출제자의 생각을 읽다

HOWHY MATH

수학 기본서

기하

POOLeWAY

06.
벡터의 성분

"이 단원에서는 위치벡터를 정의하고 그를 바탕으로 평면벡터의 성분을 도입한다. 또, 성분을 이용한 벡터의 표현과 벡터 사이의 연산에 대하여 공부한다."

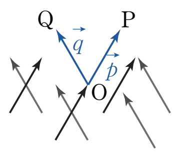
01 위치벡터

▪ 벡터의 성분
- 1. 위치벡터 (기준점이 시점)
- 2. 벡터의 성분

“위치벡터의 뜻을 이해하고, 임의의 같은 벡터는 한 위치벡터로 일대일 대응됨을 알아본다. 또, 내분점, 외분점, 중점의 위치벡터에 대하여 공부한다.”

27.

위치벡터

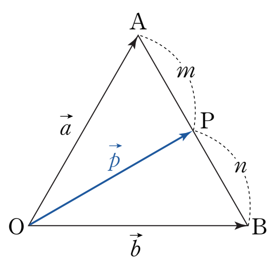


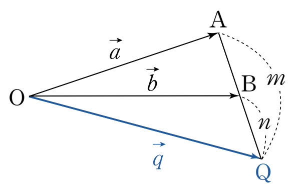
평면에서 한 점 O를 정하면 임의의 벡터 $\vec{p}$를 O를 시점으로 하는 벡터로 나타낼 수 있고, 이때, $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$인 점 P가 오직 하나로 정해진다.
또, 역으로 임의의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$인 $\vec{p}$가 단 하나로 결정된다. 즉, 평면 위의 한 점 O를 고정하면 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$와 평면 위의 한 점 P는 일대일 대응된다.
이때, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$를 평면 위의 점 O에 대한 점 P의 위치벡터라 한다.
일반적으로 좌표평면에서는 위치벡터의 기준점 O를 원점 O로 정한다.

28.

내분점, 외분점, 중점의 위치벡터

다음 그림과 같이 선분 AB를 $m:n(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점 Q라 하고 점 A, B, P, Q의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$라고 할 때, 다음이 성립한다.





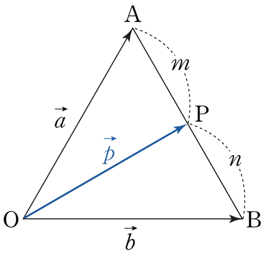
핵심 내분점과 외분점의 위치벡터

선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점을 Q라 하고, 점 A, B, P, Q의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$라 할 때,

(1) 내분점의 위치벡터 $\vec{p}=\dfrac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$

(2) 외분점의 위치벡터 $\vec{q}=\dfrac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$ (단, $m\neq n$)

해설 오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 $m:n(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 P라 하면 $\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{PB}$는 방향이 같고, $|\overrightarrow{AP}|:|\overrightarrow{PB}|=m:n$이므로



$$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$

이때, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$이므로

$$\begin{aligned}\vec{p}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}\\&=\vec{a}+\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})\\&=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}\end{aligned}$$

마찬가지로 살펴보면 선분 AB를 $m:n(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 위치벡터는

$$\vec{q}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$

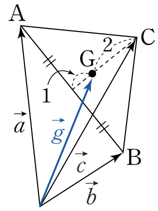
이다.

참고 (1) 선분 AB의 중점 M의 위치벡터 $\vec{m}$은

$$\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

(2) △ABC의 꼭짓점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 하면 무게중심 G의 위치벡터 $\vec{g}$는

$$\vec{g}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$



예 선분 AB를 $2:3$으로 내분하는 점을 P, 외분하는 점 Q라 하고 점 A, B, P, Q의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$라 할 때, $\vec{p}$, $\vec{q}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어 보자.

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2\cdot\overrightarrow{OB}+3\cdot\overrightarrow{OA}}{2+3}=\frac{2\overrightarrow{OB}}{5}+\frac{3\overrightarrow{OA}}{5}$$

$$\therefore\ \vec{p}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{a}$$

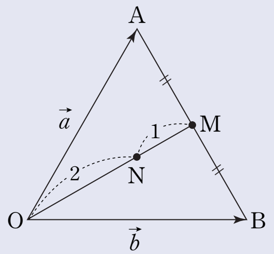
$$\overrightarrow{OQ}=\frac{2\cdot\overrightarrow{OB}-3\cdot\overrightarrow{OA}}{2-3}=3\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$$

$$\therefore\ \vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}$$

내분점과 위치벡터 중

기본문제 41

$\triangle$OAB에서 선분 AB의 중점을 M, 선분 OM을 $2:1$로 내분하는 점을 N이라 한다. $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$에 대하여 $\overrightarrow{AN}$을 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내어라.



풀이 주어진 조건에서

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

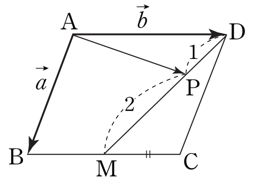
이때, $\overrightarrow{ON}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$이므로 $\overrightarrow{ON}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}$

$$\therefore \overrightarrow{AN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}$$
$$=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{3}-\vec{a}=\boldsymbol{-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}$$

답 $-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

확인문제 41-1

오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD에서 변 BC의 중점을 M, 변 MD를 $2:1$로 내분하는 점을 P라 하자. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$일 때, 벡터 $\overrightarrow{AP}$를 $\vec{a}$와 $\vec{b}$로 나타내어라.



기본문제 42

서로 다른 두 점 A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$에 대하여 다음 등식을 만족하는 점 P, Q의 위치를 말하여라.

(1) $3\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}$　　　(2) $3\overrightarrow{AQ}+2\overrightarrow{BQ}=\vec{0}$

풀이

(1) 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$라 하면

$\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$

$3\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}$에서 $3(\vec{p}-\vec{a})=2(\vec{b}-\vec{a})$

$$\therefore \vec{p}=\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{3}=\frac{2\vec{b}+\vec{a}}{2+1}$$

따라서, 점 P는 **선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점**이다.

(2) 점 Q의 위치벡터 $\vec{q}$라 하면

$\overrightarrow{AQ}=\vec{q}-\vec{a}$, $\overrightarrow{BQ}=\vec{q}-\vec{b}$

$3\overrightarrow{AQ}+2\overrightarrow{BQ}=\vec{0}$에서 $3(\vec{q}-\vec{a})+2(\vec{q}-\vec{b})=\vec{0}$

$$\therefore \vec{q}=\frac{2\vec{b}+3\vec{a}}{5}=\frac{2\vec{b}+3\vec{a}}{2+3}$$

따라서, 점 Q는 **선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점**이다.

답 (1) $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점
(2) $\overline{AB}$를 2 : 3으로 내분하는 점

확인문제 42-1

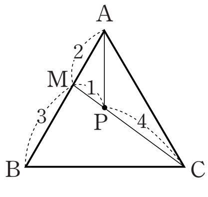
평면 위의 두 점 A$(\vec{a})$, B$(\vec{b})$에 대하여 $3\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PB}$를 만족하는 점 P의 위치를 구하여라.

확인문제 42-2

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$를 2 : 3으로 내분하는 점을 M, $\overline{CM}$을 4 : 1로 내분하는 점을 P라 할 때,

$$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}\ (m,\ n\text{은 실수})$$

이다. $25(m+n)$의 값을 구하여라.



기본문제 43

평면 위의 점 P와 $\triangle ABC$ 사이에

$$2\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$$

의 관계가 성립할 때 다음 물음에 답하여라.

(1) 점 P는 $\triangle ABC$의 어떤 위치에 있는가?

(2) $\triangle CAP$와 $\triangle CBP$의 넓이의 비를 구하여라.

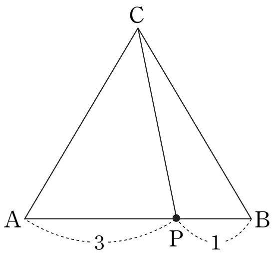
풀이

(1) $2\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$에서

$2\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}$

$\therefore \overrightarrow{PA}=-3\overrightarrow{PB}$

즉, 세 점 P, A, B는 일직선 위에 있고 점 P는 **선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점**이다.



(2) $\triangle CAP$와 $\triangle CBP$는 $\overline{AP}$, $\overline{PB}$를 각각의 밑변으로 할 때 높이가 서로 같다.

이때 (1)에서 $\overline{AP}:\overline{PB}=3:1$이므로

$\triangle CAP:\triangle CBP=\mathbf{3:1}$

답 (1) 선분 AB를 3 : 1로 내분하는 점 (2) 3 : 1

확인문제 43-1

넓이가 18인 $\triangle ABC$의 내부에

$$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$$

를 만족시키는 점 P가 있다. 이때, $\triangle ABP$의 넓이를 구하여라.

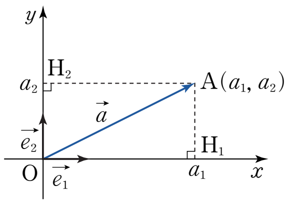
벡터의 성분 02

“좌표평면 위의 벡터의 성분을 정의한다.
또, 평면 위의 두 점 사이의 거리를 이용해
벡터의 크기를 정의하고, 벡터의 덧셈, 뺄셈,
실수배에 대한 성분을 살펴본다.”

29.

평면벡터의 성분

좌표평면 위에서 원점 O를 시점으로 하는 x축의 양의 방향의 단위벡터를 $\vec{e_1}$, y축의 양의 방향의 단위벡터를 $\vec{e_2}$로 나타내고, 점 A를 종점으로 하는 위치벡터를 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$라고 할 때, 그림과 같이 점 A에서 x축, y축에 내린 두 수선의 발을 H_1, H_2라고 하면 실수배의 정의에서



$$\overrightarrow{OH_1}=a_1\vec{e_1},\ \overrightarrow{OH_2}=a_2\vec{e_2}\ (\text{단, } a_1,\ a_2\text{는 실수})$$

이고 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH_1}+\overrightarrow{OH_2}$ 즉,

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

여기서, 원점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$의 종점 A는 좌표평면 위의 점 $A(a_1,\ a_2)$로 대응된다. 이때, a_1을 $\vec{a}$의 x성분, a_2를 $\vec{a}$의 y성분이라고 하며 a_1, a_2를 통틀어 $\vec{a}$의 성분이라고 한다.

특히, x축, y축 위의 단위벡터는 $\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$로 표현되고, 이 두 벡터를 평면의 기본벡터 또는 기본단위벡터라 한다.

참고
① $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$라는 것은 $\vec{a}$를 시점이 원점 O에 오도록 평행이동하였을 때의 종점의 좌표가 $A(a_1,\ a_2)$임을 의미한다.
② $\vec{a}=(a_1,\ a_2)=a_1(1,\ 0)+a_2(0,\ 1)=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$

30.

평면벡터의 연산과 성분

평면벡터의 성분을 통해 평면벡터의 크기를 표현할 수 있다. 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$라 하면
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$이고 벡터 $\vec{a}$의 크기는 선분 $\overline{\mathrm{OA}}$의 길이와 같다.
즉, $|\vec{a}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

예 $\vec{a}=(3,\ 4)$이면 $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$

마찬가지로 두 평면벡터가 같을 조건을 성분으로 표현할 수 있다. 두 평면벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 서로 같으면 대응하는 두 벡터의 성분이 서로 같다. 즉,

$$\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

예 $\vec{a}=(6,\ -1)$, $\vec{b}=(3x-y,\ 2x+y)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$일 때, x, y를 구하여 보자.
$\vec{a}=\vec{b}$에서 $6=3x-y,\ -1=2x+y$ $\quad\therefore x=1,\ y=-3$

또한 앞에서 배운 평면벡터의 연산을 성분으로 표현하면, 다음과 같다.

핵심 평면벡터의 연산

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때

(1) 합: $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

(2) 차: $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

(3) 실수배: $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수)

해설

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$
$=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})$
$=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

(3) $k\vec{a}=k(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})$
$=(ka_1)\vec{e_1}+(ka_2)\vec{e_2}=(ka_1,\ ka_2)$

예 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(3,\ -2)$일 때 $5\vec{a}-2(\vec{a}+3\vec{b})$를 성분으로 나타내어라.
$5\vec{a}-2(\vec{a}+3\vec{b})=3\vec{a}-6\vec{b}=3(2,\ 3)-6(3,\ -2)=(-12,\ 21)$

좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$는 다음과 같이 성분으로 표현할 수 있다.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$$

$$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|(b_1-a_1,\ b_2-a_2)|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

예 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(-1,\ 5)$에 대하여
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-2,\ 3)$
(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|(-2,\ 3)|=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$

기본문제 44

다음 물음에 답하여라.

(1) $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ -3)$, $\vec{c}=(5,\ 7)$일 때, $3\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}$를 구하여라.

(2) $\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(-3,\ 5)$, $\vec{c}=(4,\ 5)$에 대하여 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$일 때 $x+y$의 값을 구하여라.

풀이

(1) $3\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}=3(1,\ 2)-2(2,\ -3)-(5,\ 7)$
$=(3,\ 6)-(4,\ -6)-(5,\ 7)$
$=(3-4-5,\ 6+6-7)$
$=\mathbf{(-6,\ 5)}$

(2) $(4,\ 5)=x(2,\ -1)+y(-3,\ 5)$
$=(2x-3y,\ -x+5y)$

즉, $2x-3y=4$, $-x+5y=5$

두 식을 연립하여 풀면

$x=5$, $y=2$

$\therefore\ x+y=\mathbf{7}$

답 (1) $(-6,\ 5)$ (2) 7

확인문제 44-1

$\vec{a}=(1,\ -1)$, $\vec{b}=(2,\ 0)$, $\vec{c}=(-2,\ 1)$일 때 다음을 구하여라.

(1) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

(2) $2(\vec{a}-\vec{b})+3\vec{c}$

확인문제 44-2

$\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(x,\ -1)$, $\vec{c}=(-4,\ y)$에 대하여 $2\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}+\vec{c}$가 성립할 때, 두 실수 x, y의 곱을 구하여라.

기본문제 45

다음 두 식을 동시에 만족시키는 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 성분을 구하여라.

$$\vec{a}+2\vec{b}=(5,\ 4),\ 2\vec{a}-\vec{b}=(-5,\ 3)$$

풀이 $\vec{a}+2\vec{b}=(5,\ 4)$, $2(2\vec{a}-\vec{b})=2(-5,\ 3)$에서

$5\vec{a}=(5,\ 4)+2(-5,\ 3)=(-5,\ 10)$

$\therefore \vec{a}=\frac{1}{5}(-5,\ 10)=\mathbf{(-1,\ 2)}$

이때, $2\vec{a}-\vec{b}=(-5,\ 3)$에서

$2(-1,\ 2)-\vec{b}=(-5,\ 3)$

$\vec{b}=2(-1,\ 2)-(-5,\ 3)=\mathbf{(3,\ 1)}$

답 $\vec{a}=(-1,\ 2)$, $\vec{b}=(3,\ 1)$

확인문제 45-1

다음 두 식을 동시에 만족시키는 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 성분을 구하여라.

$$2\vec{a}-3\vec{b}=(5,\ 8),\ 3\vec{a}-2\vec{b}=(0,\ 7)$$

벡터의 크기와 성분 중

기본문제 46

t가 실수이고 $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$, $\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}$일 때, $|\vec{c}|$의 최솟값과 그 때의 t의 값을 구하여라.

풀이 $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$에서

$\vec{c}=\vec{a}+t\vec{b}=(3,\ 1)+t(1,\ 2)=(t+3,\ 2t+1)$

$\therefore\ |\vec{c}|^2=(t+3)^2+(2t+1)^2=5t^2+10t+10=5(t+1)^2+5$

이때, $|\vec{c}|^2$은 $\boldsymbol{t=-1}$일 때 최솟값 5를 갖는다.

따라서 $|\vec{c}|$의 최솟값은 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ ($t=-1$일 때)

답 $t=-1$일 때 최솟값 $\sqrt{5}$

확인문제 46-1 $\vec{a}=(1,\ 5)$, $\vec{b}=(3,\ 2)$일 때, $|\vec{a}+t\vec{b}|$는 $t=m$일 때, 최솟값 n을 가진다. m, n의 값을 구하여라.

확인문제 46-2 두 벡터 $\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 3)$에 대하여 벡터 $\vec{c}$는 $\vec{a}$에 평행하고, $\vec{c}-\vec{b}$의 크기가 1이라고 한다. 벡터 $\vec{c}$의 성분을 구하여라.

기본문제 47

벡터의 평행과 성분 중

$\vec{a}=(-2,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 1)$, $\vec{c}=(3,\ 2)$일 때, 벡터 $\vec{a}+t\vec{b}$가 벡터 $\vec{b}-\vec{c}$와 평행하도록 실수 t의 값을 정하여라.

풀이 $\vec{a}=(-2,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 1)$, $\vec{c}=(3,\ 2)$에서

$\vec{a}+t\vec{b}=(-2,\ 1)+t(1,\ 1)=(t-2,\ t+1)$

$\vec{b}-\vec{c}=(1,\ 1)-(3,\ 2)=(-2,\ -1)$

$\vec{a}+t\vec{b}$가 $\vec{b}-\vec{c}$와 평행하기 위해서는

$$\vec{a}+t\vec{b}=k(\vec{b}-\vec{c})$$

를 만족하는 0이 아닌 실수 k가 존재하여야 하므로

$(t-2,\ t+1)=k(-2,\ -1)=(-2k,\ -k)$

$$\therefore \begin{cases} t-2=-2k \\ t+1=-k \end{cases}$$

두 식에서 k를 소거하면

$t-2=-2(-t-1)$, $t-2=2t+2$ $\quad\therefore t=\mathbf{-4}$

답 -4

확인문제 47-1 $\vec{a}=(x,\ 2)$, $\vec{b}=(1-x,\ x)$가 서로 평행하도록 x의 값을 정하여라.

확인문제 47-2 $\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(0,\ 2)$, $\vec{c}=(1,\ 1)$일 때, $\vec{a}+t\vec{b}$가 $\vec{c}$와 평행이 되도록 t의 값을 정하여라.

확인문제

해설

06. 벡터의 성분 확인문제 [p. 81~92]

41-1. 정답 $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}$

$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AM}=a+\frac{1}{2}\vec{b}$이므로

$$\overrightarrow{AP}=\frac{2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AM}}{2+1}$$

$$=\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}$$

42-1. 정답 $\overline{AB}$의 중점

$3\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PB}$에서

$3\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}-2\overrightarrow{PB}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+2\overrightarrow{BP}=\vec{0}$

$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\vec{0}$

즉, $\overrightarrow{AP}=-\overrightarrow{BP}$

$\therefore \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PB}$

따라서, 점 P는 선분 AB의 중점이다.

42-2. 정답 13

점 P는 $\overline{CM}$을 $4:1$로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AC}+4\overrightarrow{AM}}{4+1}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AM}$$

$$=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}+\frac{4}{5}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}\right)$$

$$=\frac{8}{25}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

$\therefore m=\frac{8}{25},\ n=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 값은

$25(m+n)=25\left(\frac{8}{25}+\frac{1}{5}\right)=8+5=13$

43-1. 정답 9

$\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$에서

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}+2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+3(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})=\vec{0}$

$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}-6\overrightarrow{OP}=\vec{0}$

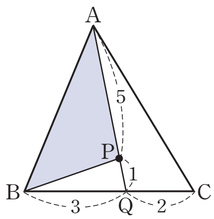
$$\therefore \overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{6}$$

$$=\frac{\overrightarrow{OA}+\frac{2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{2+3}\cdot 5}{6}$$

$$=\frac{1\cdot\overrightarrow{OA}+5\cdot\frac{2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}}{2+3}}{1+5}$$

즉, $\overline{BC}$를 $3:2$로 내분하는 점을 Q라 하면

점 P는 $\overline{AQ}$를 $5:1$로 내분하는 점이다.



$$\therefore \triangle ABP=\frac{5}{6}\triangle ABQ$$

$$=\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}\triangle ABC\right)$$

$$=\frac{1}{2}\triangle ABC=9$$

44-1. 정답 (1) $(-3,\ 0)$ (2) $(-8,\ 1)$

(1) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

$=(1,\ -1)-(2,\ 0)+(-2,\ 1)$

$=(1-2-2,\ -1-0+1)$

$=(-3,\ 0)$

(2) $2(\vec{a}-\vec{b})+3\vec{c}$

$=2\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$

$=2(1,\ -1)-2(2,\ 0)+3(-2,\ 1)$

$=(2,\ -2)+(-4,\ 0)+(-6,\ 3)$

$=(2-4-6,\ -2+0+3)$

$=(-8,\ 1)$

44-2. 정답 32

$2\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}+\vec{c}$에서

$\vec{c}=2\vec{a}-2\vec{b}$

이때,

$\vec{a}=(2,\ 3),\ \vec{b}=(x,\ -1),\ \vec{c}=(-4,\ y)$이므로

$(-4,\ y)=2(2,\ 3)-2(x,\ -1)$

$=(4,\ 6)-(2x,\ -2)$

$=(4-2x,\ 8)$

즉, 성분을 비교하면

$-4=4-2x,\ y=8$

$\therefore x=4,\ y=8$

$\therefore xy=4\cdot 8=32$

45-1. 정답 $\vec{a}=(-2,\ 1),\ \vec{b}=(-3,\ -2)$

$2\vec{a}-3\vec{b}=(5,\ 8)$ …… ㉠

$3\vec{a}-2\vec{b}=(0,\ 7)$ …… ㉡

㉠$\times 2-$㉡$\times 3$에서

$-5\vec{a}=2(5,\ 8)-3(0,\ 7)$

$=(10,\ -5)$

$\therefore \vec{a}=(-2,\ 1)$

㉠에서 $3\vec{b}=2(-2,\ 1)-(5,\ 8)$

$=(-9,\ -6)$

$\therefore \vec{b}=(-3,\ -2)$

46-1. 정답 $m=-1,\ n=\sqrt{13}$

$\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 5)+t(3,\ 2)$

$=(3t+1,\ 2t+5)$

즉, $|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(3t+1)^2+(2t+5)^2}$

$=\sqrt{13t^2+26t+26}$

$=\sqrt{13(t+1)^2+13}$

따라서, $t=-1$일 때, $|\vec{a}+t\vec{b}|$의 최솟값은 $\sqrt{13}$이다.

$\therefore m=-1,\ n=\sqrt{13}$

46-2. 정답 $\vec{c}=(2,\ 4)$ 또는 $\vec{c}=\left(\frac{6}{5},\ \frac{12}{5}\right)$

$\vec{c}\,/\!/\,\vec{a}$이므로 $\vec{c}=k\vec{a}=(k,\ 2k)$ ($k\neq0$인 실수)이고

$\vec{c}-\vec{b}=(k,\ 2k)-(2,\ 3)=(k-2,\ 2k-3)$의 크기가 1이므로

$|\vec{c}-\vec{b}|=\sqrt{(k-2)^2+(2k-3)^2}=1$

$(k-2)^2+(2k-3)^2=1$, $5k^2-16k+12=0$

$(k-2)(5k-6)=0$

$\therefore k=2$ 또는 $\frac{6}{5}$

따라서, $\vec{c}=(2,\ 4)$ 또는 $\left(\frac{6}{5},\ \frac{12}{5}\right)$

47-1. 정답 $x=-1\pm\sqrt{3}$

$\vec{a}=t\vec{b}$ (t는 실수)에서

$(x,\ 2)=t(1-x,\ x)$

$t=\frac{x}{1-x}=\frac{2}{x}$, $x^2=2-2x$

$x^2+2x-2=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{3}$

47-2. 정답 $t=\frac{5}{2}$

$\vec{a}+t\vec{b}=m\vec{c}$ (m은 실수)에서

$(3,\ -2)+t(0,\ 2)=m(1,\ 1)$

$(3,\ 2t-2)=(m,\ m)$

$\therefore m=3$, $t=\frac{5}{2}$

따라서, 구하는 값은 $t=\frac{5}{2}$

07. 벡터의 내적 확인문제 [p. 93~106]

48-1. 정답 $\frac{2}{3}$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{4}{2\cdot3}=\frac{2}{3}$$