출제자의 생각을 읽다

HOWHY MATH

수학 기본서

기하

POOLeWAY

07. 벡터의 내적

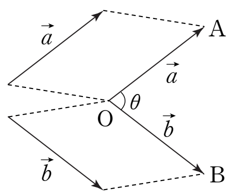
“이 단원에서는 벡터의 내적을 정의하고, 그 기하학적 의미에 대하여 이해한다. 또, 성분을 이용한 벡터의 내적을 구하고 내적의 연산법칙을 이해한다. 또, 두 벡터의 수직 평행과 내적의 관계를 공부한다.”

01 벡터의 내적

“벡터의 내적을 정의하고, 그 기하학적 의미에 대하여 살펴본다. 또, 두 평면벡터의 내적을 구해본다.”

31.

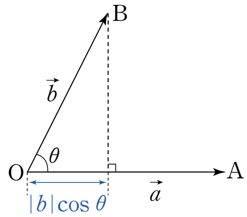
벡터의 내적



영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 각각 한 점 O를 시점으로 하는 위치벡터 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$로 나타낼 때,

$$\angle AOB=\theta(0\le\theta\le\pi)$$

를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기로 정의한다.



이때, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 내적이라 하고, 이를 기호로 $\vec{a}\cdot\vec{b}$로 나타낸다. 즉,

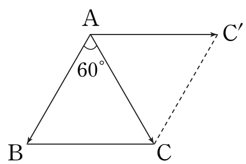
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

또, $\vec{a}=0$ 또는 $\vec{b}=0$일 때는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정의한다.

특히, $\vec{a}=\vec{b}$일 때는 $\theta=0$에서 $\cos\theta=1$이므로 다음이 성립한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos\theta=|\vec{a}|^2$$

$$\text{즉, } \vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$$



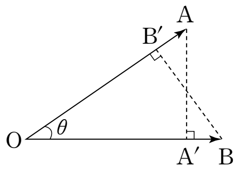
예 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$를 구하여 보자.

$\angle CAB=\frac{\pi}{3}$이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\frac{\pi}{3}$

$$=2\times2\times\frac{1}{2}=2$$

또, $\angle C'AB=\frac{2\pi}{3}$이므로 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos\frac{2\pi}{3}=2\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$

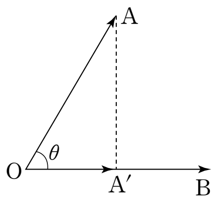
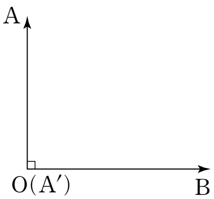
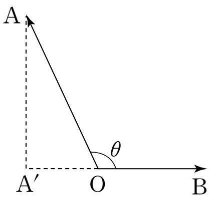
벡터의 내적의 기하학적 의미



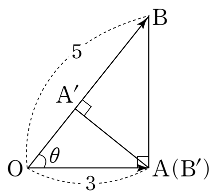
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 종점 A, B에서 각각 직선 OB, OA에 내린 수선의 발을 A′, B′이라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\,(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta)=\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB'}}\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\,(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\theta)=\overline{\mathrm{OA'}}\times\overline{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

즉, 두 벡터의 내적은 한쪽 방향으로의 두 벡터의 크기의 곱을 뜻한다.
이때, 벡터의 내적은 θ의 값에 따라 다음과 같이 양, 0, 음의 값을 가진다.

$0\le\theta<\frac{\pi}{2}$	$\theta=\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<\theta\le\pi$
$\cos\theta>0$	$\cos\theta=0$	$\cos\theta<0$
		
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $=\overline{\mathrm{OA'}}\times\overline{\mathrm{OB}}>0$	$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $=0\times\overline{\mathrm{OB}}=0$	$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $=-\overline{\mathrm{OA'}}\times\overline{\mathrm{OB}}<0$

예 오른쪽 그림의 직각삼각형 OAB에서 종점 A, B에서 각각 직선 OB, OA에 내린 수선의 발을 A′, B′이라 하면



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\,|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\,(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta)\\&=\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB'}}\\&=3\times\left(5\times\frac{3}{5}\right)=9\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\,(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\theta)\\&=\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OA'}}\\&=5\times\left(3\times\frac{3}{5}\right)=9\end{aligned}$$

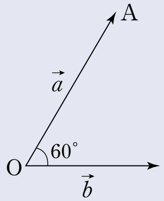
가 성립한다.

벡터의 내적 (1) **하**

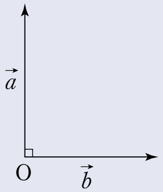
기본문제 48

다음 그림에서 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$일 때 $\vec{a} \cdot \vec{b}$를 구하여라.

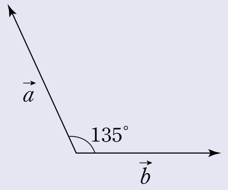
(1)



(2)



(3)



풀이 (1) $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각이 60°이다.

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 60° = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = \mathbf{3}$

(2) $a \cdot b = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 90° = \mathbf{0}$

(3) $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 각이 135°이다.

$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos 135° = 3 \times 2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \mathbf{-3\sqrt{2}}$

답 (1) 3 (2) 0 (3) $-3\sqrt{2}$

확인문제 48-1

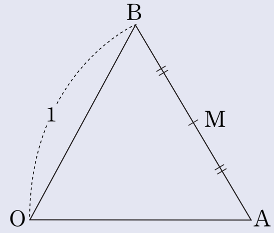
$|\overrightarrow{OA}|=2$, $|\overrightarrow{OB}|=3$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=4$를 만족시키는 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하여라.

기본문제 49

오른쪽 그림에서 △OAB는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이고 점 M은 선분 AB의 중점일 때, 다음을 구하여라.

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$　　(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}$

(3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$　　(4) $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AM}$



풀이

(1) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos 60^\circ=1\times1\times\frac{1}{2}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OA}|\cos 0^\circ=1\times1\times1=\mathbf{1}$

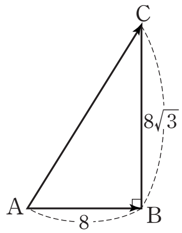
(3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{AB}|\cos 120^\circ=1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\mathbf{-\frac{1}{2}}$

(4) $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AM}=|\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{AM}|\cos 90^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\times0=\mathbf{0}$

답 (1) $\frac{1}{2}$　(2) 1　(3) $-\frac{1}{2}$　(4) 0

확인문제 49-1

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=8\sqrt{3}$인 직각삼각형 ABC에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$의 내적 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$의 값을 구하여라.



02 내적의 **성분**과 연산

“ 벡터의 내적을 성분을 이용하여 나타낸 표현을 이해하고, 벡터의 내적의 성분을 이용한 연산법칙에 대하여 살펴본다. ”

33.

내적의 연산법칙

평면 위의 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$와 실수 k에 대하여 다음이 성립한다.

핵심 벡터의 내적의 연산법칙

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (교환법칙)

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$,
$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (분배법칙)

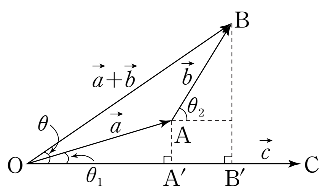
(3) $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (결합법칙)

해설

(1) 벡터의 내적의 정의로부터

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$=|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta=\vec{b}\cdot\vec{a}$$

(2) 오른쪽 그림에서



$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}+\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta$$
$$=|\vec{a}+\vec{b}|\cos\theta|\vec{c}|$$
$$=\overline{\mathrm{OB'}}\times\overline{\mathrm{OC}}$$
$$=(\overline{\mathrm{OA'}}+\overline{\mathrm{A'B'}})\times\overline{\mathrm{OC}}$$
$$=\overline{\mathrm{OA'}}\times\overline{\mathrm{OC}}+\overline{\mathrm{A'B'}}\times\overline{\mathrm{OC}}$$
$$=\overline{\mathrm{OA}}\cos\theta_1\times\overline{\mathrm{OC}}+\overline{\mathrm{AB}}\cos\theta_2\times\overline{\mathrm{OC}}$$
$$=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta_1+|\vec{b}||\vec{c}|\cos\theta_2=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

마찬가지로 살펴보면 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$가 성립함을 알 수 있다.

(3) 벡터의 내적의 정의로부터 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$이다.

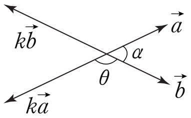
(ⅰ) $k=0$이면 자명하다.

(ii) $k>0$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기 θ는 두 벡터, $\vec{a}$, $k\vec{b}$ 또는 $k\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기와 같다.

즉, $k(\vec{a}\cdot\vec{b})=k|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|k\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}||k\vec{b}|\cos\theta$에서

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

(iii) $k<0$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하자. 두 벡터 $\vec{a}$, $k\vec{b}$ 또는 $k\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기는 $\alpha=\pi-\theta$와 같다. 즉,



$$
\begin{aligned}
k(\vec{a}\cdot\vec{b})&=k|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\
&=-|k\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\
&=|k\vec{a}||\vec{b}|\cos(\pi-\theta)\\
&=|ka||b|\cos\alpha\\
&=|a||kb|\cos\alpha
\end{aligned}
$$

$\therefore k(\vec{a}\cdot\vec{b})=(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$

이상으로부터 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

한편, 벡터의 내적의 연산법칙을 이용하면 다음과 같은 벡터의 내적의 성질이 성립함을 알 수 있다.

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}+k\vec{b}|^2&=(\vec{a}+k\vec{b})\cdot(\vec{a}+k\vec{b})=a\cdot\vec{a}+k\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot k\vec{b}+k\vec{b}\cdot k\vec{b}\\
&=|\vec{a}|^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}+|k\vec{b}|^2
\end{aligned}
$$

내적의 성분

34.

평면 위의 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여 다음이 성립한다.

핵심 성분으로 표시된 벡터의 내적

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1,\ a_2)\cdot(b_1,\ b_2)=a_1b_1+a_2b_2$

해설 x축, y축 위의 기본단위벡터를 각각 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$라 하면

$|\vec{e_1}|=1$, $|\vec{e_2}|=1$, $\vec{e_1}\perp\vec{e_2}$

이때, 벡터의 성분 표현과 벡터의 연산법칙으로부터

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b}&=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})\cdot(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})\\
&=a_1b_1(\vec{e_1}\cdot\vec{e_1})+(a_1b_2+b_1a_2)(\vec{e_1}\cdot\vec{e_2})+a_2b_2(\vec{e_2}\cdot\vec{e_2})\\
&=a_1b_1|\vec{e_1}|^2+(a_1b_2+b_1a_2)\times 0+a_2b_2|\vec{e_2}|^2\\
&=a_1b_1+a_2b_2
\end{aligned}
$$

한편, 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$에서

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

예 $\vec{a}=(1,\ -1)$, $\vec{b}=(2,\ 3)$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 구하여 보자.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+(-1)\times3=-1$

기본문제 50

벡터의 내적과 각의 크기 (1) 중

다음 두 벡터의 내적과 두 벡터가 이루는 각의 크기 θ를 구하여라.

$$\vec{a}=(-1,\ 2),\ \vec{b}=(1,\ 3)$$

풀이

$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+2^2}=\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

또, $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\times1+2\times3=\mathbf{5}$

이때, $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

그런데 $0\le\theta\le\pi$이므로 $\theta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

답 $\vec{a}\cdot\vec{b}=5,\ \theta=\dfrac{\pi}{4}$

확인문제 50-1 두 벡터 $\vec{a}=(1,\ -1)$, $\vec{b}=(2,\ 0)$의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$와 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각 θ의 크기를 구하여라.

확인문제 50-2 두 벡터 $\vec{a}=(1,\ 0)$, $\vec{b}=(k,\ 2)$가 이루는 각의 크기가 45°일 때, 실수 k의 값을 구하여라.

벡터의 내적과 연산 **중**

기본문제 51

다음을 구하여라.

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$, $|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=17$일 때, $|\vec{a}+\vec{b}|$

(2) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=10$이고, $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°일 때, $|2\vec{a}-\vec{b}|$

풀이

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=|\vec{a}|^2+2a\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$=17+2\times4=25$

$\therefore\ |\vec{a}+\vec{b}|=\mathbf{5}$

(2) $|2\vec{a}-\vec{b}|^2=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|b|^2$

$=4\cdot4^2-4|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ+10^2$

$=64-4\times4\times10\times\dfrac{1}{2}+100=84$

$\therefore\ |2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{84}=\mathbf{2\sqrt{21}}$

답 (1) 5 (2) $2\sqrt{21}$

확인문제 51-1 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$이고, $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 45°일 때, $|\vec{a}+2\vec{b}|$의 값을 구하여라.

확인문제 51-2 $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=2$이고, $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 30°일 때, $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$의 값을 구하여라.

벡터의 내적과 각의 크기 (2) 중

기본문제 52

$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=3$이고, $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$일 때, $\vec{a},\ \vec{b}$가 이루는 각 θ의 크기를 구하여라.

풀이 $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\sqrt{7})^2=7,\ |\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7$

$2\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-7=1+9-7=3$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}$

즉, $\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\frac{3}{2}}{1\times3}=\frac{1}{2}$

이때, $0^\circ\le\theta\le180^\circ$이므로 $\theta=\mathbf{60^\circ}$

답 60°

확인문제 52-1 $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=\sqrt{2}$이고, $|2\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{10}$일 때 $\vec{a},\ \vec{b}$가 이루는 각 θ의 크기를 구하여라.

확인문제 52-2 두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°이다. $\vec{b}$의 크기는 1이고 $\vec{a}-3\vec{b}$의 크기가 $\sqrt{13}$일 때, $\vec{a}$의 크기를 구하여라.

기본문제 53

$\triangle$OAB에서 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라 한다.

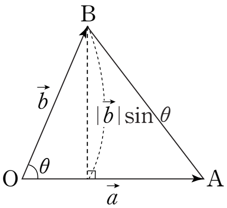
(1) $\triangle$OAB의 넓이를 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 써서 나타내어라.

(2) $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$라 할 때, $\triangle$OAB의 넓이를 a_1, a_2, b_1, b_2를 써서 나타내어라.

풀이

(1) $\angle$AOB$=\theta$라 하면

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$$



한편 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$이므로

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{1-\frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{(|\vec{a}|\,|\vec{b}|)^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{(|\vec{a}|\,|\vec{b}|)^2}}$$

$$\therefore\ \triangle OAB=\frac{1}{2}|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\frac{1}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}$$

(2) $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에서

$$|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2,\ |\vec{b}|^2=b_1^2+b_2^2,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

이것을 (1)의 결과에 대입하여 정리하면

$$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|}$$

답 (1) $\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ (2) $\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$

확인문제 53-1

위의 (2)를 이용하여 세 점 A$(0,\ 1)$, B$(2,\ 4)$, C$(4,\ -1)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle$ABC의 넓이를 구하여라.

03 벡터의 **수직**과 **평행**

▪ 벡터의 내적

"벡터의 수직, 평행 조건에 따른
벡터의 내적과 성분의 관계를 이해하고,
내적을 이용하여 수직, 평행일 때의 벡터를 살펴본다."

35.

두 벡터의 수직 조건

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$일 때

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

즉, $\vec{a} = (a_1, \ a_2)$, $\vec{b} = (b_1, \ b_2)$일 때

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

예 $\vec{a} = (1, \ -1)$, $\vec{b} = (-2, \ x)$가 서로 수직일 때, x의 값을 구하여 보자.

$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$(1, \ -1) \cdot (-2, \ x) = 0$, $-2 - x = 0$

$\therefore \ x = -2$

36.

두 벡터의 평행 조건

$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$일 때 $\vec{a} /\!/ \vec{b}$이면

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}||\vec{b}|$$

예 $\vec{a} = (1, \ -1)$, $\vec{b} = (3, \ x)$가 서로 평행일 때, x의 값을 구하여 보자.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}||\vec{b}|$에서

$(1, \ -1) \cdot (3, \ x) = \pm \sqrt{1+1}\sqrt{3^2 + x^2}$

$3 - x = \pm \sqrt{2}\sqrt{9 + x^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $(3-x)^2 = 2(9 + x^2)$

$x^2 + 6x + 9 = 0$, $(x+3)^2 = 0$

$\therefore \ x = -3$

기본문제 54

두 벡터 $\vec{a}=(1,\ x+1)$, $\vec{b}=(-2,\ x)$가 서로 수직이 되도록 하는 실수 x의 값을 구하여라.

풀이

$\vec{a}$와 $\vec{b}$가 서로 수직이므로 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$(1,\ x+1)\cdot(-2,\ x)=0$

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore$ **$x=-2$ 또는 $x=1$**

답 $x=-2$ 또는 $x=1$

확인문제 54-1

$\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(3r,\ 6)$, $\vec{c}=(t-1,\ 2)$에서 $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 평행하고, $\vec{a}$와 $\vec{c}$가 수직일 때, $r+t$의 값을 구하여라.

벡터의 수직과 내적 (2) 중

기본문제 55

다음 물음에 답하여라.

(1) $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$에 대하여 $\vec{a}-x\vec{b}$와 $2\vec{a}+\vec{b}$가 서로 수직일 때, 실수 x의 값을 구하여라.

(2) $2|\vec{a}|=|\vec{b}|\neq 0$이고, $\vec{a}+\vec{b}$와 $2\vec{b}-5\vec{a}$가 수직일 때, $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각 θ의 크기를 구하여라.

풀이

(1) $\vec{a}-x\vec{b}$와 $2\vec{a}+\vec{b}$가 수직이므로

$(\vec{a}-x\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=0$에서 $2|\vec{a}|^2+(1-2x)\vec{a}\cdot\vec{b}-x|\vec{b}|^2=0$

그런데, $|\vec{a}|^2=3^2+1^2=10$, $|\vec{b}|^2=1^2+2^2=5$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times1+1\times2=5$

따라서, $2\times10+(1-2x)\times5-x\times5=0$에서 $x=\mathbf{\frac{5}{3}}$

(2) $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$에서 $|\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2$

$(\vec{a}+\vec{b})\perp(2\vec{b}-5\vec{a})$이므로 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{b}-5\vec{a})=0$에서

$2|\vec{b}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{a}|^2=0$

즉, $2(4|\vec{a}|^2)-3\vec{a}\cdot\vec{b}-5|\vec{a}|^2=0$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2$

$\therefore \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|\times2|\vec{a}|}=\frac{1}{2}$

그런데 $0^\circ\leq\theta\leq180^\circ$이므로 $\theta=\mathbf{60^\circ}$

답 (1) $\frac{5}{3}$ (2) 60°

확인문제 55-1

$\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(x,\ 2)$에 대하여 $(2\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-2\vec{b})$일 때, x의 값을 구하여라.

확인문제 55-2

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=\sqrt{5}$이고 $\vec{a}+t\vec{b}$, $\vec{a}-t\vec{b}$가 서로 수직일 때, 양수 t의 값을 구하여라.

확인문제

해설

46-2. 정답 $\vec{c}=(2,\ 4)$ 또는 $\vec{c}=\left(\frac{6}{5},\ \frac{12}{5}\right)$

$\vec{c}\,/\!/\,\vec{a}$이므로 $\vec{c}=k\vec{a}=(k,\ 2k)$ ($k\neq0$인 실수)이고

$\vec{c}-\vec{b}=(k,\ 2k)-(2,\ 3)=(k-2,\ 2k-3)$의 크기가 1이므로

$|\vec{c}-\vec{b}|=\sqrt{(k-2)^2+(2k-3)^2}=1$

$(k-2)^2+(2k-3)^2=1,\ 5k^2-16k+12=0$

$(k-2)(5k-6)=0$

$\therefore\ k=2$ 또는 $\frac{6}{5}$

따라서, $\vec{c}=(2,\ 4)$ 또는 $\left(\frac{6}{5},\ \frac{12}{5}\right)$

47-1. 정답 $x=-1\pm\sqrt{3}$

$\vec{a}=t\vec{b}$ (t는 실수)에서

$(x,\ 2)=t(1-x,\ x)$

$t=\frac{x}{1-x}=\frac{2}{x},\ x^2=2-2x$

$x^2+2x-2=0$

$\therefore\ x=-1\pm\sqrt{3}$

47-2. 정답 $t=\frac{5}{2}$

$\vec{a}+t\vec{b}=m\vec{c}$ (m은 실수)에서

$(3,\ -2)+t(0,\ 2)=m(1,\ 1)$

$(3,\ 2t-2)=(m,\ m)$

$\therefore\ m=3,\ t=\frac{5}{2}$

따라서, 구하는 값은 $t=\frac{5}{2}$

07. 벡터의 내적 확인문제 [p. 93~106]

48-1. 정답 $\frac{2}{3}$

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}=\frac{4}{2\cdot3}=\frac{2}{3}$$

49-1. 정답 64

$\triangle$ABC는 $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=8\sqrt{3}$인 직각삼각형이므로

$\overline{AC}=\sqrt{8^2+(8\sqrt{3})^2}=16$

$\angle CAB=60^\circ$

$$\therefore\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ$$
$$=8\times16\times\frac{1}{2}$$
$$=64$$

50-1. 정답 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$, $\theta=\frac{\pi}{4}$

$\vec{a}=(1,\ -1)$, $\vec{b}=(2,\ 0)$에서

$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+(-1)\times0=2$

또, $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{4}$

50-2. 정답 ±2

$\vec{a}=(1,\ 0)$, $\vec{b}=(k,\ 2)$가 이루는 각의 크기가 45°이므로

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{k}{1\times\sqrt{k^2+4}}$$

$\sqrt{2}k=\sqrt{k^2+4}$

$2k^2=k^2+4$, $k^2=4$

$\therefore\ k=\pm2$

51-1. 정답 $5\sqrt{2}$

$$|\vec{a}+2\vec{b}|^2=(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$$
$$=|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$$
$$=|\vec{a}|^2+4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{4}+4|\vec{b}|^2$$
$$=(\sqrt{2})^2+4\times\sqrt{2}\times3\times\frac{1}{\sqrt{2}}+4\times3^2$$
$$=2+12+36$$
$$=50$$

$\therefore\ |\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

51-2. 정답 -1

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$

$=2|\vec{a}|^2-\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2$

$=2|\vec{a}|^2-|\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{\pi}{6}-|\vec{b}|^2$

$=2(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-2^2$

$=6-3-4=-1$

52-1. 정답 $\frac{\pi}{4}$

$|2\vec{a}+\vec{b}|^2=(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

즉, $10=4\times1^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{2})^2$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=1$

즉, $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=1$에서

$1\times\sqrt{2}\times\cos\theta=1$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$

52-2. 정답 4

$|\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{13}$의 양변을 제곱하면

$|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=13$

$|\vec{a}|^2-6|\vec{a}||\vec{b}|\cos60^\circ+9|\vec{b}|^2=13$

$|\vec{a}|^2-3|\vec{a}|-4=0$ ($\because |\vec{b}|=1$)

$(|\vec{a}|+1)(|\vec{a}|-4)=0$

$\therefore |\vec{a}|=4$ ($\because |\vec{a}|>0$)

53-1. 정답 8

$\triangle ABC$를 y축으로 -1만큼 평행이동시킨 삼각형을 $A'B'C'$이라 하면

$A'(0, 0), B'(2, 3), C'(4, -2)$

즉, $\triangle ABC=\triangle A'B'C'$

$=\frac{1}{2}|2\times(-2)-3\times4|=8$

54-1. 정답 -2

$\vec{a}=k\vec{b}$ (k는 실수)에서

$(2,\ -1)=k(3r,\ 6)$

$3kr=2,\ 6k=-1$

$\therefore k=-\frac{1}{6},\ r=-4$

또, $\vec{a}\perp\vec{c}$에서

$\vec{a}\cdot\vec{c}=(2,\ -1)\cdot(t-1,\ 2)=0$

$2(t-1)-2=0$

$t-1=1 \qquad \therefore t=2$

따라서, 구하는 값은

$r+t=(-4)+2=-2$

55-1. 정답 $x=0$ 또는 $x=-3$

$2\vec{a}+\vec{b}=2(2,\ 3)+(x,\ 2)$

$\qquad\quad =(x+4,\ 8)$

$\vec{a}-2\vec{b}=(2,\ 3)-2(x,\ 2)$

$\qquad\quad =(2-2x,\ -1)$

$(2\vec{a}+\vec{b})\perp(\vec{a}-2\vec{b})$에서

$(x+4,\ 8)\cdot(2-2x,\ -1)=0$

$(x+4)(2-2x)-8=0$

$-2x^2-6x=0$

$x^2+3x=0$

$x(x+3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-3$

55-2. 정답 $\sqrt{5}$

$\vec{a}+t\vec{b}$와 $\vec{a}-t\vec{b}$가 수직이므로

$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-t\vec{b})=0$

$|\vec{a}|^2-t^2|\vec{b}|^2=0,\ 5^2-t^2(\sqrt{5})^2=0$

$\therefore t^2=5$

이때, $t>0$이므로 구하는 t의 값은 $\sqrt{5}$이다.