

ICPC

Graphen 3

Tobias, Julian, Jakob, Tobias | 6. Juni 2018

ITI WAGNER, IPD TICHY



1 Tobias

2 Max-Flow Algorithmen

- Ford-Fulkerson
- Edmonds-Karp

3 Julian

4 Tobias T

- Quell- und Senk- Knoten
- Knoten haben Kapazität

- fkt $F:E \rightarrow R$ weist jeder Kante einen Flusswert zu
- Kapazitätskonfirmation
- Flusserhalt
- Wert eines Flusses
- Exzes
- je definiton, kurze erkläerung ggf. an einem Bild

- Schwierigkeit im Erkennen der Aufgaben
- tauchen seit 2013 wieder auf, zählen zu "decider"Problemen
- eine beispielaufgabe vorstellen, erklären warum das eine Flussaufgabe ist

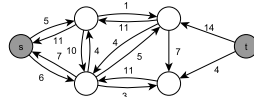
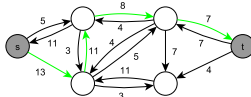
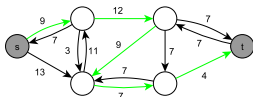
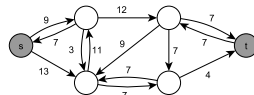
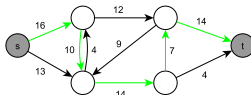
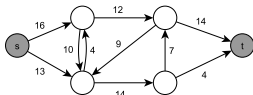
Idee:

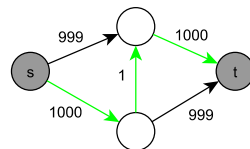
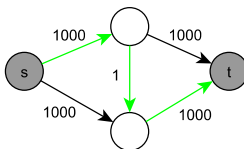
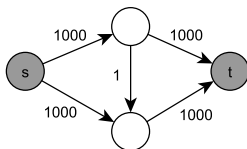
- Starte mit dem leeren Fluss
- Bestimme erweiternden Pfad (augmenting path) P , auf dem der Fluss von s nach t vergrößerbar ist
- Erweitere die Lösung um Pfad P
- Wiederhole so oft, wie es einen passenden Pfad P gibt

Frage: Wie kann P gefunden werden?

- Greedy Algorithmus veröffentlicht in 1956 von L. R. Ford, Jr. und D. R. Fulkerson
- Verwendet Tiefensuche um den erweiternden Pfad P zu bestimmen
- Die Lösung wird um P erweitert indem,
 - die geringste Kapazität f einer Kante in P bestimmt wird
 - die Kapazitäten aller Kanten in P um f verringert werden
 - die Kapazitäten aller Gegenkanten um f erhöht werden
 - der maximale Fluss um f erhöht wird

Ford-Fulkerson Algorithmus





- Im Worst-Case wird der maximale Fluss pro Iteration nur um 1 erhöht
⇒ Laufzeit in $\mathcal{O}(|f^*| \cdot |E|)$, wobei $|f^*|$ der Wert des maximalen Flusses beschreibt
- Deshalb **nicht** für ICPC-Aufgaben geeignet!

- 1972 von J. Edmonds und R. M. Karp veröffentlicht
 - Verwendet Breitensuche um den kürzesten erweiternden Pfad P zu bestimmen
 - Erweiterung der Lösung um P analog zu Ford-Fulkerson
 - Die Länge des erweiternden Pfades ist monoton steigend
 - Es sind maximal $|V| \cdot |E|$ Iterationen notwendig
- ⇒ Laufzeit in $\mathcal{O}(|V| \cdot |E|^2)$

Algorithm 1: Edmonds-Karp

Function *Max-Flow* ($G = (V, E)$, s , t , c)

$maxFlow = 0$

do

 find augmenting path P using BFS

$f = \min(c(u, v) | (u, v) \in P)$

foreach $(u, v) \in P$ **do**

$c(u, v) -= f$

$c(v, u) += f$

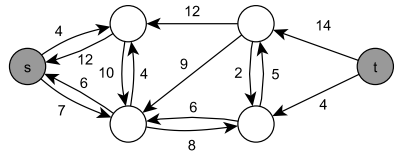
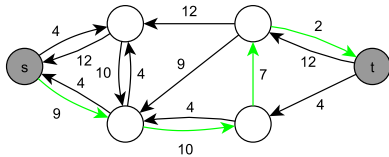
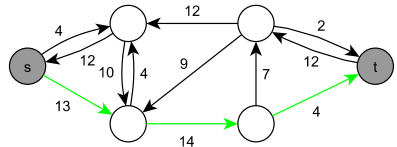
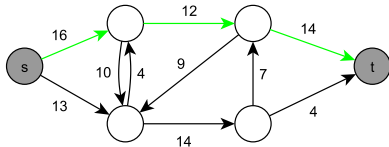
end

$maxFlow += f$

while P exists

return $maxFlow$

Edmonds-Karp Algorithmus



- In Adjazenzliste neben Zielknoten auch Kapazität und Verweis auf die Rückkante speichern
- In Breitensuche nur Kanten mit positiver Kapazität berücksichtigen
- Breitensuche abbrechen, sobald t erreicht wurde

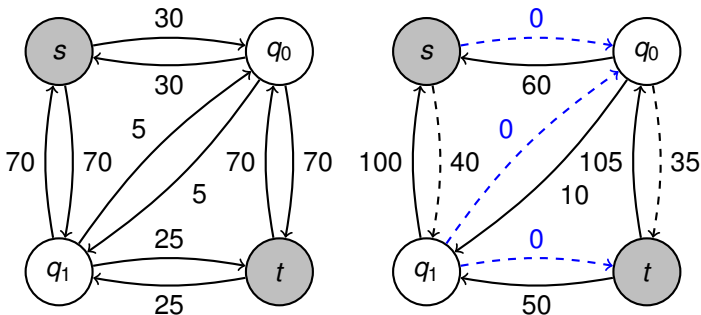
Min-Cut

- Definiere Schnitt $C = (S - \text{Komponente}, T - \text{Komponente})$ als Partition von $V \in G$, wobei $s \in S - \text{Komponente}$ und $t \in T - \text{Komponente}$
- Weiter sei die Schnittmenge
 $c = \{(u, v) \in E \mid u \in S - \text{Komponente} \wedge v \in T - \text{Komponente}\}$
- Wähle c so, dass Max Flow von s nach t 0 ist, für $E' = E \setminus c$

Max-Flow-Min-Cut-Theorem

- Ein maximaler Fluss im Netzwerk hat genau den Wert eines minimalen Schnitts.

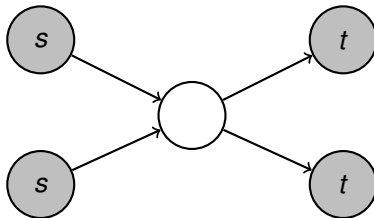
■ Bsp.:



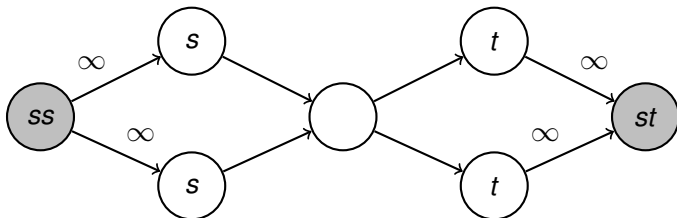
■ Hier

- $C = (\{s, q_1\}, \{t, q_0\})$
- $c = \{(s, q_0), (q_1, q_0), (q_1, t)\}$

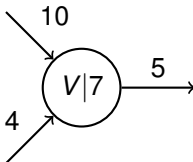
- Gegeben sei folgende Situation:



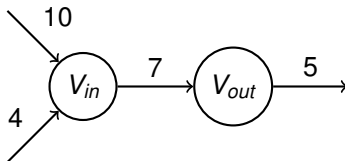
- Problem: Max-Flow Algorithmus kann nur mit einer Quelle und einer Senke arbeiten.
- Lösung: Erstelle Super-Quelle und Super-Senke und verbinde alle Quellen und Senken mit Kantengewicht ∞



- Gegeben sind Knoten mit Kapazität.
- Bsp.:



- Gegeben sind Knoten mit Kapazität.
- Bsp.:



- Erkennen eines Netzwerkfluss-Problems nicht immer einfach
- Was hilft?
 - Übung
 - Übung
 - ...

- Erkennen eines Netzwerkfluss-Problems nicht immer einfach
- Was hilft?
 - Übung
 - Übung
 - ...

- Erkennen eines Netzwerkfluss-Problems nicht immer einfach
- Was hilft?
 - Übung
 - Übung
 - ...

- Situation: Die Titanic ist gesunken. Es soll ermittelt werden wie viele Menschen gerettet werden können.
- Eingabe: X, Y, P mit X, Y Dimension der Fläche ($1 \leq X, Y \leq 30$) und P ($P \leq 10$) die Anzahl von Personen, welche gleichzeitig auf ein Holzbrett können.

Symbol	Bedeutung
*	Menschen auf Treibeis
~	Eiskaltes Wasser
.	Trebbeis
@	Großer Eisberg
#	Großes Holzbrett

- Gegeben sei nun folgende Eingabe:

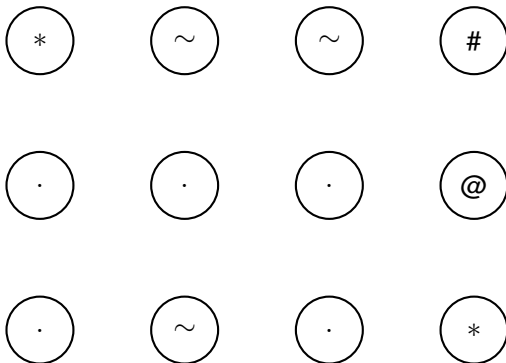
*	~	~	#
.	.	.	@
.	~	.	*

- Wandle in Graphen um...

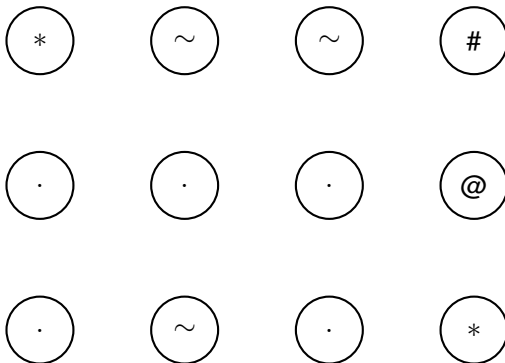
- Gegeben sei nun folgende Eingabe:

*	~	~	#
.	.	.	@
.	~	.	*

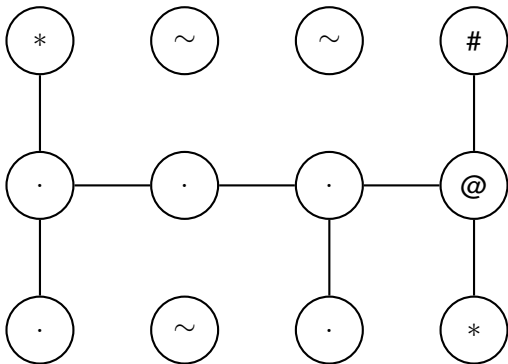
- Wandle in Graphen um...



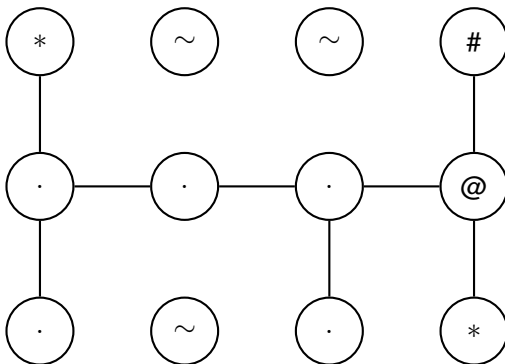
■ Verbinde alle Knoten, über die ein Weg möglich ist...



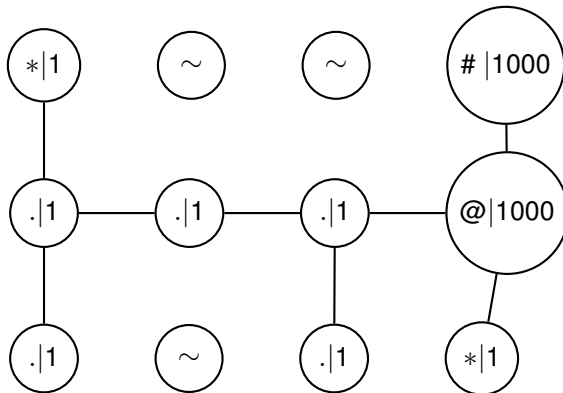
- Verbinde alle Knoten, über die ein Weg möglich ist...



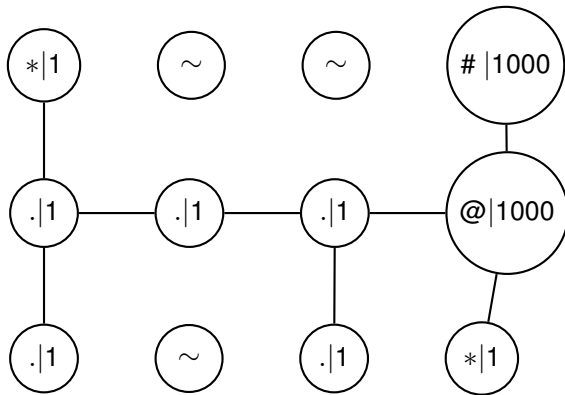
■ Füge Knotengewichte hinzu...



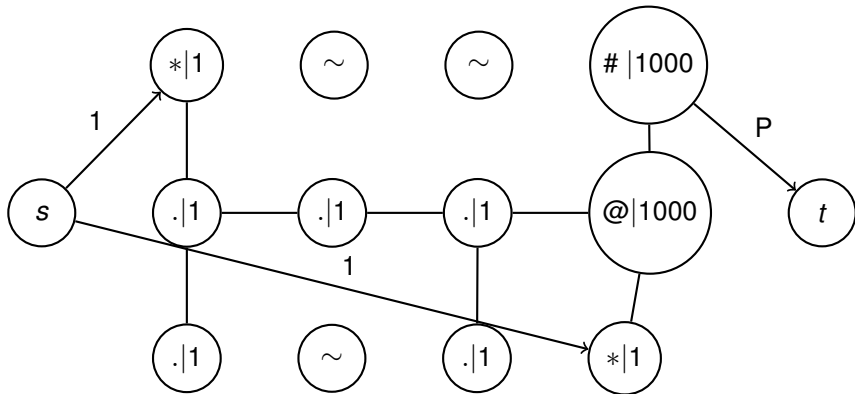
- ◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ 🔍 ↺ ↻



■ Verbinde alle Menschen mit s und alle Holzbretter mit t...



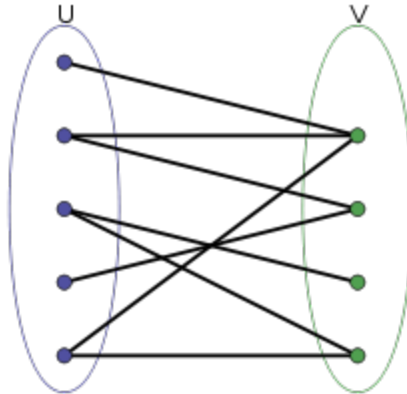
- Verbinde alle Menschen mit s und alle Holzbretter mit t...



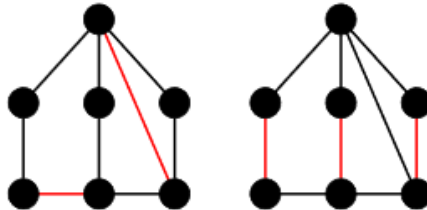
■ Bem.: Knotengewichte müssen noch aufgelöst werden

Bipartiter Graph

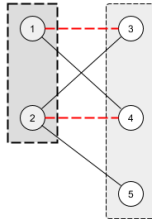
■ Bipartiter Graph



- Definitionen: Matching, maximales Matching, kardinalitätsmaximales Matching, perfektes Matching



- Kurz auf Laufzeit eingehen
- Beispiel: Primzahlen (Competitive Programming 3, Seite 180)
- Definitionen: Max Independent Set, Min Vertex Cover, Königs Theorem: —Min Vertex Cover— = —grtes Matching—



- Beispiel: Guardian of Decency (Competitive Programming 3, Seite 182)
- (Je nach verbleibender Zeit:) noch mehr Graphentheorie: bipartit \Leftrightarrow keine ungeraden Kreise, ...