WDWR 17108

Rozważamy następujące zagadnienie produkcji żywności:

- Pewien rodzaj żywności jest wytwarzany przez rafinację surowego oleju i następnie mieszanie tak uzyskanego półproduktu. Olej może być pochodzenia roślinnego A i B lub nie-roślinnego C. Produkt gotowy sprzedawany jest w cenie 170 zł/tonę. Ceny rynkowe (w zł/tonę) surowego oleju określają składowe wektora losowego $\mathbf{R} = (R_1, \ldots, R_6)^T$:

	A	B	C
Styczeń	R_1	R_2	R_3
Luty	R_4	R_5	R_6

- Wektor losowy $\mathbf{R}$ opisuje 6-wymiarowy rozkład t-Studenta z 4 stopniami swobody, którego wartości składowych zostały zawężone do przedziału [80; 120]. Wektor wartości oczekiwanych $\boldsymbol{\mu}$ oraz macierz kowariancji $\boldsymbol{\Sigma}$ niezawężonego rozkładu t-Studenta są następujące:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 116 \\ 102 \\ 113 \\ 100 \\ 107 \\ 110 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 36 & -1 & -1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 49 & -5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & -5 & 16 & -2 \\ 1 & -5 & 0 & -2 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

- Rafinacja oleju roślinnego i nie-roślinnego wymaga odrębnych linii produkcyjnych. W każdym miesiącu istnieje możliwość rafinacji nie więcej niż 220 ton oleju roślinnego i 270 ton oleju nie-roślinnego. Rafinacja nie prowadzi do zmniejszenia masy oleju, a jej koszt można pominąć.

- Jeżeli w danym miesiącu używany jest olej A, to również musi zostać użyty olej C.

- Istnieje możliwość magazynowania do 800 ton surowego oleju każdego rodzaju w cenie 10 zł/tonę za miesiąc. Nie można magazynować półproduktu, ani produktu gotowego. W chwili obecnej (grudzień) w magazynach znajduje się 200 ton każdego rodzaju surowego oleju. Istnieje wymaganie, aby ta ilość pozostała również pod koniec lutego.

- Istnieje wymaganie na twardość produktu gotowego, która musi znajdować się pomiędzy 3 i 6. Zakłada się, że twardość w procesie mieszania zależy liniowo od ilości wykorzystanego półproduktu. Dla poszczególnych typów surowego oleju współczynniki twardości wynoszą odpowiednio: A – 8,4, B – 6,2 i C – 2,0.

1. Zaproponować jednokryterialny model wyboru w warunkach ryzyka z wartością oczekiwaną jako miarą zysku. Wyznaczyć rozwiązanie optymalne.

2. Jako rozszerzenie powyższego zaproponować dwukryterialny model zysku i ryzyka ze średnią jako miarą zysku i odchyleniem maksymalnym jako miarą ryzyka. Dla decyzji $\mathbf{x} \in Q$ odchylenie maksymalne jest definiowane jako $D(\mathbf{x}) = \max_{t=1,\ldots,T} |\mu(\mathbf{x}) - r_t(\mathbf{x})|$, gdzie $\mu(\mathbf{x})$ oznacza średnią, $r_t(\mathbf{x})$ realizację dla scenariusza t.

   a. Wyznaczyć obraz zbioru rozwiązań efektywnych w przestrzeni ryzyko–zysk.

   b. Wskazać rozwiązania efektywne minimalnego ryzyka i maksymalnego zysku. Jakie odpowiadają im wartości w przestrzeni ryzyko–zysk?

   c. Wybrać trzy dowolne rozwiązania efektywne. Sprawdzić czy zachodzi pomiędzy nimi relacja dominacji stochastycznej pierwszego rzędu. Wyniki skomentować, odnieść do ogólnego przypadku.