Estimation et Identification statistiques
Contrôle Année 2021-2022

Les exercices sont indépendants.

Exercice 1 On collecte une mesure z reliée à un paramètre θ par $z = \theta^2 + b$. Le bruit b a une densité de probabilité uniforme sur $[0\ ,\ 2]$ et est indépendant de θ. La densité de probabilité a priori de θ est uniforme sur $[0,\ 1]$.

1. Calculer la densité a posteriori $f_{\theta|z}$ du paramètre θ étant donnée l'observation z. *On ne calculera pas l'expression de $f(z)$ de la formule de Bayes.*
2. Déterminer les caractéristiques de la densité a posteriori de θ dans les deux cas suivants : i) $z = 2.5$, ii) $z = 0.5$.

Exercice 2 *Comparaison entre deux estimateurs pour une loi exponentielle.*
Le tableau ci-dessous répertorie la durée de vie mesurée (en année) de $n = 20$ capteurs indépendants.

0.57	0.41	0.31	1.61	0.60	1.46	1.46	1.53	0.12	0.42
1.17	0.06	1.53	1.16	1.01	1.23	0.56	0.72	1.16	0.52

La densité de probabilité de cette durée de vie X_i, pour $i \in \{1, ..., n\}$, est supposée modélisée par une loi exponentielle de paramètre θ, soit $f_{X_i}(x) = \theta e^{-\theta x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}+}(x)$. On souhaite estimer θ à l'aide de trois estimateurs différents.

1. Calculer l'espérance et la variance associées à cette loi en fonction de θ
2. On considère un premier estimateur $\hat{\theta}_{ME} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$. Montrer qu'on a $E[\hat{\theta}_{ME}] = \frac{n}{n-1}\theta$. En déduire que l'estimateur $\hat{\theta}_{ME2} = \frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$ est un estimateur non biaisé de θ.
3. En utilisant les données numériques du tableau précédent, calculer une estimation de θ basée sur l'estimateur $\hat{\theta}_{ME2}$.
4. Donner l'expression de la vraisemblance du n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ en fonction de θ. En utilisant la log-vraisemblance, déterminer l'estimateur au sens du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$ de θ. Cet estimateur est il biaisé ?
5. En utilisant les données numériques du tableau précédent, calculer une estimation de θ basée sur l'estimateur $\hat{\theta}_{MV}$.

Exercice 3 Soit un signal temporel $z(t) = \theta_1 \exp(-\theta_2 \times t) + b(t)$ où pour tout t, $b(t)$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et de variance σ^2, avec indépendance entre $b(t)$ et $b(t')$ pour tout $t \neq t'$. Le vecteur des paramètres que l'on cherche à estimer est $\theta = \begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2\end{bmatrix}^T$. On souhaite obtenir une estimation de ce vecteur à partir de deux mesures $z(t_1)$ et $z(t_2)$ prises aux instants distincts t_1 et t_2.
On désire choisir les deux temps de mesure t_1 et t_2 de façon à obtenir l'estimé le plus précis du vecteur θ. Une fonction de cette précision peut être obtenue à partir des caractéristiques de la matrice d'Information de Fisher, en particulier de son déterminant. Plus le déterminant de cette matrice est grand, plus son inverse (correspondant à la borne de Cramer et Rao qui caractérise la dispersion de l'estimé) sera petit. On cherche donc t_1 et t_2 qui maximise le déterminant de la matrice d'information de Fisher (on parle de D-optimalité).

1. Écrire la vraisemblance puis la Log-vraisemblance du vecteur de mesures $\begin{bmatrix}z(t_1) & z(t_2)\end{bmatrix}^T$ conditionnellement à θ
2. Calculer l'expression de la Matrice d'information de Fisher associée.

3. Calculer le déterminant de cette matrice et déterminer le couple (t_1, t_2) qui le maximise en fonction des composantes de θ et des caractéristiques du bruit.
4. Est il possible de choisir ces temps de mesure pour réaliser l'expérience optimale, sans autre connaissance du système ?

Exercice 4 Estimation des paramètres d'une loi Gamma. On considère la variable aléatoire X qui suit une loi Gamma de paramètres α et β dont la densité s'exprime sous la forme $f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$ où $\Gamma(\alpha)$ est un coefficient de normalisation. Cette loi admet comme espérance $E_{\alpha,\beta}[X] = \frac{\alpha}{\beta}$ et comme variance $Var_{\alpha,\beta}(X) = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

1. Déterminer des estimateurs des paramètres α et β à partir des estimateurs des moments d'ordre 1 et 2 de X.

Exercice 5 On dispose d'un n-échantillon $X_1, \ \ldots, X_i, \ldots, X_n$, où pour tout $i\{1, ..., n\}$, la variable aléatoire X_i a pour densité $f_a(x) = \frac{(k+1)x^k}{a^{k+1}} \mathbf{1}_{[0,\ a]}(x)$ avec k un paramètre connu $k > -1$.

1. Calculer $E_a[X_i]$ l'espérance de X_i. En déduire un estimateur du paramètre a. S'agit-il d'un estimateur sans biais ? Que dire de sa consistance (on considérera la convergence presque sûre et dans L_2) ?
2. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de a ? *On justifiera bien qu'il s'agit d'un maximum.*
3. Déterminer la fonction de répartition, puis la densité de la loi de la variable aléatoire définie par $\overline{X}_n = max_{i=1\ldots n} X_i$ pour cet échantillon. Calculer son espérance. Déduire de ceci et de la question précédente un estimateur sans biais de a.