KIT – Karlsruher Institut für Technologie

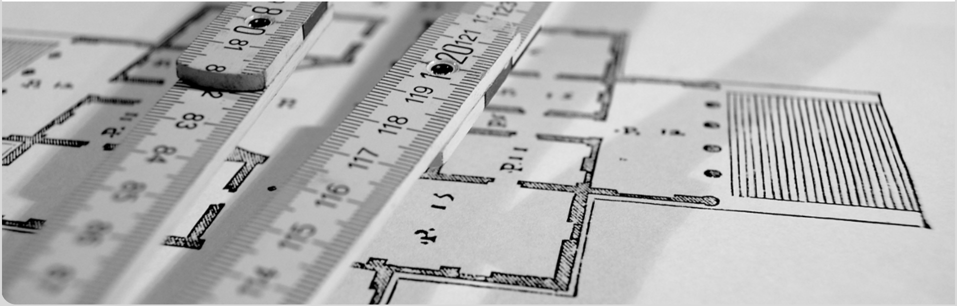
SDQ – Software Design and Quality

ICPC

Graphen 3

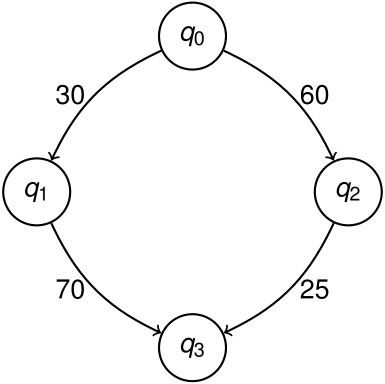
Tobias, Julian, Jakob, Tobias | 7. Juni 2018

ITI WAGNER, IPD TICHY



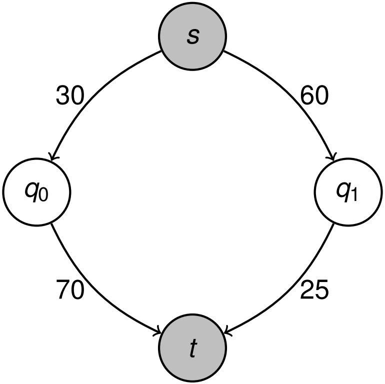
Outline/Gliederung

Einführung



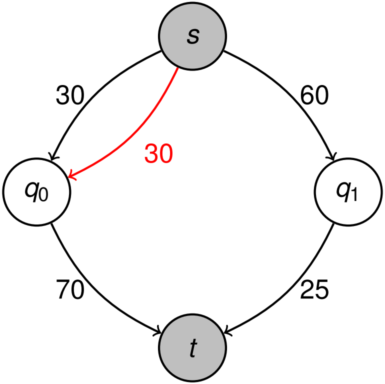
Gegeben gerichteter Graph

Einführung



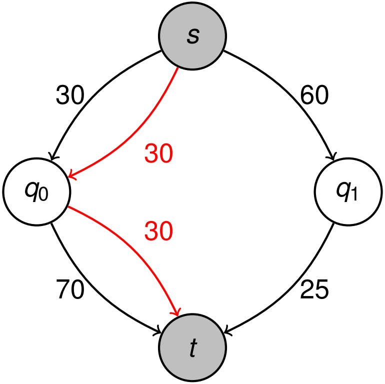
s: source, t: sink

Einführung



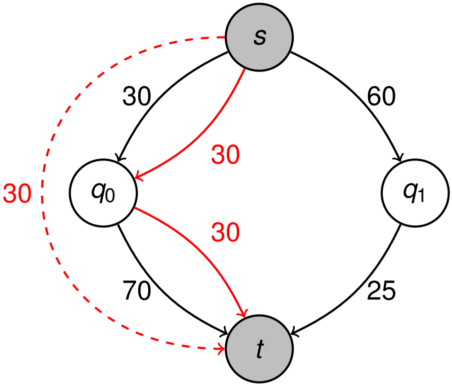
Fluss

Einführung



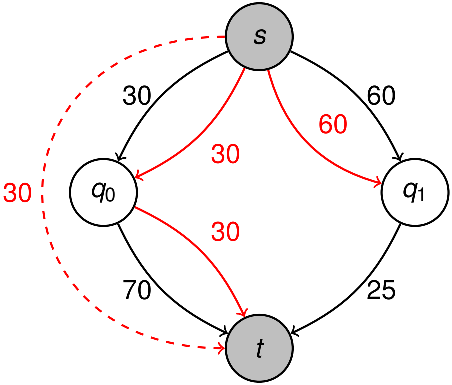
Flusserhaltung

Einführung

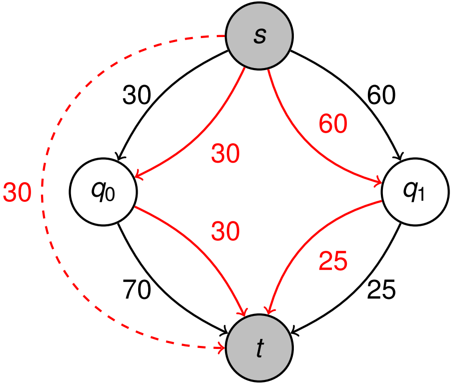


Wert eines s-t-Flusses

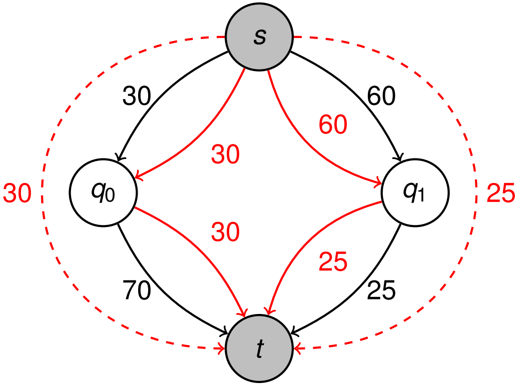
Einführung



Einführung

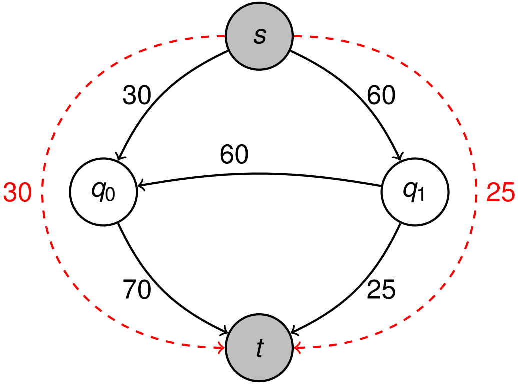


Einführung

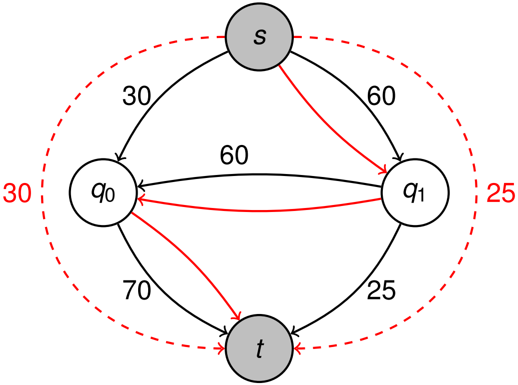


Einführung

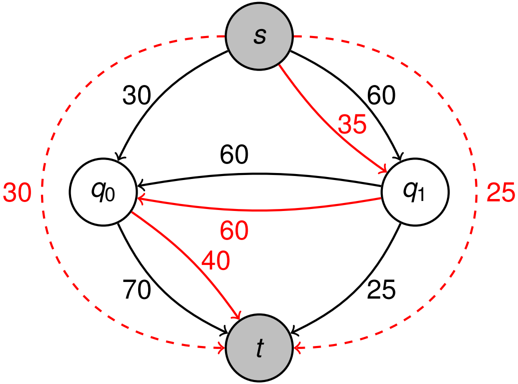
Karlsruher Institut für Technologie



Einführung

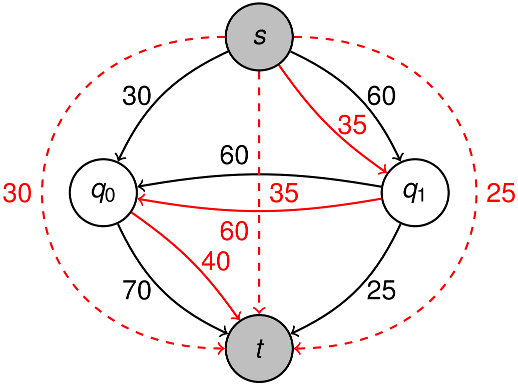


Einführung



Exzess: Werte entsprechend der Kantenkapazität abzüglich bereits vorhandener Flüsse

Einführung



Flussprobleme

- Schwierigeit im Erkennen der Aufgaben

Flussprobleme

Karlsruher Institut für Technologie

- Schwierigeit im Erkennen der Aufgaben
- Seit 2013 vermehrtes Vorkommen in Contests

  Decider-Problem

Bestimmung des maximalen Flusses

Idee:

- Starte mit dem leeren Fluss
- Bestimme erweiternden Pfad (augmenting path) P

  $\Rightarrow$ Ein erweiternder Pfad ist ein einfacher Pfad, der nur Kanten mit positiver Kapazität enthält
- Erweitere die Lösung um P
- Wiederhole so oft, wie es einen passenden Pfad P gibt

Frage: Wie kann P gefunden werden?

Bestimmung des maximalen Flusses

Karlsruher Institut für Technologie

Idee:

- Starte mit dem leeren Fluss
- Bestimme erweiternden Pfad (augmenting path) P
  - $\Rightarrow$ Ein erweiternder Pfad ist ein einfacher Pfad, der nur Kanten mit positiver Kapazität enthält
- Erweitere die Lösung um P
- Wiederhole so oft, wie es einen passenden Pfad P gibt

Frage: Wie kann P gefunden werden?

Ford-Fulkerson Algorithmus

- Greedy-Algorithmus, veröffentlicht 1956 von L. R. Ford, Jr. und D. R. Fulkerson
- Verwendet Tiefensuche, um den erweiternden Pfad P zu bestimmen
- Die Lösung wird um P erweitert, indem
  - die geringste Kapazität f der Kanten in P bestimmt wird
  - die Kapazitäten aller Kanten in P um f verringert werden
  - die Kapazitäten aller Gegenkanten um f erhöht werden
  - der maximale Fluss um f erhöht wird

Ford-Fulkerson Algorithmus

- Greedy-Algorithmus, veröffentlicht 1956 von L. R. Ford, Jr. und D. R. Fulkerson
- Verwendet Tiefensuche, um den erweiternden Pfad P zu bestimmen
- Die Lösung wird um P erweitert, indem
  - die geringste Kapazität f der Kanten in P bestimmt wird
  - die Kapazitäten aller Kanten in P um f verringert werden
  - die Kapazitäten aller Gegenkanten um f erhöht werden
  - der maximale Fluss um f erhöht wird

Ford-Fulkerson Algorithmus

- Greedy-Algorithmus, veröffentlicht 1956 von L. R. Ford, Jr. und D. R. Fulkerson
- Verwendet Tiefensuche, um den erweiternden Pfad P zu bestimmen
- Die Lösung wird um P erweitert, indem
  - die geringste Kapazität f der Kanten in P bestimmt wird
  - die Kapazitäten aller Kanten in P um f verringert werden
  - die Kapazitäten aller Gegenkanten um f erhöht werden
  - der maximale Fluss um f erhöht wird

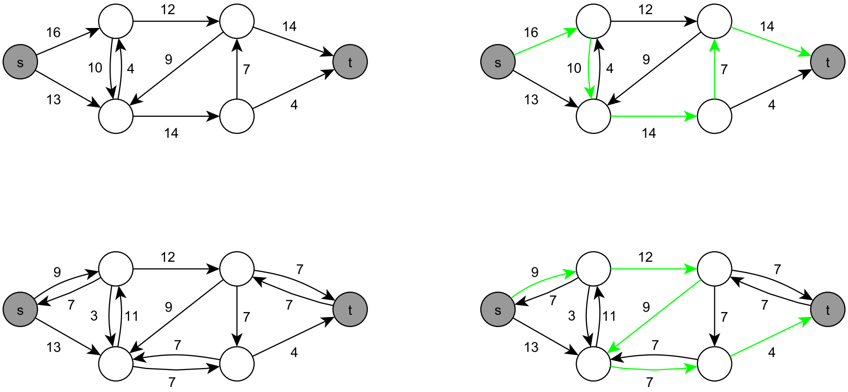
Ford-Fulkerson Algorithmus

- Greedy-Algorithmus, veröffentlicht 1956 von L. R. Ford, Jr. und D. R. Fulkerson
- Verwendet Tiefensuche, um den erweiternden Pfad P zu bestimmen
- Die Lösung wird um P erweitert, indem
  - die geringste Kapazität f der Kanten in P bestimmt wird
  - die Kapazitäten aller Kanten in P um f verringert werden
  - die Kapazitäten aller Gegenkanten um f erhöht werden
  - der maximale Fluss um f erhöht wird

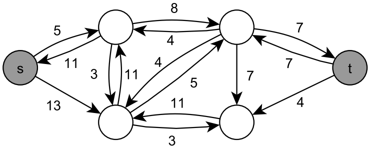
Ford-Fulkerson Algorithmus

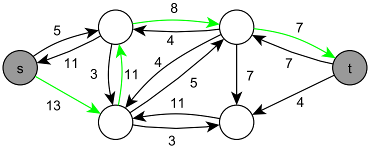
- Greedy-Algorithmus, veröffentlicht 1956 von L. R. Ford, Jr. und D. R. Fulkerson
- Verwendet Tiefensuche, um den erweiternden Pfad P zu bestimmen
- Die Lösung wird um P erweitert, indem
  - die geringste Kapazität f der Kanten in P bestimmt wird
  - die Kapazitäten aller Kanten in P um f verringert werden
  - die Kapazitäten aller Gegenkanten um f erhöht werden
  - der maximale Fluss um f erhöht wird

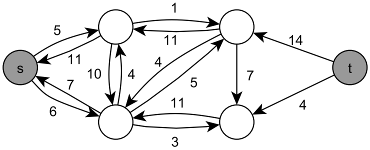
Ford-Fulkerson Algorithmus

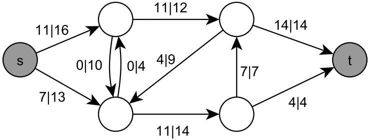


Ford-Fulkerson Algorithmus

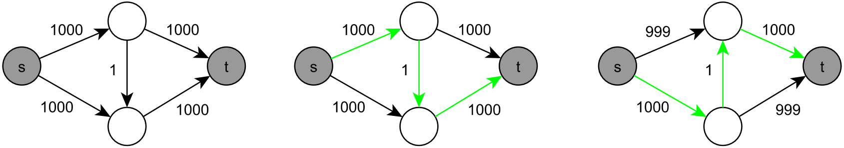








Ford-Fulkerson Algorithmus



- Im Worst-Case wird der maximale Fluss pro Iteration nur um 1 erhöht

$\Rightarrow$ Laufzeit in $\mathcal{O}(|f^*| \cdot |E|)$, wobei $|f^*|$ den Wert des maximalen Flusses beschreibt

- Deshalb **nicht** für ICPC-Aufgaben geeignet!

Edmonds-Karp Algorithmus

- 1972 von J. Edmonds und R. M. Karp veröffentlicht
- Verwendet Breitensuche, um den kürzesten erweiternden Pfad P zu bestimmen
- Erweiterung der Lösung um P analog zu Ford-Fulkerson
- Die Länge des erweiternden Pfades ist monoton steigend
- Es sind maximal $|V| \cdot |E|$ Iterationen notwendig

$\Rightarrow$ Laufzeit in $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$

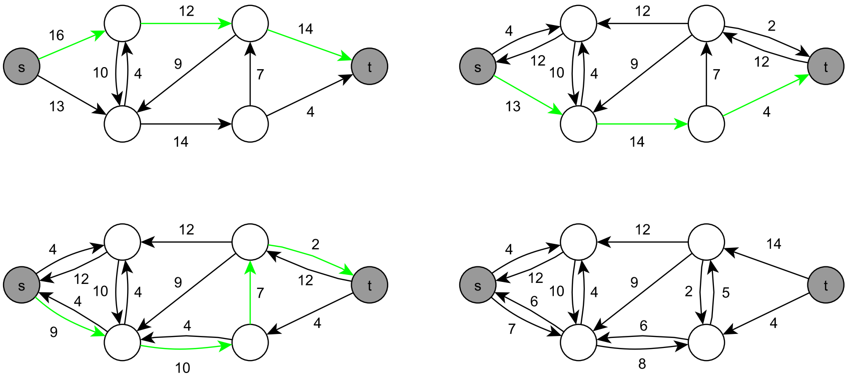
Edmonds-Karp Implementierung

Algorithm 1: Edmonds-Karp

Function *Max-Flow* $(G = (V, E), s, t \in V, c : E \to \mathbb{R}^+)$

```
maxFlow = 0
do
    find augmenting path P using BFS
    f = min{c(u,v) | (u,v) ∈ P}
    foreach (u,v) ∈ P do
        c(u,v) -= f
        c(v,u) += f
    end
    maxFlow += f
while P exists
return maxFlow
```

Edmonds-Karp Algorithmus



Edmonds-Karp Implementierungsdetails

- In Adjazenzliste neben Zielknoten auch Kapazität und Verweis auf die Rückkante speichern
- Nicht vorhandene Rückkanten mit 0 initialisieren und dem Graphen hinzufügen
- Bei der Breitensuche nur Kanten mit positiver Kapazität berücksichtigen
- Breitensuche abbrechen, sobald t erreicht wurde

Karlsruher Institut für Technologie

Min-Cut

- Definiere Schnitt $C = (S - Komponente, T - Komponente)$ als Partition von $V \in G$, wobei $s \in S - Komponente$ und $t \in T - Komponente$
- Weiter sei die Schnittmenge $c = \{(u, v) \in E | u \in S - Komponente \wedge v \in T - Komponente\}$
- Wähle c so, dass Max Flow von s nach t 0 ist, für $E' = E \setminus c$

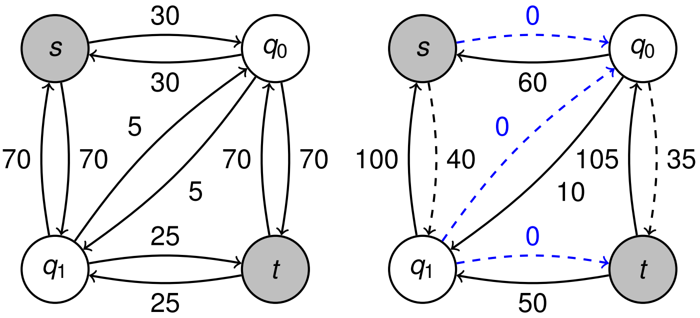
Max-Flow-Min-Cut-Theorem

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

- Ein maximaler Fluss im Netzwerk hat genau den Wert eines minimalen Schnitts.

Max-Flow-Min-Cut

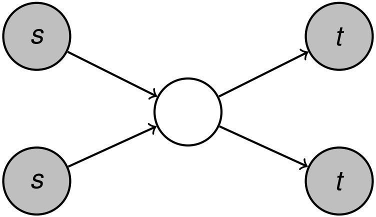
- Bsp.:



- Hier
  - $C = (\{s, q_1\}, \{t, q_0\})$
  - $c = \{(s, q_0), (q_1, q_0), (q_1, t)\}$

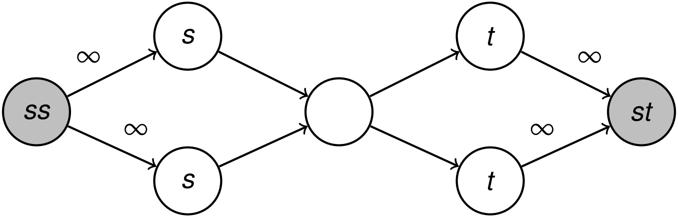
Multi-Quelle/Multi-Abfluss

- Gegeben sei folgende Situation:



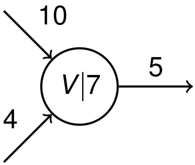
- Problem: Max-Flow Algorithmus kann nur mit einer Quelle und einer Senke arbeiten.
- Lösung: Ertelle Super-Quelle und Super-Senke und verbinde alle Quellen und Senken mit Kantengewicht ∞

Multi-Quelle/Multi-Abfluss Lösung



Knotenkapazität

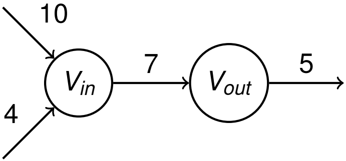
- Gegeben sind Knoten mit Kapazität.
- Bsp.:



Knotenkapazität

Karlsruher Institut für Technologie

- Gegeben sind Knoten mit Kapazität.
- Bsp.:



Modellierung

Karlsruher Institut für Technologie

- Erkennen eines Netzwerkfluss-Problems nicht immer einfach
- Was hilft?
    - Übung
    - Übung
    - ...

Modellierung

- Erkennen eines Netzwerkfluss-Problems nicht immer einfach
- Was hilft?
  - Übung
  - Übung
  - ...

Modellierung

- Erkennen eines Netzwerkfluss-Problems nicht immer einfach
- Was hilft?
  - Übung
  - Übung
  - ...

Modellierung - Beispiel

- Situation: Die Titanic ist gesunken. Es soll ermittelt werden, wie viele Menschen gerettet werden können.
- Eingabe: X, Y, P mit X, Y Dimension der Fläche ($1 \leq X, Y \leq 30$) und P ($P \leq 10$) die Anzahl von Personen, welche gleichzeitig auf ein Holzbrett können.

Symbol	Bedeutung
*	Menschen auf Treibeis
~	Eiskaltes Wasser
.	Treibeis
@	Großer Eisberg
#	Großes Holzbrett

Modellierung - Beispiel

- Gegeben sei nun folgende Eingabe:

$$\begin{array}{cccc} * & \sim & \sim & \# \\ . & . & . & @ \\ . & \sim & . & * \end{array}$$

- Wandle in Graphen um...

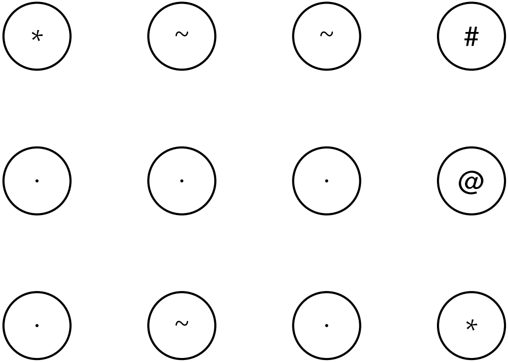
Modellierung - Beispiel

- Gegeben sei nun folgende Eingabe:

*	~	~	#
.	.	.	@
.	~	.	*

- Wandle in Graphen um...

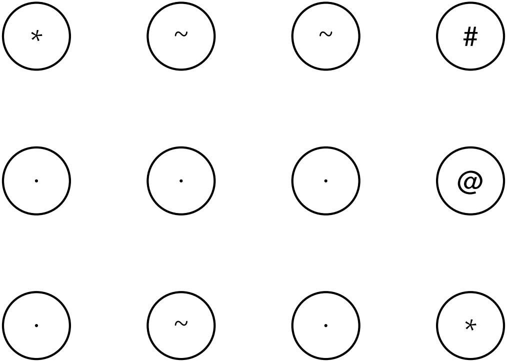
Modellierung - Beispiel



- Verbinde alle Knoten, über die ein Weg möglich ist...

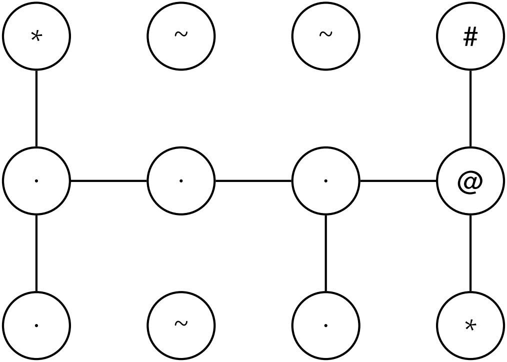
Modellierung - Beispiel

Karlsruher Institut für Technologie



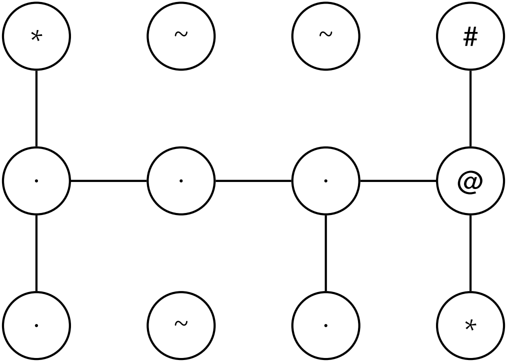
- Verbinde alle Knoten, über die ein Weg möglich ist...

Modellierung - Beispiel



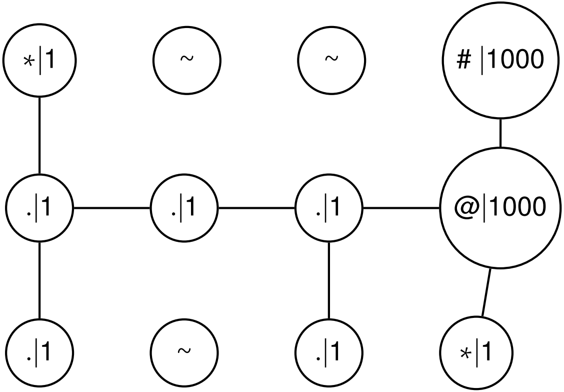
- Füge Knotengewichte hinzu...

Modellierung - Beispiel



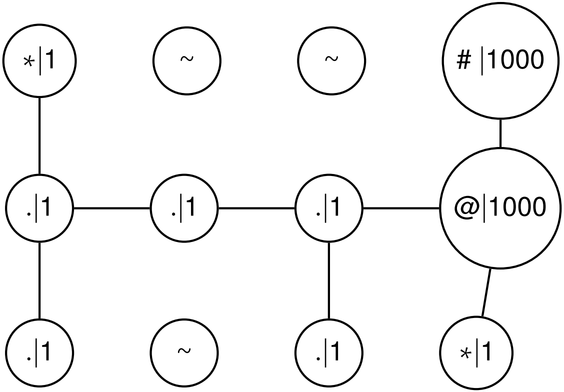
- Füge Knotengewichte hinzu...

Modellierung - Beispiel



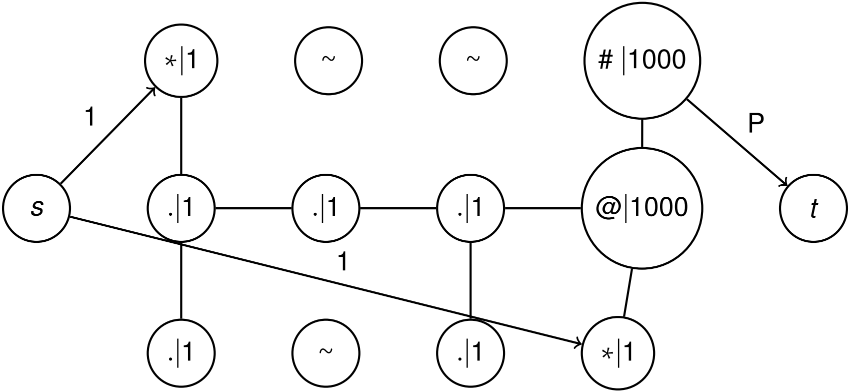
- Verbinde alle Menschen mit s und alle Holzbretter mit t...

Modellierung - Beispiel



- Verbinde alle Menschen mit s und alle Holzbretter mit t...

Modellierung - Beispiel



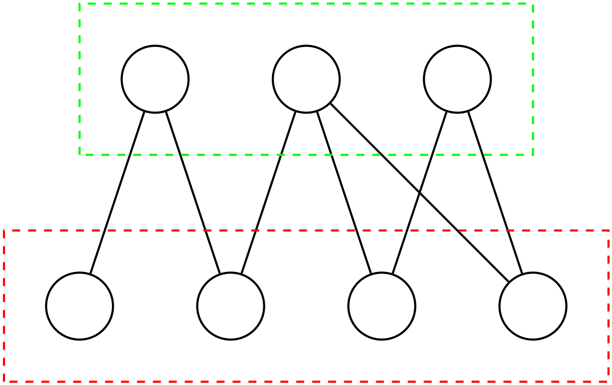
- Bem.: Knotengewichte müssen noch aufgelöst werden

Bipartiter Graph

Bipartiter Graph

- Ein Graph G = (V, E) heißt **bipartit**, wenn sich $V = A \uplus B$ in 2 disjunkte Knotenmengen A und B aufteilen lässt, sodass zwischen den Knoten innerhalb der Teilmengen keine Kanten existieren.

Bipartiter Graph



Matching

Matching

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein **Matching** $M \subseteq E$ ist eine Menge paarweise knotendisjunkter Kanten, d.h.
  $\forall e_1 = \{u_1, v_1\}, e_2 = \{u_2, v_2\} \in M, e_1 \neq e_2 : e_1 \cap e_2 = \varnothing$
- Analog für gerichtete Graphen

Maximales Matching

- Ein Matching heißt **maximales Matching**, wenn nicht durch Hinzufügen einer Kante ein größeres Matching erstellt werden kann. (D.h. es gibt keine Kante $e = \{u, v\}$, wobei u und v nicht Teil des Matchings sind.)

Matching

Matching

- Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein **Matching** $M \subseteq E$ ist eine Menge paarweise knotendisjunkter Kanten, d.h. $\forall e_1 = \{u_1, v_1\}, e_2 = \{u_2, v_2\} \in M, e_1 \neq e_2 : e_1 \cap e_2 = \emptyset$
- Analog für gerichtete Graphen

Maximales Matching

- Ein Matching heißt **maximales Matching**, wenn nicht durch Hinzufügen einer Kante ein größeres Matching erstellt werden kann. (D.h. es gibt keine Kante $e = \{u, v\}$, wobei u und v nicht Teil des Matchings sind.)

Mehr Matchings

Karlsruher Institut für Technologie

Kardinalitätsmaximales Matching

- Ein Matching $M \subseteq E$ heißt **kardinalitätsmaximales Matching**, wenn es kein größeres Matching gibt. (D.h. $\forall$ Matchings M' : $|M| \geq |M'|$).

Perfektes Matching

- Ein Matching M heißt **perfekt**, falls $2 * |M| = |V|$, d.h. jeder Knoten $v \in V$ kommt in M vor.

Mehr Matchings

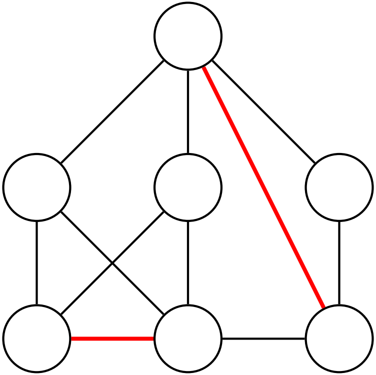
Kardinalitätsmaximales Matching

- Ein Matching $M \subseteq E$ heißt **kardinalitätsmaximales Matching**, wenn es kein größeres Matching gibt. (D.h. $\forall$ Matchings $M' : |M| \geq |M'|$).

Perfektes Matching

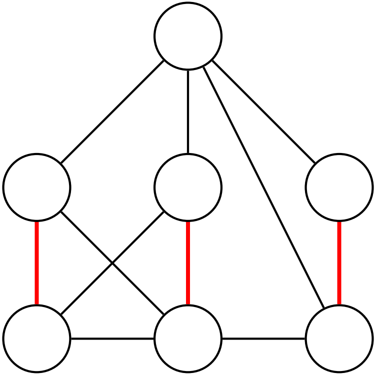
- Ein Matching M heißt **perfekt**, falls $2 * |M| = |V|$, d.h. jeder Knoten $v \in V$ kommt in M vor.

Beispiel: Matching



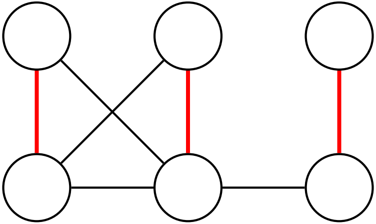
Maximales Matching

Beispiel: Matching



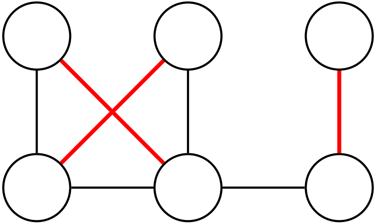
Kardinalitätsmaximales Matching

Beispiel: Matching



Perfektes Matching

Beispiel: Matching



anderes perfektes Matching

Beispiel

- Gegeben: Menge von Aufgaben A, Personen B
- Für jede Person eine Liste von Aufgaben, die diese Person erledigen kann
- Gesucht: Zuteilung von Aufgaben an Personen, sodass möglichst viele Aufgaben erledigt werden
- Jede Aufgabe kann von maximal einer Person zugeteilt werden, jeder Person kann maximal eine Aufgabe zugeteilt werden
- Lösung: Modellierung als *bipartiter Graph* mit Knotenmengen A und B
- Kante zwischen Aufgabe a und Person b, wenn b Aufgabe a lösen kann
- Lösung entspricht *kardinalitätsmaximalem Matching*

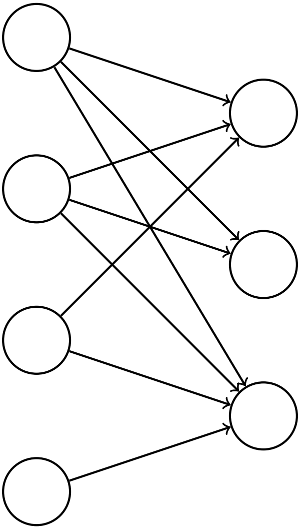
Beispiel

- Gegeben: Menge von Aufgaben A, Personen B
- Für jede Person eine Liste von Aufgaben, die diese Person erledigen kann
- Gesucht: Zuteilung von Aufgaben an Personen, sodass möglichst viele Aufgaben erledigt werden
- Jede Aufgabe kann von maximal einer Person zugeteilt werden, jeder Person kann maximal eine Aufgabe zugeteilt werden
- Lösung: Modellierung als *bipartiter Graph* mit Knotenmengen A und B
- Kante zwischen Aufgabe a und Person b, wenn b Aufgabe a lösen kann
- Lösung entspricht *kardinalitätsmaximalem Matching*

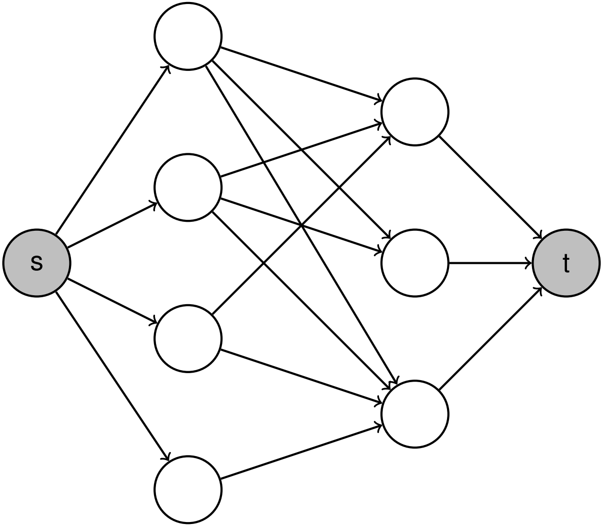
Beispiel

- Gegeben: Menge von Aufgaben A, Personen B
- Für jede Person eine Liste von Aufgaben, die diese Person erledigen kann
- Gesucht: Zuteilung von Aufgaben an Personen, sodass möglichst viele Aufgaben erledigt werden
- Jede Aufgabe kann von maximal einer Person zugeteilt werden, jeder Person kann maximal eine Aufgabe zugeteilt werden
- Lösung: Modellierung als *bipartiter Graph* mit Knotenmengen A und B
- Kante zwischen Aufgabe a und Person b, wenn b Aufgabe a lösen kann
- Lösung entspricht *kardinalitätsmaximalem Matching*

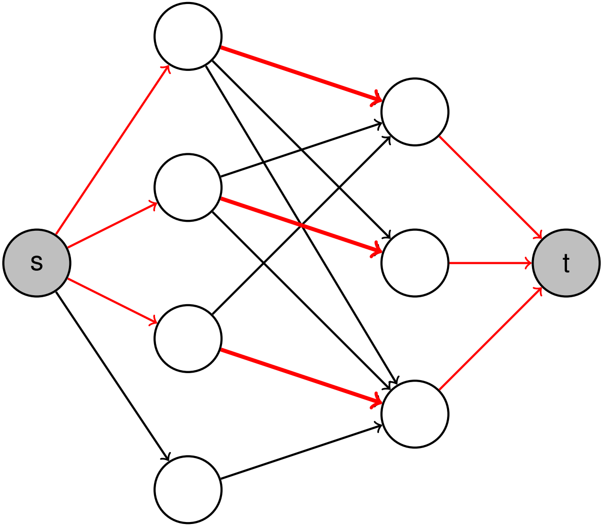
Modellierung



Modellierung



Modellierung



Modellierung

- Finden von kardinalitätsmaximalen Matchings in bipartiten Graphen $G = (V, E = A \cup B)$:
  - Einfügen von neuen Knoten s und t
  - Einfügen von Kanten zwischen s und allen Knoten $v_A \in A$, und zwischen allen Knoten $v_B \in B$ und t.
  - Jede Kante im Graph (alte und neu eingefügte) hat Kapazität 1.
  - Berechnen des maximalen Flusses von s nach t.
- Kanten des *maximalen Flusses* zwischen A und B entsprechen *kardinalitätsmaximalen Matching*.
- Laufzeit Edmonds-Karp (in diesem Fall): $\mathcal{O}(|E| * |V|)$

Max Independent Set

- Ein **independent set** $S \subseteq V$ ist eine Menge von Knoten, die paarweise nicht *adjazent* sind, d.h. $\forall u, v \in S : \{u, v\} \notin E$ (zwischen keinen zwei Knoten existiert eine Kante).
- Ein **maximal independent set** ist ein maximal großes *independent set*.
- Das bedeutet: Jeder Knoten ist entweder selbst in S, oder einer seiner Nachbarn ist in S.

Min Vertex Cover

- Ein **vertex cover** $U \subseteq V$ ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante von G zu einem Knoten aus U *inzident* ist, d.h. $\forall \{v, w\} = e \in E : \exists u \in U : u \in e$.
- Ein **minimum vertex cover** ist ein minimal großes *vertex cover*.

Mehr Graphentheorie

Max Independent Set

- Ein **independent set** $S \subseteq V$ ist eine Menge von Knoten, die paarweise nicht *adjazent* sind, d.h. $\forall u, v \in S : \{u, v\} \notin E$ (zwischen keinen zwei Knoten existiert eine Kante).
- Ein **maximal independent set** ist ein maximal großes *independent set*.
- Das bedeutet: Jeder Knoten ist entweder selbst in S, oder einer seiner Nachbarn ist in S.

Min Vertex Cover

- Ein **vertex cover** $U \subseteq V$ ist eine Menge von Knoten, sodass jede Kante von G zu einem Knoten aus U *inzident* ist, d.h. $\forall \{v, w\} = e \in E : \exists u \in U : u \in e$.
- Ein **minimum vertex cover** ist ein minimal großes *vertex cover*.

Noch mehr Graphentheorie

Kőnigs Theorem

- Sei G ein *bipartiter* Graph, M ein *kadinalitätsmaximales Matching*, U ein *minimum vertex cover*.
- Dann gilt $|M| = |U|$.
- In Worten: Die Anzahl an Kanten eines kardinalitätsmaximalen Matchings entspricht der Anzahl an Knoten in einem minimum vertex cover *in einem bipartiten Graph*.

Andere Erkenntnis

- In einem bipartiten Graph mit *minimum vertex cover U* und *maximalen independent set S* gilt:
- $|U| + |S| = |V|$.

Noch mehr Graphentheorie

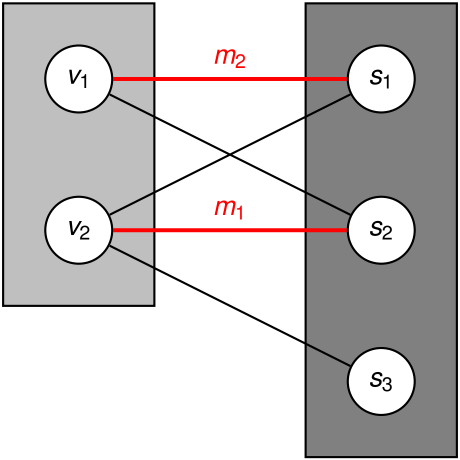
Kőnigs Theorem

- Sei G ein *bipartiter* Graph, M ein *kadinalitätsmaximales Matching*, U ein *minimum vertex cover*.
- Dann gilt $|M| = |U|$.
- In Worten: Die Anzahl an Kanten eines kardinalitätsmaximalen Matchings entspricht der Anzahl an Knoten in einem minimum vertex cover *in einem bipartiten Graph*.

Andere Erkenntnis

- In einem bipartiten Graph mit *minimum vertex cover* U und *maximalen independent set* S gilt:
- $|U| + |S| = |V|$.

Veranschaulichung



Beispiel: Guardian of Decency

- Gegeben: N Schüler (mit Größe, Geschlecht, Musikgeschmack, Lieblingssport).
- Gesucht: Wie viele können maximal auf Exkursion gehen, sodass je zwei Schüler kein Pärchen werden können, da...
  - ...sich ihre Größe um mehr als 40 cm unterscheidet,
  - ...sie das selbe Geschlecht haben,
  - ...ihr Musikgeschmack unterschiedlich ist,
  - ...oder sie den selben Lieblingssport haben.
- Kante zwischen Personen, wenn sie ein Pärchen werden könnten
- Graph ist bipartit: Männliche und weibliche Schüler
- Aufgabenstellung: Maximum independent set
- Lösung: $|\text{maximum independent set}| = N - |\text{kardinalitätsmaximales Matching}|$

Beispiel: Guardian of Decency

- Gegeben: N Schüler (mit Größe, Geschlecht, Musikgeschmack, Lieblingssport).
- Gesucht: Wie viele können maximal auf Exkursion gehen, sodass je zwei Schüler kein Pärchen werden können, da...
  - ...sich ihre Größe um mehr als 40 cm unterscheidet,
  - ...sie das selbe Geschlecht haben,
  - ...ihr Musikgeschmack unterschiedlich ist,
  - ...oder sie den selben Lieblingssport haben.
- Kante zwischen Personen, wenn sie ein Pärchen werden könnten
- Graph ist bipartit: Männliche und weibliche Schüler
- Aufgabenstellung: Maximum independent set
- Lösung: $|\text{maximum independent set}| = N - |\text{kardinalitätsmaximales Matching}|$

Beispiel: Guardian of Decency

- Gegeben: N Schüler (mit Größe, Geschlecht, Musikgeschmack, Lieblingssport).
- Gesucht: Wie viele können maximal auf Exkursion gehen, sodass je zwei Schüler kein Pärchen werden können, da...
  - ...sich ihre Größe um mehr als 40 cm unterscheidet,
  - ...sie das selbe Geschlecht haben,
  - ...ihr Musikgeschmack unterschiedlich ist,
  - ...oder sie den selben Lieblingssport haben.
- Kante zwischen Personen, wenn sie ein Pärchen werden könnten
- Graph ist bipartit: Männliche und weibliche Schüler
- Aufgabenstellung: Maximum independent set
- Lösung: $|\text{maximum independent set}| = N - |\text{kardinalitätsmaximales Matching}|$

Bonusfolie

- Es gilt: *G bipartit* $\Leftrightarrow$ *G* enthält keine ungeraden Kreise
  - Damit zum Beispiel bipartit: Jeder Baum
- Sei *G bipartit* mit $V = A \cup B$. Dann: *G* hat *perfektes Matching* $\Leftrightarrow \forall S \subset A : |N(S)| \geq |S|$ (Wobei die Nachbarn $N(S)$ alle zu einem Knoten $s \in S$ adjazenten Knoten sind).
- Es gibt asymptotisch bessere Algorithmen zum Finden maximaler Flüsse, zum Beispiel *Dinitz* ($\mathcal{O}(|V|^2 * |E|)$ oder Push-Relabel-Algorithmen

Bonusbeispiel

- Definition: *Complete prime pairing*: Teile Liste M von natürlichen Zahlen so vollständig in Paare auf, dass die Summe beider Elemente eines Paares immer eine Primzahl ist.
- Gegeben: Liste N von paarweise unterschiedlichen Zahlen $n_i \in \mathbb{N}$.
- Gesucht: Liste $M \subseteq N$, sodass: $\forall m \in M$:
  - $\{m, n_0\}$ ist ein prime pair, d.h. $m + n_0$ ist prim
  - $N \setminus \{n_0, m\}$ besitzt ein *complete prime pairing*.
- Erkenntnis: Alle Primzahlen müssen als Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl zustande kommen.
- Damit: Bipartiter Graph, Kante zwischen a und b, falls $a + b$ eine Primzahl ist.
- Falls beide Mengen unterschiedlich groß sind, gibt es keine Lösung
- Ansonsten: Gehe alle Nachbarn n' von n_0 durch und überprüfe, ob $G - \{n_0, n'\}$ ein *perfektes Matching* hat.

Bonusbeispiel

- Definition: *Complete prime pairing*: Teile Liste M von natürlichen Zahlen so vollständig in Paare auf, dass die Summe beider Elemente eines Paares immer eine Primzahl ist.
- Gegeben: Liste N von paarweise unterschiedlichen Zahlen $n_i \in \mathbb{N}$.
- Gesucht: Liste $M \subseteq N$, sodass: $\forall m \in M$:
  - $\{m, n_0\}$ ist ein prime pair, d.h. $m + n_0$ ist prim
  - $N \setminus \{n_0, m\}$ besitzt ein *complete prime pairing*.
- Erkenntnis: Alle Primzahlen müssen als Summe einer geraden und einer ungeraden Zahl zustande kommen.
- Damit: Bipartiter Graph, Kante zwischen a und b, falls $a + b$ eine Primzahl ist.
- Falls beide Mengen unterschiedlich groß sind, gibt es keine Lösung
- Ansonsten: Gehe alle Nachbarn n' von n_0 durch und überprüfe, ob $G - \{n_0, n'\}$ ein *perfektes Matching* hat.