

Exercice 1 *Démonstrations de cours*

1. Considérons l'estimateur empirique de la moyenne $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Calcul du biais

$$E[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_1] = E[X_1] = m \quad (1)$$

Calcul de la variance :

$$Var(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n Var(X_1) = \frac{1}{n} Var(X_1) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (2)$$

Estimateur sans biais de m à variance asymptotiquement nul \Rightarrow consistant.

2. Considérons l'estimateur empirique de la variance $\hat{V}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Calcul du biais :

$$\begin{aligned} E[\hat{V}_n] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[(X_i - \bar{X})^2] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (E[X_i^2] - 2E[X_i \bar{X}] + E[\bar{X}^2]) \end{aligned} \quad (3)$$

Or, nous avons :

— For any $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$E[X_i^2] = \sigma^2 + m^2 \quad (4)$$

— For any $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} E[X_i \bar{X}] &= E[X_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n E[X_i X_j] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1, j \neq i}^n E[X_i X_j] + \frac{1}{n} E[X_i^2] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1, j \neq i}^n E[X_i] E[X_j] + \frac{1}{n} (Var(X_i) + m^2) \\ &= \frac{n-1}{n} m^2 + \frac{1}{n} (\sigma^2 + m^2) \\ &= m^2 + \frac{1}{n} \sigma^2 \end{aligned} \quad (5)$$

—

$$E[\bar{X}^2] = Var(\bar{X}) + E[\bar{X}]^2 = \frac{\sigma^2}{n} + m^2 \quad (6)$$

Ainsi, finalement :

$$E[\hat{V}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\sigma^2 + m^2 - 2m^2 - \frac{2}{n} \sigma^2 + \frac{1}{n} \sigma^2 + m^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \quad (7)$$

Exercice 2 *Estimateur des moments d'une loi uniforme*

1. D'une part :

$$m_1(\theta) = E_\theta[X_i] = \int_{\mathbb{R}} x \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0;1]}(x) dx = \int_0^\theta x \frac{1}{\theta} dx = \frac{\theta}{2} \quad (8)$$

D'autre part :

$$\hat{m}_1(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (9)$$

Ainsi :

$$\frac{\hat{\theta}_n}{2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (10)$$

et donc :

$$\hat{\theta}_n = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (11)$$

2. L'espérance de $\hat{\theta}_n$ vaut :

$$E[\hat{\theta}_n] = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\theta}{2} = \theta. \quad (12)$$

Sa variance vaut :

$$Var(\hat{\theta}_n) = \frac{4}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n var(X_i) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^n \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n} \quad (13)$$

3. $\hat{\theta}_n$ est donc non biaisé. De plus, sa variance tend est asymptotiquement nulle. Ainsi, il s'agit d'un estimateur consistant.

Exercice 3 Comparaison d'estimateurs d'un paramètre d'une loi uniforme

1. Pour rappel, la fonction de répartition d'une variable aléatoire uniforme sur $[0; \theta]$ vaut $f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \mathbf{1}_{[0; \theta]}$.

Si un tel estimateur sans biais existe, on a :

$$E[S_n^{(1)}] = g(\theta). \quad (14)$$

Or, on a :

$$E[S_n^{(1)}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[T(X_i)] = E[T(X_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} T(x) f_\theta(x) dx = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} T(x) dx. \quad (15)$$

Ainsi, il vient :

$$\int_0^{\theta} T(x) dx = \theta g(\theta) \quad (16)$$

D'où :

$$T(x) = [xg(x)]' = xg'(x) + g(x). \quad (17)$$

Réciproquement, $T(x) = xg'(x) + g(x)$ convient.

2. (a) La fonction de répartition s'écrit (cas de tirages indépendants) :

$$\begin{aligned} F_X(x; \theta, n) &= P(X_{n:n} \leq x; \theta, n) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x; \theta, n) \\ &= P(X_1 \leq x; \theta, n) P(X_2 \leq x; \theta, n) \dots P(X_n \leq x; \theta, n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ (\frac{x}{\theta})^n & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & \text{si } x \geq \theta \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

Ainsi, en dérivant la fonction de répartition, on trouve la fonction densité :

$$f_{\theta,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ n^{\frac{1}{\theta}}(\frac{x}{\theta})^{n-1} & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{si } x \geq \theta \end{cases}, \quad (19)$$

ce qui s'écrit encore :

$$f_{\theta,n}(x) = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} \mathbf{1}_{[0,\theta]} \quad (20)$$

(b) Si un tel estimateur sans biais existe, on a :

$$E[S_n^{(2)}] = g(\theta). \quad (21)$$

Or, on a :

$$E[S_n^{(2)}] = E[\tilde{T}(X_{n:n})] = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}(x) f_{\theta,n}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}(x) \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} \mathbf{1}_{[0,\theta]} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} \tilde{T}(x) x^{n-1} dx. \quad (22)$$

Ainsi, il vient :

$$\int_0^{\theta} \tilde{T}(x) x^{n-1} dx = \frac{\theta^n}{n} g(\theta) \quad (23)$$

D'où :

$$\tilde{T}(x) = \frac{[x^n g(x)]'}{n x^{n-1}} = \frac{x g'(x)}{n} + g(x). \quad (24)$$

Réciproquement, $\frac{x g'(x)}{n} + g(x)$ convient.

3. Ici $g(x) = x$. Ainsi $T(x) = 2x$ et $\tilde{T}(x) = \frac{n+1}{n}x$. Le calcul du risque quadratique moyen de $S_n^{(1)}$ donne :

$$\begin{aligned} EQM(S_n^{(1)}, \theta) &= E[(S_n^{(1)} - \theta)^2] = E[S_n^{(1)2}] - 2E[S_n^{(1)}]\theta + \theta^2 = E[(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(X_i))^2] - 2\theta^2 + \theta^2 \\ &= \frac{1}{n^2} E[\sum_{i=1}^n T(X_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n T(X_i)T(X_j)] - \theta^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n E[T(X_i)]^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n E[T(X_i)T(X_j)] - \theta^2 \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n E[T(X_i)^2] + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n E[T(X_i)]E[T(X_j)] - \theta^2, \quad \text{indépendance des } X_i \\ &= \frac{1}{n^2} n E[T(X_1)^2] + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n E[T(X_1)]E[T(X_1)] - \theta^2, \quad X_i \text{ identiquement distribués} \\ &= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} T(x)^2 f_{\theta}(x) dx + \frac{1}{n^2} n(n-1)\theta^2 - \theta^2 \\ &= \frac{1}{n\theta} \int_0^{\theta} (2x)^2 dx - \frac{\theta^2}{n} \\ &= \frac{1}{3n} \theta^2 \end{aligned} \quad (25)$$

Le calcul du risque quadratique moyen de $S_n^{(1)}$ donne :

$$\begin{aligned} EQM(S_n^{(2)}, \theta) &= E[(S_n^{(2)} - \theta)^2] = E[S_n^{(2)2}] - 2E[S_n^{(2)}]\theta + \theta^2 = E[\tilde{T}(X_{n:n})^2] - 2\theta^2 + \theta^2 \\ &= \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}(x)^2 f_{\theta}(x) dx - \theta^2 \\ &= \int_0^{\theta} (\frac{n+1}{n})^2 x^2 \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx - \theta^2 \\ &= \frac{1}{n(n+2)} \theta^2 \end{aligned} \quad (26)$$

Finalement, la différence des erreurs quadratique s'écrit

$$EQM(S_n^{(2)}, \theta) - EQM(S_n^{(1)}, \theta) = \frac{1}{n(n+2)}\theta^2 - \frac{1}{3n}\theta^2 = \frac{1-n}{3n(n+2)}\theta^2, \quad (27)$$

ce qui est négatif, quel que soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ et quel que soit $n \geq 1$. Ainsi, $EQM(S_n^{(2)}, \theta) \leq EQM(S_n^{(1)}, \theta)$ et $S_n^{(2)}$ est préférable à $S_n^{(1)}$, qui est donc inadmissible pour tout $n \geq 1$.

Exercice 4 Matrice d'Information de Fisher et Borne de Cramer-Rao

1. La densité de probabilité s'écrit :

$$p(Z; (\beta_1, \beta_2)) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \beta_1 - \beta_2 t_i)^2\right) \quad (28)$$

Ainsi :

$$\ln(p(Z; (\beta_1, \beta_2))) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \beta_1 - \beta_2 t_i)^2 \quad (29)$$

Puis, en dérivant par rapport au couple (β_1, β_2) , on trouve :

$$\frac{\partial \ln(p(Z; (\beta_1, \beta_2)))}{\partial (\beta_1, \beta_2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ln(p(Z; (\beta_1, \beta_2)))}{\partial \beta_1} \\ \frac{\partial \ln(p(Z; (\beta_1, \beta_2)))}{\partial \beta_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (X_i - \beta_1 - \beta_2 t_i) \\ \sum_{i=1}^n t_i (X_i - \beta_1 - \beta_2 t_i) \end{bmatrix} \quad (30)$$

En notant $Y_i = X_i - \beta_1 - \beta_2 t_i$ et en remarquant que $Y_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, et que pour tout $i \neq j$, $Cov(Y_i, Y_j) = 0$, la matrice d'information de Fisher peut se calculer par :

$$\begin{aligned} F(\beta_1, \beta_2) &= Cov\left(\frac{\partial \ln(p(Z; (\beta_1, \beta_2)))}{\partial (\beta_1, \beta_2)}\right) = \frac{1}{\sigma^4} \begin{bmatrix} Var\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) & Cov\left(\sum_{i=1}^n Y_i, \sum_{i=1}^n t_i Y_i\right) \\ Cov\left(\sum_{i=1}^n Y_i, \sum_{i=1}^n t_i Y_i\right) & Var\left(\sum_{i=1}^n t_i Y_i\right) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sigma^4} \begin{bmatrix} n\sigma^2 & \sum_{i=1}^n t_i \sigma^2 \\ \sum_{i=1}^n t_i \sigma^2 & \sum_{i=1}^n t_i^2 \sigma^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} n & \bar{t} \\ \bar{t} & ||t||^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

avec $\bar{t} = \sum_{i=1}^n t_i$.

2. L'inverse de la matrice de Fisher s'écrit :

$$F^{-1}(\beta_1, \beta_2) = \frac{\sigma^2}{n||t||^2 - \bar{t}^2} \begin{bmatrix} ||t||^2 & -\bar{t} \\ -\bar{t} & n \end{bmatrix} \quad (32)$$

En appliquant la propriété proposé dans l'énoncé de l'exercice avec $\theta = (\beta_1, \beta_2)$ et $g(\beta_1, \beta_2) = \beta_1$, la borne de Cramer-Rao demandé s'écrit :

$$\frac{\partial g(\beta_1, \beta_2)}{\partial (\beta_1, \beta_2)}^T F^{-1}(\beta_1, \beta_2) \frac{\partial g(\beta_1, \beta_2)}{\partial (\beta_1, \beta_2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\sigma^2}{n||t||^2 - \bar{t}^2} \begin{bmatrix} ||t||^2 & -\bar{t} \\ -\bar{t} & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\sigma^2 ||t||^2}{n||t||^2 - \bar{t}^2} \quad (33)$$

3. On suppose à présent β_2 connu. Ainsi, la dérivation de la log-vraisemblance se fait uniquement par rapport à β_1 . Il vient :

$$\frac{\partial \ln(p(Z; \beta_1))}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \beta_1 - \beta_2 t_i), \quad (34)$$

et la matrice d'information de Fisher s'écrit ensuite :

$$F(\beta_1) = \frac{1}{\sigma^4} Var\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \frac{1}{\sigma^4} n\sigma^2 = \frac{n}{\sigma^2} \quad (35)$$

Finalement, une borne inférieure de la variance d'un estimateur sans biais de β_1 est cette fois $\frac{\sigma^2}{n}$. Cette borne est donc inférieure à la précédente. En fait, toute l'information est utilisée pour estimer β_1 dans ce cas, alors que dans le premier cas, il y a une dispersion de l'information sur l'estimation de β_1 et de β_2 .

Exercice 5 Estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre d'une loi uniforme

1. Notons pour commencer, que par définition du tirage de la loi uniforme proposée, on a pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$; $0 \leq x_i \leq \theta$. Rappelons également, que la vraisemblance est une fonction de θ pour des réalisations x_1, \dots, x_n données. Ainsi, la vraisemblance s'écrit :

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & \text{si } \theta \geq \max(x_1, \dots, x_n), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (36)$$

Ainsi, le θ maximisant la vraisemblance est solution de :

$$\max_{\theta \geq \max(x_1, \dots, x_n)} \frac{1}{\theta^n}. \quad (37)$$

dont la solution vaut $\max(x_1, \dots, x_n)$. Ainsi, l'estimateur du maximum de vraisemblance s'écrit :

$$\hat{\theta}_n = \max(X_1, \dots, X_n). \quad (38)$$

2. Sa fonction de répartition s'écrit :

$$\begin{aligned} F_{\hat{\theta}_n} &= \mathbb{P}(\hat{\theta}_n \leq x) = \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i \leq x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 \leq x)^n = \mathbb{P}(X_1 \leq x)^n = \begin{cases} (\frac{x}{\theta})^n & x \leq \theta, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

Ainsi, sa densité s'écrit :

$$f_{\hat{\theta}_n}(x) = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} \mathbb{1}_{[0; \theta]}(x) \quad (40)$$

3. Son espérance s'écrit donc :

$$E[\hat{\theta}_n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\hat{\theta}_n}(x) dx = \int_0^{\theta} x \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} x^n dx = \frac{n}{n+1} \theta. \quad (41)$$

D'où un biais :

$$B(\hat{\theta}_n, \theta) = \frac{n}{n+1} \theta - \theta = \frac{-1}{n+1} \theta \quad (42)$$

D'autre part, on trouve :

$$E[\hat{\theta}_n^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{\hat{\theta}_n}(x) dx = \frac{n}{\theta^n} \int_0^{\theta} x^{n+1} dx = \frac{n}{n+2} \theta^2. \quad (43)$$

Ainsi :

$$Var(\hat{\theta}_n) = E[\hat{\theta}_n^2] - E[\hat{\theta}_n]^2 = \frac{n}{n+2} \theta^2 - \left(\frac{n}{n+1} \theta\right)^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} \theta^2 \quad (44)$$

Enfin, le risque quadratique moyen s'écrit :

$$RQM(\hat{\theta}_n, \theta) = Biais(\hat{\theta}_n, \theta)^2 + Var(\hat{\theta}_n) = \frac{1}{(n+1)^2} \theta^2 + \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} \theta^2 = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \theta^2 \quad (45)$$

Exercice 6 Estimateur du maximum de vraisemblance

1. Par le fait que les variables sont indépendantes et identiquement distribuées, la vraisemblance s'écrit :

$$L(x_1, \dots, x_n; \theta) = f(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(X_i = x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta} \exp\left(\frac{-x_i}{2\theta}\right) I_{\mathbb{R}_+}(x_i) \quad (46)$$

Ainsi, la Log-vraisemblance s'écrit :

$$\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \sum_{i=1}^n \left(\ln(x_i) - \ln(\theta) - \frac{x_i^2}{2\theta} \right) = -n \ln(\theta) + \sum_{i=1}^n (\ln(x_i)) - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n (x_i^2) \quad (47)$$

Calculons les dérivées d'ordre 1 et 2 par rapport à θ de cette expression. On trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} &= -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \frac{\partial^2 \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta^2} &= \frac{n}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases} \quad (48)$$

Ainsi, $\frac{\partial \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0$ équivaut à :

$$\theta = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (49)$$

et pour cette valeur de θ , on trouve :

$$\frac{\partial^2 \ln L(x_1, \dots, x_n; \theta)}{\partial \theta^2} = \frac{-4n^3}{\left[\sum_{i=1}^n x_i^2 \right]^2} \quad (50)$$

Ainsi, la fonction de vraisemblance admet un unique extremum, et il s'agit d'un maximum global. D'où l'estimateur du maximum de vraisemblance suivant :

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2. \quad (51)$$

2. Moyenne :

$$E[\hat{\theta}] = E\left[\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n x_i^2\right] = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n E[x_i^2] = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n 2\theta = \theta \quad (52)$$

Variance (la troisième égalité provient de l'indépendance des x_i) :

$$\begin{aligned} Var(\theta) &= \frac{1}{4n^2} Var\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) = \frac{1}{4n^2} \sum_{i=1}^n Var(x_i^2) + \frac{1}{4n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n Covar(x_i^2, x_j^2) = \frac{1}{4n} Var(x_1^2) + 0 \\ &= \frac{1}{4n} (E[x_1^4] - E[x_1^2]^2) = \frac{1}{4n} (8\theta^2 - 4\theta^2) = \frac{\theta^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned} \quad (53)$$

Ainsi, l'estimateur est non biaisé et converge vers θ en moyenne quadratique.