

COMMANDE LQG ET COMPARAISON AVEC L'ACTION INTÉGRALE SUR UNE BOUCLE SCALAIRE D'OPTIQUE ADAPTATIVE

Consignes : Les questions indiquées par → ne nécessitent pas l'utilisation de Matlab-Simulink. Un fichier avec des instructions déjà préparées est disponible dans l'archive (instructions.m).

On s'intéresse à la commande tip et tilt d'un système d'optique adaptative. Ces deux modes de basculement sont en effet souvent asservis séparément, et sont généralement considérés comme étant indépendants, ce qui conduit à une commande scalaire (monovariable) sur chaque mode. Un tel système comprend alors soit un miroir plan en plus du miroir déformable (ce qui est le cas du système considéré ici), soit un miroir déformable monté sur une monture tip-tilt.

Nous avons à disposition des mesures acquises sur le système d'optique adaptative multi-conjuguée GeMS installé à l'Observatoire de Gemini Sud¹, au Chili, sur un télescope de 8 m de diamètre. La boucle d'optique adaptative utilise 3 étoiles guide naturelles et 5 étoiles guide laser. L'asservissement du tip/tilt n'utilise que les mesures sur étoiles naturelles, et est indépendant de l'asservissement des aberrations optiques d'ordre plus élevé, qui lui est basé sur l'information fournie par les étoiles laser. Une vue schématique du banc d'optique adaptative, dénommé CANOPUS, est donnée en Figure 1.

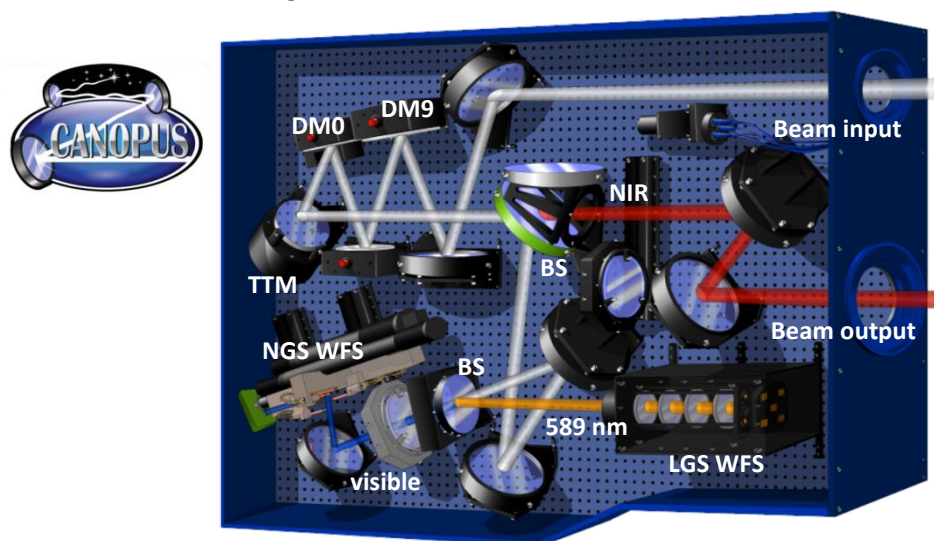
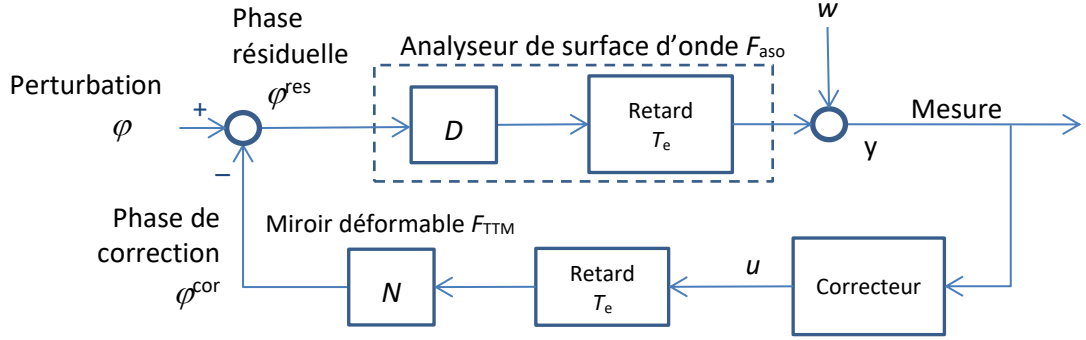


Figure 1 : Le banc d'optique adaptative CANOPUS du système GeMS. Le miroir de tip/tilt (TTM) est conjugué à -2 km, un miroir déformable est dans la pupille (DM0, conjugué à 0 km), un autre miroir déformable est conjugué à 9 km (DM9). Deux lames séparatrices (*beam splitter* BS) séparent le flux : l'un pour envoyer le proche infrarouge (NIR) vers la caméra d'imagerie, l'autre pour l'analyse de front d'onde en envoyant le visible vers les analyseurs sur étoiles guide naturelles et le 589 nm vers les analyseurs sur étoiles guide laser.

La mesure de basculement est réalisée par un analyseur de type diode 4 quadrants intégrant le flux sur une période d'échantillonnage de la boucle T_e . La mesure de basculement est déduite de la position du spot sur la photodiode. Le miroir de tip/tilt (plan, 13 cm de diamètre) est actionné par des actionneurs piézo-électriques. Il a été conçu pour avoir une bande passante d'au moins 300 Hz.

¹ Remerciements à Gaetano Sivo, Vincent Garrel, Chad Trujillo et le staff de Gemini Sud, ainsi que Lucie Leboulleux (ex-stagiaire), et Rémy Juvénal pour les traitements sur les données.

Voici la représentation par schéma-bloc de la boucle d'asservissement à temps discret. Pour désigner le basculement, on parlera aussi indifféremment de front d'onde ou de phase.



La conception de l'asservissement de ce système peut se faire à temps discret. La commande u est appliquée au miroir à la période T_e , et on considère un retard d'une période T_e (dû au temps de calcul) entre la commande u et l'obtention de la phase de correction φ^{cor} générée par le miroir. On ne s'intéresse ici qu'à un mode de basculement, le signaux sont donc scalaires et on peut considérer que les opérateurs D et N sont unitaires. Nous aurons donc pour la phase de correction :

$$\varphi_k^{cor} = u_{k-1}.$$

La phase de correction φ^{cor} est soustraite à la phase turbulente φ pour donner la phase résiduelle φ^{res} :

$$\varphi_k^{res} = \varphi_k - \varphi_k^{cor}.$$

La performance est classiquement évaluée grâce à la variance du résidu après correction $\text{Var}(\varphi^{res})$, qui diminue quand la qualité de l'image (rapport de Strehl) augmente.

La mesure de la phase résiduelle φ^{res} est réalisée par le capteur (photodiode 4 quadrants). A l'instant k où la commande u_k doit être appliquée, la dernière mesure disponible est y_k , définie par :

$$y_k = \varphi_{k-1}^{res} + w_k \quad (0)$$

où w est le bruit de mesure blanc gaussien de variance σ_w^2 . La commande u est calculée par un correcteur dont la fonction de transfert est notée $C(z)$. Le chronogramme du système est donné en Figure 2.

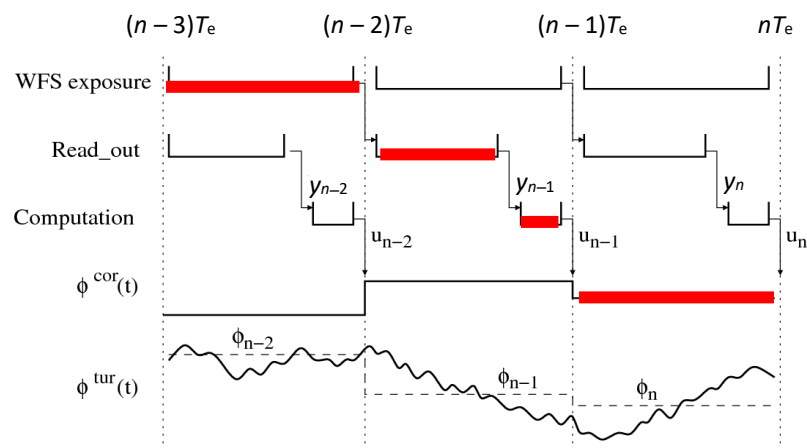


Figure 2 : Le chronogramme détaillant les temps affectés aux différentes opérations réalisées pendant une période d'échantillonnage T_e .

I. Fonction de transfert de réjection de l'intégrateur

1. Calcul de la fonction de transfert de réjection, étude de la boucle

- ➔ Calculez la fonction de transfert de l'analyseur de surface d'onde $F_{aso}(z)$ et de celle du miroir plan $F_{TM}(z)$
- ➔ Calculez la fonction de transfert en boucle ouverte $L(z)$ et la fonction de sensibilité (ou fonction de transfert de réjection) $S(z)$ en fonction du correcteur $C(z)$. Tracez le diagramme de Bode de $S(z)$.
- ➔ La valeur de T_e est 5 ms. Quelle sera la fréquence de la boucle ? Que vaut la fréquence de Nyquist ?

II. Commande LQG – Filtre de Kalman

Le critère de performance à minimiser est la variance de la phase résiduelle, soit

$$J(u) = \text{Var}(\varphi^{\text{res}})$$

En utilisant le théorème de séparation stochastique, on peut montrer que la commande optimale du système déterministe (cas irréaliste) est

$$u_k = \varphi_{k+1}.$$

La commande optimale lorsque la phase est inconnue (cas réaliste) sera alors donnée par

$$u_k = \hat{\varphi}_{k+1|k}.$$

La prédiction $\hat{\varphi}_{k+1|k}$ correspond à l'espérance conditionnelle de la perturbation φ_{k+1} sachant toutes les informations disponibles jusqu'à l'instant k , donc jusqu'à la dernière mesure y_k . Cette prédiction est obtenue grâce à un filtre de Kalman asymptotique basé sur la représentation d'état du système :

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + v_k \\ \varphi_k = C_\varphi x_k \\ y_k = Cx_k - u_{k-2} + w_k \end{cases}$$

Dans le cas du système ci-dessus, on peut écrire l'équation de prédiction sous la forme

$$\hat{x}_{k+1|k} = A\hat{x}_{k|k-1} + L_\infty (y_k - \hat{y}_{k|k-1}). \quad (1)$$

Le gain asymptotique de prédiction L_∞ est défini par

$$L_\infty = A\Sigma_\infty C^T (C\Sigma_\infty C^T + \Sigma_w)^{-1}$$

où Σ_∞ , la matrice de covariance d'erreur d'estimation, est la solution de l'équation de Riccati algébrique discrète

$$\Sigma_\infty = A\Sigma_\infty A^T + \Sigma_v - A\Sigma_\infty C^T (C\Sigma_\infty C^T + \Sigma_w)^{-1} C\Sigma_\infty A^T$$

Dans le cas de cette étude, L_∞ a déjà été calculé.

Pour info : la fonction `idare` de Matlab permet de résoudre l'équation de Riccati discrète et renvoie en sortie la solution de l'équation ainsi que le gain L_∞ avec la syntaxe suivante :

```
>> [Siginf, vp, Linft]=idare(A',C', Seta, sig2w)
>> Linf=Linft' ;
```

III. Implémentation – Résultats – Comparaison avec l'intégrateur

2. Équations à implémenter

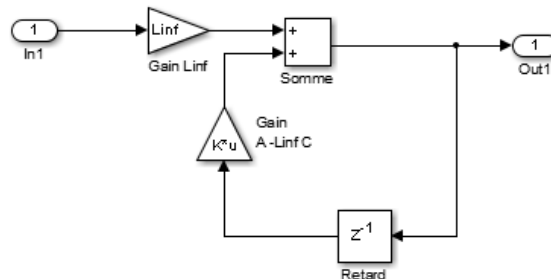
- ➔ En exprimant $\hat{y}_{k|k-1}$ en fonction de $\hat{x}_{k|k-1}$ à l'aide de l'équation de mesure (0), montrer que (1) se réécrit sous la forme

$$\hat{x}_{k+1|k} = (A - L_{\infty}C)\hat{x}_{k|k-1} + L_{\infty}(y_k + u_{k-2}). \quad (2)$$

- ➔ En déduire l'expression de u_k sous la forme $u_k = P\hat{x}_{k+1|k}$ et définir P .

3. Implémentation sous Simulink

- Ouvrir dans BOA.slx le bloc Observateur (double-cliquer pour voir le contenu). Ce sous-système « Observateur » a la forme ci-dessous :



- ➔ Faire l'analogie avec l'équation (2) pour comprendre quoi mettre sur l'entrée In1 et ce que délivre la sortie Out1.
- Mettre en place dans BOA.slx la commande LQG avec le filtre de Kalman.

Toutes les instructions Matlab données dans le texte se trouvent dans le fichier `instructions.m`

IV. Mise en œuvre

- Lancer Matlab et Ouvrir le fichier BOA.slx.

4. Turbulence.

Le fichier de données `geminiTT.mat` (`load geminiTT`) contient des mesures de tilt en secondes d'arc enregistrées à 200 Hz sur le système d'optique adaptative GeMS :

- ✓ `turb_gems` : les instants de mesure (en secondes, 1^{ère} colonne) et les valeurs de tilt (en secondes d'arc, 2^{ème} colonne),
 - ✓ les matrices identifiées A et C , et le gain L_{∞} permettant d'implémenter le filtre de Kalman. Le modèle identifié est un modèle ARMA d'ordre 30 ;
 - ✓ la matrice P qui permet d'obtenir la commande à partir de l'état prédit,
 - ✓ `dsp_perturb` : la DSP théorique (normalisée) correspondant au modèle de perturbation, ainsi que l'échelle en fréquence ff correspondante.
- Une estimée de la DSP de ces données, ainsi que la DSP du modèle identifié sont tracés dans la Figure 3 ci-dessous.
 - ➔ Que remarque-t-on de notable sur la DSP ?
 - Que vaut la variance de la perturbation `var(phitur.Data)` ?

5. Résultats et comparaison

- Évaluer les performances de la commande à action intégrale avec `var(phiresInt.Data)`. Comparer le résultat avec `var(phitur.Data)`. Que constate-t-on ? Que se passe-t-il quand on augmente la valeur du gain g ?

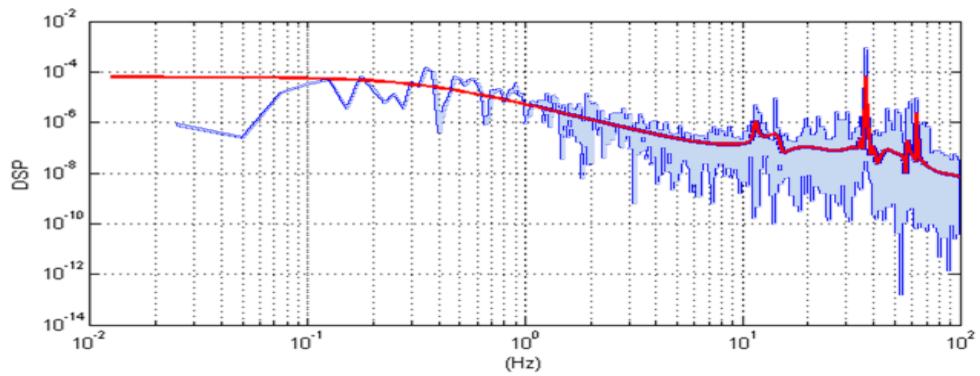


Figure 3 : DSP de la perturbation en secondes d'arc carré (en bleu) et modèle de DSP identifié à partir des données² (en rouge), en fonction de la fréquence (Hz).

- Évaluer les performances de la commande LQG avec `var(phiresLQG.Data)` et comparer le résultat à `var(phitur.Data)` et à `var(phiresInt.Data)`. Que peut-on dire du résultat ?
- De combien de pourcents a-t-on ici diminué la variance de l'intégrateur ?

Avec l'outil d'analyse, on a tracé en Figure 4 les gains des fonctions de sensibilité pour l'intégrateur et la commande LQG, et on a rajouté la DSP de la perturbation (en rouge).

- Commenter, en vous appuyant sur la figure 4, les performances obtenues.

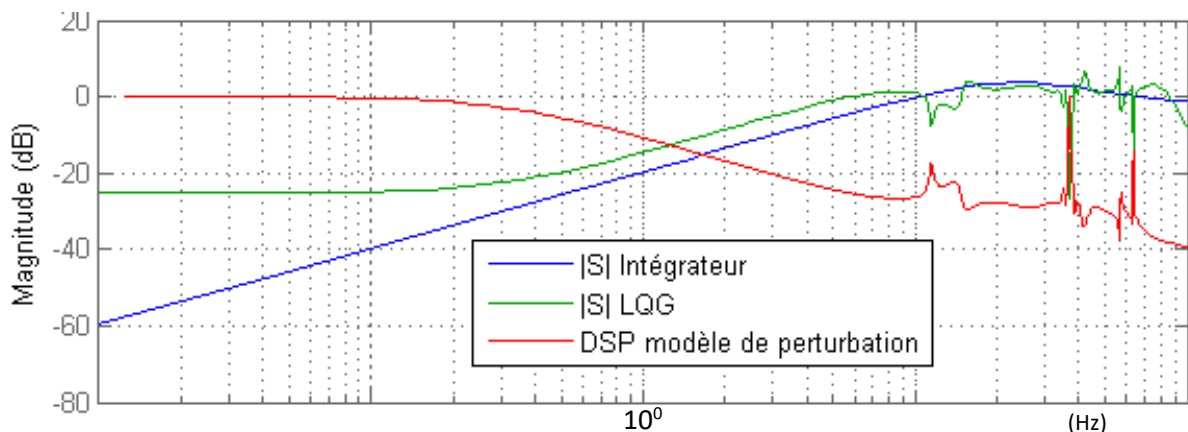


Figure 4 : Module des fonctions de sensibilité de la commande LQG (vert), de l'intégrateur (bleu), superposées à la perturbation (rouge).

- Exécuter le script `tracerDSP.m` pour tracer dans une même fenêtre graphique, en partie haute, la DSP de la phase turbulente, de la phase résiduelle obtenue avec l'intégrateur et de la phase résiduelle obtenue avec la commande LQG, et en partie basse les DSP cumulées correspondantes. Les deux fenêtres graphiques correspondent l'une à une échelle de fréquences linéaire et l'autre à une échelle logarithmique.
- En étudiant la forme des DSP cumulées, que peut-on dire sur la compensation des vibrations par l'intégrateur et par le LQG ?

² Identification issue de [R. Juvenal, C. Kulcsár, H.-F. Raynaud & al AO4ELT 2015, *Tip-tilt modeling and control for GeMS: a performance comparison of identification techniques*]