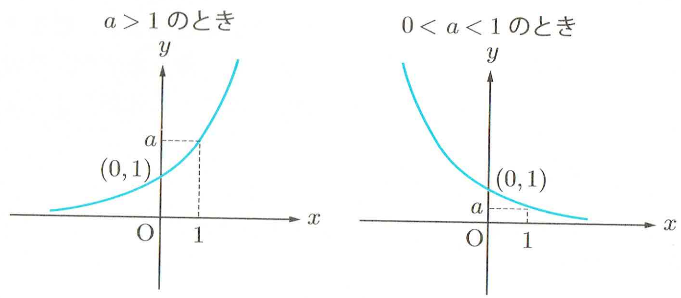


図 1.6.1　指数関数のグラフ

$a > 1$ のとき，グラフは右上がり，$0 < a < 1$ のとき，右下がりとなります。$x = 0$ のとき $a^0 = 1$，$x = 1$ のとき $a^1 = a$ なので，どちらも $(0,1)$，$(1,a)$ を通るのが特徴といえるでしょう。

さて，次は**対数**です。対数は，指数の逆の関係にあたります。

$y = \log_a x$

《定義》

ある数 x が a^y で表されるときの指数 y を，a を底とする x の対数といい，記号 log を用いて $y = \log_a x$ と表される。（a を底，x を真数（しんすう）という。ただし，$a > 0, a \neq 1$, かつ $x > 0$）

例えば $\log_2 4$ の値を求めてみましょう。$2^{\square} = 4$ となる数を探せばいいわけですから，$\log_2 4 = 2$ ですね。$\log_3 27$ では，$3^{\square} = 27$ となる数を探せばいいので，$\log_3 27 = 3$ となります。対数の性質は以下のものが挙げられます。

《公式》

以下 $a > 0, a \neq 1, X, Y > 0$ とする。　$a^0 = 1$

① $\log_a a = 1$　　② $\log_a 1 = 0$

③ $\log_a XY = \log_a X + \log_a Y$　　④ $\log_a \dfrac{X}{Y} = \log_a X - \log_a Y$　?

⑤ $\log_a X^p = p \log_a X$

⑥ $c > 0, c \neq 1$ とする。

$$\log_a X = \frac{\log_c X}{\log_c a}$$

式①は，$a^{\square} = a$ となる数なのでもちろん 1 ですね。式②は，$a^0 = 1$ から導けます。式③ ④は，log の中の積や商は log の足し算や引き算に変換できることを表しています。式⑤では，指数は log の係数にできることを示しています。この変換はよく使われます。式⑥は，**底の変換公式**といって，この公式を利用すれば底の部分を任意の数に変換できます。

この**真数**を変数とした関数が対数関数です。

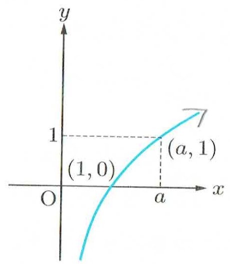
《定義》　$a > 0, a \neq 1$ とする。x を正の変数として

$$y = \log_a x$$

と表される関数を対数関数という。

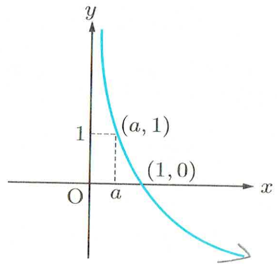
対数関数のグラフは次のようになります。

$a>1$ のとき



$a>1$ のときグラフは右上がりです。$(1,0)$，$(a,1)$ を通ります。$x<0$ の範囲は定義されません。

$0<a<1$ のとき



$0<a<1$ のときグラフは右下がりです。$(1,0)$，$(a,1)$ を通ります。$x<0$ の範囲は定義されません。

図 1.6.2　対数関数のグラフ

$a>1$ のとき，グラフは右上がりで，x が 0 に近づくと y は負の無限大に近づき，$0<a<1$ のとき，グラフは右下がりで，x が 0 に近づくと y は正の無限大に近づきます。どちらも，$x=1$ のときに $y=0$ なので，点 $(1,0)$ を通ります。

人工知能ではこう使われる！

- 人工知能では，尤（もっと）もらしさを表す度合いとして尤度（ゆうど）が使われ，尤度を示す関数を尤度関数といいます。
- 尤度関数は，式的には確率式と同じになり，0 以上 1 以下の値を取ります。
- 尤度関数を掛け算するとき，尤度は 1 以下で表現されるので，どんどん値が小さくなり扱いにくくなります。そのため，尤度の対数（log）を取って計算する対数尤度関数が用いられることが多いです。
- 対数を取ることで，$\log_a XY = \log_a X + \log_a Y$ という式を適用でき，掛け算を足し算で表現できるので，値が小さくなり計算しやすくなります。

演習問題

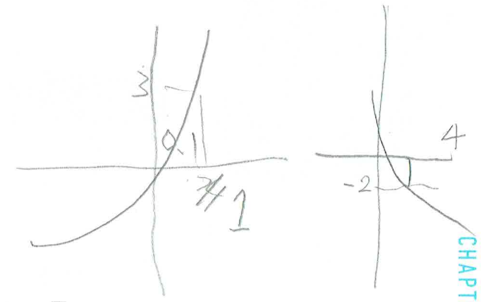
1-6 次の問にそれぞれ答えなさい。

1 以下の関数のグラフをかきなさい。

(1) $y=3^x$　　(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

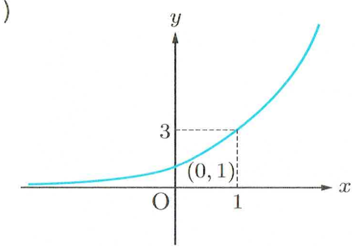
2 次の計算をしなさい。

(1) $\log_3 \sqrt{27}$　　(2) $\log_3 \frac{3}{4} + 4\log_3 \sqrt{2}$



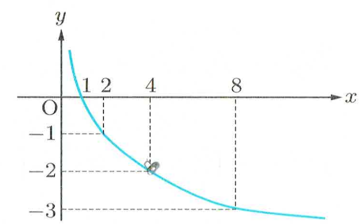
解答・解説

1 (1)



$a>1$ なので右上がりです。$(0,1)$ と $(1,3)$ を通ります。

(2)



$a<1$ なので右下がりです。$(1,0)$ と $(4,-2)$ を通ります。

2 (1) $\log_3 \sqrt{27}$

$\log_3 27^{\frac{1}{2}} = \log_3(3^3)^{\frac{1}{2}} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_3 3 = \frac{3}{2}$

$= \log_3 27^{\frac{1}{2}}$ ← 指数計算の能力が試されます。

$= \log_3 (3^3)^{\frac{1}{2}} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\log_3 3 = \frac{3}{2}$ … (答)

(2) $\log_3 \frac{3}{4} + 4\log_3 \sqrt{2}$ ← $\log$ の外の 4 を $\log$ の中の $\sqrt{2}$ の指数に戻します。

$= \log_3 \frac{3}{4} + \log_3 (\sqrt{2})^4$

$\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

2×2

$= \log_3 \frac{3}{4} + \log_3 4$ ← $\log_a XY = \log_a X + \log_a Y$ の公式ですね。

12

$= \log_3 \left(\frac{3}{4}\times 4\right) = \log_3 3 = 1$ … (答)

$\log_3 3 =$

SECTION 1-7

自然対数（e/ln/exp）

押さえるポイント

- **e は 2.718…を表す定数である。**
- **$\log_e$ のことを ln，e^x のことを $\exp x$ または $\exp(x)$ と表現することがある。**

さて，ここからは自然対数をみていきましょう。

《公式》 ネイピア数 e（自然対数の底）

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281\ldots$$

e≒2.7　nを無限大に近付ける

さて，直感的に理解しにくい数式だと感じる人も多いのではないでしょうか。まず押さえるべきは，$e \fallingdotseq 2.7$ ということです。式の中で e という定数があったら，まずはだいたい 2.7 くらいの数値だな，と押さえることが必要です。

さて，公式を一つずつ読み解いていきます。$\lim_{n \to \infty}$ の意味は n を無限大に近づけるということです（詳細は 2-1 を参照）。大きな値にすればするほど，$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ は一定の値（2.718281…）に近づいていきます。これを**ネイピア数**または**自然対数の底**と呼び，アルファベットを用いて e と表します。これを底とする対数を自然対数といい，**$\log_e$ を省略して ln と表す**ことも多いです。なぜわざわざこのような数を用いるかというと，ネイピア数にはさまざまな便利な性質があるからです。例えば，$\frac{d}{dx}e^x = e^x$ や $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$ などがあります（詳細は 2-6 を参照）。またネイピア数は指数の底にも用いられます（e^x など）。その際 **e を底とする指数関数 e^x を $\exp x$ または $\exp(x)$ のように表す**こともあります。

SECTION 1-8

シグモイド関数

押さえるポイント

- **シグモイド関数のグラフをかけるようになる。**

この SECTION ではシグモイド関数という特殊な関数について学んでいきたいと思います。シグモイド関数は，人工知能で頻出する関数の一つです。

《定義》

$$\varsigma_a(x) = \frac{1}{1 + \exp(-ax)}$$

で表される関数をシグモイド関数という。このとき，a をゲインと呼び，特に $a = 1$ のときのシグモイド関数を標準シグモイド関数と呼ぶ[*1]。

シグモイド関数のグラフは次のようになります。

ς

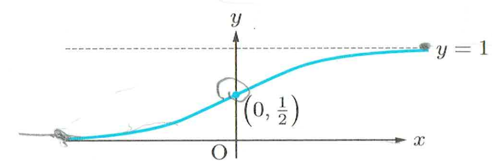


図 1.8.1　シグモイド関数のグラフ

シグモイド関数の特徴としては，x が負の無限大に近づくと分母は正の無限大になるので y は 0 に近づき，x が正の無限大に近づくと分母は 1 に近づくので y は 1 に近づくことが挙げられます。また常に，$\varsigma_a(0) = \frac{1}{2}$ となります。a の値が大きくなるほど，変化の度合が大きくなります。なお，今後断りなく「シグモイド関数」といった場合，$a = 1$ の標準シグモイド関数のことを表すものとします。

*1 ς はギリシャ文字 Σ（シグマ）の語末形。

人工知能ではこう使われる！

・シグモイド関数は活性化関数として，利用されることが多いです。
・活性化関数とは，人工知能モデルの表現力を高めるために使われるクッションのようなものです。
・活性化関数を使うと，非線形分離（＝曲線で分離すること）が可能になるため，複雑な関係性も表現できるようになります。そのためニューラルネットワークなどの人工知能モデルで，このシグモイド関数などが使われています。

COLUMN いろいろな活性化関数

さて，「人工知能ではこう使われる！」では，活性化関数というキーワードが出てきました。活性化関数にはさまざまな種類があり，ディープラーニングの一つである DNN，CNN では「ReLU 関数」などが使われ，ディープラーニングの一つである RNN の一種 LSTM では「tanh 関数」「シグモイド関数」などが使われます。ReLU 関数と tanh 関数の線形を以下にまとめました。

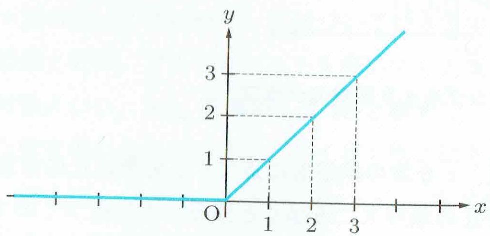


図 1.8.2　ReLU 関数

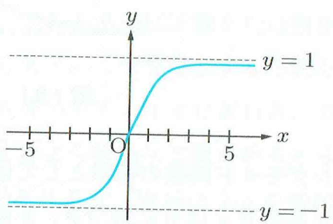


図 1.8.3　tanh 関数

SECTION 1-9

三角関数（sin/cos/tan）

押さえるポイント

- **度数法と弧度法（こどほう）の変換ができるようになる。**
- **三角関数（sin/cos/tan）が単位円上で持つ意味を説明できるようになる。**

指数・対数関数に続いて次は**三角関数**を学習します。三角関数とは，角度によって値が変わる，つまり**角度が変数である関数**のことです。三角関数に入る前に，**弧度法**という角度の表現方法を学んでいきます。皆さんが普段使っている角度の表し方は，円１周を 360° として角度を表す**度数法**が多いでしょう（30°，90° など）。一方，三角関数では，弧度法と呼ばれる方法で角度を表すことが多いです。

《定義》
半径 r の円で半径と長さが等しい（長さが r の）弧 AB に対する中心角の大きさは一定で，これを 1 ラジアン（rad）と表す。このような角度の表し方を弧度法という[*2]。

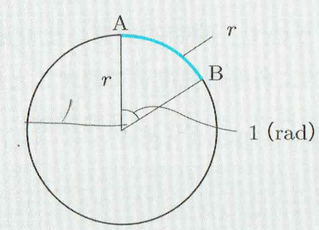


図 1.9.1　弧度法

ここで，半径 1 の円の弧の長さを考えましょう。このような半径 1 の円は**単位**

*2　弧度法では単位（rad）を省略することが多い。

円と呼ばれます。例えば，半径 1 の円の 1 周に相当する弧の長さは 2π となります。そのため，弧度法では円の中心角である 360° を 2π と表します。それでは半円（中心角 180°）ではどうでしょう。半円の弧の長さは $2\pi \div 2 = \pi$ です。よって，180° は弧度法で π と表します。度数法で角度が分かっていて弧度法での表し方が知りたいときは，$360^\circ = 2\pi$ の関係を利用しましょう。

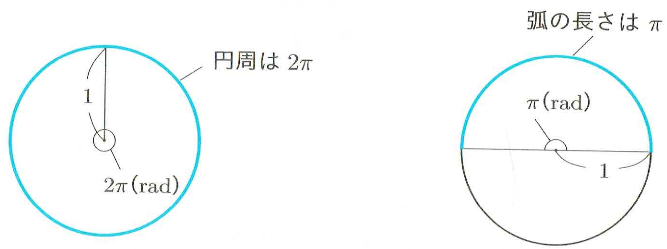


図 1.9.2　単位円の角度と弧の関係（2π と π の場合）

代表的な角度について，度数法と弧度法の関係は以下のようになります。

表 1.9.1　度数法と弧度法

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	360°
弧度法	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	π	2π

これらの角は今後よく使うので，瞬間的に思い出せるようになるといいですね。今後，本書では，基本的に角度は弧度法で表すことにします。

では，準備が終わったところで，いよいよ三角関数に入っていきます。

《定義》

単位円（xy 平面上で原点 O を中心とする半径 1 の円）の円周上に点 $A(x,y)$ を取る。x 軸の正の部分と線分 AO がなす角を θ とするとき，$\cos\theta = x$（A の x 座標），$\sin\theta = y$（A の y 座標），$\tan\theta = \frac{y}{x}$（線分 AO の傾き）とする。

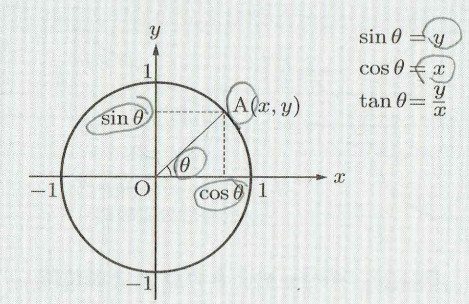


図 1.9.3　単位円と三角関数（sin/cos/tan）

sin とは正弦（せいげん）（sine）の記号で「サイン」と読みます（例えば $\sin\frac{\pi}{2}$ ならサイン 2 分のパイと読む）。同様に，cos は余弦（よげん）（cosine）の記号で「コサイン」，tan は正接（せいせつ）（tangent）の記号で「タンジェント」と読みます。

具体的な例を見ていきましょう。例えば $\theta = 0$ のとき，点 A の座標は $(1,0)$ ですね。$\cos\theta$ は A の x 座標のことなので $\cos 0 = 1$，$\sin\theta$ は A の y 座標なので $\sin 0 = 0$，$\tan\theta$ は $\frac{y}{x}$ なので $\tan 0 = 0$ ですね。

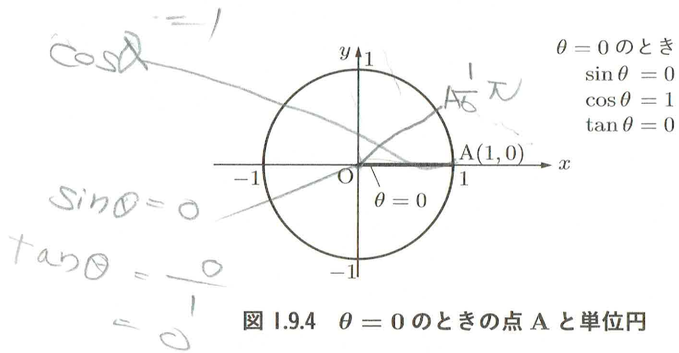
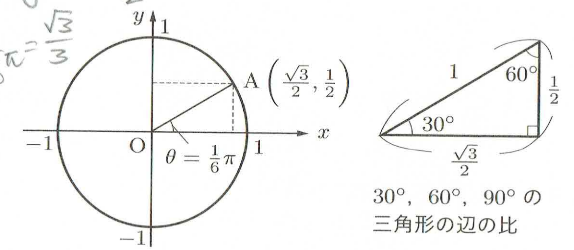


図 1.9.4　$\theta = 0$ のときの点 A と単位円

次に，$\theta = \frac{1}{6}\pi\ (= 30^\circ)$ のときを考えます。単位円上に $\theta = \frac{1}{6}\pi$ となるように点 A を取ります。このとき，30°，60°，90° の三角定規の三角形ができます。この三角形の辺の比は図 1.9.5 のようになるので，点 A の座標は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ となります。よって，$\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$，$\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ となります。

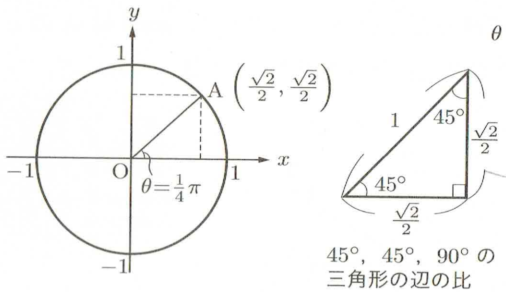
$\sin\theta = \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$
$\cos\theta\ \frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\theta\ \frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}$



$\theta = \frac{1}{6}\pi$ のとき
$\sin\theta = \frac{1}{2}$
$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

図 1.9.5　$\theta=\frac{1}{6}\pi$ のときの点 A と単位円

$\theta = \frac{1}{4}\pi$ (= 45°) のときに，もう一つの三角定規である 45°，45°，90° の直角三角形ができます。この三角形の辺の比は図 1.9.6 のようになるので，$\cos\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin\frac{1}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\frac{1}{4}\pi = 1$ となります。これらのように $\frac{1}{6}\pi$ (= 30°) や $\frac{1}{4}\pi$(= 45°) の倍数の角のときの三角比は，単位円上に三角定規をかくと求めることができます。



$\theta = \frac{1}{4}\pi$ のとき
$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\tan\theta = 1$

2等辺三角形

図 1.9.6　$\theta=\frac{1}{4}\pi$ のときの点 A と単位円

代表的な角度に対する三角関数の値は以下のようになります。

表 1.9.2　三角関数（sin/cos/tan）の値

θ	0	$\frac{1}{6}\pi(=30°)$	$\frac{1}{4}\pi(=45°)$	$\frac{1}{3}\pi(=60°)$	$\frac{1}{2}\pi(=90°)$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	−

θ	$\frac{2}{3}\pi(=120°)$	$\frac{5}{6}\pi(=150°)$	$\pi(=180°)$	$\frac{3}{2}\pi(=270°)$	$2\pi(=360°)$
$\sin\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0
$\cos\theta$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	0	1
$\tan\theta$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	−	0

$\frac{1}{2}\pi$(= 90°) と $\frac{3}{2}\pi$(= 270°) の $\tan\theta$ の値は存在しません。図をかくと分かりますが，直線の傾きが垂直となり，定義できなくなってしまうからです。また，三角関数の特徴として，2π ごとに同じ値を繰り返します。円は 1 周が 2π なので当たり前といえば当たり前ですね。また先ほどの三角関数の定義の図を見てください。点 A は半径 1 の円周上にあるので **x, y 座標の取り得る値の範囲は $-1 \leqq x \leqq 1, -1 \leqq y \leqq 1$** です。よって，**$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値域（取り得る値の範囲）は $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1, -1 \leqq \cos\theta \leqq 1$** となります。$\tan\theta$ は任意の実数値を取ります。

次に，三角関数の関係を表す重要な公式を 3 つ紹介します。

《公式》

① $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

② $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

③ $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta\ \cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$

式①は，三角関数の定義である $\tan\theta = \frac{y}{x}$ の x と y に $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を代入すれば導けます。式②は，単位円上の三角形について三平方の定理を使えば導けます。また，式③は，式②の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると求められます。

最後に，三角関数のグラフを紹介します。グラフの横軸を θ，縦軸を y として，$y = \sin\theta$，$y = \cos\theta$，$y = \tan\theta$ のグラフをかくと図 1.9.8 のようになります。

$y = \sin\theta$, $y = \cos\theta$ のグラフでは 2π ごとに，$y = \tan\theta$ では π ごとに同じグラフの形を繰り返します。このように**周期的に同じ値を繰り返す関数**を**周期関数**（しゅうきかんすう）といいます。$y = \sin\theta$, $y = \cos\theta$ の周期は 2π，$y = \tan\theta$ の周期は π ですね。

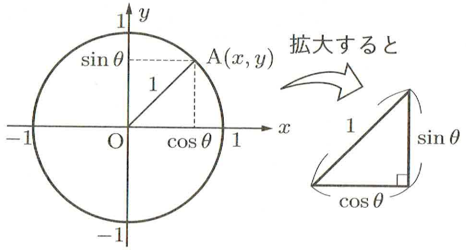


図 1.9.7　単位円上での三角関数（sin/cos/tan）の意味

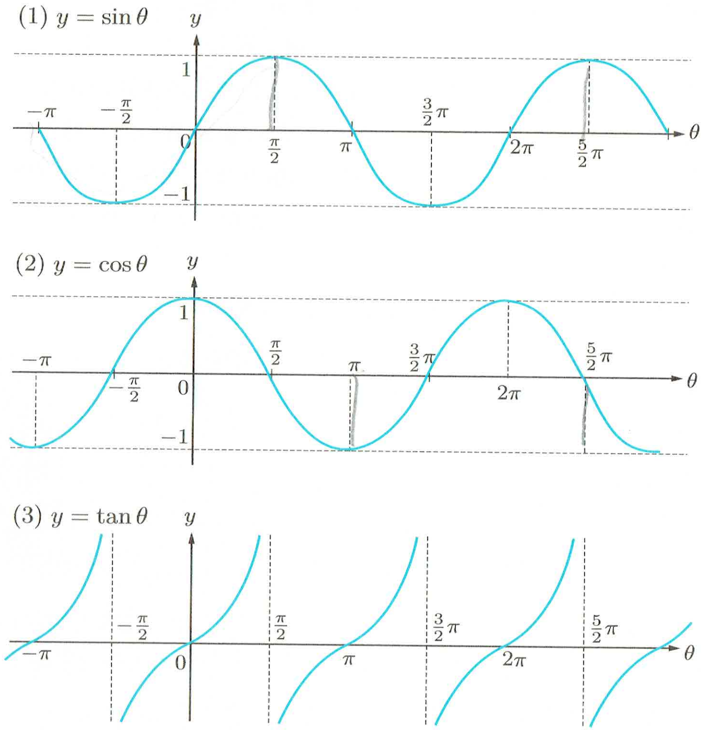


図 1.9.8　三角関数（sin/cos/tan）のグラフ

また，$y = \cos\theta$ のグラフでは $f(-x) = f(x)$ が成り立っています。いわば左右対称なグラフの関数です。このような **y 軸に関して対称な関数**を**偶関数**（ぐうかんすう）といいます。$y = \sin\theta$ では $f(-x) = -f(x)$ が成り立っています。いわば原点を対称点（対称の中心）とする点対称なグラフの関数です。このように**原点を対称点とする点対称な関数**を**奇関数**（きかんすう）といいます。

人工知能ではこう使われる！

- 人工知能で音声認識を行うときに，音の波を解析するために，フーリエ変換が行われることがあります。
- フーリエ変換とは，複雑な波形を持つ関数を三角関数の足し算で表現するという数式表現の変換方法です。

演習問題

1-9 次の問にそれぞれ答えなさい。

❶ 度数法で表されている角の大きさを弧度法に直しなさい。

(1) 90°　　(2) 60°　　(3) 240°　　(4) 327°

❷ θ の値が以下のときの $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい。

(1) $\frac{1}{6}\pi$　　(2) $\frac{3}{4}\pi$　　(3) $\frac{4}{3}\pi$　　(4) $\frac{13}{4}\pi$

❸ $\sin\theta = \frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めなさい。ただし $0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{2}\pi$ とします。

解答・解説

❶ $360° = 2\pi$ …(i) を変形すると，$1° = \frac{\pi}{180}$ …(ii) となります。

(1) $90° = \frac{1}{2}\pi$ ← 式 (i) の両辺を 4 で割りました。

$\frac{360°}{4} = \frac{2\pi}{4}$

(2) $60° = \frac{1}{3}\pi$ ← 式 (i) の両辺を 6 で割りました。

$\frac{60°}{6} = \frac{2\pi}{6}$

(3) $240° = \frac{4}{3}\pi$ ← (2) の式の両辺を 4 倍しました。$60° \times 4 = 240°$，$\frac{1}{3}\pi \times 4 = \frac{4}{3}\pi$

$60° \times 4 = \frac{1}{3}\pi \times 4$

$7.620 = \frac{327}{3}\pi$ $60° \times 327 = \frac{\pi}{3} \times 327$

$1° \times 327 = \frac{\pi}{180} \times 327$ $327 = \frac{327\pi}{180} = \frac{109}{60}\pi$

(4) $327° = \frac{327}{180}\pi = \frac{109}{60}\pi$ ← 式 (ii) の両辺を 327 倍しました。

❷ 全て有名角なので答えだけ書いていきます。分からなくなったら，単位円をかいて角が θ となるような点 A を取り，そのときの x 座標を $\cos\theta$，y 座標を $\sin\theta$，$\frac{y}{x}$ を $\tan\theta$ とすれば OK です。

(1) $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$，$\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$，$\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sin\frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\frac{3}{4}\pi = -1$

(3) $\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2}$，$\tan\frac{4}{3}\pi = \sqrt{3}$

(4) 三角関数は 2π ごとに同じ値を取るので，$\frac{13}{4}\pi$ のかわりに $\frac{5}{4}\pi$ について調べれば OK です。

$\sin\frac{13}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\frac{13}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\tan\frac{13}{4}\pi = 1$

❸ $\sin\theta$ の値が分かっているので，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を使って $\cos\theta$ の値を求めます。

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に $\sin\theta = \frac{1}{3}$ を代入

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\cos^2\theta = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$\cos\theta = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos\theta$ の値が 2 つ出ますが，θ の範囲が $0 \leqq \theta \leqq \frac{1}{2}\pi$ なので，$\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ が正しい $\cos\theta$ の値です。

$\tan\theta$ の値は $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ で求めます。

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

よって $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\tan\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}$ …(答)

SECTION 1-10

絶対値とユークリッド距離

押さえるポイント

- 絶対値（ぜったいち）やユークリッド距離はどのような距離を表しているのか説明できるようになる。
- 絶対値は｜という記号，ユークリッド距離は‖という記号で表される。

さて，ここからは少し関数の概念から外れ，新しい内容を確認します。まずは絶対値を確認しましょう。**ある数の絶対値とは，その数と 0 との数直線上での距離**です。例えば，以下の図のように 3 は 0 から 3 離れているので 3 の絶対値は 3 ですし，−3 と 0 の距離も 3 ですので −3 の絶対値も 3 です。

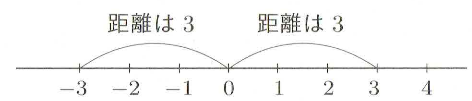


図 1.10.1 絶対値と距離

絶対値を数式で表したければ「｜」で数字や文字を挟みます。例えば，$|3| = 3$ となり，$|-3| = 3$ です。絶対値の記号を外す場合，**中の数字や文字の大きさが正ならそのまま記号を外し，負なら符号を逆転させて記号を外します。**例えば，$a < 0$ のときに $|a|$ を求めたければ，$|a| = -a$ となります。a が負なので $-a$ は正になるわけですね。

次にユークリッド距離です。これは，ある点と点の間を定規で測るような距離のことを指します。皆さんが想像する距離そのものかもしれません。xy 座標上の点 $(4, 0)$ と原点 $(0, 0)$ の距離は 4 ですよね。これこそがユークリッド距離です。**点 A と点 B のユークリッド距離とはそれら 2 点を結んだ線分 AB の長さのことです。**

まず 1 次元のユークリッド距離から求めてみます。1 次元なので数直線上で考え

ます。**1 次元において点 A，B 間の距離は 2 点の数値の差の絶対値に等しいので，$|A-B|$ で表せます。** 例えば，4 と −1 の距離は $|4-(-1)|=|5|=5$ ですね。

次は 2 次元での距離です。2 次元なので xy 座標平面上で考えます。**2 次元において点 $A(a_1,a_2)$ と点 $B(b_1,b_2)$ の距離は $\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$ で表せます。** この公式は，下の図のように，三平方の定理を使って斜辺（線分 AB）の長さを求めているものです。

$\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a^2-b^2)}$

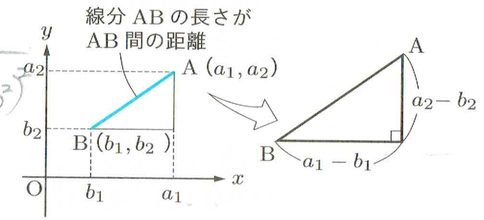


図 1.10.2　2 次元での距離

最後に 3 次元での距離を説明していきます。3 次元なので xyz 座標空間で考えます。3 次元において**点 $A(a_1,a_2,a_3)$ と点 $B(b_1,b_2,b_3)$ の距離は $\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}$ で表されます。**

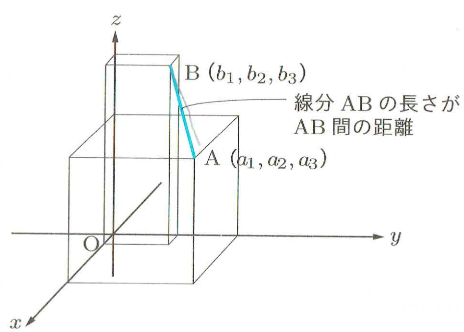


図 1.10.3　3 次元での距離

2 次元のときの距離の公式と似ていると思いませんか？ 3 次元の距離の公式も三平方の定理から導くことができるのです。

2

以上 3 通りの次元での距離の公式を紹介しましたが，これらはすべてユークリッド距離です。点 A と原点のユークリッド距離は，記号「‖」を用いて $\|A\|$ と，2 点 A, B 間の距離は，$\|A-B\|$ と表すことができます。

人工知能ではこう使われる！

・人工知能には，過去のデータを解析し，最適なモデル式を求める訓練フェーズと，そのモデル式を使って，未知のデータのカテゴリや数値を予測する推論フェーズがあります。

・ユークリッド距離は，さまざまな人工知能アルゴリズムで登場します。例えば k-近傍法（k-NN）という分類法もその一種です。これは教師あり学習と呼ばれるカテゴリの一種であり，事前に正解ラベルのついたデータセットの用意が必要です。

・k-近傍法では，訓練フェーズで訓練データをベクトル空間上にプロットします。推論フェーズでは，未知データをその空間上にプロットします。このとき，近くにある k 個のプロットされた正解ラベルを見て，どのカテゴリに属するかを推論するアルゴリズムで，近くにあるかどうかを判別するため，ユークリッド距離が利用されます。

・例えば，訓練フェーズでは以下のように「ページ数」「発刊頻度」という軸で，訓練データのカテゴリをマッピングします。推論フェーズでは推論したいデータ（今回は？で示しました）のページ数と発刊頻度をマッピングします。ここで，$k=3$ とすると，2 つが「週刊誌」カテゴリ，1 つが「広告雑誌」カテゴリに分類されるので，そのデータは「週刊誌」だと推論できます。

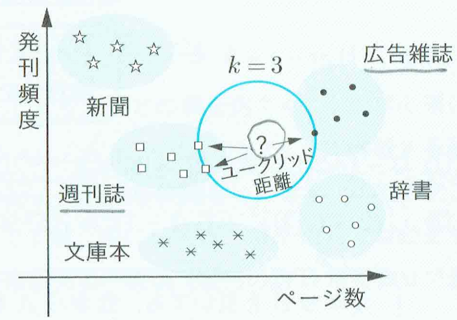


図 1.10.4　ユークリッド距離

演習問題

1-10 次の問にそれぞれ答えなさい。

❶ 次の式の絶対値を外しなさい。

(1) $|-2|$ 2 (2) $|-\frac{3}{2}|$ $\frac{3}{2}$ $|x-3|=-x+3$

(3) $x<3$ のとき $|x-3|$ (4) $x>3$ のとき $|x-3|$

(5) $a<b$ のとき $|a-b|$ $-a+b$ $=x-3$

❷ 次の 2 点間のユークリッド距離を求めなさい。ただし，(1) は 1 次元，(2) は 2 次元，(3) は 3 次元上の点です。

(1) 2 点 $A(3)$, $B(-2)$ (2) 2 点 $A(2,-2)$, $B(-3,1)$

(3) 2 点 $A(1,3,-1)$, $B(-1,0,1)$

(1) $|3-(-2)|=|3+2|=|5|=5$

解答・解説

(2) $\sqrt{\{2-(-3)\}^2+(-2-1)^2}=\sqrt{5^2+(-3)^2}$

$=\sqrt{25+9}=\sqrt{\cancel{14}\ 34}=\cancel{35}$

❶ (1) $|-2|=2$

(2) $|-\frac{3}{2}|=\frac{3}{2}$

(3) $|x-3|=-x+3$ ← $x<3$ なので，$x-3$ は必ず負になります。絶対値を外すとき，符号を入れ替えます。

(4) $|x-3|=x-3$ ← $x>3$ なので，$x-3$ は必ず正になります。そのまま絶対値を外して OK です。

(5) $|a-b|=-a+b$ ← $a<b$ なので，$a-b$ は必ず負になります。絶対値を外すとき，符号を入れ替えます。

❷ (1) $|3-(-2)|=|3+2|=|5|=\underline{5\ \cdots\ (答)}$

(2) $\sqrt{\{2-(-3)\}^2+(-2-1)^2}=\sqrt{5^2+(-3)^2}=\sqrt{25+9}=\underline{\sqrt{34}\ \cdots\ (答)}$

A から B を引いても，B から A を引いても，どちらでも OK です。

(3) $\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(3-0)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{2^2+3^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{4+9+4}=\underline{\sqrt{17}\ \cdots\ (答)}$

(3) $\sqrt{\{1-(-1)\}^2+(3-0)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{2^2+9+(-2)^2}$

$=\sqrt{4+9+4}=\sqrt{17}$

SECTION 1-11

数列

押さえるポイント

- 数列（すうれつ）の和の公式と一般項の表し方を理解し，計算できるようになる。
- Σ や Π という記号は，足し算および掛け算を表している。

この SECTION では**数列**を扱っていきます。数列を使うことで，数の並びをシンプルに表せるため，たくさんのデータを処理する人工知能では頻出のテーマとなります。さて，**数列とは数が並んだもの**です。並び方は何でもよく，数が並んでさえいれば数列と呼びます。しかし，ばらばらに並んでいる数列に数学的意味はあまりないので，数学やその応用分野では，規則を持って並んだ数列を扱うことがほとんどです。また，数列を作っている一つ一つの数を**項**といい，$a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_{n-1}, a_n$ のように数列が表されていたら，**a_1 を第 1 項，a_2 を第 2 項，a_n を第 n 項といい**，特に第 1 項を**初項**（しょこう），最後の項を**末項**（まっこう）といいます。

数列の種類は無限にありますが，この SECTION ではその中でも一番基礎となる**等差数列**（とうさ），**等比数列**（とうひ）を扱っていきます。以下の数列を見てください。

$$2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \cdots\cdots$$

この数列にはどんな特徴があるでしょうか。どの項を見ても，1 つ前の項に比べ 3 増えていますね（数式で書くと $a_{n+1}=a_n+3$）。このように**隣接する項の差が一定である数列を等差数列**といい，その差を**公差**（こうさ）といいます（d で表すことが多いです）。この数列の公差は 3 ですね。逆にいえば，等差数列では公差を足せば次の項の数が求められます。**等差数列の一般項（数列の第 n 項を数式で表したもの）**は次のようになります。 公差d

a_n+3

$a_n = a + (n-1)d$

《公式》 等差数列

初項を a，公差を d とするとき，等差数列の第 n 項 a_n は以下のように表される。

$$a_n = a + (n-1)d$$

例に出した数列は初項が 2，公差が 3 なので，一般項は，$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$ となります。 $a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$

次に**等差数列の和**を求めていきます。例えば，初項が 2 で公差が 3，項数が 9，末項が 26 である数列の全ての項の和 S を求めたいとします。もちろん，$2+5+8+11+14+17+20+23+26$ を計算すれば求められますが，非常に面倒ですね。そこで以下のように，数列を逆に並べたものを書き，上下を足します。

$$
\begin{array}{rl}
S = & 2 + 5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 \\
+)\ S = & 26 + 23 + 20 + 17 + 14 + 11 + 8 + 5 + 2 \\
\hline
2S = & 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28
\end{array}
$$

数 9

式 1.11.1　等差数列の和

$(2 \times 26) \times 9 = 252$

すると左辺が $2S$，右辺は初項と末項を足したものが項の数だけできました。右辺の計算は簡単ですね。(初項 2 + 末項 26) × 項数 9 なので $(2+26) \times 9 = 252$ となります。左辺は $2S$ なので和 S が知りたければ両辺を 2 で割ればいいので $S = \frac{252}{2} = 126$ と求められます。以上のことを一般化すると等差数列の和の公式が導けます。

等差数列の和

《公式》 等差数列の和

初項を a，末項を l，項数を n，初項から末項までの和を S とする。

$$S = \frac{1}{2}n(a + l)$$

この公式は非常に重要ですので，意味を理解した上で暗記してしまいましょう。日本語では，「$\frac{1}{2}$ × 項数 × (初項 + 末項)」と覚えるのがいいでしょう。

$\frac{1}{2}$ × 項数 × (初項 + 末項)

等比数列

続いて等比数列です。次の数列を見てみましょう。

$$3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, \cdots\cdots$$

等比数列 /ace

次の項に移るたびに数が 2 倍になっていますね（数式で書くと $a_{n+1} = 2a_n$）。このように**隣接する項の比が一定である数列を等比数列**といい，その比を**公比**（こうひ）（r で表すことが多いです）といいます。上記の数列では公比は 2 です。初項を a，公比を r とすると，等比数列は $a, ar, ar^2, ar^3, \cdots\cdots, ar^n$ のようになるので，**等比数列の一般項**は以下のようになります。

《公式》 等比数列の一般項

初項を a，公比を r とするとき，等比数列 a_n の一般項は以下のように表される。 $a_n = ar^{n-1}$

$$a_n = ar^{n-1}$$

例に挙げた数列ですと，$a_n = 3 \times 2^{n-1}$ となります。

等比数列の和も考えていきます。初項が 3，公比が 2，項数が 7，末項 192 の等比数列の和 $S = (3+6+12+24+48+96+192)$ を求めてみましょう。もちろんそのまま足したのでは大変ですので，今回も工夫をします。以下のように，各項を公比倍したものを下に並べて，両辺について上式から下式を引きます。

$$
\begin{array}{rl}
S = & 3 + 6 + 12 + 24 + 48 + 96 + 192 \\
-)\ 2S = & \quad 3\times2 + 6\times2 + 12\times2 + 24\times2 + 48\times2 + 96\times2 + 192\times2 \\
\hline
(1-2)S = & 3 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -192\times2
\end{array}
$$

式 1.11.2　等比数列の和

すると，初項と，末項に 2 を掛けたものが残って，(1 − 公比の 2) × S = (初項の 3) − (末項 × 2) となります。これを変形して S について求めると，$S = 381$ となります。この操作を一般化すると等比数列の和の公式が導けます。

(1 − 公比の 2) × S = (初項の 3) − (末項 × 2)

S = (3) − (192 × 2)

$\frac{192 \times 2}{384}$

= (3 − 384)

= 381

$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

《公式》等比数列の和

初項を a，公比を r，初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1) $r \neq 1$ のとき　$S_n = \boxed{\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}} = \boxed{\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}}$

(2) $r = 1$ のとき　$S_n = na$

(1) の公式は形が 2 つあり，どちらを使っても大丈夫ですが，r が 1 より小さければ第 2 辺（真ん中）を，1 より大きければ第 3 辺を使うと計算しやすいです。$r = 1$ のときは，初項と同じ数がずっと並ぶので，(1) の公式では求められず初項に項数を掛けたもので和が求められます。

次に $\sum$**（シグマ）**と $\prod$**（パイ）**です。これらは**総和（全てを足したもの）**と**総乗（全てを掛けたもの）**を表します。

「 $\sum_{k=1}^{n} ak$

まずは $\sum$ から説明します。**ある数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n$ の和 $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots\cdots + a_{n-1} + a_n)$ を $\sum_{k=1}^{n} a_k$ と表します**。つまり，**$\sum$ とは数列の和を表している記号**なのです。$\sum_{k=p}^{q} a_k$ とあったら数列 $\{a_n\}$ の第 p 項から第 q 項までの和を表します。例えば $\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$ と記されていたら，それは数列 $\{3k+1\}$ の第 1 項から第 4 項までの和を表しているのです。これを計算すると，以下のようになります。

$$\sum_{k=1}^{4}(3k+1) = \underbrace{(3\times1+1)}_{\text{第1項}} + \underbrace{(3\times2+1)}_{\text{第2項}} + \underbrace{(3\times3+1)}_{\text{第3項}} + \underbrace{(3\times4+1)}_{\text{第4項}}$$
$$= 4 + 7 + 10 + 13 = 34$$

式 1.11.3　Σ を使った式

次に $\sum_{k=1}^{n} k$ の値を求めてみましょう。これは，初項 1，公差 1 の等差数列の初項から第 n 項までの和なので，等差数列の和の公式より

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots\cdots + (n-1) + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+4+ \quad +(n-1)+n = \frac{1}{2}n(n+1)$

となります。この $\sum_{k=1}^{n} k$ の値はよく計算で使うので，覚えてしまうといいです。

さらに，$\sum_{k=1}^{n} k^2$，$\sum_{k=1}^{n} k^3$ の値もよく出てくるので，こちらも併せて押さえておきましょう。以下に重要な和の公式をまとめておきました。

《公式》数列の和

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$　　$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$　　$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$　　$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$

(4) $\sum_{k=1}^{n} c = nc$（ただし c は定数）　　$\sum_{k=1}^{n} c = nc$

また $\sum$ には，以下のような性質があります。

《公式》$\sum$ の性質

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$　　$\sum_{k=1}^{n}(ak+bk) = \sum_{k=1}^{n} ak + \sum_{k=1}^{n} bk$

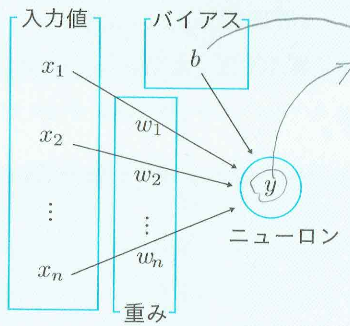
(2) $\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k$（ただし p は定数）

$\sum$ の計算では，数列の和を各数列ごとに分けることができて，定数は前に出すことができます。

最後に $\prod$（パイ）についてです。これは $\sum$（シグマ）が掛け算になっただけで，意味は似ています。**数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots\cdots, a_{n-1}, a_n$ の積 $(a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times \cdots\cdots \times a_{n-1} \times a_n)$ を $\prod_{k=1}^{n} a_k$ と表します**。例えば $a_k = 2k-1$ で表される数列 $\{a_n\}$ があり $\prod_{k=1}^{4} a_k$ の値は，$\prod_{k=1}^{4} a_k = a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 = 1\times3\times5\times7 = 105$ と計算できます。$\prod$ に関しての重要な公式はありませんので，定義と計算方法をしっかりと理解しておけば大丈夫です。

人工知能ではこう使われる！

- 機械学習分野の中で，注目されているアルゴリズムの一つである「ニューラルネットワーク」は，人間の脳内にある神経細胞である「ニューロン」と，そのつながりを人工的に模したものです。 重み=(W)
- ニューロンに入力される値は，「入力値」に「重み（w）」といわれる数を掛け，定数を加えて全てを足し合わせたものになります。
- ニューラルネットワークでは，ものによっては1つのモデルでこの足し算が数百万回以上行われる場合があり，全てを書き下すのは現実的ではありません。よって，$\sum$ で表現すると便利です。



入力値

$$y = b + x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + \cdots + x_n w_n$$

重み

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k w_k + b$$

$y = \sum_{k=1}^{n} x_k w_k + b$ バイアス

図 1.11.1　ニューラルネットワークの概要

演習問題

1-11 次の問にそれぞれ答えなさい。

1. 等差数列「$1, 3, 5, 7, 9, \cdots\cdots$」の一般項を求めなさい。
2. 初項が 2，公差が -2，項数が 10 の等差数列の和を求めなさい。
3. 等比数列「$3, 9, 27, 81, 243, \cdots\cdots$」の一般項を求めなさい。
4. 初項が 2，公比が 2，項数が 6 の等比数列の和を求めなさい。
5. $\sum_{k=1}^{n}(2k^2 + k + 1)$ を求めなさい。

解答・解説　$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1 \cdots$

1. 数列から初項と公差を見つけます。初項は 1，公差は 2 なので

$$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1 \quad \cdots（答）$$

初項　末項　公差

$n = 1, 2, \cdots$ と代入していくと，きちんと元の数列になることが分かります。

2. 末項が分からないので，まず末項を求めます。

この等差数列の一般項は，公式より

$$a_n = 2 + (n-1) \times (-2) \qquad a_n = 2 + (n-1) \times (-2)$$

第 10 項が今回の末項なので，$n = 10$ を代入して

$$a_{10} = 2 + (10-1) \times (-2) = -16 \qquad a_{10} = 2 + (10-1) \times (-2) = -16$$

末項が -16 と分かったので，等差数列の和の公式より

$$S = \frac{1}{2} \times 10 \times (2 - 16) = \frac{1}{2} \times 10 \times (-14) = -70 \quad \cdots（答）$$

3. 数列から初項と公比を読み取ります。初項は 3，公比も 3 ですね。

$$a_n = 3 \times 3^{n-1}$$

指数計算の公式よりまとめることができます。

$$= 3^n \quad \cdots（答）$$

4. 等比数列の和の公式 $S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ より

$$S_6 = \frac{2(2^6 - 1)}{2 - 1} = 2 \times 2^6 - 2 = 128 - 2 = 126 \quad \cdots（答）$$

5. $$\sum_{k=1}^{n}(2k^2 + k + 1) = \sum_{k=1}^{n} 2k^2 + \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k^2 + \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$\sum$ は項ごとに分けることができます。

$$= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

k と無関係な定数は $\sum$ の前に出せます。

$$= 2\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\} + \frac{1}{2}n(n+1) + n$$

公式を使い $\sum$ を計算します。

$$= \frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{11}{6}n \quad \cdots（答）$$

計算してまとめました。

$\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{11}{6}n$

SECTION

1-12 要素と集合（∈/⊂）

押さえるポイント ☑ **要素と集合は，∈ や ⊂ という記号によって表現される。**

いよいよ CHAPTER 1 最後の SECTION です。最後は集合について学びます。この SECTION では，計算がほとんど出てきません。

10 以下の自然数の偶数の集まりは，2，4，6，8，10 です。このように**ある条件を満たすものの集まりをまとめて考えるとき，その集まりを集合**といいます。属するか否かがはっきりと判別できるもののみを集合といいます。

集合を構成している一つ一つのものを要素といいます。集合は，{ } を用いて 2 通りで表せます。一つ目が**要素を $\{2,4,6,8,10\}$ のように書き並べる方法**です。もう一つは $\{x|x$ は 10 以下の自然数の偶数$\}$ のように，**$\{x|x$ に対する条件$\}$ のように書く方法**です。集合そのものに名前を付けたければ，$A=\{2,4,6,8,10\}$ とすれば集合に名前を付けることができます。ある要素 x が集合 A に属していることを示すときは，$x \in A$ とすればよく，要素 x が集合 A に属していないことを示すときは，$x \notin A$ とすればよいです。

2 つの集合 A，B について，B の要素が全て A の要素であるとき，B は A の**部分集合**といい，$B \subset A$ と表します。また A の要素と B の要素が完全に一致しているとき，集合 A と B は等しく，$A=B$ と表します。このとき，$A \subset B$ かつ $A \supset B$ でもあります。例えば，集合 $A=\{x|x$ は 10 以下の自然数$\}$，集合

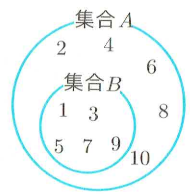


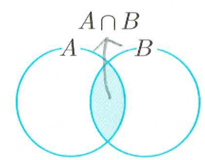
図 1.12.1　集合 A と集合 B を表すベン図

$B=\{x|x$ は 10 以下の正の奇数$\}$ の関係について考えます。集合の関係について考えるときには図をかくと分かりやすいです。図 1.12.1 のような集合を表す図を**ベン図**といいます。

図 1.12.1 より，B の要素は全て A の要素でもあると分かるので，集合 B は集合 A の部分集合であり，$B \subset A$ となります。

また要素を 1 つも持たない集合を考えることができ，それを**空**(くう)**集合**といい，記号 ϕ で表します。空集合はあらゆる集合の部分集合でもあります。つまり，任意の集合 A に対して，$\phi \subset A$ といえます。

2 つの集合 A，B について A，B どちらにも属している要素の集合を，A と B の**積集合**といい，$A \cap B$ と表します。また，A と B の少なくともどちらか一方に属する要素の集合を，A と B の**和集合**といい，$A \cup B$ と表します。ベン図で表すと以下のようになります。



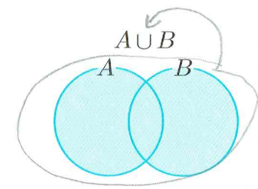


図 1.12.2　$A \cap B$ と $A \cup B$

演習問題

1-12 次の問にそれぞれ答えなさい。

1 次の集合を要素を書き並べる方法で示しなさい。

(1) $\{x|x^2=9\}$

(2) $\{x|x$ は 12 の正の約数$\}$

2 集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{4,5,6,7,8,9\}$ があります。以下の集合を求めなさい。

(1) $A \cap B$

(2) $A \cup B$

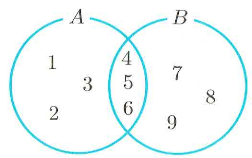
解答・解説 {-3,3}

❶ (1) $\{-3,3\}$

> x は $x^2=9$ を満たす数なので，この集合の要素は -3 と 3 です。

(2) $\{1,2,3,4,6,12\}$

❷



> 共通部分や和集合を求めるときはベン図をかくのが便利です。

∪

(1) 上のベン図の共通部分（積集合）なので，$\underline{\{4,5,6\}\quad\cdots(答)}$

(2) 上のベン図の和集合なので，$\underline{\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\quad\cdots(答)}$

∩

COLUMN
“state of the art” とは？

人工知能の大きな変革を伴う新しい技術を発見・開発できた場合，「それは “state of the art” だね」などと言われる場合があります。ここでの “art” とは，技術を意味しており，“state of the art” とは最先端の技術という意味です。

機械学習や人工知能に関するニュースは毎日のように報道されています。しかし，最先端の技術を伴っていなくとも「AI 搭載」などと表現されることが多く，どのニュースが “state of the art” かどうかは読み手のリテラシーに委ねられているのが現実です。技術の良し悪しを正しく判断するためには，人工知能に関する基本的な知識が必要であるため，人工知能の知識は新しい教養として認知されることになるのではないでしょうか。

2

>CHAPTER 2
微分

微分とは，滑らかなグラフの一瞬の変化の割合を示すもので，高校数学から大学数学まで幅広く登場する数学の大事な概念の一つです。通常，微分・積分とセットで議論されることが多いのですが，機械学習分野で，積分はほとんど登場しません。そのため，この本は，「微分」に注力して学習します。

このCHAPTERでは，高校数学の範囲を中心に，微分の概念や表現方法を確認することを目的としています。機械学習で登場するテーマとしては，「ディープラーニング（深層学習）」「ニューラルネットワーク」「最小 2 乗法」「勾配降下法」「誤差逆伝播法」などです。