출제자의 생각을 읽다

HOWHY MATH

수학 기본서

기하

POOLeWAY

평면벡터

05. 평면벡터
06. 벡터의 성분
07. 벡터의 내적
08. 직선과 원의 방정식

Ⅱ. 평면벡터

05. 평면벡터
- 벡터의 정의
- 벡터의 덧셈, 뺄셈 및 실수배
- 벡터의 평행

06. 벡터의 성분
- 위치벡터
- 벡터의 성분

07. 벡터의 내적
- 벡터의 내적
- 내적의 성분과 연산
- 벡터의 수직과 평행

08. 직선과 원의 방정식
- 직선의 방정식
- 두 직선의 위치 관계
- 원의 방정식

05.
평면벡터

- 평면벡터
  - 벡터의 정의
  - 벡터의 덧셈, 뺄셈 및 실수배
  - 벡터의 평행
- 벡터의 성분
  - 위치벡터
  - 벡터의 성분
- 벡터의 내적
  - 벡터의 내적
  - 내적의 성분과 연산
  - 벡터의 수직과 평행
- 직선과 원의 방정식
  - 직선의 방정식
  - 두 직선의 위치 관계
  - 원의 방정식

“이 단원에서는 평면벡터를 정의하고 벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배에 대하여 공부한다. 또, 두 벡터의 평행조건, 벡터가 서로 같을 조건을 알아본다.”

01 벡터의 정의

▪ 평면벡터

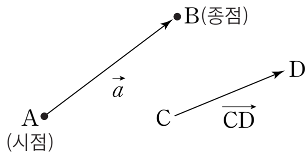
- 1. 벡터의 정의
  (화살표는 방향, 길이는 크기)
- 2. 벡터의 덧셈, 뺄셈 및 실수배
- 3. 벡터의 평행

“벡터의 뜻을 이해하고 벡터의 표현과 두 벡터가
서로 같을 조건을 정의하고
그와 관계된 문제를 풀어본다.”

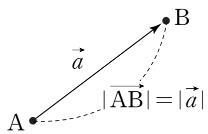
18.

벡터의 뜻

길이, 넓이, 속력과 같이 크기만을 갖는 양을 스칼라(scalar)라 하고, 평행이동, 속도와 같이 크기와 방향을 동시에 갖는 양을 벡터(vector)라고 한다.



벡터는 방향을 가지는 선분을 이용하여 나타낸다. 즉, 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 점 B로 향하는 방향과 크기가 주어진 선분 AB를 벡터 AB라 하고, 기호로 $\overrightarrow{AB}$와 같이 나타낸다. 이때 점 A를 $\overrightarrow{AB}$의 시점, 점 B를 $\overrightarrow{AB}$의 종점이라고 한다. 또, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$와 같이 한 문자를 써서 나타낼 수 있다.그리고 선분 AB의 길이를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기라 하고, $|\overrightarrow{AB}|$와 같이 절댓값 기호를 써서 나타낸다. 즉,



$$|\overrightarrow{AB}|=\overline{AB}$$

이다.

그리고 벡터는 평면 또는 공간 어디에서도 생각할 수 있고, 이를 구분할 때에는 평면에서의 벡터를 평면벡터, 공간에서의 벡터를 공간벡터라고 한다.

특히, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BB}}$, $\cdots$ 등과 같이 시점과 종점이 일치하는 벡터를 영벡터라 하고, 이것을 기호로 $\vec{0}$와 같이 나타낸다. 즉,

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0},\ \overrightarrow{\mathrm{BB}}=\vec{0}$$

이때, 영벡터는 크기가 0이고, 방향은 생각하지 않는다.
또, 크기가 1인 벡터는 단위벡터라 하고, $\vec{e}$로 나타낸다. $|\vec{e}|=1$이다.

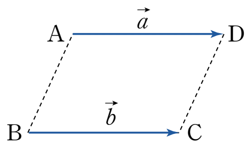
19.

두 벡터가 서로 같을 조건

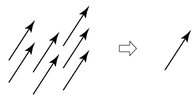
오른쪽 그림의 평행사변형에서 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$와 같이 그 크기와 방향이 서로 같을 때, 두 벡터는 서로 같다고 하고

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

와 같이 나타낸다.

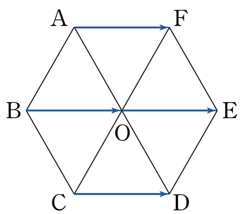


마찬가지로 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 같을 때 $\vec{a}=\vec{b}$로 나타낸다.
일반적으로 오른쪽 그림과 같이 임의의 벡터에 대하여 시점과 종점이 달라도 평행이동에 의하여 서로 포개어지는 벡터는 무수히 많이 존재한다. 이들 벡터를 모두 서로 같은 벡터라 한다.

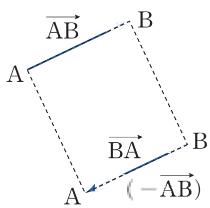


예 오른쪽 정육각형 ABCDEF에서 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라고 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

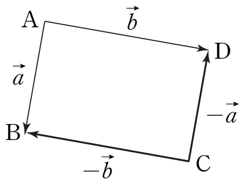


한편, 오른쪽 그림에서 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$는 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 크기는 같고 방향이 반대이다. 이때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$를 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 역벡터라 하고 $-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$로 나타낸다. 즉, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이다.



예 오른쪽 평행사변형 ABCD에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\vec{a},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=-\overrightarrow{\mathrm{AD}}=-\vec{b}$$



벡터의 뜻 기초

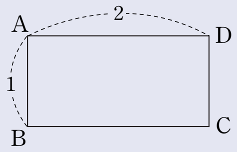
기본문제 34

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$인 직사각형 ABCD가 있다.

(1) $\overrightarrow{BA}$와 같은 벡터를 구하여라.

(2) $\overrightarrow{AD}$의 역벡터를 모두 구하여라.

(3) $|\overrightarrow{AC}|$를 구하여라.



풀이

(1) $\overrightarrow{\mathbf{CD}}$

(2) $\overrightarrow{\mathbf{DA}}$, $\overrightarrow{\mathbf{CB}}$

(3) $|\overrightarrow{AC}|=\overline{AC}=\sqrt{\mathbf{5}}$

답 (1) $\overrightarrow{CD}$

(2) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{CB}$

(3) $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5}$

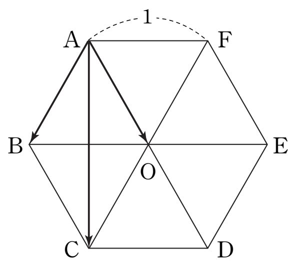
확인문제 34-1

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서

(1) $\overrightarrow{AB}$와 같은 벡터를 구하여라.

(2) $\overrightarrow{AO}$의 역벡터를 구하여라.

(3) $|\overrightarrow{AC}|$를 구하여라.



벡터의 **덧셈, 뺄셈** 및 **실수배** 02

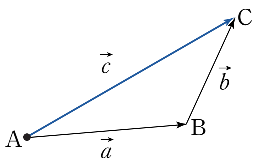
“ 벡터의 합에 대하여 이해하고
삼각형의 법칙과 평행사변형의 법칙에 대하여 알아본다.
또, 벡터의 덧셈에 대한 연산법칙 및 벡터의 뺄셈,
실수배에 대하여 정의한다. ”

▪ 평면벡터

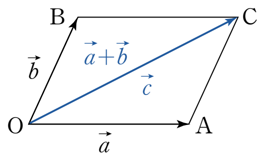
1. 벡터의 정의
2. 벡터의 덧셈, 뺄셈 및 실수배 (합은 대각선)
3. 벡터의 평행

벡터의 덧셈

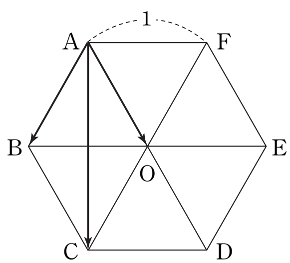
수, 식의 경우와 같이 벡터 사이에도 연산이 가능하다.
먼저, 벡터의 덧셈을 정의하자.
벡터의 덧셈을 정의할 때, 삼각형의 법칙을 사용할 수 있다.
오른쪽 삼각형에서 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$라 할 때,
$\overrightarrow{\mathrm{AC}}(=\vec{c})$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 합이라 하고
$\vec{a}+\vec{b}$로 나타낸다. 즉,
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



또한 다음과 같이 평행사변형의 법칙을 사용할 수 있다.
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$라 하고, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$를 두 변으로 하는 평행사변형 OACB를 만들 때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 합이라 한다. 즉,
$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$



예 오른쪽 정육각형 ABCDEF에서 세 대각선 $\overline{\mathrm{AD}}$, $\overline{\mathrm{BE}}$, $\overline{\mathrm{CF}}$의 교점을 O라고 하면
평행사변형 ABCO에서
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ ⬅ 평행사변형의 법칙
또, $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
⬅ 삼각형의 법칙



21. 벡터의 덧셈에 관한 연산법칙

수, 식의 경우에서처럼 벡터의 덧셈에서도 다음이 성립한다.

핵심

벡터의 덧셈에 대한 연산법칙

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (교환법칙)

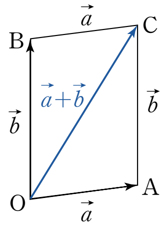
(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (결합법칙)

(3) 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

(4) 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여 $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

해설

위의 성질은 삼각형의 법칙에 의한 벡터의 합을 이용하여 증명된다.



(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$로 놓으면

△OAC에서

$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}$ …… ①

△OBC에서

$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OC}$ …… ②

①, ②에서 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(2) $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$로 놓으면

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ …… ③

$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$ …… ④

③, ④에서 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(3) $\overrightarrow{AB}=a$, $\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$으로 놓으면

$\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ …… ⑤

$\vec{0}+\vec{a}=\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ …… ⑥

⑤, ⑥에서 $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

(4) $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$으로 놓으면

$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ …… ⑦

$(-\vec{a})+\vec{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$ …… ⑧

⑦, ⑧에서 $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$

22. 벡터의 뺄셈

이번에는 벡터의 뺄셈을 정의하자.

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

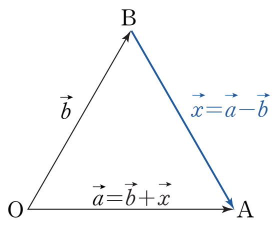
$\vec{b}+\vec{x}=\vec{a}$

를 만족하는 $\vec{x}$를 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차라 하고

$\vec{a}-\vec{b}(=\vec{x})$로 나타낸다.

오른쪽 그림에서 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$라 하면

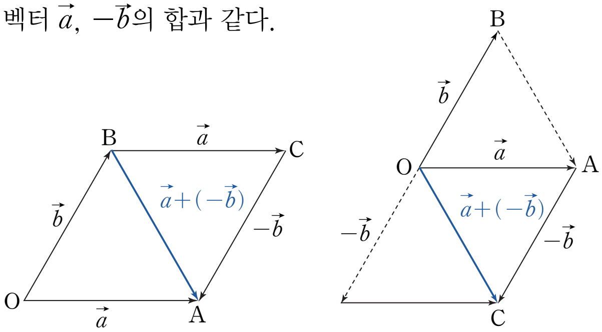
$\vec{a}-\vec{b}=\vec{x} \Longleftrightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$



벡터의 뺄셈을 계산할 때에는 덧셈과 같이 삼각형의 법칙 또는 평행사변형의 법칙을 이용한다. 즉,

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

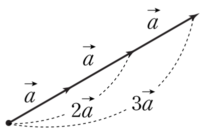
에서 두 벡터 $\vec{a}$, $-\vec{b}$의 합과 같다.



벡터와 실수의 곱

23.

오른쪽 그림에서 $\vec{a}+\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 2배인 벡터이다. 이것을 $\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$로 나타낸다.



일반적으로 임의의 실수 m에 대하여 m과 $\vec{a}$의 곱 $m\vec{a}$를 $\vec{a}$의 실수배라고 하고, 다음과 같이 정의한다.

(i) $m>0$일 때, $\vec{a}$와 방향이 같고, 그 크기가 $|\vec{a}|$의 m배인 벡터

(ii) $m<0$일 때, $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 그 크기가 $|\vec{a}|$의 $|m|$배인 벡터

(iii) $m=0$일 때, $m\vec{a}=\vec{0}$이다.

참고 | 실수배의 정의에서 $\vec{a}$의 역벡터 $-\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 $|-1|=1$ 즉, 크기가 같은 벡터이다.

벡터의 실수배의 연산법칙

24.

벡터의 실수배의 연산은 수와 식에서의 연산 방법과 같다. 즉, 다음 연산법칙을 만족한다.

(i) 결합법칙 $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

(ii) 분배법칙 $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$, $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

(iii) $0\vec{a}=\vec{0}$, $1\vec{a}=\vec{a}$, $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$, $m\vec{0}=\vec{0}$

예 $3(\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c})+2(-\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c})$를 간단히 하여 보자.

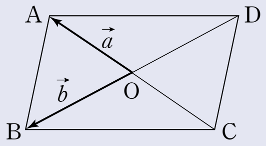
(주어진 식)$=3\vec{a}+6\vec{b}-9\vec{c}-2\vec{a}+4\vec{b}+8\vec{c}$

$=(3\vec{a}-2\vec{a})+(6\vec{b}+4\vec{b})+(-9\vec{c}+8\vec{c})=\vec{a}+10\vec{b}-\vec{c}$

기본문제 35

오른쪽 평행사변형 ABCD에서 대각선의 교점을 O라 하고, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) $\overrightarrow{AB}$　　(2) $\overrightarrow{BC}$　　(3) $\overrightarrow{CD}$



풀이

(1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{-\vec{a}+\vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=-\vec{b}-\vec{a}=\boldsymbol{-\vec{a}-\vec{b}}$

(3) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}}$

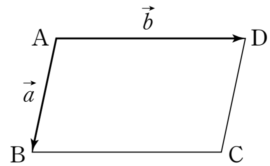
답 (1) $-\vec{a}+\vec{b}$ (2) $-\vec{a}-\vec{b}$ (3) $\vec{a}-\vec{b}$

참고 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 같으면 같은 벡터 즉, $\vec{a}$이고, 벡터 $\vec{a}$와 크기가 같지만 방향이 반대이면 역벡터, 즉 $-\vec{a}$이다.

확인문제 35-1

평행사변형 ABCD에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$일 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) $\overrightarrow{DB}$　　(2) $\overrightarrow{CA}$



기본문제 36

다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$

(2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CB}$

풀이 (1) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{AA}=\vec{\mathbf{0}}$ ⬅ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

(2) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CB}$

$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}$

$=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB})+\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{\mathbf{AC}}$

답 (1) $\vec{0}$ (2) $\overrightarrow{AC}$

참고 | 시점과 종점이 일치하면 영벡터이다.

확인문제 36-1

평면 위의 네 점 A, B, C, D에 대하여 다음 식을 간단히 하여라.

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$

기본문제 37

다음 등식을 만족하는 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

(1) $4(\vec{x}+\vec{a}-2\vec{b})=3(2\vec{a}+\vec{x})$

(2) $2(\vec{a}+\vec{x})-3(2\vec{b}-\vec{a})=\vec{x}$

풀이

(1) $4\vec{x}+4\vec{a}-8\vec{b}=6\vec{a}+3\vec{x}$

$4\vec{x}-3\vec{x}=6\vec{a}-4\vec{a}+8\vec{b}$

$\therefore \boldsymbol{\vec{x}=2\vec{a}+8\vec{b}}$

(2) $2\vec{a}+2\vec{x}-6\vec{b}+3\vec{a}=\vec{x}$

$2\vec{x}-\vec{x}=-5\vec{a}+6\vec{b}$

$\therefore \boldsymbol{\vec{x}=-5\vec{a}+6\vec{b}}$

답 (1) $\vec{x}=2\vec{a}+8\vec{b}$ (2) $\vec{x}=-5\vec{a}+6\vec{b}$

확인문제 37-1

$\vec{x}=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{y}=2\vec{a}+\vec{b}$일 때, $2(\vec{x}-\vec{y})+3\vec{y}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

확인문제 37-2

다음 등식을 만족하는 $\vec{x}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.

$$2(2\vec{a}-4\vec{b}+3\vec{x})-3(2\vec{b}-\vec{a})=5(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{x})$$

벡터의 평행 03

❝두 벡터의 평행의 뜻과 그 표현을 정의한다.
또, 평면 위의 세 점이 일직선 위에 있을 때의
벡터 사이의 관계를 이해한다.❞

▪ 평면벡터
- 1. 벡터의 정의
- 2. 벡터의 덧셈, 뺄셈 및 실수배
- 3. 벡터의 평행
  (방향이 같다.)

벡터의 평행

25.

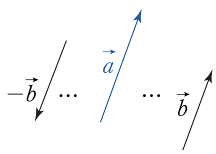
오른쪽과 같이 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향이 같거나 반대일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하며,

$\vec{a} /\!/ \vec{b}$

로 나타낸다. 두 벡터가 평행하다는 것은 한 벡터가 다른 벡터의 실수배라는 것과 같다. 즉,

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$이고 $k \neq 0$인 임의의 실수일 때

$\vec{a} /\!/ \vec{b} \iff \vec{a} = k\vec{b}$ (또는 $\vec{b} = k\vec{a}$)

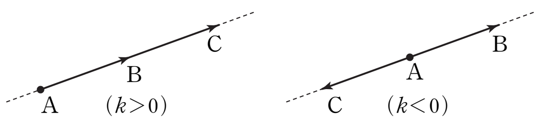


참고 | 서로 같은 벡터 또는 벡터와 그 역벡터는 서로 평행인 벡터이다.

일직선 위의 세 점의 조건

26.

서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ ($k \neq 0$인 실수)를 만족하는 실수 k가 존재하면 $k>0$, $k<0$일 때, 세 점 A, B, C의 관계는 그림과 같다.



즉, 세 점 A, B, C는 일직선 위의 점이다.
역으로 세 점 A, B, C가 일직선 위의 점이면 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$를 만족하는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.

벡터의 평행 중

기본문제 38

다음과 같이 주어진 세 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$에 대하여 $\vec{p}-\vec{q}$와 $\vec{q}+\vec{r}$가 평행할 때, 상수 k의 값을 구하여라.

$$\vec{p}=5\vec{a}+\vec{b},\ \vec{q}=k\vec{a}+4\vec{b},\ \vec{r}=-8\vec{a}+2\vec{b}$$

풀이

주어진 세 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$로부터

$\vec{p}-\vec{q}=(5-k)\vec{a}-3\vec{b}$

$\vec{q}+\vec{r}=(k-8)\vec{a}+6\vec{b}$

이때, $(\vec{p}-\vec{q})/\!/(\vec{q}+\vec{r})$이므로

$(\vec{p}-\vec{q})=m(\vec{q}+\vec{r})$ (m은 실수)

즉, $(5-k)\vec{a}-3\vec{b}=m\{(k-8)\vec{a}+6\vec{b}\}$

두 벡터가 같을 조건에서

$5-k=m(k-8)$, $-3=6m$

즉, $m=-\frac{1}{2}$이고, 이때, $5-k=-\frac{1}{2}(k-8)$, $\frac{1}{2}k=1$

$\therefore\ k=\mathbf{2}$

답 2

확인문제 38-1

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 $\vec{p}\neq\vec{0}$, $\vec{q}\neq\vec{0}$, $\vec{p}\not\parallel\vec{q}$인 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$에 대하여

$$\vec{a}=2\vec{p}+\vec{q},\ \ \vec{b}=-\vec{p}+3\vec{q},\ \ \vec{c}=-2\vec{p}-\vec{q}$$

일 때, $\vec{a}+\vec{b}$와 $\vec{b}+m\vec{c}$가 서로 평행하도록 실수 m의 값을 정하여라.

일직선 위의 세 점의 조건 중

기본문제 39

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=4\vec{a}+t\vec{b}$일 때, A, B, C가 일직선 위에 있도록 상수 t의 값을 구하여라. (단, $\vec{a}\neq\vec{b}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$)

풀이 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있을 조건은

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ ($k\neq0$, k는 실수)

그런데, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(4\vec{a}+t\vec{b})-\vec{a}=3\vec{a}+t\vec{b}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2\vec{a}-\vec{b})-\vec{a}=\vec{a}-\vec{b}$

이므로 $3\vec{a}+t\vec{b}=k(\vec{a}-\vec{b})$이고 $\vec{a}\neq\vec{b}$, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$

따라서 $3=k$, $t=-k$에서 $t=\mathbf{-3}$

답 -3

확인문제 39-1

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{a}+k\vec{b}$에 대하여 세 점 O, A, B가 일직선 위에 있을 때, 상수 k의 값을 구하여라.

확인문제 39-2

평행이 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$\overrightarrow{OP}=\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{OQ}=2\vec{a}-\vec{b}$, $\overrightarrow{OR}=m\vec{a}+5\vec{b}$ (단, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$)

이다. 세 점 P, Q, R가 일직선 위에 있을 때, 실수 m의 값을 구하여라.

벡터의 연산과 서로 같을 조건 중

기본문제 40

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행이 아닐 때, 다음이 성립함을 보여라.

(1) $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0} \iff m=n=0$ (m, n은 실수)

(2) $m\vec{a}+n\vec{b}=m'\vec{a}+n'\vec{b} \iff m=m'$, $n=n'$ (m, n, m', n'은 실수)

풀이

(1) $m\vec{a}+n\vec{b}=0$에서 $m\vec{a}=-n\vec{b}$

(i) $m\neq0$일 때, 양변을 m으로 나누면 $\vec{a}=-\dfrac{n}{m}\vec{b}$

즉, $\vec{a}=k\vec{b}$ $(k\neq0)$꼴이므로 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하게 되어 조건에 부적합하다.

(ii) $m=0$일 때, $m\vec{a}=0\cdot\vec{a}=\vec{0}$이므로 $\vec{0}=-n\vec{b}$

가정에서 $\vec{b}\neq\vec{0}$이므로 $n=0$

(i), (ii)에 의하여 $m=n=0$

(2) $(m-m')\vec{a}+(n-n')\vec{b}=\vec{0}$

(1)에 의하여 $m=m'$, $n=n'$

답 풀이 참조

확인문제 40-1

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 평행이 아닐 때, 다음을 만족시키는 상수 k, l의 값을 구하여라.

(1) $(2k-4)\vec{a}+(k+l-3)\vec{b}=\vec{0}$

(2) $3(2\vec{a}-k\vec{b})+2(-\vec{b}+\vec{a})=l\vec{a}+\vec{b}$

확인문제

해설

32-1. 정답 -6

$k^2+9\cdot4=45$에서 $k^2=9$

$\therefore k=3$ ($\because k>0$)

즉, 접점이 $(3,\ 2)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$3\cdot x+9\cdot2\cdot y=45$ $\quad\therefore x+6y-15=0$

이 식이 $x+ay+b=0$과 일치하므로

$a=6$, $b=-15$

따라서 구하는 값은

$k+a+b=3+6-15=-6$

33-1. 정답 $y=2x+2$ 또는 $y=-2x+2$

접점을 $(x_1,\ y_1)$이라 놓으면

$4{x_1}^2-3{y_1}^2=6$ ······㉠

또, $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

$4x_1x-3y_1y=6$ ······㉡

이 직선이 $(0,\ 2)$를 지나므로

$-6y_1=6$ $\quad\therefore y_1=-1$

즉, $4{x_1}^2-3=6$

$4{x_1}^2=9$, ${x_1}^2=\dfrac{9}{4}$

$x_1=\pm\dfrac{3}{2}$

즉, $\left(-\dfrac{3}{2},\ -1\right)$, $\left(\dfrac{3}{2},\ -1\right)$에서 ㉡에 대입하면

$-6x+3y=6$ 또는 $6x+3y=6$

$\therefore y=2x+2$ 또는 $y=-2x+2$

II. 평면벡터

05. 평면벡터

확인문제 [p. 67~80]

34-1. 정답 (1) $\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ED}$ (2) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}$ (3) $\sqrt{3}$

(1) $\overrightarrow{FO}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{ED}$

(2) $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{CB}$

(3) $\overline{BO}$, $\overline{AC}$의 교점을 M이라 하면

$\overline{AC}=2\overline{AM}$

이때, $\triangle ABO$에서 $\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore |\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$

35-1. 정답 (1) $\vec{a}-\vec{b}$ (2) $-\vec{a}-\vec{b}$

(1) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}$

$=-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$

$=\vec{a}-\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}$

$=-\overrightarrow{AD}+(-\overrightarrow{AB})$

$=-\vec{a}-\vec{b}$

36-1. 정답 (1) $\overrightarrow{AD}$ (2) $\vec{0}$

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$

$=\overrightarrow{AD}$

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$

$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$

$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA}$

$=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

37-1. 정답 $8\vec{a}-3\vec{b}$

$2(\vec{x}-\vec{y})+3\vec{y}=2\vec{x}-2\vec{y}+3\vec{y}$

$=2\vec{x}+\vec{y}$

$=2(3\vec{a}-2\vec{b})+2\vec{a}+\vec{b}$

$=6\vec{a}-4\vec{b}+2\vec{a}+\vec{b}$

$=8\vec{a}-3\vec{b}$

37-2. 정답 $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

주어진 식을 정리하면

$4\vec{a}-8\vec{b}+6\vec{x}-6\vec{b}+3\vec{a}=5\vec{a}-10\vec{b}+10\vec{x}$

$4\vec{x}=(7\vec{a}-14\vec{b})-(5\vec{a}-10\vec{b})$

$=2\vec{a}-4\vec{b}$

$\therefore x=\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$

38-1. 정답 -1

$\vec{a}+\vec{b}=t(\vec{b}+m\vec{c})$로 놓을 수 있으므로

$\vec{p}+4\vec{q}=t\{-\vec{p}+3\vec{q}+m(-2\vec{p}-\vec{q})\}$

$=t\{(-2m-1)\vec{p}+(3-m)\vec{q}\}$

$\therefore t(-2m-1)=1,\ t(3-m)=4$

즉, $\dfrac{1}{-2m-1}=\dfrac{4}{3-m}$에서

$3-m=-8m-4,\ 7m=-7$

$\therefore m=-1$

39-1. 정답 4

$\overrightarrow{OA}=t\overrightarrow{OB}$ (t는 실수)에서

$\vec{a}+2\vec{b}=t(2\vec{a}+k\vec{b})$

$\vec{a}+2\vec{b}=2t\vec{a}+kt\vec{b}$

$\therefore 1=2t,\ 2=kt$

$t=\dfrac{1}{2},\ k=4$

따라서, 구하는 값은 $k=4$

39-2. 정답 -1

세 점 P, Q, R가 일직선 위에 있으므로

$\overrightarrow{PR}=t\,\overrightarrow{PQ}$ (단, $t\neq 0$인 실수)

이때, $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\vec{a}-2\vec{b}$이고

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=(m-1)\vec{a}+4\vec{b}$이다.

즉, $(m-1)\vec{a}+4\vec{b}=t(\vec{a}-2\vec{b})$에서

$(m-1)\vec{a}+4\vec{b}=t\vec{a}-2t\vec{b}$

따라서 $m-1=t,\ 4=-2t$이므로

$t=-2,\ m=-1$

40-1. 정답 (1) $k=2,\ l=1$ (2) $k=-1,\ l=8$

(1) $2k-4=0,\ k+l-3=0$에서

$\therefore k=2,\ l=1$

(2) $(6\vec{a}-3k\vec{b})+(2\vec{a}-2\vec{b})=l\vec{a}+\vec{b}$

$8\vec{a}-(2+3k)\vec{b}=l\vec{a}+\vec{b}$

$\therefore l=8,\ 2+3k=-1$

$\therefore k=-1,\ l=8$