출제자의 생각을 읽다

HOWHY MATH

수학 기본서

기하

POOLeWAY

08. 직선과 원의 방정식

"이 단원에서는 벡터를 이용하여 평면 위의 직선과 원의 방정식을 표현할 수 있음을 깨닫는다. 또, 두 직선의 평행, 수직과 직선의 방향벡터 사이의 관계를 이해하고, 방향벡터를 이용한 두 직선이 이루는 각을 구해본다. 또, 위치벡터를 이용하여 여러 가지 원의 방정식을 구하여 본다."

- 평면벡터
  - 벡터의 정의
  - 벡터의 덧셈, 뺄셈 및 실수배
  - 벡터의 평행
- 벡터의 성분
  - 위치벡터
  - 벡터의 성분
- 벡터의 내적
  - 벡터의 내적
  - 내적의 성분과 연산
  - 벡터의 수직과 평행
- **직선과 원의 방정식**
  - 직선의 방정식
  - 두 직선의 위치 관계
  - 원의 방정식

01 직선의 방정식

▪ 직선과 원의 방정식
1. 직선의 방정식 (방향벡터와 평행)
2. 두 직선의 위치 관계
3. 원의 방정식

“직선의 방정식과 직선의 방향벡터에 대하여 이해하고, 여러 가지 직선의 방정식을 벡터를 이용하여 표현해본다.”

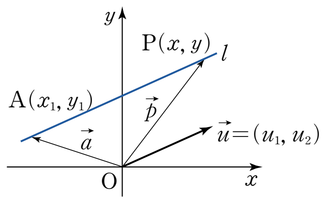
37.

한 점을 지나고 한 벡터에 평행인 직선의 방정식

도형의 방정식은 도형 위의 임의의 점 P의 위치벡터 $\vec{x}$를 사용하여 표현할 수 있다.

먼저 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$를 지나고 벡터 $\vec{u}=(u_1,\ u_2)$에 평행한 직선 l의 방정식을 구하여 보자.

점 A를 지나고 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 l 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} /\!/ \vec{u}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{u}$인 임의의 실수 t가 존재하고, 이때 두 점 A, P의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{p}$라 하면



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\vec{u} \text{ 즉, } \vec{p}-\vec{a}=t\vec{u}$$

$$\therefore\ \vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}\ (t\text{는 실수}) \ \cdots\cdots \text{①}$$

역으로 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 가지는 점 P는 직선 l 위에 있다.

따라서, $\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u}$는 직선 l을 나타내고, 벡터 $\vec{u}$를 직선 l의 방향벡터라고 한다. 그리고, 위의 ①과 같이 벡터를 이용하여 나타낸 직선의 방정식을 그 직선의 벡터방정식이라 한다.

이제 직선 l의 방정식 ①을 벡터의 성분을 이용하여 나타내 보자.

$\vec{p}=(x,\ y)$, $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$, $\vec{u}=(u_1,\ u_2)$이므로

$$(x,\ y)=(x_1,\ y_1)+t(u_1,\ u_2)=(x_1+tu_1,\ y_1+tu_2)$$

즉, $\begin{cases} x=x_1+tu_1 \\ y=y_1+tu_2 \end{cases}$

특히, $u_1u_2\neq0$일 때, 실수 t를 소거하여 표현하면 다음이 성립한다.

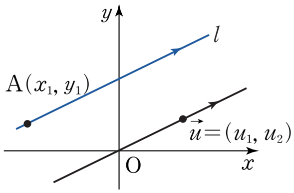
$$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}$$

핵심 한 점을 지나고 한 벡터에 평행인 직선의 방정식

점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$를 지나고, $\vec{u}=(u_1, u_2)$에 평행한 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2} \quad (\text{단, } u_1u_2\neq0)$$

참고 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$를 지나고, 벡터 $\vec{u}=(u_1, u_2)$에 평행한 직선 l을 보면 오른쪽 그림에서



직선 OU의 기울기는 $m=\frac{u_2}{u_1}$이므로

직선 l은 기울기가 $m=\frac{u_2}{u_1}$이고

점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$를 지나는 직선과 같다.

즉, 수학 I 에서 학습한 방법으로 직선의 방정식을 구하면

$$y-y_1=\frac{u_2}{u_1}(x-x_1) \text{ 즉, } \frac{x-x_1}{u_1}=\frac{y-y_1}{u_2}$$

로 위에서 구한 직선의 방정식과 같은 식이다.

따라서, $\vec{u}=(u_1, u_2)$에 평행한 직선 l은 기울기가 $m=\frac{u_2}{u_1}$인 직선을 나타낸다.

한편, $u_1=0$ 또는 $u_2=0$이면 y축 또는 x축에 평행한 직선이므로

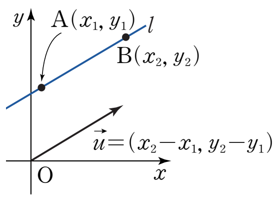
(1) 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$를 지나고, 벡터 $\vec{u}=(u_1, 0)$일 때, $y=y_1$

(2) 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$를 지나고, 벡터 $\vec{u}=(0, u_2)$일 때, $x=x_1$

서로 다른 두 점을 지나는 직선의 방정식

38.

앞에서 구한 직선의 방정식을 이용하면 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.



두 점 A, B를 지나는 직선 l의 방향벡터는

$$\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$$

이므로 구하는 직선 l의 방정식은 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$를 지나고, 방향벡터가 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$인 직선과 같다.

핵심 **서로 다른 두 점을 지나는 직선의 방정식**

두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \text{ (단, } (x_2-x_1)(y_2-y_1)\neq 0)$$

참고 $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$을 정리하면

$$y-y_1=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_2-y_1),\text{즉 } y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

따라서, 위 식은 수학에서 학습한 두 점을 지나는 직선의 방정식과 같다.

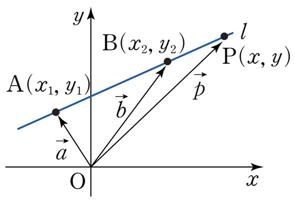
한편, 오른쪽 그림에서 두 점 A, B의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 할 때, 직선 위의 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$$

즉, $\vec{p}=\vec{a}+t(\vec{b}-\vec{a})$

$\therefore \vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$ (t는 실수)

의 직선의 벡터방정식으로 표현할 수 있다.



예 두 점 $A(1, 1)$, $B(3, 5)$를 지나는 직선의 방정식을 구하여 보자.

방향벡터는 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2, 4)$이므로

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{4} \text{ 즉, } x-1=\frac{y-1}{2}$$

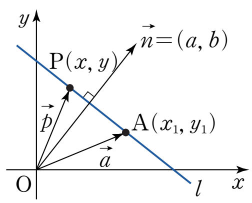
39. 한 점을 지나고 한 벡터에 수직인 직선의 방정식

오른쪽 그림에서 점 A를 지나고 벡터 $\vec{n}$에 수직인 직선 l 위의 임의의 점을 P라 하면

$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$ 즉, $(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})\cdot\vec{n}=0$

$\therefore (\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$



이때, 벡터 $\vec{n}$을 직선 l의 법선벡터라고 한다.

여기서 직선 l의 벡터방정식 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$을 벡터의 성분을 이용하여 나타내면 다음을 얻을 수 있다.

$\vec{p}=(x, y)$, $\vec{a}=(x_1, y_1)$이므로

$(x-x_1, y-y_1)\cdot(a, b)=0$

$\therefore a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

예 점 $A(1, 1)$를 지나고, 벡터 $\vec{n}=(1, -2)$에 수직인 직선의 방정식을 구하여 보자.

$1(x-1)-2(y-1)=0 \qquad \therefore x-2y+1=0$

기본문제 56

다음을 구하여라.

(1) 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$를 지나고, $\vec{u}=(1,\ -1)$에 평행한 직선의 방정식

(2) 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식

풀이

(1) 직선의 방향벡터가 $\vec{u}=(1,\ -1)$이므로

$\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}$, $x+1=-y+2$

$\therefore\ \boldsymbol{x+y-1=0}$

(2) 직선의 방향벡터는 $\vec{u}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 4)$이므로

$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{4}$, $4x+4=2y+2$

$\therefore\ \boldsymbol{2x-y+1=0}$

답 (1) $x+y-1=0$ (2) $2x-y+1=0$

확인문제 56-1

다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 원점 O를 지나고, $\vec{u}=(1,\ 2)$에 평행한 직선

(2) 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ -1)$을 지나는 직선

기본문제 57

두 점 $(-1,\ -1)$, $(1,\ 0)$을 지나는 직선 l이 있을 때, 다음 직선의 방정식을 구하여라.

(1) 점 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$을 지나고, 직선 l과 평행인 직선

(2) 점 $\mathrm{B}(0,\ 3)$을 지나고, 직선 l과 수직인 직선

풀이 직선 l의 방향벡터 $\vec{u}=(1,\ 0)-(-1,\ -1)=(2,\ 1)$이므로

(1) 방향벡터가 $\vec{u}=(2,\ 1)$이고, $\mathrm{A}(-1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식을 구하면

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1},\ x+1=2y-6$$

$\therefore$ $\boldsymbol{x-2y+7=0}$

(2) 직선 위의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\perp\vec{u}$이므로

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0,\ (2,\ 1)\cdot(x,\ y-3)=0$

$\therefore$ $\boldsymbol{2x+y-3=0}$

답 (1) $x-2y+7=0$ (2) $2x+y-3=0$

확인문제 57-1 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 3)$을 지나는 직선과 평행하고, 점 $\mathrm{P}(0,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식을 구하여라.

확인문제 57-2 원점 O와 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$을 지나는 직선과 수직이고, 교점이 A인 직선 l의 방정식을 구하여라.

직선 위의 점의 좌표 중

기본문제 58

두 점 $(1,\ -1)$, $(3,\ 2)$를 지나는 직선 l이 있다. 직선 l 위의 점 P와 점 $\mathrm{Q}(0,\ 2)$에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=3$일 때, 이를 만족하는 점 P를 구하여라.

풀이

직선 l의 방향벡터
$\vec{u}=(3,\ 2)-(1,\ -1)=(2,\ 3)$
이므로 l의 방정식을 구하면

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}$$

즉, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=t$로 놓으면 l 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는

$$\mathrm{P}(2t+1,\ 3t-1)$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-2t-1,\ -3t+3)$에서
$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=3$이므로 $\sqrt{(2t+1)^2+(-3t+3)^2}=3$,
$4t^2+4t+1+9t^2-18t+9=9$, $13t^2-14t+1=0$,
$(t-1)(13t-1)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=\frac{1}{13}$

$\therefore$ **P(3, 2) 또는 P$\left(\frac{15}{13},\ -\frac{10}{13}\right)$**

답 $\mathrm{P}(3,\ 2)$ 또는 $\mathrm{P}\left(\frac{15}{13},\ -\frac{10}{13}\right)$

확인문제 58-1

두 점 $(1, -1)$, $(3,\ 2)$를 지나는 직선 l 위의 점 P와 원점 O 사이의 거리가 최소일 때, 점 P를 구하여라.

02 두 직선의 **위치 관계**

▪ 직선과 원의 방정식

- 1. 직선의 방정식
- 2. 두 직선의 위치 관계 (방향벡터의 위치 관계)
- 3. 원의 방정식

"두 직선의 평행, 수직 조건에 따른 직선의 방향벡터의 관계를 이해하고, 방향벡터가 이루는 각을 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기를 직접 구해본다."

40.

두 직선의 평행, 수직 조건

두 직선

$$l_1 : \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1},\ l_2 : \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$$

에 대하여 다음이 성립한다.

핵심 두 직선의 평행, 수직 조건

(1) 평행조건: $l_1 /\!/ l_2 \Rightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$

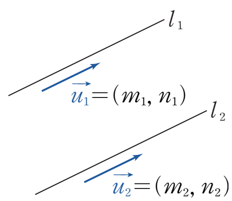
(2) 수직조건: $l_1 \perp l_2 \Rightarrow m_1m_2+n_1n_2=0$

해설 (1) 그림과 같이 두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하면 두 직선의 방향벡터 $\overrightarrow{u_1}=(m_1,\ n_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(m_2,\ n_2)$ 는 서로 평행하다.

즉, $\overrightarrow{u_1}=t\overrightarrow{u_2}$에서 $(m_1,\ n_1)=t(m_2,\ n_2)$

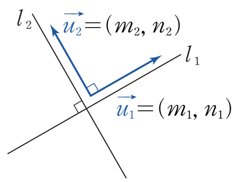
$$m_1=tm_2,\ n_1=tn_2$$

에서 t를 소거하면 $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$



(2) 그림과 같이 두 직선 l_1, l_2가 서로 수직이면 두 직선의 방향벡터 $\overrightarrow{u_1}=(m_1,\ n_1)$, $\overrightarrow{u_2}=(m_2,\ n_2)$ 는 서로 수직이다.

즉, $\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}=0$에서 $m_1m_2+n_1n_2=0$



두 직선이 이루는 각의 크기

두 직선이 주어졌을 때, 두 직선의 방향벡터와 두 직선이 이루는 각의 크기 사이의 관계에 대해 알아보자.

두 직선

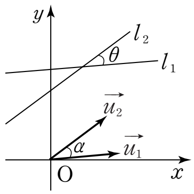
$$l_1 : \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1},\ l_2 : \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}$$

가 이루는 각의 크기 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$는 두 직선의 방향벡터

$$\vec{u_1}=(m_1,\ n_1),\ \vec{u_2}=(m_2,\ n_2)$$

가 이루는 각의 크기 α에 대하여

$$0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\text{이면 }\theta=\alpha,\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\text{이면 }\theta=\pi-\alpha$$



즉, 다음이 성립한다.

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}$$

예 $l_1 : \frac{x-2}{4}=\frac{y+1}{2}$, $l_2 : x+1=\frac{y-4}{3}$가 이루는 각의 크기를 구해보자.

두 직선의 방향벡터는 각각 $\vec{u_1}=(4,\ 2)$, $\vec{u_2}=(1,\ 3)$이므로 두 직선이 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

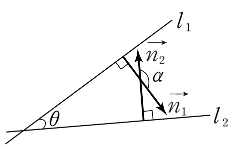
$$\cos\theta=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{|4\times1+2\times3|}{\sqrt{16+4}\sqrt{1+9}}=\frac{10}{10\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

한편, 두 직선의 법선벡터와 두 직선이 이루는 각의 크기 사이의 관계에 대해 알아보자.

두 직선 l_1, l_2의 법선벡터를 각각 n_1, n_2라고 할 때, n_1과 n_2가 이루는 각의 크기를 α라 하면 두 직선 l_1, l_2가 이루는 각의 크기

$\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$는

$$0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}\text{이면 }\theta=\alpha,\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi\text{이면 }\theta=\pi-\alpha$$



이때, $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=|\vec{n_1}||\vec{n_2}|\cos\alpha$이므로 다음이 성립한다.

$$\cos\theta=|\cos\alpha|=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$

예 $l_1 : x+2y+3=0$, $l_2 : x-3y+4=0$이 이루는 각 $\theta\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$를 구해보자.

주어진 두 직선 l_1, l_2의 법선벡터가 각각 $\vec{n_1}=(1,\ 2)$, $\vec{n_2}=(1,\ -3)$이므로

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{|1\times1+2\times(-3)|}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$$

기본문제 59

평면 위의 두 직선 l_1, l_2의 방정식이 다음과 같다. 조건을 만족하도록 상수 k의 값을 구하여라.

$$l_1 : \frac{x}{2}=2-y,\ \ l_2 : \frac{x+1}{-4}=\frac{y+2}{k}$$

(1) 두 직선 l_1, l_2가 평행

(2) 두 직선 l_1, l_2가 수직

풀이 $l_1 : \frac{x}{2}=\frac{y-2}{-1}$ 로 쓰면 l_1, l_2의 방향벡터는 각각

$\vec{u_1}=(2,\ -1)$, $\vec{u_2}=(-4,\ k)$

(1) $l_1 /\!/ l_2$이므로 $\vec{u_1} /\!/ \vec{u_2}$

즉, $\frac{-4}{2}=\frac{k}{-1}$ $\quad \therefore k=\mathbf{2}$

(2) $l_1 \perp l_2$이므로 $\vec{u_1} \perp \vec{u_2}$

즉, $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}=0$에서 $(2,\ -1) \cdot (-4,\ k)=0$, $-8-k=0$

$\therefore k=\mathbf{-8}$

답 (1) 2 (2) -8

확인문제 59-1

평면 위의 세 직선 l_1, l_2, l_3의 방정식이 다음과 같다.

$$l_1 : x=1-y,\ l_2 : \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{k},\ l_3 : \frac{x-1}{m}=\frac{y+3}{3}$$

두 직선 l_1, l_2가 평행이고, 두 직선 l_2, l_3가 수직일 때, k^2+m^2의 값을 구하여라.

기본문제 60

평면 위의 두 직선

$$l_1 : \frac{x-2}{2}=4-y,\ l_2 : \frac{x+1}{m}=\frac{y+3}{3}$$

가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, 양수 m의 값을 구하여라.

풀이 두 직선 $l_1 : \frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-1}$, $l_2 : \frac{x+1}{m}=\frac{y+3}{3}$에서 각각의 방향벡터는

$$\vec{u_1}=(2,\ -1),\ \vec{u_2}=(m,\ 3)$$

이때, 두 직선이 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로 $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$가 이루는 각의 크기 α에 대하여

$$\cos\frac{\pi}{4}=|\cos\alpha|=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{|2m-3|}{\sqrt{5}\sqrt{m^2+9}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{|2m-3|}{\sqrt{5}\sqrt{m^2+9}}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2(2m-3)^2=5(m^2+9),\ 3m^2-24m-27=0$$

$$m^2-8m-9=(m-9)(m+1)=0$$

$$\therefore m=\mathbf{9}\ (\because m>0)$$

답 9

확인문제 60-1

두 직선

$$l_1 : \frac{x-2}{3}=y+1,\ l_2 : \frac{x+1}{2}=2-y$$

가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin^2\theta$의 값을 구하여라.

확인문제 60-2

두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(5,\ 1)$를 지나는 직선 l과 점 $\mathrm{C}(1,\ -2)$를 지나고, $\vec{u}=(1,\ -5)$에 평행한 직선 m이 있다. 두 직선 l, m이 이루는 각의 크기를 구하여라.

03 원의 방정식

▪ 직선과 원의 방정식
1. 직선의 방정식
2. 두 직선의 위치 관계
3. 원의 방정식 (벡터의 크기가 일정)

“ 원을 벡터를 이용하여 나타내는 방법을 이해하고, 평면 위의 여러 가지 원의 방정식을 직접 구해본다. 또, 벡터를 이용한 원의 접선의 방정식의 표현방법에 대하여 살펴본다. ”

42.

원의 방정식

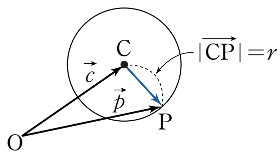
좌표평면 위의 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식을 구하여 보자. 점 C의 위치벡터를 $\vec{c}$라 하고 반지름의 길이가 r인 원둘레 위의 임의의 점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$ 즉, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=r$

$\therefore\ |\vec{p}-\vec{c}|=r$

따라서, $|\vec{p}-\vec{c}|^2=r^2$이므로

$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$ ⋯⋯ ①



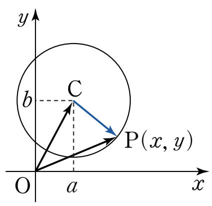
역으로 ①을 만족하는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 가지는 점 P는 중심이 C이고, 반지름의 길이가 r인 원 위의 점이다.
따라서, ①은 중심이 C이고, 반지름의 길이가 r인 원이다.

핵심 | 원의 벡터방정식
위치벡터가 $\vec{c}$인 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 ⇨ $|\vec{p}-\vec{c}|=r$ 또는 $(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$

이제 원의 방정식 ①을 성분을 이용하여 나타내어 보자.
원의 벡터방정식에서 $\vec{p}=(x,\ y)$, $\vec{c}=(a,\ b)$라 놓고 원의 벡터방정식을 성분을 사용하여 나타내면

$|(x-a,\ y-b)|=r$

즉, $(x-a,\ y-b)\cdot(x-a,\ y-b)=r^2$이므로



$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

이것은 점 $(a,\ b)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 좌표평면에서의 원의 방정식이다.

이와 같이 원의 벡터방정식을 성분을 써서 나타내면 수학 I 에서 학습한 좌표평면 위에서의 원의 방정식을 얻을 수 있다.

예 중심의 좌표가 $\mathrm{C}(1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원의 방정식을 구하여 보자.

원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면 $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=2$

즉, $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}=2^2$

$(x-1,\ y-2)\cdot(x-1,\ y-2)=4$

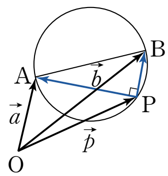
$\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2=4$

지름의 양 끝점이 주어진 원의 방정식

43.

두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 가지는 원의 방정식을 구하여 보자.

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라 하고, 원 위의 임의의 점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라 하자.



이때 원의 성질에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$는 수직이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PB}}$, 즉 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0$

$\therefore\ (\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$ …… ②

이 식은 점 P가 점 A 또는 점 B일 때도 성립하고, 그 역도 성립한다.

핵심 **지름의 양 끝점이 주어진 원의 벡터방정식**

위치벡터가 $\vec{a}$, $\vec{b}$인 두 점 A, B를 지름의 양 끝점으로 가지는 원의 방정식은 ⇨ $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

이제 원의 방정식 ②를 성분을 이용하여 나타내어 보자.

원의 벡터방정식에서 $\vec{p}=(x,\ y)$, $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$, $\vec{b}=(x_2,\ y_2)$라 놓고 원의 벡터방정식을 성분을 사용하여 나타내면

$(x-x_1,\ y-y_1)\cdot(x-x_2,\ y-y_2)=0$

$\therefore\ (x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

예 평면 위의 두 점 $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$이 지름의 양 끝점인 원의 방정식을 구하여 보자.

$(x-1)(x-3)+(y-0)(y-0)=0$

이를 변형하면

$x^2-4x+3+y^2=0$, $(x^2-4x+4)+y^2=1$

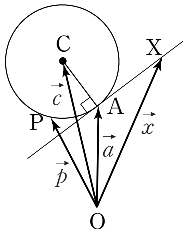
$\therefore\ (x-2)^2+y^2=1$

44.

원의 접선의 방정식

좌표평면 위의 점 $\mathrm{C}(a,\ b)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위의 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 벡터를 이용하여 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 두 점 C, A의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{a}$라 하고, 원 위의 임의의 한 점 P의 위치벡터를 $\vec{p}$라고 하면



벡터로 나타낸 원의 방정식은

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2$$

이때 점 A는 원 위의 점이므로

$$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=r^2 \ \cdots\cdots \ ㉠$$

이 성립한다.

구하는 접선 위의 임의의 한 점을 $\mathrm{X}(x,\ y)$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AX}}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AX}}=0$$

점 X의 위치벡터를 $\vec{x}$라고 하면 $(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{x}-\vec{a})=0$

$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{x}-\vec{c}+\vec{c}-\vec{a})=0$

$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{x}-\vec{c})-(\vec{a}-c)\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$

이때, ㉠에 의하여 다음이 성립한다.

$$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{x}-\vec{c})=r^2 \ \cdots\cdots \ ㉡$$

핵심 원의 접선의 벡터방정식

위치벡터가 $\vec{c}$인 점 C를 중심으로 하고, 반지름의 길이가 r인 원 위의 점 A의 위치벡터가 $\vec{a}$일 때, 점 A에서의 접선의 방정식

⇨ $(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{x}-\vec{c})=r^2$

이제 접선의 방정식 ㉡을 벡터의 성분을 이용하여 나타내 보자.

$\vec{x}=(x,\ y)$, $\vec{c}=(\alpha,\ \beta)$, $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$이므로

$\vec{a}-\vec{c}=(x_1-\alpha,\ y_1-\beta)$, $\vec{x}-\vec{c}=(x-\alpha,\ y-\beta)$이다.

따라서 ㉡에 의하여 $(x_1-\alpha,\ y_1-\beta)\cdot(x-\alpha,\ y-\beta)=r^2$이므로

$$(x_1-\alpha)(x-\alpha)+(y_1-\beta)(y-\beta)=r^2$$

예 점 $\mathrm{C}(1,\ 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 6)$에서의 접선의 방정식을 벡터를 이용하여 구해 보자.

구하는 접선 위의 임의의 한 점을 $\mathrm{X}(x,\ y)$라 하고, 세 점 C, A, X의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{a}$, $\vec{x}$라고 하면 $\vec{c}=(1,\ 2)$, $\vec{a}=(4,\ 6)$, $\vec{x}=(x,\ y)$이므로

$(\vec{a}-\vec{c})\cdot(\vec{x}-\vec{c})=r^2$에서 $(4-1,\ 6-2)\cdot(x-1,\ y-2)=25$

$3(x-1)+4(y-2)=25 \qquad \therefore\ 3x+4y-36=0$

기본문제 61

다음을 구하여라.

(1) 중심이 $\mathrm{A}(2,\ 1)$이고, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원의 방정식

(2) 중심이 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$이고, 점 $\mathrm{B}(2,\ -1)$을 지나는 원의 방정식

풀이

(1) 원 위의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하면

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\sqrt{5},\ |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=5$

즉, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=5$에서

$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=5$

$(x-2,\ y-1)\cdot(x-2,\ y-1)=5$

$\therefore\ \boldsymbol{(x-2)^2+(y-1)^2=5}$

(2) 원 위의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$, 반지름의 길이를 r라 하면,

$r=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|(3,\ -4)|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$

즉, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=5$에서

$(x+1,\ y-3)\cdot(x+1,\ y-3)=25$

$\therefore\ \boldsymbol{(x+1)^2+(y-3)^2=25}$

답 (1) $(x-2)^2+(y-1)^2=5$
(2) $(x+1)^2+(y-3)^2=25$

확인문제 61-1

다음을 구하여라.

(1) 중심이 $\mathrm{A}(-2,\ 2)$이고, 반지름의 길이가 2인 원의 방정식

(2) 중심이 $\mathrm{A}(0,\ 4)$이고, x축에 접하는 원의 방정식

원의 벡터방정식 하

기본문제 62

좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=2$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하여라.

풀이

$\mathrm{P}(x,\ y)$로 놓으면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(x,\ y)-(1,\ 2)=(x-1,\ y-2)$

즉, $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=2$에서

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=2$

$\therefore\ \boldsymbol{(x-1)^2+(y-2)^2=4}$

답 $(x-1)^2+(y-2)^2=4$

확인문제 62-1

좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\sqrt{5}$를 만족시키는 점 P가 있다.

(1) 점 P의 자취의 길이를 구하여라.

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하여라.

원과 좌표축이 접할 조건 중

기본문제 63

$\vec{a}=(1,\ -1)$에 대하여 $|\vec{p}-\vec{a}|=r$를 만족하는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 나타내는 도형이 좌표축에 접할 때 양수 r의 값은?

(이 때, $\vec{p}$는 점 P의 위치벡터이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이

$\vec{a}=(1,\ -1)$에 대하여 $|\vec{p}-\vec{a}|=r$를 만족하는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 $(1,\ -1)$이고 반지름의 길이가 r인 원이다.

이때, 이 원이 좌표축에 접하므로 반지름의 길이는

$r=1-0=0-(-1)=\mathbf{1}$

답 ①

확인문제 63-1

$\vec{a}=(1,\ 2)$에 대하여 $|\vec{p}-\vec{a}|=1$를 만족하는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 그리는 도형의 길이는? (이 때, $\vec{p}$는 점 P의 위치벡터이다.)

① π ② 2π ③ 3π ④ 4π ⑤ 5π

기본문제 64

지름의 양 끝점이 주어진 원 중

두 점 $\mathrm{A}(0, 0)$, $\mathrm{B}(2, 4)$를 지름의 양 끝으로 하는 원의 방정식이 $|\vec{p}-\vec{c}|=\sqrt{5}$와 일치할 때, $\vec{c}=(1, \beta)$에 대하여 β의 값을 구하여라.

풀이 두 점 $\mathrm{A}(0, 0)$, $\mathrm{B}(2, 4)$는 원 $|\vec{p}-\vec{c}|=\sqrt{5}$의 지름의 양 끝점이므로 원의 중심은

$$\vec{c}=\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+4}{2}\right)=2$$

$\therefore \beta=\mathbf{2}$

답 2

확인문제 64-1

원 $(x-1)(x-3)+y(y-4)=0$의 중심 C의 위치 벡터가 $\vec{c}=(a, b)$일 때 $a+b$의 값을 구하여라.

원의 벡터방정식 중

기본문제 65

좌표평면 위의 두 점 A$(1,\ 2)$, B$(3,\ 0)$와 한 점 P의 원점 O에 대한 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$라 할 때, $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$을 만족하는 점 P가 나타내는 도형 F가 있다.

(1) 도형 F의 넓이를 구하여라.

(2) F 위의 점 C$(3,\ 2)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

풀이 $\vec{p}=(x,\ y)$로 놓으면

(1) $\vec{p}-\vec{a}=(x,\ y)-(1,\ 2)=(x-1,\ y-2)$

$\vec{p}-\vec{b}=(x,\ y)-(3,\ 0)=(x-3,\ y)$

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$에서

$(x-1,\ y-2)\cdot(x-3,\ y)=0$

$(x-1)(x-3)+(y-2)y=0$

$x^2-4x+3+y^2-2y=0$

$(x^2-4x+4)+(y^2-2y+1)=2$

$\therefore\ (x-2)^2+(y-1)^2=2$

따라서, 점 P$(x,\ y)$는 중심이 $(2,\ 1)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원을 나타내므로 구하는 도형의 넓이는 $\pi(\sqrt{2})^2=\mathbf{2\pi}$

(2) D$(2,\ 1)$로 놓고, 접선 위의 한 점을 X(x, y)로 놓으면,

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(2,\ 1)-(3,\ 2)=(-1,\ -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{CX}}=(x-3,\ y-2)$이고, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CX}}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}=0$ 즉,

$(-1,\ -1)\cdot(x-3,\ y-2)=0$, $-(x-3)-(y-2)=0$

$\therefore\ \boldsymbol{x+y-5=0}$

답 (1) 2π (2) $x+y-5=0$

확인문제 65-1

좌표평면 위의 두 위치벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(5,\ 6)$와 점 P에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0$

이 성립할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

확인문제 65-2

점 A$(1,\ 0)$을 중심으로 하는 원 C 위의 점 B$(4,\ 1)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

확인문제

해설

08. 직선과 원의 방정식 확인문제 [p. 107~125]

56-1. 정답 (1) $2x-y=0$ (2) $x+y=0$

(1) 직선 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{u}$ (t는 실수)

$(x, y)=t(1, 2)$

즉, $x=t$, $y=2t$에서

$x=\frac{y}{2}$ $\quad\therefore 2x-y=0$

(2) 직선 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (t는 실수)

$(x+1, y-1)=t(2, -2)$

$x+1=2t$, $y-1=-2t$

즉, $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-2}$

$\therefore x+1=-(y-1)$

따라서, $x+y=0$

57-1. 정답 $3x-y+2=0$

직선 위의 점을 $\mathrm{Q}(x, y)$라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$(x, y-2)=t(1, 3)$

$x=t$, $y-2=3t$

$\therefore x=\frac{y-2}{3}$

따라서, $3x-y+2=0$

57-2. 정답 $x+3y-10=0$

직선 l 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

즉, $(x-1, y-3)\cdot(1, 3)=0$에서

$x-1+3(y-3)=0$

$\therefore x+3y-10=0$

58-1. 정답 $\mathrm{P}\left(\frac{15}{13},\ -\frac{10}{13}\right)$

점 P는 두 점 $\mathrm{A}(1,\ -1)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$를 지나는 직선 위의 점이고,

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$일 때이므로 먼저 직선 AB의 방정식을 구하면

$(x-1,\ y+1)=t(2,\ 3)$

$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=t$

$x=2t+1,\ y=3t-1$

즉, $\mathrm{P}(2t+1,\ 3t-1)$로 놓으면

$(2t+1,\ 3t-1)\cdot(2,\ 3)=0$

$2(2t+1)+3(3t-1)=0$

$13t-1=0$

$\therefore t=\frac{1}{13}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\frac{15}{13},\ -\frac{10}{13}\right)$

59-1. 정답 13

주어진 세 직선

l_1: $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}$, l_2: $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{k}$, l_3: $\frac{x-1}{m}=\frac{y+3}{3}$

의 방향벡터는 각각

$\overrightarrow{u_1}=(1,\ -1)$, $\overrightarrow{u_2}=(2,\ k)$, $\overrightarrow{u_3}=(m,\ 3)$

이므로

$\overrightarrow{u_1}/\!/\overrightarrow{u_2}$에서 $(1,\ -1)=t(2,\ k)$

$1=2t,\ -1=kt$

$t=\frac{1}{2},\ k=-2$

$\overrightarrow{u_2}\perp\overrightarrow{u_3}$에서

$(2,\ k)\cdot(m,\ 3)=0$

$2m+3k=0$

$2m-6=0$

$\therefore m=3$

따라서, $k^2+m^2=(-2)^2+3^2=13$

60-1 정답 $\frac{1}{2}$

두 직선

l_1: $\frac{x-2}{3}=y+1$, l_2: $\frac{x+1}{2}=2-y$

의 방향벡터는 각각

$\vec{u_1}=(3, 1)$, $\vec{u_2}=(2, -1)$

이고, 두 직선이 이루는 각은 두 방향벡터가 이루는 각과 같으므로

$$\cos\theta=\frac{|\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}||\vec{u_2}|}=\frac{|6-1|}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

60-2. 정답 $\frac{\pi}{4}$

구하는 각 θ는 두 벡터 $\overrightarrow{AB}=(3, -2)$, $\vec{u}=(1, -5)$

가 이루는 각의 크기와 같다. 즉

$$\cos\theta=\frac{|3+10|}{\sqrt{13}\sqrt{26}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$$

61-1. 정답 (1) 4 (2) 16

(1) 원 위의 점을 $P(x, y)$라 하면

$|\overrightarrow{AP}|=2$

즉 $\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}=2$

$\therefore (x+2)^2+(y-2)^2=4$

(2) 원 위의 점을 $P(x, y)$라 하면 $r=4$이므로

$|\overrightarrow{AP}|=4$

즉 $\sqrt{x^2+(y-4)^2}=4$

$\therefore x^2+(y-4)^2=16$

62-1. 정답 (1) $2\sqrt{5}\pi$ (2) $2\sqrt{5}$

(1) 점 P는 중심이 $A(-1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원 위의 점이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi\times(\sqrt{5})=2\sqrt{5}\pi$

(2) $\overline{OA}=\sqrt{5}$에서 O는 원 위의 점이므로

$0\le|\overrightarrow{OP}|\le 2r$

$\therefore 0\le|\overrightarrow{OP}|\le 2\sqrt{5}$

$\therefore M+m=2\sqrt{5}+0=2\sqrt{5}$

63-1. 정답 ②

$\vec{a}=(1,\ 2)$에 대하여 $|\vec{p}-\vec{a}|=1$를 만족하는 점 P가 나타내는 도형은 중심이 $(1,\ 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

따라서, 이 도형의 길이는 2π

64-1. 정답 4

$(x-1)(x-3)+y(y-4)=x^2-4x+3+y-4y=0$

$x-4x+4+y-4y+4=-3+4+4=5$

$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2=5$

따라서, 중심좌표는 $(2,\ 2)$이므로 $\vec{c}=(2,\ 2)$

즉, $a=2,\ b=2$

$\therefore a+b=4$

65-1. 정답 최댓값: $5+2\sqrt{2}$, 최솟값: $5-2\sqrt{2}$

$P(x,\ y)$로 놓으면

$\overrightarrow{PA}=(1-x,\ 2-y),\ \overrightarrow{PB}=(5-x,\ 6-y)$

즉, $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$에서

$(1-x,\ 2-y)\cdot(5-x,\ 6-y)=0$

$(x-1)(x-5)+(y-2)(y-6)=0$

$x^2-6x+5+y^2-8y+12=0$

$(x-3)^2+(y-4)^2=8$

이때 원점 O에서 중심 $(3,\ 4)$에 이르는 거리는 $\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

$5-r\le|\overrightarrow{OP}|\le 5+r$

즉, $5-2\sqrt{2}\le|\overrightarrow{OP}|\le 5+2\sqrt{2}$

따라서, 구하는 최댓값은 $5+2\sqrt{2}$, 최솟값은 $5-2\sqrt{2}$

65-2. 정답 $3x+y-13=0$

접선 위의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$로 놓으면

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PB}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3, 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-4, y-1)$에서

$(3, 1) \cdot (x-4, y-1)=0$

$3(x-4)+(y-1)=0$

$\therefore 3x+y-13=0$