출제자의 생각을 읽다

HOWHY MATH

수학 기본서

수학 I

POOLeWAY

08. 사인법칙과 코사인법칙

이 단원에서는 삼각형의 변의 길이와 내각의 크기 사이에 존재하는 여러 가지 성질을 알아본다. 또, 그를 이용하여 삼각형의 변 또는 각의 크기를 구해보고, 삼각형의 넓이를 살펴본다.

01 사인법칙

▪ 사인법칙과 코사인법칙

“삼각형의 세 변과 세 내각에 대한
사인법칙의 의미를 알아본다. 또, 그를 이용하여
삼각형과 관련된 여러 가지 문제를 해결하여 본다.”

049.

사인법칙

△ABC에서 세 내각의 크기를 A, B, C라 하고 이들의 대변 BC, CA, AB의 길이를 각각 a, b, c라 할 때, △ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 다음이 성립한다. 이를 사인법칙이라고 한다.

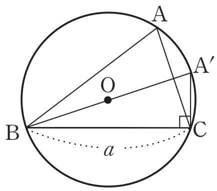
핵심 사인법칙

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

해설 위의 사인법칙을 증명하여 보자.

i) $0^\circ<\angle A<90^\circ$일 때

△ABC의 외접원의 중심을 O라 하고, $\overline{\mathrm{BO}}$의 연장선과 외접원의 교점을 A′이라 하면 원의 원주각의 성질에서



$\angle \mathrm{A}=\angle \mathrm{A'}$

△BA′C에서 $\angle \mathrm{C}=90^\circ$이고,

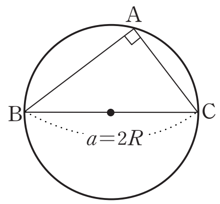
$$\sin A'=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BA'}}}=\frac{a}{2R}$$

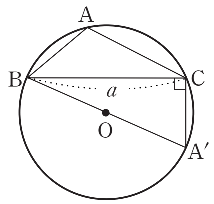
$$\therefore \sin A=\frac{a}{2R}$$

ii) ∠A$=90^\circ$일 때

$a=\overline{\mathrm{BC}}=2R$이고,

$\sin A=\sin 90^\circ=1=\dfrac{a}{2R}$





ii) $90^\circ<$∠A$<180^\circ$일 때

△ABC의 외접원의 중심을 O라 하고, $\overline{\mathrm{BO}}$의 연장선과 외접원의 교점을 A′이라 하면

□ABA′C는 내접사각형이므로

∠A+∠A′$=180^\circ$, ∠A′$=180^\circ-$∠A

이때 $\sin A'=\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{BA'}}}=\dfrac{a}{2R}$

즉, $\sin A=\sin(180^\circ-A')=\sin A'=\dfrac{a}{2R}$

이상으로부터 $\dfrac{a}{2R}=\sin A$

마찬가지로 위와 같이 살펴보면 $\dfrac{b}{2R}=\sin B$, $\dfrac{c}{2R}=\sin C$를 얻는다.

$\therefore\ 2R=\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin B}$

050.

사인법칙의 변형

위의 사인법칙에서 다음이 성립한다.

핵심 사인법칙의 변형

(1) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$ ⬅ 사인법칙을 비율로 생각

(2) $\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{a}{2R}$ ⬅ 각을 변으로 바꿈

(3) $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$ ⬅ 변을 각으로 바꿈

예 △ABC에서 $A=30^\circ$, $B=60^\circ$, $a=5$일 때, 사인법칙을 써서 나머지 각의 크기와 변의 길이를 구해 보자.

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ 이고, $A+B+C=180^\circ$에서 $C=90^\circ$

$\therefore\ \dfrac{5}{\sin 30^\circ}=\dfrac{b}{\sin 60^\circ}=\dfrac{c}{\sin 90^\circ}$, 즉 $b=5\sqrt{3}$, $c=10$

사인법칙과 삼각형의 6요소 중

기본문제

070

다음 삼각형 ABC에서 나머지 각의 크기와 변의 길이를 구하여라.

(1) $a=12,\ B=45^\circ,\ C=75^\circ$ $\left(\text{단, } \sin 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$

(2) $b=15,\ c=15\sqrt{3},\ B=30^\circ$

풀이

(1) $A+B+C=180^\circ$에서 $A=60^\circ$

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$에서 $\dfrac{12}{\sin 60^\circ}=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}$

$\therefore b=\dfrac{12}{\sin 60^\circ}\times\sin 45^\circ=12\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{6}$

또, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$에서 $\dfrac{12}{\sin 60^\circ}=\dfrac{c}{\sin 75^\circ}$

$\therefore c=\dfrac{12}{\sin 60^\circ}\times\sin 75^\circ=12\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}$

따라서, 구하는 값은

$\boldsymbol{A=60^\circ,\ b=4\sqrt{6},\ c=6\sqrt{2}+2\sqrt{6}}$

(2) $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$에서 $\dfrac{15}{\sin 30^\circ}=\dfrac{15\sqrt{3}}{\sin C}$

$\therefore \sin C=15\sqrt{3}\times\dfrac{\sin 30^\circ}{15}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

즉, $C=60^\circ$ 또는 $C=120^\circ$

(i) $C=60^\circ$일 때, $A=90^\circ$, 즉 $a=30$ ⬅ 직각삼각형

(ii) $C=120^\circ$일 때, $A=30^\circ$, 즉 $a=15$ ⬅ 이등변삼각형

따라서, 구하는 값은

$\boldsymbol{A=90^\circ,\ C=60^\circ,\ a=30}$ **또는** $\boldsymbol{A=30^\circ,\ C=120^\circ,\ a=15}$

답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

확인문제 **070-1**

$\triangle$ABC에서 $a=20,\ A=45^\circ,\ B=60^\circ$일 때, b의 값과 외접원의 반지름의 길이 R의 값을 각각 구하여라.

확인문제 **070-2**

$\triangle$ABC의 외접원의 반지름의 길이가 6이고, 호 BC의 중심각의 크기가 60°일 때, $\overline{\text{BC}}$의 길이를 구하여라.

기본문제 071

삼각형 ABC에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) $A : B : C = 3 : 2 : 1$일 때, $a : b : c$를 구하여라.

(2) $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$이면 $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

풀이

(1) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$에서

$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$이므로

$a : b : c = \sin 90^\circ : \sin 60^\circ : \sin 30^\circ$

$= 1 : \dfrac{\sqrt{3}}{2} : \dfrac{1}{2}$

$\therefore a : b : c = \mathbf{2 : \sqrt{3} : 1}$

(2) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$($R$는 외접원의 반지름의 길이)

에서 $\sin A = \dfrac{a}{2R}$, $\sin B = \dfrac{b}{2R}$, $\sin C = \dfrac{c}{2R}$

이를 주어진 식에 대입하면

$\left(\dfrac{a}{2R}\right)^2 = \left(\dfrac{b}{2R}\right)^2 + \left(\dfrac{c}{2R}\right)^2 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$

따라서, $\triangle$ABC는 $\boldsymbol{A = 90^\circ}$**인 직각삼각형**

답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

확인문제 071-1 $\triangle$ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $a - 2b + c = 0$, $3a + b - 2c = 0$일 때, $\sin A : \sin B : \sin C$를 구하여라.

확인문제 071-2 $\triangle$ABC에서 $a\sin A = b\sin B$이면 $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

02 코사인법칙

▪ 사인법칙과 코사인법칙
- 1. 사인법칙
- 2. 코사인법칙 (두 변과 끼인각의 관계)
- 3. 삼각형의 넓이

"삼각형의 세 변과 세 각에 대한 코사인법칙을 알아보고,
그를 이용하여 여러 가지 변 또는 각의 크기를 구해본다.
또 제이코사인법칙과 관련된
여러 가지 변환된 식의 의미를 이해한다."

051.

코사인법칙

△ABC의 세 변의 길이를 a, b, c라 하고 대응각의 크기를 각각 A, B, C라 할 때, 다음이 성립한다. 이를 코사인법칙이라 한다. 코사인법칙은 제일코사인법칙과 제이코사인법칙이 있다.

핵심 제일코사인법칙

$a=b\cos C+c\cos B$

$b=c\cos A+a\cos C$

$c=a\cos B+b\cos A$

해설 꼭짓점 A에서 $\overline{BC}$ 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하자.

i) 점 C가 $\overline{BH}$ 위의 점인 경우

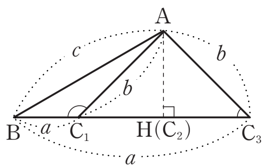
즉, $C=C_1$이면,

$\overline{BC_1}=\overline{BH}-\overline{C_1H}$

이때, $\overline{BH}=c\cos B$,

$\overline{C_1H}=b\cos(180^\circ-C_1)=-b\cos C_1$

$\therefore \overline{BC_1}=c\cos B+b\cos C_1$ 즉, $a=c\cos B+b\cos C_1$



ii) 점 C가 H인 경우

즉, $C=H(C_2)$이면, $\cos C_2=0$이므로

$\overline{BH}=\overline{BH}+0=c\cos B+b\cos C_2$

$\therefore a=c\cos B+b\cos C_2$

iii) 점 C가 $\overline{BH}$의 연장선 위의 점인 경우

즉, $C=C_3$이면 $\overline{BC_3}=\overline{BH}+\overline{HC_3}$

$\overline{BH}=c\cos B$, $\overline{HC_3}=b\cos C_3$

$\therefore a=c\cos B+b\cos C_3$

이상에서 $a=b\cos C+c\cos B$

마찬가지로 생각하면 $b=c\cos A+a\cos C$, $c=a\cos B+b\cos A$

이번에는 제이코사인법칙에 대해 알아보자.

핵심 제이코사인법칙

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

해설 제일코사인법칙의 각 식에 차례로 a, b, c를 곱하면

$a^2=ab\cos C+ac\cos B$ ......㉠

$b^2=bc\cos A+ab\cos C$ ......㉡

$c^2=ac\cos B+bc\cos A$ ......㉢

㉠$-$㉡$-$㉢을 계산하면

$a^2-b^2-c^2=-2bc\cos A$ $\quad\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

같은 방법으로 살펴보면

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$, $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

052.

제이코사인법칙의 변형

삼각형의 세 변의 길이를 알 때, 내각의 크기는 다음을 이용하여 구한다.

핵심 제이코사인법칙의 변형

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

해설 제이코사인법칙 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$에서

$2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

마찬가지로 생각하면 $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

예 $a=2$, $b=4$, $c=2\sqrt{3}$일 때, C의 값을 구해 보자.

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$에서 $\cos C=\dfrac{2^2+4^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot 2\cdot 4}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore C=60^\circ$ ($\because 0^\circ<C<180^\circ$)

기본문제 072

다음 $\triangle$ABC에 대하여 a의 값을 구하여라.

(1) $A=105^\circ$, $B=30^\circ$, $b=\sqrt{2}$, $c=2$

(2) $A=60^\circ$, $b=3$, $c=4$

풀이

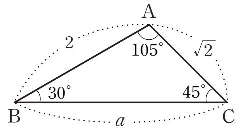
(1) $A+B+C=180^\circ$이므로

$C=45^\circ$

$\therefore\ a=b\cos C+c\cos B$

$=\sqrt{2}\cos 45^\circ+2\cos 30^\circ$

$=\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{1+\sqrt{3}}$



(2) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\cos 60^\circ$

$=25-12=13$

$\therefore\ a=\mathbf{\sqrt{13}}$

답 (1) $a=1+\sqrt{3}$ (2) $a=\sqrt{13}$

확인문제 072-1

다음 $\triangle$ABC에서 나머지 각의 크기와 변의 길이를 구하여라.

(1) $b=2$, $c=2\sqrt{2}$, $B=30^\circ$, $C=45^\circ$

(2) $a=2$, $b=\sqrt{3}+1$, $C=60^\circ$

제이코사인법칙의 변형 중

기본문제 073

$\triangle$ABC에서 $a=7$, $b=3$, $c=5$일 때, $\angle$A의 크기를 구하면?

① 30° ② 60° ③ 90°
④ 120° ⑤ 150°

풀이 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$이므로

$\cos A=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore A=\mathbf{120^\circ}$ ($\because$ $0^\circ<A<180^\circ$)

답 ④

확인문제 073-1

$\triangle$ABC의 세 변의 길이가 $a=13$, $b=8$, $c=7$일 때, 최대각의 크기는?

① 105° ② 120° ③ 135°
④ 150° ⑤ 165°

확인문제 073-2

$\triangle$ABC의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $a:b:c=2:3:4$가 성립한다. 이때, $\cos A$의 값을 구하여라.

기본문제
074

삼각형의 모양 결정하기 중

$\triangle$ABC에서 $a\cos A = b\cos B$가 성립할 때, $\triangle$ABC는 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형 ② 이등변삼각형
③ $A=90^\circ$인 직각삼각형 ④ $C=90^\circ$인 직각삼각형
⑤ $a=b$인 이등변삼각형 또는 $C=90^\circ$인 직각삼각형

풀이 주어진 조건에서

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$2ca^2(b^2+c^2-a^2)=2cb^2(a^2+c^2-b^2)$$

$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(a^2+c^2-b^2)$$

$$a^4-b^4-a^2c^2+b^2c^2=0$$

$$(a^2-b^2)(a^2+b^2)-c^2(a^2-b^2)=0$$

$$(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$$

$a+b>0$이므로 $a-b=0$ 또는 $a^2+b^2-c^2=0$

$\therefore a=b$ 또는 $c^2=a^2+b^2$

따라서, $\triangle$ABC는 **$a=b$인 이등변삼각형** 또는 **$C=90^\circ$인 직각삼각형**

답 ⑤

확인문제
074-1

다음을 만족시키는 $\triangle$ABC의 꼴을 말하여라.

(1) $\sin A=2\sin C\cos B$

(2) $a\cos A+b\cos B=c\cos C$

삼각형의 넓이 03

“사인법칙, 코사인법칙을 통해 삼각형의 넓이를
구하는 방법을 살펴보고, 그를 이용하여
여러 가지 문제를 해결하여 본다.”

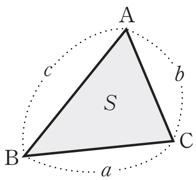
053.

삼각형의 넓이

삼각형의 넓이는 다음 중 하나를 이용하여 구할 수 있다.

핵심 삼각형의 넓이

삼각형 ABC에서 각각의 대변이 a, b, c 일 때, 넓이 S는



(1) 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기를 알 때

➡ $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$

(2) 외접원의 반지름의 길이 R과 세 변의 길이를 알 때

➡ $S=\frac{abc}{4R}$

(3) 외접원의 반지름의 길이 R과 세 각의 크기를 알 때

➡ $S=2R^2\sin A\sin B\sin C$

(4) 내접원의 반지름의 길이 r과 세 변의 길이를 알 때

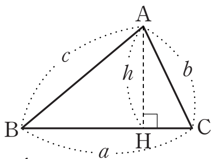
➡ $S=rs\left(\text{단, } s=\frac{a+b+c}{2}\right)$

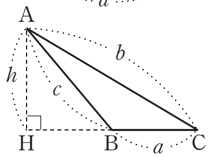
(5) 세 변의 길이를 알 때 (헤론의 공식)

➡ $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\left(\text{단, } s=\frac{a+b+c}{2}\right)$

해설

(1) 오른쪽 그림과 같이 $\triangle\mathrm{ABC}$의 꼭짓점 A에서 대변 $\overline{\mathrm{BC}}$ 또는 그 연장선 위에 내린 수선의 발을 H라고 하자.





$\overline{\mathrm{AH}}=h$라고 하면 B가 예각, 둔각, 직각 어느 경우에나

$$h=c\sin B$$

이므로 $\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ac\sin B$$

같은 방법으로 살펴보면 다음도 성립함을 알 수 있다.

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A,\quad S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

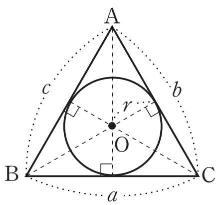
(2) $S=\frac{1}{2}ab\sin C$, $\sin C=\frac{C}{2R}$이므로

$$S=\frac{1}{2}ab\cdot\frac{C}{2R}=\frac{abc}{4R}$$

(3) $a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$이므로

$$S=\frac{abc}{4R}=\frac{2R\sin A\cdot 2R\sin B\cdot 2R\sin C}{4R}=2R^2\sin A\sin B\sin C$$

(4) $S=\triangle\mathrm{ABO}+\triangle\mathrm{BCO}+\triangle\mathrm{CAO}$



$$=\frac{1}{2}\cdot c\cdot r+\frac{1}{2}\cdot a\cdot r+\frac{1}{2}\cdot b\cdot r$$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r=rs$$

(5) $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2 C}$

$$=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}{16}}$$

$$=\sqrt{\frac{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)}{16}}$$

$$=\sqrt{\frac{\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}}{16}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{16}}$$

$$=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}}=\sqrt{s(s-c)(s-b)(s-a)}$$

예 두 변의 길이가 4, 2이고, 그 끼인각의 크기가 60°인 삼각형의 넓이 S를 구해 보자.

$$S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

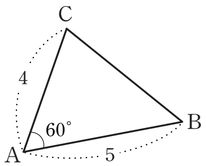
기본문제 075

삼각형의 넓이 – 두 변과 끼인각을 알 때 하

다음 △ABC의 넓이를 구하여라.

(1) $b=4$, $c=5$, $A=60^{\circ}$ (2) $a=2\sqrt{3}$, $b=2$, $C=30^{\circ}$

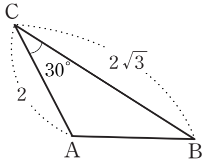
풀이 (1)



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5\cdot \sin 60^{\circ}$$

$$=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{5\sqrt{3}}$$

(2)



$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\cdot \sin 30^{\circ}$$

$$=2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{\sqrt{3}}$$

답 (1) $5\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{3}$

확인문제 075-1

△ABC에서 $a=4$, $b=6$, $C=60^{\circ}$일 때, 삼각형의 넓이는?

① 6 ② 12 ③ $6\sqrt{3}$

④ $12\sqrt{3}$ ⑤ 15

확인문제 075-2

두 변의 길이가 각각 10, 8인 삼각형의 넓이가 20일 때, 그 두 변 사이의 끼인각 θ의 크기를 구하여라.

삼각형의 넓이와 변과 각의 관계 중

기본문제 076

삼각형 ABC에서 $a=5$, $b=6$, $c=7$일 때, 다음을 구하여라.

(1) $\triangle$ABC의 넓이 S (2) $\sin A$

(3) 외접원의 반지름의 길이 R (4) 내접원의 반지름의 길이 r

풀이 (1) 헤론의 공식을 이용하면

$s=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{5+6+7}{2}=9$이므로

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\sqrt{9\cdot4\cdot3\cdot2}=\mathbf{6\sqrt{6}}$$

(2) $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$이므로

$6\sqrt{6}=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot7\cdot\sin A$ $\quad\therefore \sin A=\mathbf{\dfrac{2}{7}\sqrt{6}}$

(3) $\dfrac{a}{\sin A}=2R$에서

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{5}{2\cdot\frac{2}{7}\sqrt{6}}=\frac{35}{4\sqrt{6}}=\mathbf{\frac{35}{24}\sqrt{6}}$$

(4) $S=rs$에서

$$r=\frac{S}{s}=\frac{6\sqrt{6}}{9}=\mathbf{\frac{2\sqrt{6}}{3}}$$

답 (1) $6\sqrt{6}$ (2) $\dfrac{2}{7}\sqrt{6}$ (3) $\dfrac{35}{24}\sqrt{6}$ (4) $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

확인문제 076-1

삼각형의 세 변의 길이가 각각 다음과 같을 때, 삼각형의 넓이를 구하여라.

(1) 5, 7, 8 (2) $\sqrt{3}$, 2, $\sqrt{5}$

기본문제 077

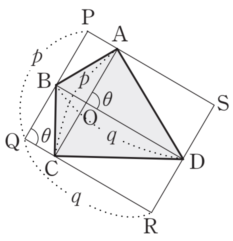
다음 물음에 답하여라.

(1) 두 대각선의 길이가 p, q이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ인 사각형이 있다. 사각형의 넓이 S를 p, q, θ를 써서 나타내어라.

(2) (1)을 이용하여 두 대각선의 길이가 6, 8이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 30°인 □ABCD의 넓이를 구하여라.

풀이

(1) 오른쪽 그림에서 □ABCD의 두 대각선에 평행하고 □ABCD의 꼭짓점을 지나는 선분을 그어 만나는 점을 각각 P, Q, R, S로 놓으면 □PQRS는 평행사변형이다.



이때, 평행사변형의 대각선은 넓이를 이등분하므로 오른쪽 그림에서

□ABCD$=\frac{1}{2}$□PQRS

그런데 □PQRS$=2\triangle$PQR이므로

□PQRS$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{QR}\cdot\sin\theta=pq\sin\theta$

$\therefore S=\boldsymbol{\frac{1}{2}pq\sin\theta}$ ……㉠

(2) (1)의 ㉠을 이용하여 □ABCD의 넓이를 구하면

$S=\frac{1}{2}\cdot6\cdot8\cdot\sin30^\circ=\mathbf{12}$

답 (1) $S=\frac{1}{2}pq\sin\theta$ (2) 12

확인문제 077-1

등변사다리꼴에서 두 대각선이 이루는 각의 크기가 120°이고, 넓이가 $\sqrt{3}$일 때, 대각선의 길이를 구하여라.

부록

상용로그표 (1)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	비례부분								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531	0.0569	0.0607	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899	0.0934	0.0969	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2430	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962	1	4	5	7	9	11	12	14	16
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133	1	3	5	7	9	10	12	14	15
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298	1	3	5	7	8	10	11	13	15
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456	1	3	5	6	8	9	11	13	14
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609	1	3	5	6	8	9	11	12	14
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.1	0.7076	0.7084	0.7093	0.7101	0.7110	0.7118	0.7126	0.7135	0.7143	0.7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.2	0.7160	0.7168	0.7177	0.7185	0.7193	0.7202	0.7210	0.7218	0.7226	0.7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5.4	0.7324	0.7332	0.7340	0.7348	0.7356	0.7364	0.7372	0.7380	0.7388	0.7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

상용로그표 (2)

수	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	비례부분								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	0.7404	0.7412	0.7419	0.7427	0.7435	0.7443	0.7451	0.7459	0.7466	0.7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.6	0.7482	0.7490	0.7497	0.7505	0.7513	0.7520	0.7528	0.7536	0.7543	0.7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.7	0.7559	0.7566	0.7574	0.7582	0.7589	0.7597	0.7604	0.7612	0.7619	0.7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.8	0.7634	0.7642	0.7649	0.7657	0.7664	0.7672	0.7679	0.7686	0.7694	0.7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5.9	0.7709	0.7716	0.7723	0.7731	0.7738	0.7745	0.7752	0.7760	0.7767	0.7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
6.0	0.7782	0.7789	0.7796	0.7803	0.7810	0.7818	0.7825	0.7832	0.7839	0.7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.1	0.7853	0.7860	0.7868	0.7875	0.7882	0.7889	0.7896	0.7903	0.7910	0.7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.2	0.7924	0.7931	0.7938	0.7945	0.7952	0.7959	0.7966	0.7973	0.7980	0.7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
6.3	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.4	0.8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8089	0.8096	0.8102	0.8109	0.8116	0.8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.5	0.8129	0.8136	0.8142	0.8149	0.8156	0.8162	0.8169	0.8176	0.8182	0.8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.6	0.8195	0.8202	0.8209	0.8215	0.8222	0.8228	0.8235	0.8241	0.8248	0.8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.7	0.8261	0.8267	0.8274	0.8280	0.8287	0.8293	0.8299	0.8306	0.8312	0.8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.8	0.8325	0.8331	0.8338	0.8344	0.8351	0.8357	0.8363	0.8370	0.8376	0.8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.9	0.8388	0.8395	0.8401	0.8407	0.8414	0.8420	0.8426	0.8432	0.8439	0.8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.0	0.8451	0.8457	0.8463	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488	0.8494	0.8500	0.8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.1	0.8513	0.8519	0.8525	0.8531	0.8537	0.8543	0.8549	0.8555	0.8561	0.8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.2	0.8573	0.8579	0.8585	0.8591	0.8597	0.8603	0.8609	0.8615	0.8621	0.8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.3	0.8633	0.8639	0.8645	0.8651	0.8657	0.8663	0.8669	0.8675	0.8681	0.8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.4	0.8692	0.8698	0.8704	0.8710	0.8716	0.8722	0.8727	0.8733	0.8739	0.8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.5	0.8751	0.8756	0.8762	0.8768	0.8774	0.8779	0.8785	0.8791	0.8797	0.8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.7	0.8865	0.8871	0.8876	0.8882	0.8887	0.8893	0.8899	0.8904	0.8910	0.8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.8	0.8921	0.8927	0.8932	0.8938	0.8943	0.8949	0.8954	0.8960	0.8965	0.8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.9	0.8976	0.8982	0.8987	0.8993	0.8998	0.9004	0.9009	0.9015	0.9020	0.9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.0	0.9031	0.9036	0.9042	0.9047	0.9053	0.9058	0.9063	0.9069	0.9074	0.9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.1	0.9085	0.9090	0.9096	0.9101	0.9106	0.9112	0.9117	0.9122	0.9128	0.9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.2	0.9138	0.9143	0.9149	0.9154	0.9159	0.9165	0.9170	0.9175	0.9180	0.9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.3	0.9191	0.9196	0.9201	0.9206	0.9212	0.9217	0.9222	0.9227	0.9232	0.9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.4	0.9243	0.9248	0.9253	0.9258	0.9263	0.9269	0.9274	0.9279	0.9284	0.9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.5	0.9294	0.9299	0.9304	0.9309	0.9315	0.9320	0.9325	0.9330	0.9335	0.9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.6	0.9345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.7	0.9395	0.9400	0.9405	0.9410	0.9415	0.9420	0.9425	0.9430	0.9435	0.9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.9	0.9494	0.9499	0.9504	0.9509	0.9513	0.9518	0.9523	0.9528	0.9533	0.9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.0	0.9542	0.9547	0.9552	0.9557	0.9562	0.9566	0.9571	0.9576	0.9581	0.9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.1	0.9590	0.9595	0.9600	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9624	0.9628	0.9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.2	0.9638	0.9643	0.9647	0.9652	0.9657	0.9661	0.9666	0.9671	0.9675	0.9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.3	0.9685	0.9689	0.9694	0.9699	0.9703	0.9708	0.9713	0.9717	0.9722	0.9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.4	0.9731	0.9736	0.9741	0.9745	0.9750	0.9754	0.9759	0.9763	0.9768	0.9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.7	0.9868	0.9872	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	0.9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.9	0.9956	0.9961	0.9965	0.9969	0.9974	0.9978	0.9983	0.9987	0.9991	0.9996	0	1	1	2	2	3	3	4	4

삼각함수표

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	∞

확인문제

해설

069-1. 정답 $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta\le 2\pi$

$f(x)=x^2-2x\cos\theta+2\cos\theta$라 하면 모든 실수 x에 대하여

$f(x)>0$이 성립하므로

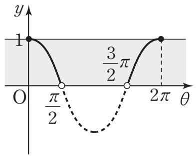
$$\frac{D}{4}=\cos^2\theta-2\cos\theta=\cos\theta(\cos\theta-2)<0$$

그런데 $-1\le\cos\theta\le 1$이므로

$\therefore\ 0<\cos\theta\le 1$

따라서, 오른쪽 그림으로부터 θ의 값의 범위는

$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi<\theta\le 2\pi$



08. 사인법칙과 코사인법칙

확인문제 [p. 126~137]

070-1. 정답 $b=10\sqrt{6}$, $R=10\sqrt{2}$

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$에서 $\frac{20}{\sin 45^\circ}=\frac{b}{\sin 60^\circ}$

$\therefore\ b=\frac{20}{\sin 45^\circ}\times\sin 60^\circ=20\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{6}$

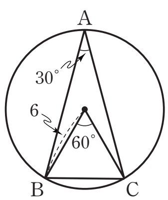
또, 외접원의 반지름의 길이 R의 값은

$\frac{20}{\sin 45^\circ}=2R$, $2R=20\sqrt{2}$ $\quad\therefore\ R=10\sqrt{2}$

072-2. 정답 $\overline{\mathrm{BC}}=6$

호 BC의 중심각의 크기가 60°이므로 원주각의

크기, 즉 $\angle$A의 크기는 $\frac{60^\circ}{2}=30^\circ$



따라서, $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=2R$에서

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin 30^\circ}=2\times 6$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=12\sin 30^\circ=6$

071-1. 정답 3 : 5 : 7

$a-2b+c=0$ ...... ㉠

$3a+b-2c=0$ ...... ㉡

㉠×2+㉡에서

$5a-3b=0 \quad \therefore a=\frac{3}{5}b$

이때, ㉠에서 $c=-a+2b$

$\therefore c=\frac{7}{5}b$

즉, $a:b:c=\frac{3}{5}b:b:\frac{7}{5}b$

$=3:5:7$

따라서,

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

$=3:5:7$

참고 사인법칙

(1) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

(2) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

(3) $a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$

071-2. 정답 $a=b$인 이등변삼각형

사인법칙에서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$이므로

이를 $a\sin A=b\sin B$에 대입하면

$a\times\frac{a}{2R}=b\times\frac{b}{2R} \quad \therefore a^2=b^2$

$a>0,\ b>0$이므로 $a=b$

따라서, △ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이다.

072-1. 정답 (1) $a=\sqrt{2}+\sqrt{6}$, $\mathrm{A}=105^\circ$ (2) $c=\sqrt{6}$, $\mathrm{A}=45^\circ$, $\mathrm{B}=75^\circ$

(1) $a=b\cos C+c\cos B$에서

$$a=2\cos 45^\circ+2\sqrt{2}\cos 30^\circ$$
$$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\sqrt{2}+\sqrt{6}$$

또, $A=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ$

(2) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$에서

$$c^2=2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\cos 60^\circ$$
$$=4+(4+2\sqrt{3})-(2\sqrt{3}+2)=6$$

$\therefore c=\sqrt{6}\ (\because c>0)$

또, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$에서 $\sin A=\dfrac{2\cdot\sin 60^\circ}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore A=45^\circ$ 또는 $A=135^\circ$

그런데, $A=135^\circ$이면 $A+C>180^\circ$가 되므로 $A=45^\circ$

이때, $B=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$

073-1. 정답 ②

삼각형에서 최대각은 최대변의 대각이므로 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 최대각은 A이다.

$$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{8^2+7^2-13^2}{2\cdot8\cdot7}=\frac{-56}{112}$$
$$=-\frac{1}{2}$$

따라서, $\cos A=-\dfrac{1}{2}$에서 $A=120^\circ$

073-2. 정답 $\dfrac{7}{8}$

$a:b:c=2:3:4$에서

$a=2k$, $b=3k$, $c=4k\ (k>0)$로 놓으면

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\cdot3k\cdot4k}$$
$$=\frac{21k^2}{24k^2}=\frac{7}{8}$$

074-1. 정답 (1) $b=c$인 이등변삼각형
(2) $\mathrm{B}=90^\circ$인 직각삼각형 또는 $\mathrm{A}=90^\circ$인 직각삼각형

(1) 사인법칙과 제이코사인법칙에서

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$이므로

$$\frac{a}{2R}=2\times\frac{c}{2R}\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$a^2=a^2+c^2-b^2$

$\therefore b^2-c^2=0$

$b>0,\ c>0$이므로 $b=c$

따라서, $\triangle\mathrm{ABC}$는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

(2) 주어진 식은 제이코사인법칙으로부터

$$a\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+b\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=c\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

양변에 $2abc$를 곱하면

$a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(a^2+c^2-b^2)=c^2(a^2+b^2-c^2)$

$a^2b^2+a^2c^2-a^4+b^2a^2+b^2c^2-b^4=c^2a^2+c^2b^2-c^4$

$a^4+b^4-2a^2b^2-c^4=0$

$(a^2-b^2)^2-c^4=0$

$(a^2-b^2+c^2)(a^2-b^2-c^2)=0$

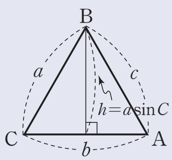
$\therefore a^2-b^2+c^2=0$ 또는 $a^2-b^2-c^2=0$

따라서, $\triangle\mathrm{ABC}$는 $b^2=a^2+c^2$ 또는 $a^2=b^2+c^2$이므로 $B=90^\circ$인 직각삼각형 또는 $A=90^\circ$인 직각삼각형

075-1. 정답 ③

$$(\triangle\mathrm{ABC}\text{의 넓이})=\frac{1}{2}ab\sin C$$
$$=\frac{1}{2}\cdot4\cdot6\cdot\sin60^\circ$$
$$=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

참고 오른쪽 그림에서
$h=a\sin C$이므로
$S=\dfrac{1}{2}\cdot b\cdot h$
$=\dfrac{1}{2}ab\sin C$



075-2. 정답 30° 또는 150°

삼각형의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 8\cdot \sin\theta=20$

$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$

이때, $0°<\theta<180°$이므로

$\theta=30°$ 또는 $\theta=150°$

076-1. 정답 (1) $10\sqrt{3}$ (2) $\frac{\sqrt{11}}{2}$

(1) 헤론의 공식을 이용하면

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{5+7+8}{2}=10$$

$$\begin{aligned}\therefore S&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\sqrt{10(10-5)(10-7)(10-8)}\\&=\sqrt{10\cdot 5\cdot 3\cdot 2}=10\sqrt{3}\end{aligned}$$

(2) $a=\sqrt{3},\ b=2,\ c=\sqrt{5}$일 때

$$\cos A=\frac{4+5-3}{2\cdot 2\cdot \sqrt{5}}=\frac{3}{2\sqrt{5}}$$

이때,

$$\sin^2 A=1-\cos^2 A=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$$

$$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned}\therefore S&=\frac{1}{2}bc\sin A\\&=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \sqrt{5}\cdot \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{5}}\\&=\frac{\sqrt{11}}{2}\end{aligned}$$

077-1. 정답 2

두 대각선의 길이가 p, q이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ인 사각형의 넓이는

$S=\frac{1}{2}pq\sin\theta$

그런데 주어진 조건의 등변사다리꼴은 두 대각선의 길이가 같으므로

$\sqrt{3}=\frac{1}{2}p^2\sin 120°$

$p^2=4 \qquad \therefore p=2\ (\because p>0)$

따라서, 대각선의 길이는 2이다.