MA201 1

S T Q Q S S D

__/__/__

exercice 2:

moments d'une loi uniforme. soit $X_1, \dots, X_n$ un n-échantillon suivant la loi $\mathcal{U}_{[0,\theta]}$

1. calculer un estimateur de θ par la méthode des moments à l'ordre 1

seance 1 slide 32

$m_K(\hat{\theta}_n^{(K)}) = \hat{m}_K \quad \forall K \geq 0$

$m_K(\theta) = E_\theta[X_i^K] \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ (I)

$\hat{m}_K = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^K$; moment empirique (II)

on note $E[X_i^1] = \int_0^\theta x f(x)\, dx$

$= \int_0^\theta x \frac{1}{\theta} dx$

$= \frac{1}{\theta} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^\theta = \frac{\theta}{2}$

$\hat{m}_1 \overset{I}{=} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \overset{II}{=} \frac{\hat{\theta}}{2} \rightarrow \hat{\theta} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

2. calculer l'espérance:

$E[\hat{\theta}] = E\left[\frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\right] = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta}{2} = \theta$

calculer variance

$V[\hat{\theta}_n] = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} V[X_i] = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$

$V[X_i] = E[X_i^2] - E[X_i]^2$

$= \int_0^\theta x^2 f(x)\, dx - \dots$

$= \frac{1}{\theta} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^\theta = \frac{\theta^2}{3} - \dots$

$= \frac{\theta^2}{3} - \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{12}$

calculer le risque

$r_{\hat{\theta}_K} = b_{\hat{\theta}} + V_{\hat{\theta}}$ calculer le biais $r_{\hat{\theta}_K} = \frac{\theta^2}{3n}$

$= 0 + \frac{\theta^2}{3n}$

MA2012

___/___/___

S T Q Q S S D

exercice 2:

3 on note que $b\hat{\theta} = 0 \rightarrow$ non biais

on note que $\lim_{n \to \infty} V[\hat{\theta}n] \to 0 \therefore$ consistant

exercice 6:

$X_i \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$ densité de probabilité : $f(x,\theta) = \frac{x}{\theta} \exp\left[\frac{-x^2}{2\theta}\right] \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$ → Rappeler

1:

en considère

$E[X_i] = \sqrt{\pi/2}\sqrt{\theta}$ I

$E[X_i^2] = 2\theta$ II

$E[X_i^3] = (3\sqrt{\pi/2})\theta\sqrt{\theta}$ III

$E[X_i^4] = 8\theta^2$ IV

$L(\theta, x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x,\theta)$

$\log(L(\theta, x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^{n} \log(f(x,\theta))$

$= \sum_{i=1}^{n} \log(x_i/\theta) - x_i^2/2\theta$

$= \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) - n\log(\theta) - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\frac{\partial \log(L(\theta, x_1, \dots, x_n))}{\partial\theta} = 0 - \frac{n}{\theta} - \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff$

$\frac{n}{\theta} = \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \rightarrow \theta = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

$\hat{\theta}n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

2: $E(\hat{\theta}n) = \frac{1}{2n} n \underbrace{E[X_i^2]}_{(II)} = \theta$

$V(\hat{\theta}n) = \frac{1}{4n^2} \sum_{i=1}^{n} V[X_i^2] = \frac{1}{4n} V[X_i^2] = \frac{1}{n}\theta^2$

$V[X_i^2] = E[X_i^4] - E[X_i^2]^2$
$= 8\theta^2 - 4\theta^2$
$= 4\theta^2$

on note que non biaisé car $E(\hat{\theta}n) = \theta$

converge vers θ $V(\hat{\theta}n) = \frac{1}{n}\theta^2 \xrightarrow{n \to \infty} 0$

spiral®

MA2013

S T Q Q S S D   __/__/__

exercice 4:

séance 1 slide 19

$f(Z=z) = \frac{1}{(\tau\sqrt{2\pi})^n} e^{\frac{-(z-\mu)^T(z-\mu)}{2\tau^2}}$ avec $z = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$\log(L) = -n\log(\tau\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\tau^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\beta_1-\beta_2 t_i)^2$

vraisemblance

$\theta = \begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}$; $\frac{\partial \log L}{\partial\theta} = \begin{bmatrix}\frac{\partial\log L}{\partial\beta_1}\\ \frac{\partial \log L}{\partial\beta_2}\end{bmatrix} = \frac{-1}{\tau^2}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n x_i-\beta_1-\beta_2 t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i(x_i-\beta_1-\beta_2 t_i)\end{bmatrix}$

$\frac{\partial \log L(x_1,\dots,x_n,\beta_1,\beta_2)}{\partial(\beta_1,\beta_2)^T} = \frac{1}{\tau^2}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n x_i-\beta_1-\beta_2 t_i \\ \sum_{i=1}^n t_i(x_i-\beta_1-\beta_2 t_i)\end{bmatrix} \Rightarrow Y_i = X_i-\beta_1-\beta_2 t_i$

$= \frac{1}{\tau^2}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n t_i Y_i\end{bmatrix}$ avec Y_i et Y_j indépendants pour $i \neq j$
$\forall i,\ Y_i \sim \mathcal{N}(0,\tau^2)$

ainsi → chercher covariance : $cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

↳ wikipedia

$M_F = Cov\left(\frac{\partial \log L}{\partial(\beta_1,\beta_2)^T}\right)$ où $\mathbb{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbb{V}(Y_i)}{\tau^2} = n\tau^2$

$= \frac{1}{\tau^4}\begin{bmatrix}\mathbb{V}(x) & cov(x,y)\\ cov(y,x) & \mathbb{V}(y)\end{bmatrix}$ $\mathbb{V}(y) = \sum_{i=1}^n t_i \mathbb{V}(Y_i) = \tau^2 \sum_{i=1}^n t_i^2$

$Var(Z) = \begin{bmatrix} Var(X_1) & \cdots & cov(X_1,X_n) \\ \vdots & & \vdots \\ Cov(X_p,X_1) & \cdots & cov(X_p,X_n) \\ \vdots & & \vdots \\ Cov(X_n,X_1) & \cdots & Var(X_n) \end{bmatrix}$

wikipedia

$cov(X,Y) = E(XY) - \overset{0}{\cancel{E(X)}}E(Y)$

$E(XY) = \sum_{i=1}^n t_i \frac{E(Y_i)^2}{\tau^2}$; $V(Y_i) \overset{II}{=} E(Y_i^2) - E(Y_i)^2$

$= \tau^2 \sum_{i=1}^n t_i$

___/___/___ S T Q Q S S D

$cov(X,Y) = E(X,Y) - \cancel{E(X)}^{0} E(Y)$; $\mathbb{E}(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} t_i$ $\mathbb{E}(Y_i^2) = \tau^2 \sum_{i=1}^{n} t_i$

donc $M_F(\theta) = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} t_i \\ \sum_{i=1}^{n} t_i & \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \end{bmatrix}$ matrice d'information de Fisher

2. $g(\theta) = g(\beta_1, \beta_2) = \beta_1$

borne de Cramer-Rao d'un estimateur de $g(\theta) = \beta_1$ s'écrit

$BCR = [1, 0]\ M_F(\theta)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$[1\ 0]\ \frac{1}{\det(M_F(\theta))} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} t_i^2 & -\sum_{i=1}^{n} t_i \\ -\sum_{i=1}^{n} t_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$BCR(\beta_1) = \frac{1}{\det(M_F(\theta))} \sum_{i=1}^{n} t_i^2$ avec $\det(M_F(\theta)) = \frac{1}{\tau^2}\left(n \sum_{i=1}^{n} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2\right)$

$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} = \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \beta_1 - \beta_2 t_i)$

$I(\beta_1) = Var\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1}\right) = \frac{1}{\tau^4} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{n}{\tau^2}$

$BCR(\beta_1) = \frac{\tau^2}{n}$; $BCR(g(\theta) = \beta_1) = \sum_{i=1}^{n}$

devrait être mineur que l'antérieur

exercice 3.

on cherche T tel que $\mathbb{E}[\hat{S}_n^{(1)}] = \theta$

$\mathbb{E}[\hat{S}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[T(X_i)]$; $\mathbb{E}[T(X_i)] = \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) f(x)\, dx$

$= \int_0^{\theta} T(x) \frac{1}{\theta}\, dx$

mcu201.5

S T Q Q S S D

__/__/__

$$\mathbb{E}[T(X_i)] = \int_0^{\theta} T(x) \cdot \frac{1}{\theta}\, dx$$

$$= +\frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} T(x)\, dx = g(\theta)$$

$$g(\theta) \cdot \theta = \int_0^{\theta} T(x) dx$$ dérive ; il faut admettre que $T(x)$ est défine en $x=0$

$$T(\theta) = g(\theta) + \theta g(\theta')$$

on cherche $\tilde{T}$ tel que (tq) $\mathbb{E}[\tilde{T}(X_{n:n})] = g(\theta)$

$$\mathbb{E}[\tilde{T}(X_{n:n})] = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}(x)\, f_{\theta,n}(x)\, dx$$

$$\int_0^{\theta} \tilde{T}(x) \cdot \frac{n\, x^{n-1}}{\theta^n}\, dx$$

$$\frac{n}{\theta^n} \int \tilde{T}(x)\, x^{n-1}\, dx$$

on peut $\int_0^{\theta} \tilde{T}(x) x^{n-1}\, dx = \frac{g(\theta)\, \theta^n}{n}$

$$\tilde{T}(\theta) \cdot \theta^{n-1} = g'(\theta)\frac{\theta}{n} + g(\theta)$$

$$R(\hat{S}_n^{(2)}) = b^2(\tilde{S}_n^{(2)}) = Var(\tilde{S}_n^{(2)})$$

$$= Var\left(1/n \sum_{i=1}^{n} T(X_i)\right)$$

$\to$ consideration exercice

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(2X_i)$$

$$= \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{\theta^2}{3n^2}$$

__ / __ / __ S T Q Q S S D

ma201 statistique vendredi 16/09/2021

correction RC1

exercice 1

soit n-échantillon $X_1, \dots, X_n$ suivant une loi de moyenne m et de variance v

définition:

n-échantillon MA101 deuxième partie, chapitre 3.2: sous ensemble de taille n de la population (pas complet, définition après)

moyenne MA101 2e partie, chapitre 2.2.1: $\bar{x} = 1/n \sum^n i=1 \; x_i$

variance: MA101 2e partie, chapitre 2.2.2 $v = 1/n \sum^n i=1 \; (x_i - \bar{x})^2$

part 1: calculer biais et variance de l'estimateur empirique de la moyenne. en déduire qu'il est constant

définition:

biais: MA101 2e partie chapitre 4.3.1 soit $\bar{V}_n$ un estimateur de v défini à partir d'un échantillon de loi $\mathbb{P}_\theta$ donc le biais de l'estimateur V_n est défini par: $B_\theta(\bar{V}_n, v) = \mathbb{E}_\theta[\bar{V}_n] - v$; quand $B_\theta(\bar{V}_n, v) = 0$ $\bar{V}_n$ est non biaisé (explication significa dans le livre pour tout)

variance: MA101 2e partie chapitre 4.3.2 $VAR(\bar{V}_n) = \mathbb{E}_\theta[(\bar{V}_n - \mathbb{E}_\theta(\bar{V}_n))^2]$

estimateur: MA101 2e partie chapitre 4.2 soit θ le paramètre d'une loi P_θ, $\theta \in \Theta$ un estimateur est une statistique à valeurs dans Θ.
noté comme $\hat{\theta}$ ou $\hat{\theta}_n$
$v(\theta)$ calculée à partir de la loi P_θ,
$\hat{V}_n$ de $v(\theta)$ est un statistique à $v(\Theta)$

statistique: T_n est un statistique donc T_n est variable aléatoire, fonction réelle, ou vectorielle, mesurable de l'échantillon $X = (X_1, \dots, X_n)$
$T_n = \tau(X) = \tau(X_1, \dots, X_n)$

S T Q Q S S D

___/___/___

MA101 STATISTIQUE vendredi 16/09/2022

estimateur empirique de la moyenne aussi connue comme moyenne empirique est la moyenne arithmétique des variables $\overline{X}_n = 1/n \sum_{i=1}^{n} X_i$

Résolution:

$B_\theta(\overline{X}_n, X) = \mathbb{E}(\overline{X}_n) - m$ où $\overline{X}_n = 1/n \sum_{i=1}^{n} X_i$

$\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mathbb{E}[1/n \sum_{i=1}^{n} X_i] \underset{(I)}{=} 1/n \sum_{i=1}^{n} E[X_1] = 1/n \; n E[X_1] = E[X_1] \underset{(II)}{=} m$

donc $B_\theta(\overline{X}_n, X) = 0$, non biaisé.

$Var(\overline{X}_n) \underset{(III)}{=} Var(1/n \sum_{i=1}^{n} X_i) = 1/n^2 \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = 1/n^2 \sum Var(X_1) = \sigma^2/n$

donc $\lim_{n \to \infty} Var(\overline{X}_n) = 0$, convergent: MA101 chapitre 4.4.1

Remarques

✓ (I) ✓ pourquoi changer X_i pour X_1? } définition n-échantillon
✓ (II) ✓ pourquoi $\mathbb{E}[X_1] = m$?
✓ (III) ✓ pourquoi il y a une carré dans n? propriété $Var(a X) = a^2 Var(X)$

indépendant

dans ma201 on va toujours considère que les variables sont i.i.d, identiquement distribuée donc $X_i = X_1$ et par conséquence l'espérance sera égale

PART 2: calculer le biais de l'estimateur empirique de la variance

définition: ↗ tout, ou presque, vient de ce livre

modèle statistique: MA101 2e partie chapitre 4.1.1 un modèle statistique est la donnée d'un espace $\mathcal{X}^n$ mesuré par une tribu $\mathcal{A}^n$ et une famille de lois de probabilité $(P_\theta^n)_{\theta \in \Theta}$: $M = (\mathcal{X}^n, \mathcal{A}^n, P_\theta^n, \theta \in \Theta)$

espace: wikipédia

i.i.d: indépendantes identiquement distribuées

__ / __ / __ S T Q Q S S D

MA201 STATISTIQUE samedi 17/09/2022

TRIBU : wikipedia

loi de propabilité : wikipédia

n-échantillon i.i.d : (appelé n-échantillon dans le cours) modèle statistique de n composantes indépendantes identiquement distribuées de même loi P_θ

estimateur empirique de la variance MA101 chapitre 53 tableaux de la page 41 $S^2 = 1/n \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

$B_\theta(\bar{X}_n, X) = \mathbb{E}[\bar{X}_n] - X$ où $\bar{X}_n = 1/n \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$

$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = 1/n \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[(X_i - \bar{X})^2] = 1/n \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{\mathbb{E}[X_i^2]}_{a} - \underbrace{\mathbb{E}[2X_i\bar{X}]}_{b} + \underbrace{\mathbb{E}[\bar{X}^2]}_{c})$

(a) $\mathbb{E}[X_i^2] \underset{(I)}{=} Var(X_i) + \mathbb{E}[X_i]^2 \underset{(III)}{=} \sigma^2 + m^2 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

(b) $\mathbb{E}[X_i \bar{X}] \underset{(II)}{=} \mathbb{E}[X_i \, 1/n \sum_{j=1}^{n} X_j] = 1/n \, \mathbb{E}[X_i \sum_{j=1}^{n} X_j]$ on divise

$\dots = 1/n \, \mathbb{E}[X_i \sum_{j=1, j\neq i}^{n} X_j] + 1/n \, \mathbb{E}[X_i^2]$

$\dots = 1/n \sum_{j=1, j\neq i}^{n} \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j] + 1/n \cdot (\sigma^2 + m^2)$

$\dots = (n-1)/n \cdot m^2 + 1/n(\sigma^2 + m^2) = m^2 + \sigma^2/n$

(c) $\mathbb{E}[\bar{X}^2] = Var(\bar{X}) + \mathbb{E}[\bar{X}]^2$

$= Var(1/n \sum_{i=1}^{n} X_i) + \mathbb{E}[1/n \sum_{i=1}^{n} X_i] = \sigma^2/n + m^2$

$\mathbb{E}[\bar{X}_n] = 1/n \sum_{i=1}^{n} (\sigma^2 + m^2 - 2\sigma^2/n - 2m^2 + \sigma^2/n + m^2)$

9

S T Q Q S S D   __/__/__

MA201 statistique   Samedi 17/09/2022

$\boxed{\mathbb{E}[\bar{X}_n] = 1/n \sum_{i=1}^{n} (n-1)\tau^2/n = \underline{(n-1)\tau^2/n}}$

$B_\theta(\bar{X}_n, x) = (n-1)\tau^2/n - m \neq 0 \ \forall m \neq (n-1)\tau^2/n$ donc biaisé

(IV) → l'estimateur a été choisi pour être non biaisé $\bar{X}_n^* = \frac{n}{(n-1)}\bar{X}_n$

quand il est biaisé on peut ajouter une constante pour le faire non biaisé

Remarques:

✓(I)✓ pourquoi $\mathbb{E}[X_i^2] = Var(X_i) + \mathbb{E}[X_i]^2 = \tau^2 + m^2$? définition (un variable)

✓(II)✓ pourquoi (a) est différent de (c) ? X_i est $\bar{X}_n$ est estimateur

✓(IV)✓ quel est le résultat du biais ? non biaisé, considéré

exercice 2:

soit $X_1, \dots, X_n$ un n-échantillon suivant la loi $\mathcal{U}_{[0,\theta]}$ (loi uniforme)

part 1. calculer un estimateur de θ par la méthode des moments à l'ordre 1.

définition:

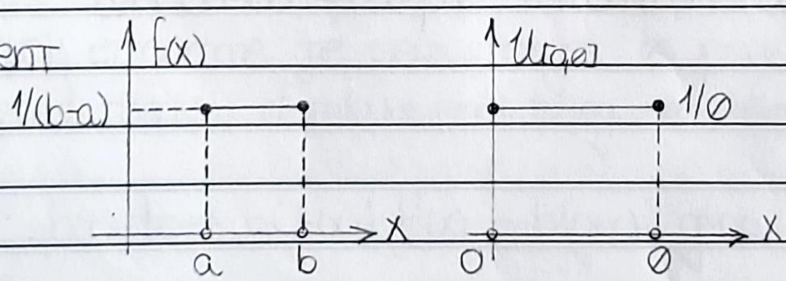
méthode des moments: MA101 chapitre 4.5.1.

loi uniforme: $f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{pour } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Résolution (espérance continue)

$m_1(\theta) = \mathbb{E}_\theta[X_i] \overset{(II)}{=} \int_{\mathbb{R}} x \, 1/\theta \, \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx \overset{(I)}{=} \int_0^\theta x \, 1/\theta \, dx = \theta/2$ (i)

graphiquement



spiral

__ / __ / __ S T Q Q S S D

MA201 Statistique — Samedi 17/09/2022

$\hat{m}_1(\theta) = 1/n \sum_{i=1}^{n} X_i$ (III)

$\hat{\theta}_n/2 = 1/n \sum_{i=1}^{n} X_i \rightarrow \hat{\theta}_n = 2/n \sum_{i=1}^{n} X_i$ | dont

PART 2. ↗ equation (i)

$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = 2/n \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = 2/n \sum_{i=1}^{n} \theta/2 = \theta$

$Var(\hat{\theta}_n) = 4/n^2 \, Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = 4/n^2 \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{4}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$ (IV)

↳ $Var(aX_i) = a^2 \, Var(X_i)$

Risque quadratique (V)

PART 3. On note $B_\theta(\bar{X}_n, X) = \mathbb{E}[\bar{X}_n] - X = \theta - \theta = 0$, non biaisé (VI)

$\lim_{n \to \infty} Var(\hat{\theta}_n) = 0$, consistant

Remarques

(I)✓ qu'est-ce que c'est $1\!\!1_{[0,1]}$? → Fonction indicatrice: extrait la valeur de la fonction dans l'intervalle

(II)✓ définition de l'esperance continue ?

(III)✓ qu'était le process ? faire de chaque coté et après égalé et rappelle

(IV) comment est a variance d'un loi uniforme ? il faut le déduire, enregistrer

(V)✓ comment est le calcule du risque quadratique: regarde définition du livre

(VI) pourquoi l'esperance est θ ? définition ex. (il n'a pas dans le corrigé)

1) $1\!\!1_{[a,b]} = 1$ si $x \in [a,b]$ et 0 sinon

2) $\mathbb{E}[p(x)] = \int x \, p(x) \, dx$

3) loi uniforme: $\mathbb{E}[p(x)] = (a+b)/2$ $V(p(x)) = (b-a)^2/12$

S T Q Q S S D __/__/__

MA201 Statistique Samedi 17/09/2022

exercice 3:

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon d'un modèle $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \{\mathcal{U}[0,\theta]\})$ avec $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ paramètre à déterminer. Soit $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable vérifiant $\lim_{\theta \to 0^+} \theta g(\theta) = 0$

part 1:

montrer que l'on peut choisir $T: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tel que $\hat{S}_n^{(1)} = 1/n \sum_{i=1}^n T(X_i)$ soit un estimateur sans biais

définition

fonction de répartition: $\mathbb{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ↗nom différent? regarder pg10

pour une variable aléatoire uniforme sur $[0,\theta]$ $f_\theta(x) := 1/\theta \, \mathbb{1}_{[0,\theta]}$

Si un tel estimateur sans biais existe $\mathbb{E}[\hat{S}_n] := g(\theta)$ donc:

$$\mathbb{E}[\hat{S}_n] = 1/n \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[T(X_i)] \overset{(I)\ \text{hF}}{=} \mathbb{E}[T(X_i)] \overset{(II)\ T(x_i)=T(x)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) \cdot f_\theta(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) \cdot \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{[0,\theta]} dx = \int_0^\theta T(x) \cdot \frac{1}{\theta} dx := g(\theta) \quad \text{donc}$$

$$\int_0^\theta T(x) dx = \theta \cdot g(\theta) \to T(x) \overset{(III)}{=} 1 \cdot g(x) + x g'(x)$$

Remarques:

✓ (I) pourquoi $\mathbb{E}[T(X_i)]$ est toujour égale? parce que sont i.i.d.

✓ (II) pourquoi $T(x) = T(x_i)$? parce que ils sont i.i.d.

✓ (III) pourquoi et comme je peux changer θ pour x?

↳ second theorem of calculus considering the chain rule (mathexchange)

$$\frac{d}{dx} \int_{g(x)}^{f(x)} h(t) dt = h(f(x)) \cdot f'(x) - h(g(x)) \cdot g'(x)$$

___/___/___ S T Q Q S S D

ma2o1 statistique lundi 19/09/2022

part 2 :

soit $X_{nn} = \max(X_1, \dots, X_n)$

(a) montrer que X_{nn} a pour fonction de densité $f_{\theta,n}(x) = n/\theta^n \, x^{n-1} \, 1\!\!1_{[0,\theta]}(x)$

définition

| fonction de densité wikipedia fonction positives et intégrables d'intégrale 1

X_{nn} (I)

la fonction de répartition s'écrit, cas de tirage indépendants

$$F_X(x; \theta, n) = P(X_{nn} \leq x, \theta, n) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x; \theta, n)$$
$$= P(X_1 \leq x; \theta, n) \cdot \dots \cdot P(X_n \leq x, \theta, n)$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ (x/\theta)^n & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 1 & \text{si } x \geq \theta \quad \text{(II)} \end{cases}$$

dérivant la fonction de répartition on trouve la fonction densité

(III)
$$f_{\theta,n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ n \cdot 1/\theta \cdot (x/\theta)^{n-1} & \text{si } x \in [0,\theta] \\ 0 & \text{si } x \geq \theta \end{cases} = \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} \, 1\!\!1_{[0,\theta]}$$

remarque

✓ (I) qu'est que c'est X_{nn} ? ✓ assume équiprobabilité ? → i.i.d.

✓ (II) c'est 1 à cause de la densité ?

✓ (III) $f_{\theta,n}(x)$ veut dire fonction de x avec paramètres θ et n ?
pourquoi $(x|\theta)$?

✓ (II) oui la densité a intégrale unitaire

✓ (III) $f_{\theta,n}(x)$ est une fonction qui dépend de θ et n
$(x|\theta)$ veut dire que "on veut x sachant θ" important pour analyse bayesienne, avec probabilités

S T Q Q S S D ___/___/___

MA201 statistique mercredi 21/09/2022

PC 1 exercice 3 part 2

(b) montrer que l'on peut choisir $\tilde{T} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de telle sorte que $\hat{S}_n^{(2)} = \tilde{T}(X_{n:n})$ soit un estimateur sans biais de $g(\theta)$.

Résolution

Si un estimateur sans biais existe $\mathbb{E}[\hat{S}_n^{(2)}] = g(\theta)$ donc — Résolution(a)

$$\mathbb{E}[\hat{S}_n^{(2)}] = \mathbb{E}[\tilde{T}(X_{n:n})] \overset{(I)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\tilde{T}(x)}_{\text{variable } x} \underbrace{f_{\theta,n}(x)}_{\text{function densité probabilité } p(x)} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}(x) \cdot \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\theta]} dx$$

$$\mathbb{E}[\hat{S}_n^{(2)}] = \int_0^{\theta} \tilde{T}(x) \cdot \frac{n}{\theta^n} x^{n-1} dx = g(\theta) \to$$

chaine, substitution $\theta = x$

$$\int_0^{\theta} \tilde{T}(x) \cdot x^{n-1} dx = \frac{\theta^n}{n} g(\theta) \to \tilde{T}(x) \cdot x^{n-1} = \frac{n x^{n-1}}{n} g(x) + \frac{x^n}{n} g'(x)$$

$$\boxed{\tilde{T}(x) = g(x) + \frac{x}{n} g'(x)}$$

Remarques

✓(I) qu'est ce que s'est passé dans cette passage?
comment est l'expression de l'espérance continue?

✓(II) $\tilde{T}(x)$ est un estimateur? oui

✓(III) $X_{n:n}$ est une variable aleatoire? oui l'ensemble du n-echantillon

✓(IV) qu'est que c'est un estimateur? vous pouvez donner une example?
→ vidéo "estimateur et estimation statistique" biostatistique

on a une population, d'où on extrai un n-echantillon et on proposé une function, estimateur, pour décrire ses caracteristiques. s'il n'a pas de biais il est bien "centralisé" et s'il est convergant l'estimation ira bien décrire la population et la variance ira à zero dans l'infinit

→ important inside

spiral

__ / __ / __ S T Q Q S S D

MA201 statistique — mercredi 21/09/2022

PC1 exercice 3 part 3

calculer le risque quadratique des estimateurs $\hat{S}_n^{(1)}$ et $\hat{S}_n^{(2)}$. en déduire que l'estimateur $\hat{S}_n^{(1)}$ est inadmissible

définition

Risque quadratique $V \to R_\theta(g_n, V) = \mathbb{E}_\theta[(g_n - V)^2] = \mathrm{Var}_\theta(g_n) + (\mathbb{B}_\theta(g_n))^2$ (propriété)

δ_1 domine δ_2 si $\forall \theta \in \Theta$ $R_\theta(\delta_1, V) \leq R_\theta(\delta_2, V)$ s'il n'existe aucun estimateur le dominant c'est un estimateur admissible

Résolution $x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = x$

pour $\hat{S}_n^{(1)} = 1/n \sum_{i=1}^n 2x_i$ — (I), (II)

$R_\theta(\hat{S}_n^{(1)}, \theta) = \mathbb{E}_\theta[(\hat{S}_n^{(1)} - \theta)^2] = \mathbb{E}_\theta[\hat{S}_n^{(1)2}] - 2\mathbb{E}_\theta[\hat{S}_n^{(1)}]\theta - \mathbb{E}_\theta[\theta^2]$

$\to R_{\theta 1}$

$= \mathbb{E}[(1/n \sum_{i=1}^n T(x_i))^2] - 2\theta^2 + \theta^2$

(I) — covariance nulle

$= 1/n^2\, \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n T(x_i)^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n T(x_i) T(x_j)] - \theta^2$

$= 1/n^2 \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[T(x_i)^2] + 1/n^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n \mathbb{E}[T(x_i)]\, \mathbb{E}[T(x_j)] - \theta^2$

$= 1/n^2\, n\, \mathbb{E}[T(x_1)^2] + \cdots$

(II)

$= 1/n \int_{-\infty}^{+\infty} T(x)^2 f_\theta(x)\,dx + 1/n^2\, n(n-1)\theta^2 - \theta^2$

$= 1/n\ 1/\theta \int_0^\theta (2x)^2\,dx - \frac{\theta^2}{n} = \boxed{1/3n\ \theta^2}$

pour $\hat{S}_n^{(2)} = \tilde{T}(X_{nn})$

$R_\theta(\hat{S}_n^{(2)}, \theta) = \mathbb{E}_\theta[(\hat{S}_n^{(2)} - \theta)^2] = \mathbb{E}[\hat{S}_n^{(2)2}] - 2\mathbb{E}[\hat{S}_2^{(n)}]\theta + \theta^2$

$\to R_{\theta 2}$

$= \mathbb{E}[\hat{S}_n^{(2)2}] - 2\theta^2 + \theta^2$

spiral

S T Q Q S S D

__/__/__

MA201 STATISTIQUE — Vendredi 23/09/2022

PC1 exercice 3 part 3

$$V(\text{V})$$

$$= 1/n \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{T}(x)^2 f_\theta(x)\,dx - \theta^2$$

$$= \int_0^\theta \frac{(n+1)^2}{n^2} x^2 \cdot \frac{n x^{n-1}}{\theta^n}\,dx - \theta^2 \overset{(\text{VI})}{=} \frac{1}{n(n+2)} \cdot \theta^2$$

donc on note que:

$R_{\theta 2} - R_{\theta 1} = \frac{(1-n)\theta^2}{3n(n+2)} < 0 \quad \forall \theta \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \forall n \neq 1$ donc $R_{\theta 2} \leq R_{\theta 1}$

alors $\hat{S}_n^{(2)}$ est préféable à $\hat{S}_n^{(1)}$ qui est inadmissible

Rémarques: → il faut considérer la covariance, separation d'une matrice de covariance

✓(I) pourquoi séparer entre deux sommatoires?

✓(II) pourqoi $\hat{S}_n^{(1)}$ est devenu $\hat{S}_1^{(n)}$? probablement erreur, erreur oui

(III) pourquoi le 1e therme est l'esperance continue et la 2e therme est θ directement? (IV)

(V) pourquoi il y a une 1/n dans la compte? est-ce que tu pourrais faire cette calculée avec moi?

pour l'examen qu'est que tu recommederais pour étudier pour l'examen? est-ce qu'il y a des exercices supplemantaires?

(III) le 1e

(V) ça vient du calcul fait pour $\hat{S}_n^{(1)}$ (equivalent

__/__/__ S T Q Q S S D

MA201 STATISTIQUE Samedi 24/09/2022

TD1 exercice 4

Soient $t_1, t_2, \dots, t_n$ des réels tels que $t_i \neq t_j$ pour deux indices $i \neq j$ on considère le modèle statistique

$$Z = \begin{bmatrix} X_1 \\ \cdots \\ X_n \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2 I_n) \text{ avec } m = \begin{bmatrix} \beta_1 + \beta_2 t_1 \\ \cdots \quad \cdots \\ \beta_1 + \beta_2 t_n \end{bmatrix} \text{ et } (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ inconnu donc}$$

connu

$$m = \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_2 \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta}^T F^{-1}(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta}$, borne de Cramer-Rao de $g(\theta)$ où

minorant de la variance

$g(\theta)$: estimateur sans biais

$F(\theta)$: matrice d'information de fisher

définition:

matrice d'information de fisher: amount of information that an observable random variable X carries about an unknow parameter θ of a distribution that models X.

wikipedia

peut être ln sans perdre ? oui!

$$\overset{(I)}{I(\theta)} = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(X;\theta)\right)^2 \middle| \theta\right] = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(X;\theta) \middle| \theta\right]$$

in certain conditions (pas noté chez wikipedia)

matrice de covariance

vecteur

$$\text{Var}(\vec{X}) = \begin{bmatrix} \text{Var}(X_1) & \cdots & \text{Cov}(X_1, X_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \text{Cov}(X_i, X_1) & \ddots & \text{Cov}(X_i, X_p) \\ \vdots & & \vdots \\ \text{Cov}(X_p, X_1) & \cdots & \text{Var}(X_p) \end{bmatrix}$$

où

$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$

S T Q Q S S D __/__/__

MA201 statistique samedi 24/08/2022

PC1 exercice 4 part 1

part 1

Résolution (II) (III) marque dans le corrigé

$p(z_1(\beta_1,\beta_2)) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp(-1/2\sigma^2 \sum_{i=1}^n (x_i-\beta_1-\beta_2 t_i)^2 \rightarrow$

$\ln(p(z_1(\beta_1,\beta_2)) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\beta_1-\beta_2 t_i)^2 \rightarrow$

(IV) marque minus?

$\underbrace{\frac{\partial \ln(p(z_1(\beta_1,\beta_2))}{\partial(\beta_1,\beta_2)}}_{A} = \begin{bmatrix} \partial\ln(p(z_1(\beta_1,\beta_2))/\partial\beta_1 \\ \partial\ln(p(z_1(\beta_1,\beta_2))/\partial\beta_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (x_i-\beta_1-\beta_2 t_i) \\ \sum_{i=1}^n \end{bmatrix}$

en notant $y_i = x_i-\beta_1-\beta_2 t_i$ et $y_i \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ (V) que $\mathrm{cov}(y_i,y_j)=0$ (VI) $\forall i\neq j$

$E(\beta_1,\beta_2) = \mathrm{cov}(A) = \frac{1}{\sigma^4}\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n y_i) & \mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^n y_i, \sum_{i=1}^n t_i y_i) \\ \mathrm{Cov}(\sum_{i=1}^n y_i, \sum_{i=1}^n t_i y_i) & \mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n t_i y_i) \end{bmatrix}$

(VI) (VII) (VIII) (IX)

$E(\beta_1,\beta_2) = \frac{1}{\sigma^4}\begin{bmatrix} n\sigma^2 & \sum_{i=1}^n t_i\sigma^2 \\ \sum_{i=1}^n t_i\sigma^2 & \underline{\sum_{i=1}^n t_i^2}\sigma^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} n & \bar{t} \\ \bar{t} & \|t\|^2 \end{bmatrix}$ où $\bar{t} = \sum_{i=1}^n t_i$

norme de 2

Remarques:

✓(I) quels sont les définitions de matrice de fisher? wikipedia

✓(II) pourquoi $x_i-\beta_1-\beta_2 t_i$? c'est la moyenne $x-(\beta_1+\beta_2 t_i) = x-m$

✓(III) il n'avait pas un minus? oui, corrigé incorrect

(IV) il ne faudrait pas avoir un minus?

✓(V) pourquoi approximé avec un zéro

✓(VI) pourquoi $\mathrm{cov}(y_i,y_j)=0$? car $t_i\neq t_j$? variables indépendants (i.i.d)

(VII-VIII) comment je calcule chaque variable de la matrice?

✓(IX) qu'est-ce que $\|t\|^2$ veut dire? norme deux de la variable. chercher la définition

(V) si m est la moyenne de la distribution de x, la distribution $y=x-m$ aura moyenne (écart typique) 0

spiral

$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$ matrices

___/___/___

mardi statistique — Samedi 24/09/2022

PC1 exercice 4 part 2

$F^{-1}(\beta_1, \beta_2) = \frac{\tau^2}{n\|t\|^2 - \bar{\tau}^2} \begin{bmatrix} \|t\|^2 & -\bar{\tau} \\ -\bar{\tau} & n \end{bmatrix}$ appliquant la propriete de l'exercice

different from

$\theta = (\beta_1, \beta_2)$ et $g(\beta_1, \beta_2) = \beta_1$ operateur vectoriel (I) wikipedia's definition

$\frac{\partial g(\beta_1,\beta_2)^T}{\partial(\beta_1,\beta_2)} F^{-1}(\beta_1,\beta_2) \frac{\partial g(\beta_1,\beta_2)}{\partial(\beta_1,\beta_2)} = [1 \; 0] F^{-1}(\beta_1,\beta_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\tau^2 \|t\|^2}{n\|t\|^2 - \bar{\tau}^2} \Big/ n$

part 3°

on suppose β_2 connu dérivé par rapport à β_1 seulement (II)

$\underbrace{\frac{\partial \ln(p(z_i, \beta_1))}{\partial \beta_1}}_{B} = \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \beta_1 - \beta_2 t_i)$

$F(\beta_1) = Cov(B) = Var(B) = \frac{1}{\tau^4} Var(\sum_{i=1}^{n} Y_i)$ où $Y_i = x_i - \beta_1 - \beta_2 t_i$

$F(\beta_1) = \frac{1}{\tau^4} \cdot n\tau^2 = \frac{n}{\tau^2}$ et le borne inférieure est $\frac{\tau^2}{n}$. (I)

Remarqué

(I) comment faire / representer un compte vetoriel ? (con fé)

(II) pourquoi faire cette suposition ?

spiral

19

S T Q Q S S D ___/___/___

MAO01 statistique samedi 24/09/2022
EC1 exercice 5
Soit $X_1, \dots, X_n$ un n-échantillon suivant la loi $U_{[0,\theta]}$ uniforme

part 1 calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ

définition
estimateur du maximum de vraisemblance methode pour estimer la moyenne

$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i, \theta)$ produit de la fonction aplique à chaque variable du n-échantillon

$l(\theta; x_1, \dots, x_n) = \ln(L(\theta; x_1, \dots, x_n))$

après pour maximiser cette produit on dérivé et égalé à zéro

$$\frac{\partial l(\theta; x_1, \dots, x_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = 0$$

Résolution

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \begin{cases} 1/\theta^n \text{ si } \theta \geq \max(x_1, \dots, x_n) \ (\mathrm{I}) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

ainsi pour la maximisant $\hat{\theta}_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ (II)

Remarqué
✓ (I) pourquoi s'il est max ?
✓ (II) pourquoi faire de cette manière? comment faire? pas compris la résolution avec max

video EMV de la borne supérieur d'une loi uniforme part 1 part 2
Résolution page 45

spirab

__/__/__

S T Q Q S S D

ma201 statistique — samedi 24/09/2022

TD1 exercice 5 part 2

part 2 donner l'expression de sa fonction de densité de probabilité

(I) (II) manque

$F_{\hat\theta_n} = \mathbb{P}(\hat\theta_n \le x) = \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \le x) = \mathbb{P}(X_1 \le x, \dots, X_n \le x) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \le x)$

(V) (IV)

$= \mathbb{P}(X_1 \le n)^n = \begin{cases} (x/\theta)^n, & x \le \theta \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$

il ne devrait pas être minoré par zéro ?

(III) il ne devrait être 0 ?

ainsi $f_{\hat\theta_n}(x) = n/\theta^n \, x^{n-1} \, \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$ (VI) $f_{\hat\theta_n} = \frac{dF_{\hat\theta_n}}{dx}$?

Remarque

(I) est-ce que c'est une définition oui

(II) il semble manquer un ")" dans l'équation

(III) pourquoi 1 ? répartition

(IV) pourquoi il n'a pas de minorant sur x ? pas nécessaire fonction in[illegible]

(V) pourquoi c'est (x/θ) ? comment cette probabilité est calculée ?

(VI) est-ce que $f_{\hat\theta_n} = \frac{dF_{\hat\theta_n}}{dx}$ ou quels sont les noms ?

fonction / distribution normale

check page 45

part 3 calculer son biais, sa variance et son risque quadratique

$B_\theta(\hat\theta_n, \theta) = \mathbb{E}[\hat\theta_n] - \theta = n\theta/(n+1) - \theta = -\theta/(n+1)$

$\mathbb{E}[\hat\theta_n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, f_{\hat\theta_n}(x)\,dx = \int_0^\theta x \cdot \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}\,dx = \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \Big|_0^\theta = \frac{n\theta}{(n+1)}$

$\mathrm{Var}(\hat\theta_n) = \mathbb{E}[\hat\theta_n^2] - \mathbb{E}[\hat\theta_n]^2 = n\theta^2/(n+2) - \theta^2/(n+1)^2 = n\theta^2/(n+2)(n+1)^2$

$\mathbb{E}[\hat\theta_n^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f_{\hat\theta_n}(x)\,dx = \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{n}{\theta^n} x^{n-1}\,dx = \frac{n}{\theta^n} \frac{x^{n+2}}{(n+2)} \Big|_0^\theta = \frac{n\theta^2}{(n+2)}$

(I)

spiral

S T Q Q S S D ___/___/___

MA201 statistique samedi 24/09/2022

PC1 exercice 5 part 3

$B_\theta(\hat{\theta}_n,\theta) = B(\hat{\theta}_n,\theta)^2 + Var(\hat{\theta}_n) = 2\theta^2/(n+1)(n+2)$

Remarque

√(I) comment est la définition de $\mathbb{E}[X^2]$? comme écrit

PC1 exercice 6 dimanche 25/09/2022

Soient n variables aléatoires X_i, $i=1,\dots,n$ indépendantes dont la densité de probabilité est de la forme $f(x,\theta) = x/\theta \exp(-x^2/2\theta) \mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)$

considérant

$\mathbb{E}[X_i] = \sqrt{\pi/2}\sqrt{\theta}$; $\mathbb{E}[X_i^2] = 2\theta$; $\mathbb{E}[X_i^3] = (3\sqrt{\pi/2})\theta\sqrt{\theta}$; $\mathbb{E}[X_i^4] = 8\theta^2$

part 1.

définition

maximum global: points critiques $f(x) \to \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0$

Résolution: → (II) démonstration → (I) quest

$L(\theta, x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta} \cdot \exp(-x_i^2/2\theta)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_i) \to$

→ (III) notation

$l = \ln(L(\theta, x_1,\dots,x_n)) = \sum_{i=1}^n (\ln(x_i) - \ln(\theta) + (-x_i^2/2\theta)) \to$

$l = -n\ln(\theta) + \sum_{i=1}^n \ln(x_i) - 1/2\theta \sum_{i=1}^n x_i^2 \to$

→ points critiques

$\frac{\partial l}{\partial \theta} = \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \to \hat{\theta} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n x_i^2$

$\frac{\partial^2 l}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{-4n^3}{[\sum_{i=1}^n x_i^2]^2} < 0$ donc maximum

→ (IV) pourquoi unique

(V) pourquoi maximale

__/__/__ S T Q Q S S D

MAP201 statistique dimanche 25/09/2022

PC1 exercice 6 part 1

Remarques

(I) qu'est que c'est $I_{\mathbb{R}+}(x_i)$ définition dans PC2 page 23

(II) est ce que j'ai besoin de démontrer ? je peux utiliser directement ? oui, ça v

(III) je peux utiliser ça directement ?

(IV) pourquoi on peut conclure qu'est unique ? car c'est globale

(V) pourquoi maximale ? c'est négatif ? oui, quand il est négatif tous les directions possibles à partir de lui iront décroîte donc c'est le maximum global

↳ important inside

PC1 exercice 6 part 2:

moyenne et variance de $\hat{\theta}$. déduire non biaisé et convergent vers θ

$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \mathbb{E}[1/2n \sum_{i=1}^n X_i^2] = 1/2n \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2] = 1/2n \sum_{i=1}^n 2\theta = \theta$

donc $B_\theta(\hat{\theta}_n, \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] - \theta = 0$ non biaisé

$Var(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n^2] - \mathbb{E}[\hat{\theta}_n]^2 \overset{(I)}{=} 2\theta^2/n - \theta^2 = \theta^2(2-n)/n$

$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n^2] = \mathbb{E}[1/4n^2 \sum_{i=1}^n X_i^4] = 1/4n^2 \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^4] = 1/4n^2 \sum_{i=1}^n 8\theta^2 = 2\theta^2/n$

$Var(\hat{\theta}_n) = Var(1/2n \sum_{i=1}^n X_i^2) = 1/4n^2 \, Var(\sum_{i=1}^n X_i^2) \overset{(II)}{=} 1/4n^2 \sum_{i=1}^n Var(X_i^2) +$
$1/4n^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n Cov(X_i^2, X_j^2)$

$Var(\hat{\theta}_n) = 1/4n^2 \sum_{i=1}^n Var(X_i^2) = 1/4n \, Var(X_i^2) = 1/4n(\mathbb{E}[X_i^4] - \mathbb{E}[X_i]^2)$

$Var(\hat{\theta}_n) = \theta^2/n$ qui $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}_n) = 0$ donc convergent

Remarque

(I) pourquoi cette manière n'a pas marché ? il faut considérer la définition de la variance

(II) pourquoi faire ce calcul ?

↳ il faut considérer les covariances pour bien montrer la maths

spiral

S T Q Q S S D ___/___/___

MA201 statistique dimanche 25/09/2022

PC2 exercice 1 part 1

mesure z d'un paramètre θ, densité de probabilité conditionnelle a posteriori de θ est $f(\theta|z) = \exp(z-\theta)$ pour $z \leq \theta$

définition

probabilité conditionnelle a posteriori type of conditional probability that results from updating the priori probability with information ... application of Baye's theorem

part 1

calculer les estimateurs du risque moyen en valeur absolue, du risque moyen quadratique et du maximum de vraisemblance a posteriori

Résolution

Risque moyen en valeur absolue $r_{MVA} = \mathbb{E}_\theta [|\theta - \hat{\theta}$

PC3 exercice 1

soient X_i, $i=1,\dots,n$ indépendantes dont $f(x,\tau^2) = x/\tau^2 \exp(-x^2/2\tau^2)\, \mathbb{I}_{R+}(x)$ → loi de Rayleigh

où $\tau > 0$

$\mathbb{I}_{R+}(x)$ est la fonction indicatrice sur $R+$: $\mathbb{I}_{R+}(x) = 1$ si $x \in R^+$ et 0 sinon

on considère $\mathbb{E}[X_k] = \tau\sqrt{\pi/2}$; $\mathbb{E}[X_k^2] = 2\tau^2$; $\mathbb{E}[X_k^3] = (3\sqrt{\pi/2})\tau^3$; $\mathbb{E}[X_k^4] = 8\tau^4$

PC3 exercice 1 part 1

déterminer un estimateur de $\theta = \tau^2$ pour des observations (z_i)

Résolution

$L(\theta; x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

$\ln(\theta; x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i,\theta)$

$= \sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i) - \ln(\theta) - x_i^2/2\theta)$

___/___/___ S T Q Q S S D

MAP201 statistique lundi 26/09/2022

PC3 exercice 1 part 1

$L_n(\theta, X) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - n\ln(\theta) - 1/2\theta \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

maximum vraisemblance

$\frac{\partial L_n}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ donc $\hat{\theta}_n = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \theta^{MV}$

(II) intégration (I) devrait être x_i ou z_i ?

$\frac{\partial^2 L_n}{\partial \theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

quand on applique $\theta = \hat{\theta}_n$

après on factorisé et découvre que $\partial^2 L_n / \partial \theta^2 < 0$ donc maximum globale

PC3 exercice 1 part 2

calculer moyenne et variance de $\hat{\theta}$. déduire non biaisé et convergent

$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \mathbb{E}[1/4n \sum_{i=1}^{n} x_i^2] = 1/2n \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[x_i^2] = \tau^2\ 2.$

$B_\theta(\hat{\theta}_n, \theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] - \theta = 0$ donc $\hat{\theta}_n$ non biaisé

$Var(\hat{\theta}_n) = Var(1/2n \sum_{i=1}^{n} x_i^2) = 1/4n^2 \sum_{i=1}^{n} Var(x_i^2) = 1/4n \cdot Var(x_i^2)$

définition exercice

$= 1/4n\,(\mathbb{E}[x_i^4] - \mathbb{E}[x_i^2]^2) = \theta^2/n$ donc $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}_n) = 0$ donc convergent

PC3 exercice 1 part 3

calculer borne de Cramer-Rao. déduire que l'estimateur est efficace

définition

borne de Cramer Rao:

S T Q Q S S D   ___/___/___

lundi 26/09/2022

MA201 statistique

PC3 exercice 1 part 3

Résolution:

$$\underbrace{\frac{\partial \ln(\theta; z_1,\dots,z_n)}{\partial\theta}}_{(a)} = \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

$$\underbrace{\frac{\partial^2 \ln(\theta, z_1,\dots,z_n)}{\partial\theta^2}}_{(b)} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} z_i^2$$

conditions de régularité du théorème de Cramer-Rao

$$\mathbb{E}[a] = \frac{-n}{\theta} + \frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[z_i^2] = \frac{-n}{\theta} + \frac{n2\theta}{2\theta^2} = 0$$

$$\mathbb{E}[b] = \frac{n}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[z_i^2] = \frac{n}{\theta^2} - \frac{n2\theta}{\theta^3} = \frac{-n}{\theta^2} \quad (\text{III})$$

Remarque

juste nom

(I) pourquoi changer de variable ? x_i ou z_i ça veut la même   si $f(x) = x^r$

(II) Rappelle intégration $\int x^n dx = (x^{n+1})/(n+1)$ Rappelle dérivation $df(x)/dx = rx^{r-1}$

(III) quel était hi conclusion ?

matrice d'information de Fisher

$BCR(\theta) = F(\theta)^{-1} = \theta^2/n$ où $F(\theta) = -\mathbb{E}[\partial^2 \ln L(x_1,\dots,x_n;\theta)/\partial\theta^2]$

PC3 exercice 2 estimation bayésienne

On suppose à présent que le paramètre θ est une variable aléatoire suivant une loi inverse-gamma de paramètres (α, β) de densité

$$f(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\theta^{\alpha+1}}\exp(-\beta/\theta)\, \mathcal{I}_{\mathbb{R}^+}(\tau)$$

a) $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}\exp(-x)\,dx$

__/__/__ S T Q Q S S D

marad statistique lundi 26/09/2022

PC3 exercice 2

définition

| fonction gamma

PC3 exercice 2 toutes les parts

résolution

$P(x|y) = \frac{P(y|x) \cdot P(x)}{P(y)}$ rappelle loi de Bayes (I) chercher définition

part 1

(II) loi de Rayleigh

$f(\theta|z) = \frac{f(z|\theta) f(\theta)}{f(z)}$ où $f(z|\theta) = \frac{z_i}{\theta} \exp(-z_i^2/2\theta)$

(III) pourquoi

$f(\theta|z) = \frac{\prod_{i=1}^{n} (z_i/\theta \exp(-z_i^2/2\theta)) \cdot \beta^\alpha/\Gamma(\alpha) \cdot 1/\theta^{\alpha+1} \cdot \exp(-\beta/\theta))}{f(z)}$

(IV) change à ?

producteur

$f(\bar{x}) \cdot f(\theta|\bar{x}) = \underbrace{\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\theta^{\alpha+1}}}_{\text{constant par rapport à } x_i} \exp(-\beta/\theta) \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n} (x_i)}{\theta^n} \exp(-\sum_{i=1}^{n} x_i^2/2\theta)$

part 2

$f(\bar{x}) \cdot f(\theta|\bar{x}) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha) \cdot \theta^{\alpha+1+n}} \prod_{i=1}^{n} (x_i) \exp(-(\beta + 1/2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2)/\theta)$ on simplifie

(V) K égalé à ?

$f(\bar{x}) \cdot f(\theta|\bar{x}) = K \cdot \frac{1}{\theta^{\alpha'+1}} \exp(-\beta'/\theta)$ où $\alpha' = \alpha + n$; $\beta' = \beta + 1/2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2$

part 3

$\ln(B) = \ln(K) - (\alpha'+1) \cdot \ln(\theta) - \beta'/\theta$ (VI) on fait la vraisemblance ?

part 4

maximum a posteriori

$\partial \ln(B)/\partial\theta = 0 - \frac{(\alpha'+1)}{\theta} + \frac{\beta}{\theta^2} = 0 \iff \theta^{MAP} = \frac{\beta'}{(\alpha'+1)} = \frac{(\beta + 1/2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2)}{\alpha+n+1}$

part 5

$\theta^{MAP} = \frac{(\beta + n\theta^{MV})}{\alpha+n+1} = \frac{\theta^{MV} + \beta/n}{1 + \alpha/n + 1/n}$ et $\lim_{n\to\infty} \theta^{MAP} = \theta^{MV}$ (VII)

spiral

S T Q Q S S D

___/___/___

MA201 statistique lundi 26/09/2022

PC3 exercice 2

Remarques

✓(I) quel est l'intuition de la loi de Bayes?

✓(II) c'est quelle la loi de Rayleigh? où on l'utilise? où analyse du vent

✓(III) pourquoi on considère le producteur?

✓(IV) on a changé à $\bar{X}$? la correction devrait être être avec X

✓(V) K est égalé à? variable auxiliaire

✓(VI) on fait la vraisemblance? oui

✓(VII) on conclue quoi? les deux estimateurs sont convergents

check page 47 temps

(III) pour que $f(\theta|z)$ se produire chaque $f(z_i|\theta)$ doit se produire en même

PC3 exercice 3 algorithme Estimation Maximization et mélange de gaussiennes

Considérons le mélange de deux lois gaussiennes bidimensionnelles

loi 1: $N(\mu_1, \sigma_1)$ où $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$; $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R}_+^*$

loi 2: $N(\mu_2, \sigma_2)$

le choix entre ces deux lois s'opère via une loi de Bernoulli $B(\alpha)$

MA201 statistique dimanche 02/10/2022

étape E expectation probabilités a posteori

$\tilde{p}_{ij,m} = f_i(x_i, \theta_{m-1}) p_j(\theta_{m-1}) / \sum_{k=1}^{K} f_k(x_i, \theta_{m-1}) p_k(\theta_{m-1})$

étape M maximization maximisation de la vraisemblance

$\theta_m = \arg\max_{\theta \in \Theta} \{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{K} \tilde{p}_{ij,m} \ln[f_i(x_i, \theta) p_j(\theta)]\}$

___/___/___ S T Q Q S S D

MA201 statistique dimanche 02/10/2022

PC3 exercice 3

l'étape de expectation s'écrit $\forall i \in \{1,\dots,n\}$ pour chaque loi normale considere d'indice j

$$\tilde{p}_{i1,m} = \frac{f(x_i; \hat{\mu}_{1,m-1}; \hat{\sigma}_{1,m-1})\hat{\lambda}_{m-1}}{f(x_i; \hat{\mu}_{1,m-1}; \hat{\sigma}_{1,m-1})\hat{\lambda}_{m-1} + f(x_i; \hat{\mu}_{2,m-1}; \hat{\sigma}_{2,m-1})(1-\hat{\lambda}_{m-1})}$$

probabilité de choisir 1 à la m-1 interaction

$$\tilde{p}_{i2,m} = \frac{f(x_i; \hat{\mu}_{2,m-1}; \hat{\sigma}_{2,m-1})(1-\hat{\lambda}_{m-1})}{f(x_i; \hat{\mu}_{1,m-1}; \hat{\sigma}_{1,m-1})\hat{\lambda}_{m-1} + f(x_i; \hat{\mu}_{2,m-1}; \hat{\sigma}_{2,m-1})(1-\hat{\lambda}_{m-1})} = 1 - \tilde{p}_{i1,m}$$

moyenne j à la m-1 interaction

interpretation: $\tilde{p}_{ij,m}$ probabilité de choisir la distribution j de variables 1...i de m où $f(\cdot\, ; \mu, \sigma)$ est la densité probabilité d'une loi gaussienne de moyenne μ et d'écart type σ. à chaque interation m

l'étape de maxisation consiste à trover le vecteur $\theta = (\lambda, \mu_1, \sigma_1; \mu_2, \sigma_2)$ qui maximise le therme suivante:

$$\mathcal{L}(\theta = (\lambda, \mu_1, \sigma_1, \mu_2, \sigma_2)) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{i,1,m} \ln[f(x_i; \mu_1; \sigma_1)\lambda] + \tilde{p}_{i,2,m} \ln[f(x_i; \mu_2; \sigma_2)(1-\lambda)]$$

c'est comme maximise une fonction: $\partial\mathcal{L}/\partial\theta = 0$; comme il y a plusieurs therres chaqu'un devrait être egale à zero donc

$$\partial\mathcal{L}(\theta)/\partial\lambda = \partial\mathcal{L}(\theta)/\partial\mu_1 = \partial\mathcal{L}(\theta)/\partial\sigma_1 = \partial\mathcal{L}(\theta)/\partial\mu_2 = \partial\mathcal{L}(\theta)/\partial\sigma_2 = 0$$

dans le corrigé il marque plusieurs étapes qui seront écrit ici dessous:

$$f(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-(x-\mu)^2/2\sigma^2)$$

$$\ln(\lambda f(x, \mu, \sigma)) = \ln(\lambda) - 1/2 \ln(2\pi\sigma^2) - (x-\mu)^2/2\sigma^2$$

S T Q Q S S D ___/___/___

MAP201 statistique dimanche 02/10/2022

$\frac{\partial \ln(\lambda \cdot f(x,\mu,\tau))}{\partial \mu} = (x-\mu)/\tau^2$, chaine et les autres sont des constants

$\frac{\partial \ln(\lambda \cdot f(x,\mu,\tau))}{\partial \tau} = -1/2 \cdot \frac{1}{2\pi\tau^2} \cdot 4\pi\tau + (x-\mu)^2/\tau^3 = \frac{-1}{\tau} + \frac{(x-\mu)^2}{\tau^3}$

(I) $\tilde{p}_{ijm}$ constante?

comme résultat des dérivés on a: (II)

$$\hat{\lambda}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{i1m}}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{i1m} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{i2m}} = \frac{1}{n} \sum^{n} \tilde{p}_{i1m} \quad \text{car } \tilde{p}_{i1m} + \tilde{p}_{i2m} = 1$$

$$\hat{\mu}_{jm} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{i1m} x_i}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{i1m}}$$

$$\hat{\tau}_{jm} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{i1m} (x_i - \hat{\mu}_{jm})^2}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_{i1m}}}$$

Remarques

(I) pourquoi $\tilde{p}_{ijm}$ est-il traité comme constante? parce qu'il considère l'interaction antérieur? c'est une fonction discrète

(II) comme on arrive à ses résultats?

(III) comment je pourrais implementer?

(IV) quel condition d'arrête pour arrêter?

on a une ensemble de données, on choisi une distribution "pour fitter" les données après on aproxime la moyenne à la moyenne des données

___/___/___ S T Q Q S S D

MA201 STATISTIQUE lundi 03/10/2022

PC2 exercice 1 → probabilité conditionnelle a posteriori

on considère z un mesure de θ et $f(\theta|z)=\exp(z-\theta)$ pour $z\leq\theta$

PC2 exercice 1 part 1

calculer estimateur du risque moyen en valeur absolue, du risque moyen quadratique et du maximum de vraisemblance a posteriori

Résolution

Risque moyen absolue: $r_{MVA}=\mathbb{E}_\theta[\theta-\hat{\theta}]=\mathbb{E}_{\theta|z}[\theta-\hat{\theta}]=\int_z^{+\infty}|\theta-\hat{\theta}|\,f(\theta|z)\,d\theta$ et on doit le maximiser/minimiser donc $\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}}\int_z^{+\infty}|\theta-\hat{\theta}|\cdot\exp(z-\theta)\,d\theta=0$

$$\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}}\int_z^{+\infty}|\theta-\hat{\theta}|\exp(z-\theta)=\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}}\int_z^{\hat{\theta}}|\theta-\hat{\theta}|\exp(z-\theta)\,d\theta+\overset{\partial/\partial\hat{\theta}}{\int_{\hat{\theta}}^{+\infty}}|\theta-\hat{\theta}|\exp(z-\theta)\,d\theta=0$$

on note que: $z\leq\theta\leq\hat{\theta}:(\theta-\hat{\theta})\leq 0$ et $\theta\geq\hat{\theta}:(\theta-\hat{\theta})\geq 0$ donc

$$-\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}}\int_z^{\hat{\theta}}\cancel{(\theta-\hat{\theta})}\exp(z-\theta)\,d\theta+\overset{\partial/\partial\hat{\theta}}{\int_{\hat{\theta}}^{+\infty}}\cancel{(\theta-\hat{\theta})}\exp(z-\theta)\,d\theta=0$$

$$\int_z^{\hat{\theta}}\exp(z-\theta)\,d\theta=\int_{\hat{\theta}}^{+\infty}\exp(z-\theta)\,d\theta \text{ donc } \hat{\theta}=z+\ln(2)\quad(\mathrm{I})$$

Propriété, la médiane d'un fonction de densité exponentielle est $e^{-\theta}$ $\theta\geq0$

Risque quadratique: $r_{MVA}=\mathbb{E}_\theta[(\theta-\hat{\theta})^2]=\int_z^{+\infty}(\theta-\hat{\theta})^2\cdot f(\theta|z)\,d\theta=$

$\int_z^{+\infty}(\theta-\hat{\theta})^2\exp(z-\theta)\,d\theta$ et pour la minimiser en dérivant par rapport à $\hat{\theta}$

et égalant à zero

(I) $-\exp(z-\theta)\Big|_z^{\hat{\theta}}=-\exp(z-\theta)\Big|_{\hat{\theta}}^{+\infty}\rightarrow-\exp(z-\hat{\theta})+\exp(0)=-\exp(\overset{0}{z-\infty})+\exp(z-\hat{\theta})$

$-2\exp(z-\hat{\theta})=-1\rightarrow\ln(2)+(z-\hat{\theta})=\overset{0}{\ln(1)}\rightarrow\underline{\hat{\theta}=z+\ln(2)}$