Laboratorium 2

Szymon Twardosz Dominik Jeżów

12 listopada 2023

1 Wprowadzenie

Celem ćwiczenia było zaimplementowanie trzech algorytmów operacji na macierzach. W szczególności były to:

- rekurencyjne odwracanie macierzy;
- rekurencyjna LU faktoryzacja;
- rekurencyjne obliczanie wyznacznika;

Ćwiczenie wykonaliśmy w języku Julia przy użyciu bibliotek: LinearAlgebra, DataFrames, BenchmarkTools, GFlops, Statistics, Plots oraz środowiska Jupyter Notebook

2 Rekurencyjne odwracanie macierzy

2.1 Wzory i pseudokod

Algorytm przyjmuję na wejściu macierz. Jego zadaniem jest znaleźć macierz odwrotną do zadanej. Robi to metodą rekurencyjną, zgodnie z wzorami:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1}\left(I + A_{12}S_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}\right) & -A_{11}^{-1}A_{12}S_{22}^{-1} \\ -S_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & S_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Pseudokod:

```
function(m: matrix) -> matrix:
 if dim(matrix) == 1x1:
 return 1 / matrix[1, 1]
 else:
 use_formulas_above();
```

2.2 Złożoność obliczeniowa

Nasza implementacja odwracania macierzy, do mnożenia macierzy używa algorytmu Strassena, którego złożoność wynosi: $O(n^{\log_2(7)})$. Złożoność obliczeniowa algorytmu to rozwiązanie równania:

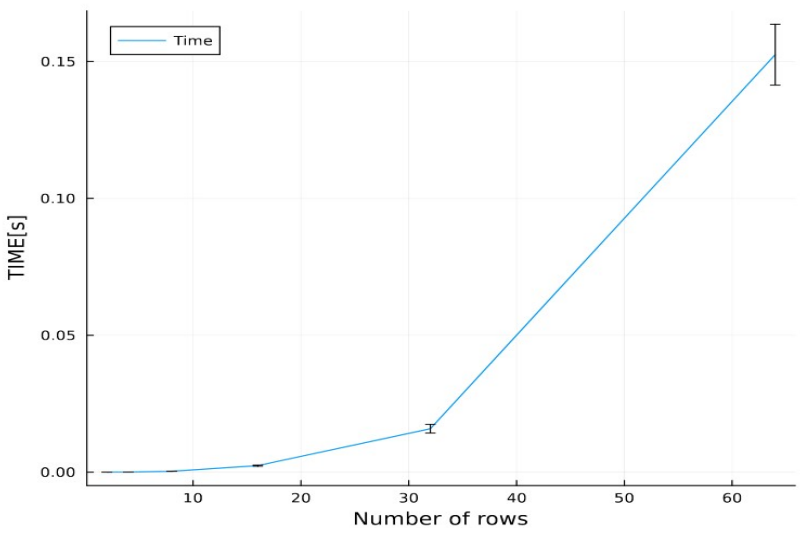
$$O(n) = 2 \cdot O\left(\frac{n}{2}\right) + 10 \cdot O(n^{\log_2(7)}) + d$$

,gdzie n to liczba elementów w jednym wierszu macierzy.
Na podstawie Master Theorem złożoność algorytmu wynosi: $O(n^{\log_2(7)})$

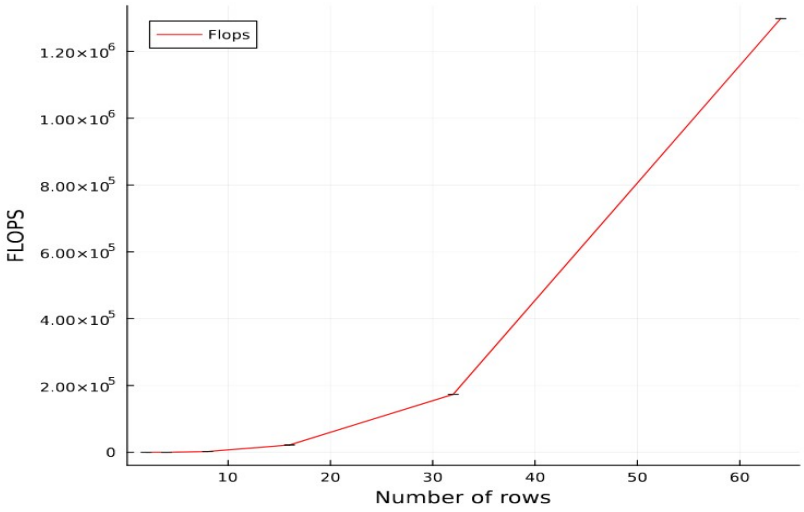
2.3 Kod programu i wykresy

```
function matrix_inverse(A)
    """
    :return matrix B, such that A * B = I
    """

    n = size(A, 1)
    m = size(A, 2)

    if n != m
        throw(NonSquareMatrixError("Matrix is not the square"))
    end

    if n == 1
        return [1 / A[1, 1]]
    end


    m = div(n, 2)
    A11, A12, A21, A22 = divide_matrix(A, n)

    A11_inversed = matrix_inverse(A11)
    S22 = A22 - strassen(strassen(A21, A11_inversed), A12)
    S22_inversed = matrix_inverse(S22)



    B = zeros(n, n)
    eye = Matrix{Float64}(I, div(n, 2) , div(n, 2))

    B[1:m, 1:m] = strassen(A11_inversed, eye + strassen(strassen(strassen(A12, S22_inversed), A21), A11_inversed))
    B[1:m, m+1:n] = strassen(strassen(-A11_inversed, A12), S22_inversed)
    B[m+1:n, 1:m] = strassen(strassen(-S22_inversed, A21), A11_inversed)
    B[m+1:n, m+1:n] = S22_inversed

    return B

end
```

Wykres 1: Kod algorytmu odwracania macierzy



Wykres 2: Wykres zależności czasu od liczby wierszy odwracanej macierzy



Wykres 3: Wykres zależności operacji zmiennoprzecnikowych od liczby wierszy odwracanej macierzy

2.4 Porównanie wyników z Matlabem

Kod testowy w języku Matlab

```
A = [0.5488, 0.5929;
0.7094, 0.0734];
A_inv = inv(A);
fprintf("A");
disp(A_inv);
fprintf("A2");
A2 = [0.2722, 0.1980, 0.1500, 0.4826;
0.6070, 0.3818, 0.2489, 0.6313;
0.1088, 0.9294, 0.1723, 0.5508;
0.3195, 0.5077, 0.3096, 0.9883];
disp(inv(A2));
```

```
A_inv =
   -0.1930    1.5589
    1.8653   -1.4430

A2_inv =
    8.3030    0.1949    0.6238   -4.5266
    0.8643    0.0277    1.6112   -1.3377
  -66.3938   17.9890   -6.7266   24.6790
   17.6706   -5.7126    1.0779   -4.5686
```

Wykres 4: Wyniki w Matlabie

```
2×2 Matrix{Float64}:
 -0.192995   1.55894
  1.86526   -1.44299

4×4 Matrix{Float64}:
   8.30305    0.194897   0.623801  -4.52664
   0.864319   0.027741   1.61119   -1.33773
 -66.3938    17.989     -6.72664   24.679
  17.6706    -5.71258    1.07787   -4.56863
```

Wykres 5: Wyniki naszego algorytmu

3 Rekurencyjna LU faktoryzacja

3.1 Wzory i pseudokod

Algorytm przyjmuję na wejściu macierz. Jego zadaniem jest znaleźć macierze L i U, takie że L jest trójkątna dolna, U jest trójkątna górna oraz L* U = A. Robi to metodą rekurencyjną, zgodnie z wzorami:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$
$$L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ A_{21} * U_{11}^{-1} & S_L \end{bmatrix}$$
$$U = \begin{bmatrix} U_{11} & L_{11}^{-1} * A_{12} \\ 0 & S_U \end{bmatrix}$$

gdzie:

- S - dopełnienie Schura równe $(A_{22} - U_{11}^{-1} * S_L * L_{11}^{-1} * A_{12})$
- S_L, S_U - są to macierze obliczone przez rekurencyjne odwołanie do faktoryzacji macierzy S
- L_11, U_11 - powstały przez LU faktoryzacje A_11

Pseudokod:

```
if size(A) == 2x2
 L = [A[1,1], 0 ; A[2,1], A[2,2] - A[2,1] * A[1,2] / A[1,1]]1
 U = [1, A[1,2]/A[1,1]; 0, 1]
 else:
 działaj według powyższych wzorów
```

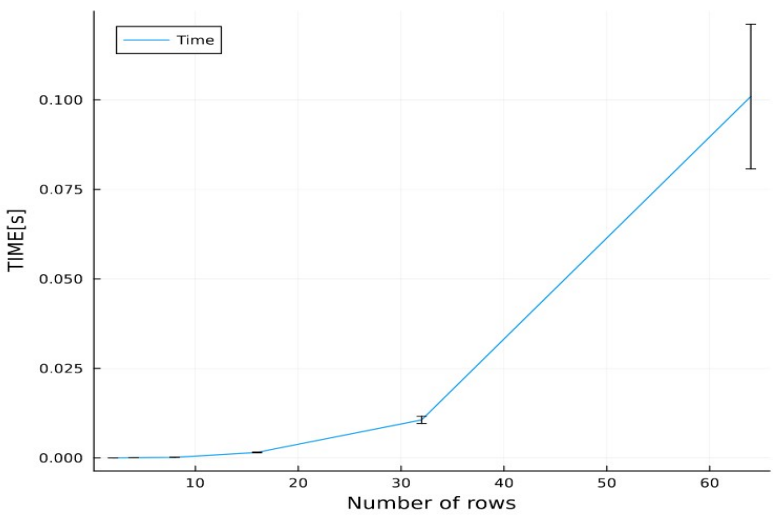
3.2 Złożoność obliczeniowa

Podobnie jak w przypadku odwracania macierzy mamy do czynienia z złorzonością obliczeniową $O(n^{\log_2(7)})$

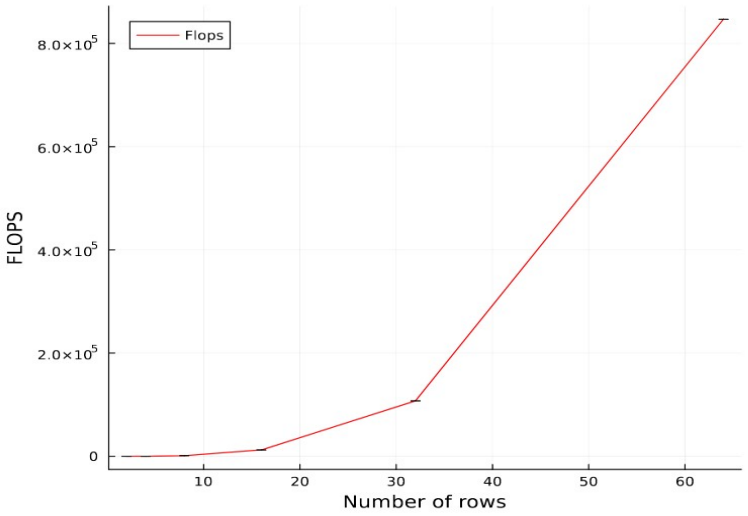
3.3 Kod programu i wykresy

```
function _matrix_LU_factor(A, n)
    if n == 2
        a22 = A[2,2] - A[2,1] * A[1,2] / A[1,1]
        return LowerTriangular([A[1,1] 0; A[2,1] a22]),  UnitUpperTriangular([1 A[1,2]/A[1,1]; 0 1])
    end
    """
    Helping function to matrix_LU_factor() func
    """
    m = div(n, 2)

    A11, A12, A21, A22 = divide_matrix(A, n)
    L11, U11 = _matrix_LU_factor(A11, m)

    U12 = strassen(matrix_inverse(L11),A12)
    L21 = strassen(A21,matrix_inverse(U11))

    S = A22 - strassen(L21, U12)

    L22, U22 = _matrix_LU_factor(S, m)

    L = vcat(hcat(L11, zeros(m,m)), hcat(L21, L22))
    U = vcat(hcat(U11, U12), hcat(zeros(m,m), U22))
    return LowerTriangular(L), UnitUpperTriangular(U)
end


function matrix_LU_factor(A)
    """
    :return matrixes L, U : L * U = A and L is upper triangular matrix and U is lower triangular matrix
    A must be in shape (2^i, 2^i) where i is Natural
    """

    n = size(A, 1)
    m = size(A, 2)

    if n != m
        throw(NonSquareMatrixError("Matrix is not the square"))
    end
    log2_n = log2(n)
    if !(trunc(Int, log2_n) - log2_n ≈ 0)
        throw(ArgumentError("A, not in (2^i, 2^i) shape, shape= $(size(A))"))
    end

    return _matrix_LU_factor(A, n)
end
```

Wykres 6: Kod algorytmu faktoryzacji LU



Wykres 7: Wykres zależności czasu od liczby wierszy odwracanej macierzy



Wykres 8: Wykres zależności operacji zmiennoprzecnikowych od liczby wierszy odwracanej macierzy

3.4 Porównanie wyników z Matlabem

Kod testowy w języku Matlab

```
A = [0.5488, 0.5929;
 0.7094, 0.0734];
[L,U] = lu(A)
fprintf('Macierz L:');
disp(L);
fprintf('Macierz U:');
disp(U);
fprintf('Macierz L * U:');
disp(L * U);
```

```
Macierz L:
    0.7736    1.0000
    1.0000         0
Macierz U:
    0.7094    0.0734
         0    0.5361
Macierz L * U:
    0.548800    0.592900
    0.709400    0.073400
```

Wykres 9: Wyniki w Matlabie

```
2×2 LowerTriangular{Float64, Matrix{Float64}}:
 0.5488     ⋅
 0.7094  -0.693005

2×2 UnitUpperTriangular{Float64, Matrix{Float64}}:
 1.0  1.08036
  ⋅    1.0

2×2 Matrix{Float64}:
 0.5488  0.5929
 0.7094  0.0734

LU{Float64, Matrix{Float64}, Vector{Int64}}
L factor:
2×2 Matrix{Float64}:
 1.0       0.0
 0.773612  1.0
U factor:
2×2 Matrix{Float64}:
 0.7094  0.0734
 0.0     0.536117
```

Wykres 10: Wyniki naszego algorytmu

Otrzymane przez nas macierze nie są takie same poniewrz w Matlabie faktoryzacja LU zwraca L jako **przepermutowaną** macierz trujkątną dolną z jedynkami na przekątnej. Pomimo tego iloczyn macierzy L, U, wyliczonych naszą implementacją faktoryzacji oraz ta wyliczona przez wbudowaną funkcje w Matlab'ie, jest równy macierzy A.

4 Rekurencyjne obliczanie wyznacznika

4.1 Wzory i pseudokod

Algorytm przyjmuję na wejściu macierz. Jego zadaniem jest obliczenie wyznacznika A. Robi to korzystając z rekurencyjnej metody znajdywania LU faktoryzacji:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$det(A) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$

Pseudokod:

```
L, U = lu_factorisation(A)
diagonal = [L[i,i] for i in 1: L.size]
return prod(diagonal)
```

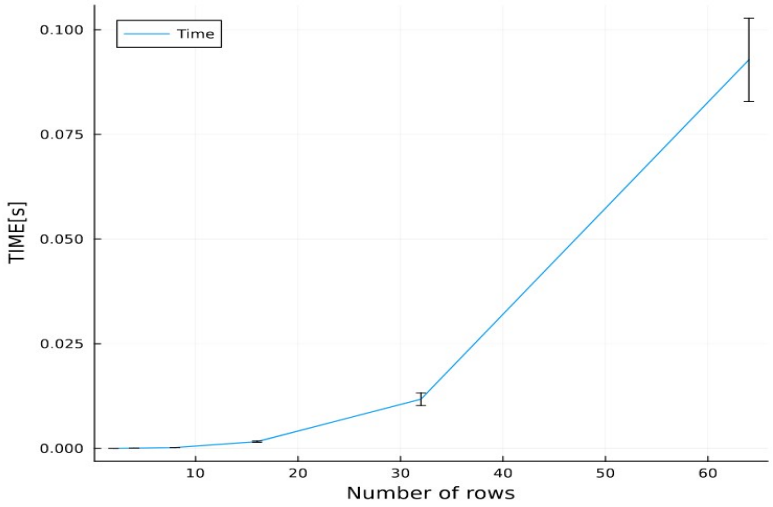
4.2 Złożoność obliczeniowa

Podobnie jak w przypadku odwracania macierzy mamy do czynienia z złorzonością obliczeniową $O(n^{\log_2(7)})$

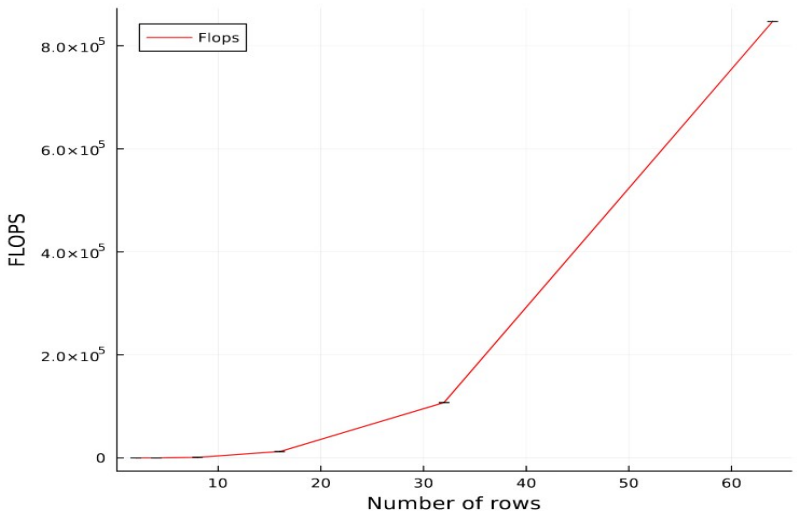
4.3 Kod programu i wykresy

```
function matrix_determinant(A)
    """
    :return determinant of matrix
    A must be in shape (2^i, 2^i) where i is Natural
    """

    L, U = matrix_LU_factor(A)

    diagonal = [L[i,i] for i in 1:size(A, 1)]
    return prod(diagonal)
end
```

Wykres 11: Kod algorytmu faktoryzacji LU



Wykres 12: Wykres zależności czasu od liczby wierszy odwracanej macierzy



Wykres 13: Wykres zależności operacji zmiennoprzecnikowych od liczby wierszy odwracanej macierzy

4.4 Porównanie wyników z Matlabem

Kod testowy w języku Matlab

```
A = [0.5488, 0.5929;   0.7094, 0.0734];
det_A = det(A)
fprintf('Wyznacznik A:');
disp(det_A);
```

```
det_A = -0.3803
Wyznacznik A:
-0.3803
```

Wykres 14: Wyniki w Matlabie

Wyniki algorytmu zgadzają się z tymi zwróconymi przez Matlaba

5 Wnioski

1. Zaimplementowane algorytmy działają poprawnie. Potwierdzają to testy przeprowadzonę przy pomocy programu komputerowego Matlab

2. Implementacja zadanych algorytmów macierzowych jest niestabilna numerycznie. Dla dużych macierzych (128x128 oraz większych) różnica pomiędzy rozwiązaniem przy użyciu funkcji bibliotecznych z Julii a naszym rozwiązaniem różni się już na szóstym miejscu po przecinku (dla elementów macierzy czy wyznacznika)

3. Dzięki algorytmowi Strassena (mnożenia macierzy) wszystkie nasze implementacje posiadaja złożoność $O(n^{\log_2(7)})$.

4. Algorytmy faktoryzacji LU oraz liczenia wyznacznika korzystają z algorytmu odwracania macierzy. Mimo to potrzebują mniej czasu oraz operacji na liczbach zmiennoprzecinkowych niż rekurencyjna inwersja macierzy. Może być to spowodowane tym, że w metoda faktoryzacji LU (pośrednio też obliczania wyznacznika) wywołują funkcję odwracania macierzy na mniejszych macierzach (częściach zadanych macierzy). Oprócz tego, do faktoryzacji LU wykorzystaliśmy również klasy: LowerTriangular oraz UnitUpperTriangular, które optymalizują działania na macierzach trójkątnych.