Теория формальных языков. Рубежный контроль №1

Вариант №5

Киселев Кирилл

Теоретическая информатика и компьютерные технологии
МГТУ им. Н.Э. Баумана
ноябрь 2023

Содержание

1 Задача 1

Определить регулярность языка $L = \{w \Bigm| |w|_{aba} = |w|_{ab} \ \& \ w \in \{a, b, c\}^*\}$

1.1 Решение

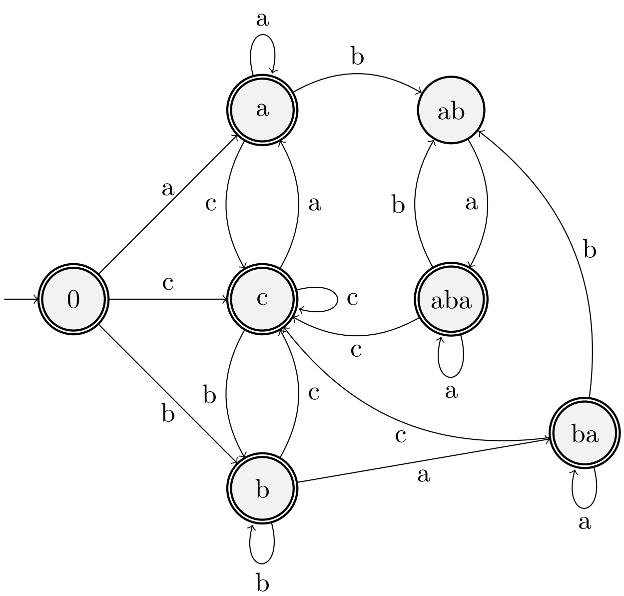


Рис. 1: Автомат для языка L

Автомат построен на основе суффиксов слов. Если ниразу не встретилось подслово ab, то такое слово нам подходит. Если встречается суффикс ab, то за ним же должен следовать символ a, чтобы уравновесить ab и aba, иначе сделать равным количество вхождений aba и ab не получится, т.к. каждое вхождение aba влечет за собой вхождение ab. Поэтому из состояния ab по b, c мы попадаем в ловушку, а по символу a попадаем в конечное состояние aba.

2 Задача 2

Проанализировать язык истинных выражений, представляющих собой утверждение вида $N_1 + N_2 > N_0$, где N_0, N_1 и N_2 - двоичные числа.

Алфавитом языка является множество: $\{0, 1, +, >\}$. Обозначим данный язык L. Рассмотрим следующей слово w, принадлежащее языку L:

2.1 Решение

$$w = 11^n + 11^n00^n > 11^{2n}0$$

Здесь $N_1 = 11^n$, $N_2 = 11^n00^n$, $N_3 = 11^{2n}0$. Пусть задана n - длина накачки. Возьмем описанное вышел слово, длина которого $> n$. Рассмотрим варианты разбиения этого слова на подслова u, x, v, y, w.

1. Если x или y содержат символы $+, >$, то при любой накачке полученное слово не будет принадлежать языку L. Поэтому стоит рассматривать лишь такие разбиения, в которых $x, y \in N_i,\ i = \overline{0, 2}$
2. Пусть xvy лежит в N_1. Тогда при отрицательной накачке, полученное слово не будет принадлежать языку L, т.к. изначально левая и правая часть отличались на единицу.
3. Пусть x лежит в N_1, а y в N_2. Тогда при отрицательной накачке, полученное слово не будет принадлежать языку L(аналогично пункту 2).
4. Пусть xvy лежит в N_2. Тогда при отрицательной накачке, полученное слово не будет принадлежать языку L(аналогично пункту 2).
5. Пусть xvy лежит в N_0. Тогда с помощью накачки N_0 можно сделать сколь угодно большим и неравенство станет неверным L.
6. Пусть $x \in N_2$, $y \in N_0$, тогда x имеет вид 0^k, а $y = 1^m$. Необходимо рассмотреть следующие случаи:
   - 6.1. $m = k$; Т.к. $x = 0^m$, а $y = 1^m$, то при положительной накачке, полученное слово не будет принадлежать языку L, т.к порядки левой и правой частей равны, но левая часть была накачана нулями, а правая единицами, и из-за этого число справа будет больше суммы чисел слева, поскольку в некотором разряде i в числе N_0 будет 1, а в сумме $N_1 + N_2$ в том же разряде будет стоять 0.
   - 6.2. $m > k$; При положительной накачке, число N_0 будет расти быстрее, чем N_2, поэтому существует длина накачки i, при которой порядок N_0 станет больше, чем $N_1 + N_2$, и слово не будет принадлежать языку.
   - 6.3. $m < k$; Если k - m $>$ 1, выполним отрицательную накачку и при сложении чисел слева, разряд суммы будет меньше чем разряд числа справа, т.к. при сложении число может увеличиться лишь на один разряд. Есл m $+$ 1 $=$ k, то при отрицательной накачке порядки чисел слева и справа будут равны, но число N_0 будет

больше, т.к. при солжении N_1 и N_2 в получившемся числе на позиции i появится 0, причем $i > 0$. Т.о. неравенство не будет верным

Таким образом для любого n можно подобрать слово, которое не накачивается, значит данный в условии язык не является контекстно-свободным.

3 Задача 3

Определить, описывает ли данная грамматика регулярный язык

$$\begin{aligned} &S \to TSTa \qquad && T \to a \\ &S \to SS && T \to b \\ &S \to bb && T \to TT \end{aligned}$$

3.1 Решение

Язык нетерминала T совпадает с языком задаваемым регулярными выражением $(a|b)^+$. Промежуточное представление для S можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &S \to (a|b)^+S(a|b)^+a \\ &S \to SS \\ &S \to bb \end{aligned}$$

Гипотеза: Язык нетерминала S описывается регулярным выражением

$$((a|b)^+(bb)^+((bb)^*(a|b)^+a)^+|(bb)^+)^+$$

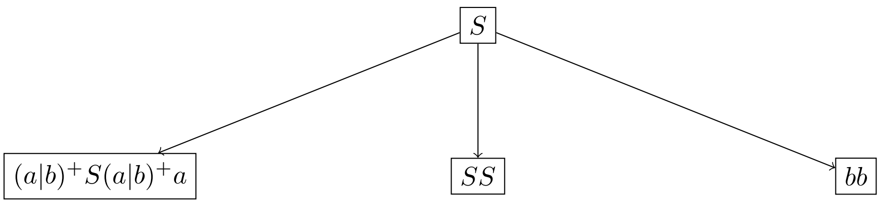
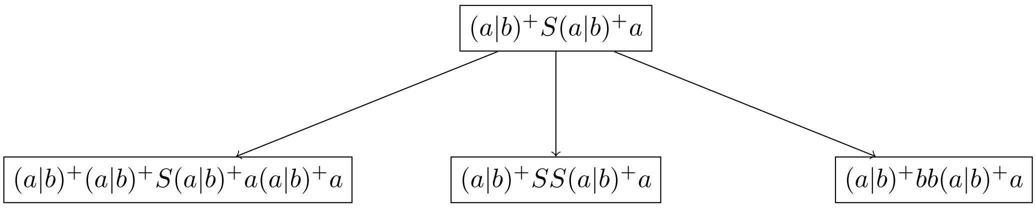
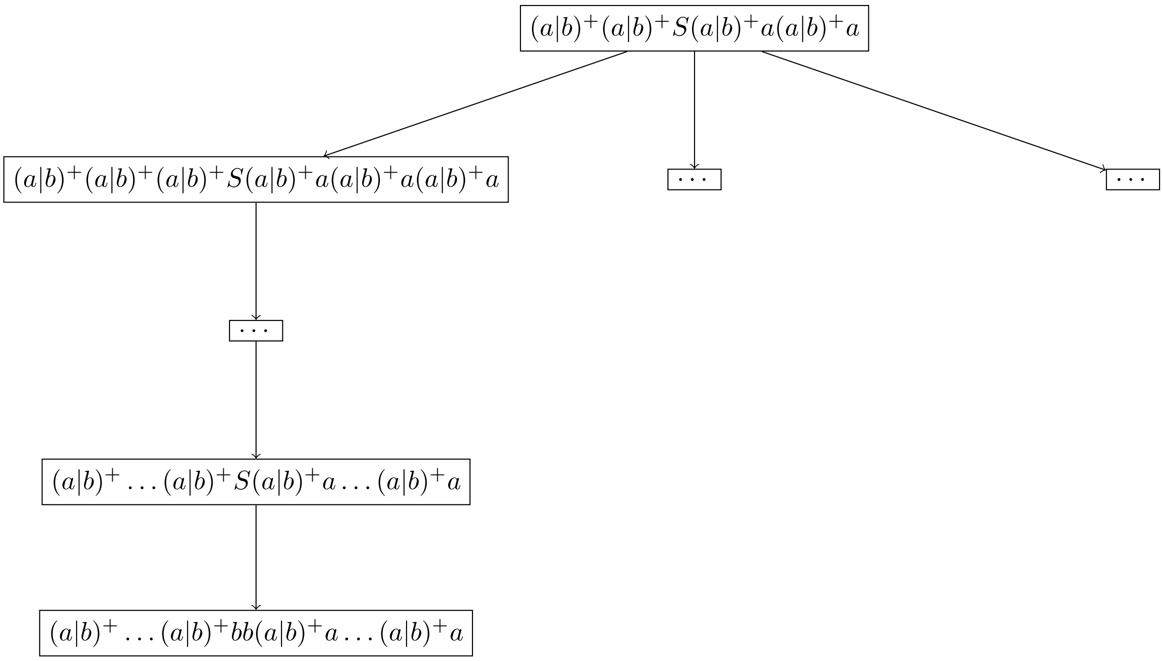


Рис. 2: Дерево преобразования

Рассмотрим, что будет при раскрытии по правилу из крайнему левого листа

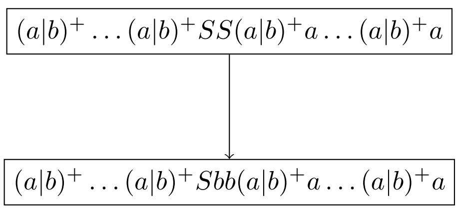


Если будет применяться только левое правило, то получим следующее:



Таким образом, при использовании этого правило слева будет накапливаться $(a|b)^+$, справа $(a|b)^+a$, а в середине bb. Строки полученные таким образом удовлетворяют регулярному выражению.

Допустим, что в какой-то момент, было применено правило из второго листа рисунок 2. Тогда получаем следующее



4 Задача 4

Пусть $h(w)$ - слово, получающееся из w удвоением каждой буквы. Например, $h(aba^2) = a^2b^2a^4$. Запишем эти слова друг под другом так, чтобы первые буквы w и $h(w)$ образовали пару, вторые - следующую за ней, и т.д. Недостающуую длину в w дополним "решетками".

Исследовать язык пар слов $(w, h(w))$, поступающих на вход анализатора разбитыми таким образом на пары букв, т.е. поступающих параллельно (т.е. элементы входного алфавита - вектора $\begin{pmatrix} w_i \\ v_i \end{pmatrix}$, где $w_i, v_i \in \{a, b, \#\}$).

В нашем примере вход анализатора будет представлять собой следующую последовательность пар:

$$\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# \\ a \end{pmatrix}$$

4.1 Решение

Пусть $L = \{(w_1, w_2) \mid w_2 = h(w_1), w_1, w_2 \in \{a, b, \#\}^*\}$. Рассмотрим слово $w_1 = a^nb^n$, тогда $h(w_1) = a^{2n}b^{2n}$

$$(w_1, h(w_1)) = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \# \\ b \end{pmatrix}^{2n}$$

Пусть дано разбиение w_1 на подслова u, x, v, y, w, $|xvy| < n$, $|xy| > 0$. Примем следующие обозначения:

$$w_2 = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}^n w_3 = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^n w_4 = \begin{pmatrix} \# \\ b \end{pmatrix}^{2n}$$

Тогда возможны следующие варианты разбиения:

1. $xvy \in w_2$. Отрицательная накачка выводит слово из языка L. Пусть $|x| = k_1$ $|y| = k_2$, $k_1 + k_2 \leq n$. При отрицательной накачке получим слово:

   $$\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}^{n-k_1-k_2} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} \# \\ b \end{pmatrix}^{2n}$$

   Длина префикса нижней строки, состоящего из символов a, должна быть равна $2(n - k_1 - k_2)$, но она равна $2n - k_1 - k_2$. Противоречие.

2. $x \in w_2$, $y \in w_3$.Отрицательная накачка выводит слово из языка L. Пусть $|x| = k_1$, $k_1 > 0$ $|y| = k_2$, $k_2 > 0$, $k_1+k_2 \leq n$,. При отрицательной накачке получим слово:

   $$\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}^{n-k_1} \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}^{n-k_2} \begin{pmatrix} \# \\ b \end{pmatrix}^{2n}$$

   Длина суффикса нижней строки, состоящего только из символов b должна быть равна $2(n - k_2)$, но она равна $2n$. Противоречие.

3. $xvy \in w_3$. Отрицательная накачка выводит слово из языка L. Доказательство аналогично первому пункту.

4. $x \in w_3$, $y \in w_4$.Отрицательная накачка выводит слово из языка L. Пусть $|x| = k_1$, $k_1 > 0$ $|y| = k_2$, $k_2 > 0$, $k_1 + k_2 \leq n$. При отрицательной накачке получим слово:

$$\binom{a}{a}^n \binom{b}{a}^{n-k_1} \binom{\#}{b}^{2n-k_2}$$

Длина префикса нижней строки, состоящего из символов a, должна быть равна $2n$, но она равна $2n - k_1$. Противоречие.

5. $xvy \in w_4$. Отрицательная накачка выводит слово из языка L. Пусть $|x| = k_1$, $|y| = k_2$, $k_1 + k_2 \leq n$. При отрицательной накачке получим слово:

$$\binom{a}{a}^n \binom{b}{a}^{n} \binom{\#}{b}^{2n-k_1-k_2}$$

Длина суффикса нижней строки, состоящего только из символов b должна быть равна $2n$, но она равна $2n - k_1 - k_2$. Противоречие.

6. Если x или y лежат в w_2w_3 или w_3w_4, то аналогично доказывается, что отрицательная накачка выводит слово из языка.

Т.о. язык L не является КС.