Déconvolution et débruitage

Ajout au cours 1 du module
"Traitements numériques et capteurs imageurs de nouvelle génération"

Guy Le Besnerais, ONERA/DTIS
lebesner@onera.fr

Remerciements/crédits : Caroline Kulcsar, IOGS.

ONERA
THE FRENCH AEROSPACE LAB

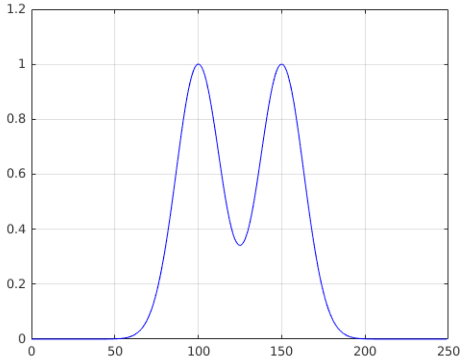
retour sur innovation

Plan

- Déconvolution 1D : exemple de Hunt.
- Déconvolution par filtre de Wiener
- Débruitage

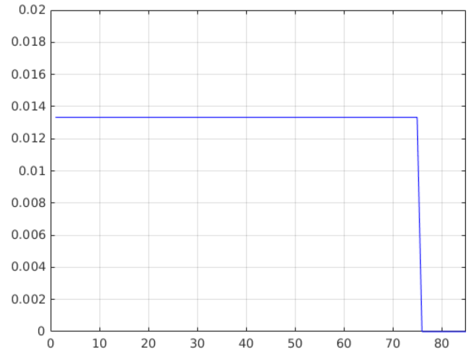
Déconvolution 1D : exemple de Hunt (1/6)

x

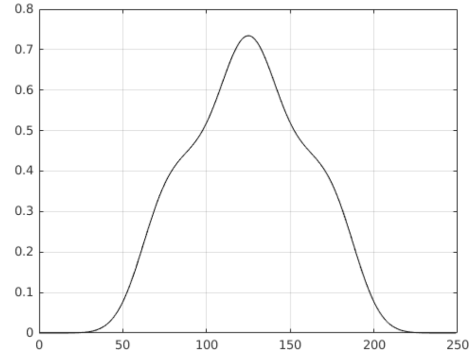


$*$

h



$=$

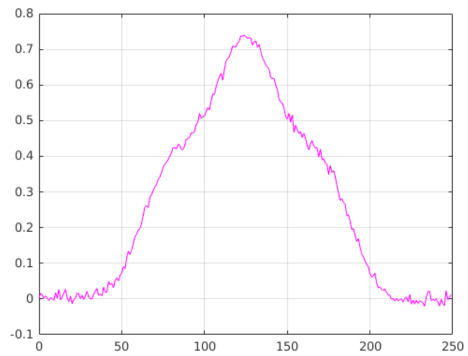


+b

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

$$(f * g)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)g(k)$$

z



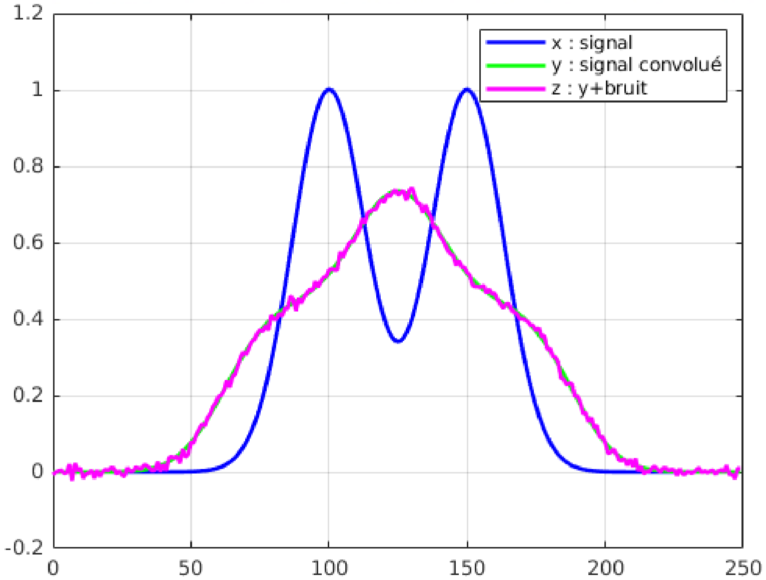
$$z = h * x + b$$

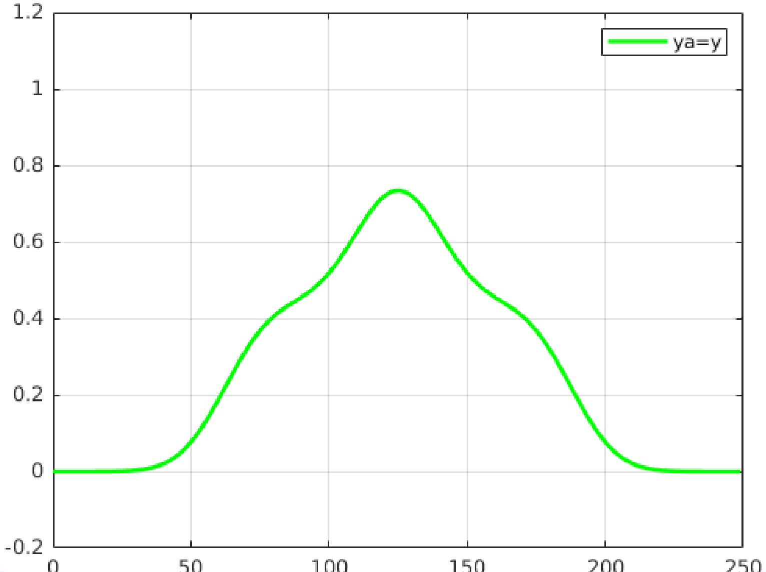
Sous forme matricielle :

$$z = Hx + b$$

On veut retrouver x à partir de z

Déconvolution 1D : exemple de Hunt (2/6)





Forme convolution

```
N=250;
xx=0:N-1;
sigx=7.5;
g1=exp(-(xx-100).^2/(2*pi*sigx^2));g1=g1/max(g1(:));
g2=exp(-(xx-150).^2/(2*pi*sigx^2));g2=g2/max(g2(:));
x=g1+g2;

% le filtre
h=ones(1,75);h=h/sum(h(:));

y=conv(x,h,'same');

sigb=0.01;
z=y+sigb*randn([1,N]);

figure; plot(xx,x,'b',xx,y,'g',xx,z,'m','linewidth',2)
grid on
legend('x : signal','y : signal convolué','z : y+bruit')
```

Forme matricielle

```
% forme matricielle
H=convmtx(h',N);

H=H(38:end-37,:);
ya=H*x';ya=ya';

figure ; plot(xx,ya,'g','linewidth',2); grid on
legend('y')
```

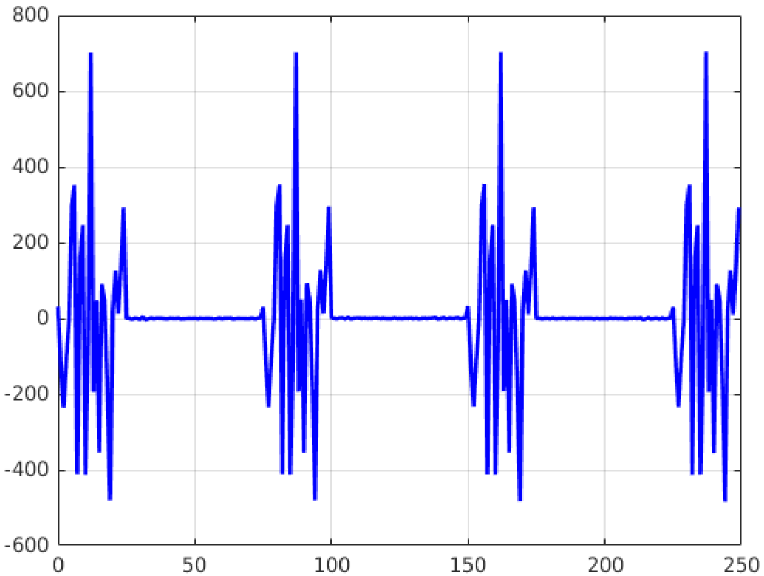
Déconvolution 1D : exemple de Hunt (3/6)

Solution des moindre carrés :

$$\hat{x} = \arg\min_{x} \|z - Hx\|^2$$

$$\hat{x} = (H^t H)^{-1} H^t z$$

Catastrophe...




```
% Solution des moindres carrés

HtH=H'*H

xhat=HtH\(H'*z(:));

figure ;plot(xx,xhat,'b','linewidth',2); grid on
```

Déconvolution 1D : exemple de Hunt (4/6)

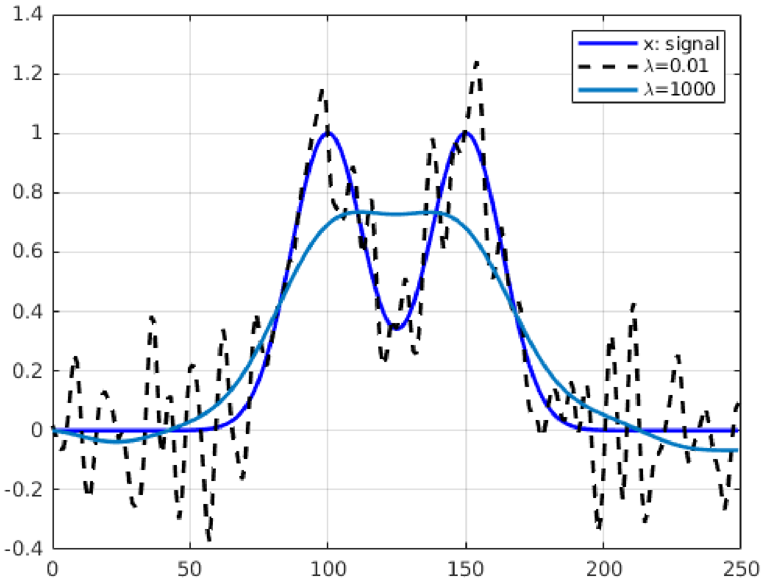
Régularisation par pénalisation quadratique (Tikhonov)

$$\hat{x} = \arg\min_{x} \|z - Hx\|^2 + \lambda \mathcal{R}(x)$$

- λ=0 : Moindre Carrés
- λ=∞ : solution indépendante des données

On va prendre : $\mathcal{R}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} (x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})^2$ Écriture matricielle : $x^t D^t D x$

$$\hat{x} = (H^t H + \lambda D^t D)^{-1} H^t z$$



Comment régler λ ?

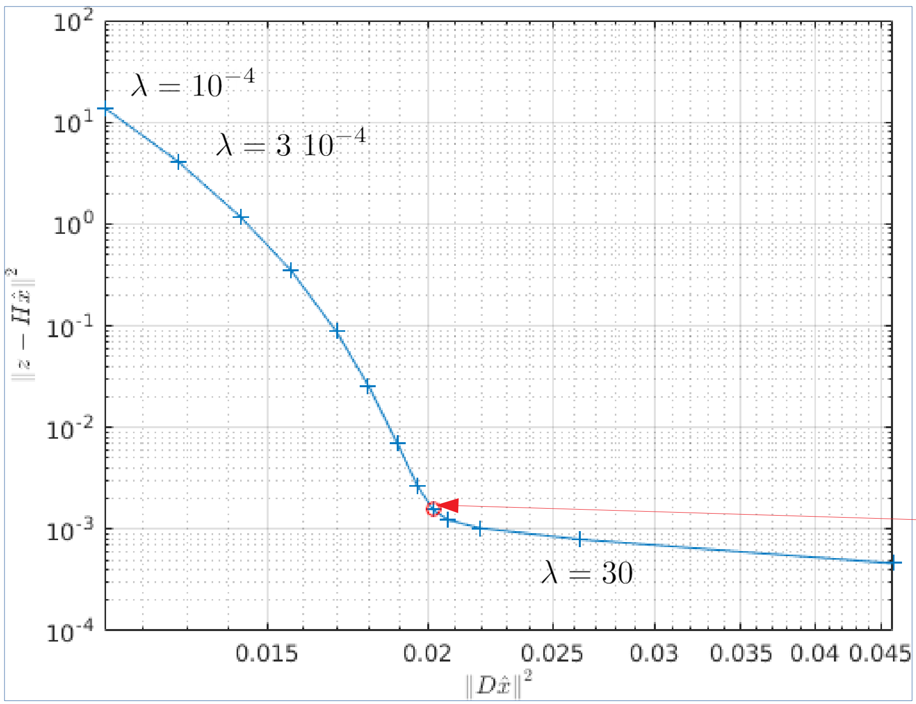
```
% matrice de régularisation
c=[1;-2;1;zeros(247,1)];
r=[1,zeros(1,249)];
D=toeplitz(c,r);

% reconstruction reglee a la main
lambda=0.001;
xhat1=(HtH+lambda*D'*D)\(H'*z(:));

lambda=1000;
xhat2=(HtH+lambda*D'*D)\(H'*z(:));

figure
plot(xx,x,'b',xx,xhat1,'c',xx,xhat2,'linewidth',2);
grid on ;legend('x: signal','\lambda=0.01','\lambda=1000');
```

Déconvolution 1D : exemple de Hunt (5/6)

Régularisation par pénalisation quadratique (Tikhonov)

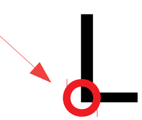
$$\hat{x} = \arg\min_{x} \|z - Hx\| + \lambda \mathcal{R}(x)$$

L-curve : on trace en log-log le résidu en fonction du terme de régularisation pour une large plage de λ



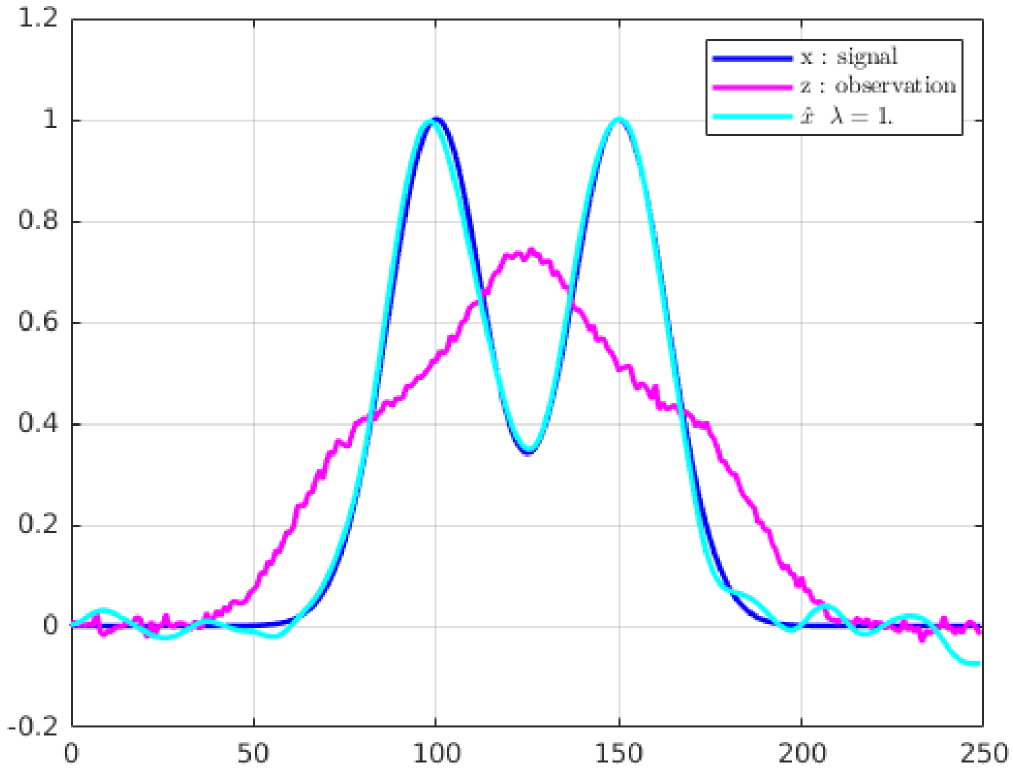

```
%% L-curve
vec_lambda=[1.e-4,3.e-4,1.e-3,3.e-3,1.e-2,3.e-2,1.e-1,3.e-1,1,3,10,30,100];
P=length(vec_lambda);
adeq=zeros(P,1);
regul=zeros(P,1);

D2=D'*D;

for ii=1:P,
    lambda=vec_lambda(ii);
    M=HtH + lambda*D2;
    xhat=M\(H'*z(:));
    adeq(ii)=sum((z(:)-H*xhat).^2);
    regul(ii)=sum((D*xhat).^2);
end

figure; loglog(adeq,regul,'-+');grid on;hold on
xlabel('$\left\| D\hat{x} \right\|^2$','Interpreter','latex')
ylabel('$\left\| z-H\hat{x} \right\|^2$','Interpreter','latex')
iiopt=9;
loglog(adeq(iiopt),regul(iiopt),'or')
```

$\lambda = 1.$

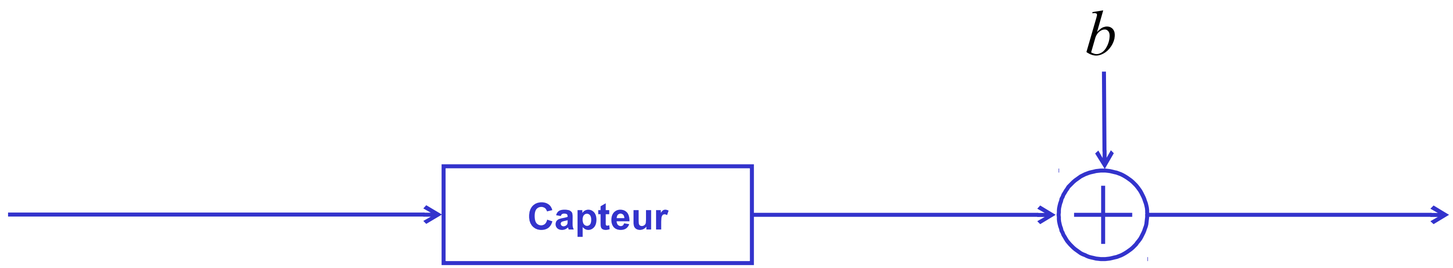


ONERA THE FRENCH AEROSPACE LAB

Déconvolution 1D : exemple de Hunt (6/6)

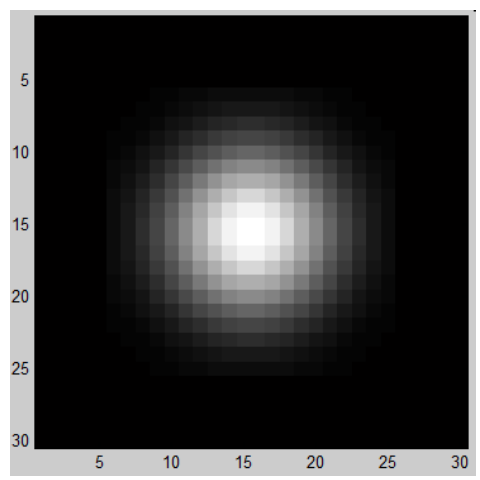


Un problème de convolution



x

h (psf)



$z = h * x + b$

Une approche « intuitive » par Fourier

$$y(n,m) = (\boldsymbol{h} \ast \boldsymbol{x})(n,m)$$

- Théorème de convolution-multiplication

$$\tilde{y}(u,v) = \tilde{\boldsymbol{h}}(u,v)\tilde{\boldsymbol{x}}(u,v) \quad \forall (u,v) \in [0,1[\times[0,1[$$

Transformée de Fourier

- Déconvolution par division

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{FI}}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{\tilde{y}(u,v)}{\tilde{\boldsymbol{h}}(u,v)} & \text{si} \left|\tilde{\boldsymbol{h}}(u,v)\right| \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \left|\tilde{\boldsymbol{h}}(u,v)\right| = 0 \end{cases}$$

- Application du filtre inverse

$$\hat{\boldsymbol{x}}(m,n) = (\boldsymbol{w}_{\mathrm{FI}} \ast \boldsymbol{y})(m,n)$$

$$\tilde{w}_{\mathrm{FI}}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tilde{\boldsymbol{h}}(u,v)} & \text{si} \left|\tilde{\boldsymbol{h}}(u,v)\right| \neq 0 \\ 0 \quad \text{si} \left|\tilde{\boldsymbol{h}}(u,v)\right| = 0 \end{cases}$$

Une approche « intuitive » par Fourier

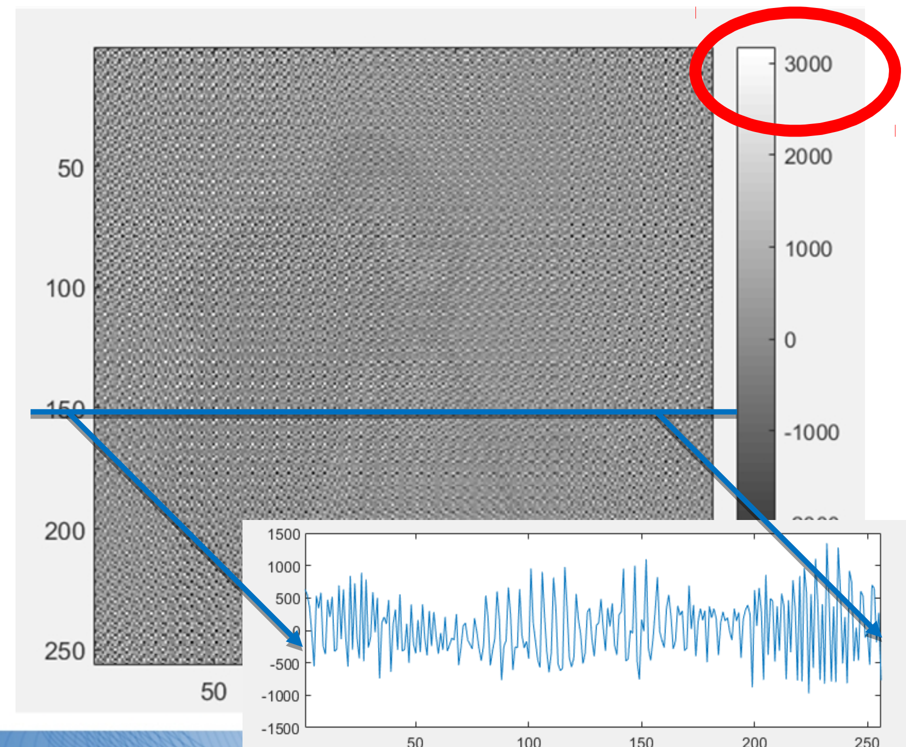
- En pratique il y a toujours du bruit… $z = h * x + b$

- …et c'est très mauvais pour le filtre inverse !

x

$\hat{x}^{FI}$

$$\frac{\tilde{b}(u,v)}{\tilde{h}(u,v)} \to \infty$$



Comment gérer le bruit ?

- En pratique il y a toujours du bruit…
- …et c'est très mauvais pour le filtre inverse !
  - Solution naïve 1 : débruiter avant de faire le filtre inverse
  - Solution naïve 2 : tronquer l'inversion

$$\hat{x} = w_{\varepsilon} * z$$

$$\tilde{w}_{\varepsilon}(u,v) = \begin{cases} \dfrac{1}{\tilde{h}(u,v)} & \text{si } \left|\tilde{h}(u,v)\right| > \varepsilon \\ 0 & \text{si } \left|\tilde{h}(u,v)\right| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Image d'origine x

Image filtrée bruitée z

Image estimée avec ε = 0,1

Filtre de Wiener blanc

- Encore une idée intuitive : ajouter un talon au dénominateur
  - Attention à la symétrie hermitienne…
- Réglage plus facile que la troncature

$$\tilde{w}_\lambda(u,v) = \frac{\tilde{\boldsymbol{h}}^*(u,v)}{|\tilde{\boldsymbol{h}}(u,v)|^2 + \lambda}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{w}_\lambda * \boldsymbol{z}$$

$\lambda = 5.10^{-3}$ $\lambda = 3.10^{-2}$ $\lambda = 0{,}1$

ONERA THE FRENCH AEROSPACE LAB

Filtre de Wiener blanc

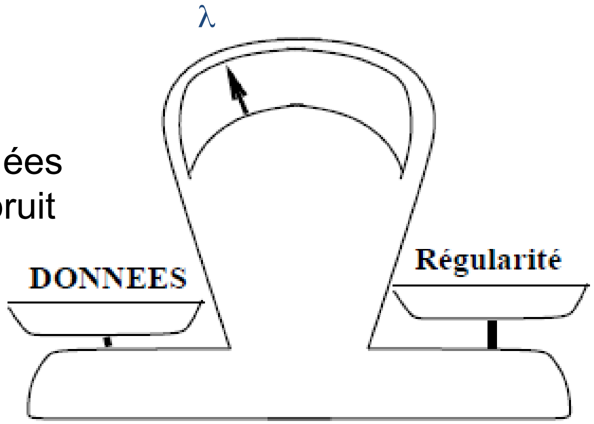
- Encore une idée intuitive : ajouter un talon au dénominateur
  - Attention à la symétrie hermitienne…
- Réglage plus facile que la troncature

$$\tilde{w}_\lambda(u,v) = \frac{\tilde{h}^*(u,v)}{|\tilde{h}(u,v)|^2 + \lambda}$$

$$\hat{x} = w_\lambda * z$$

$\lambda \to 0$

Filtre inverse
Respect des données
Amplification du bruit

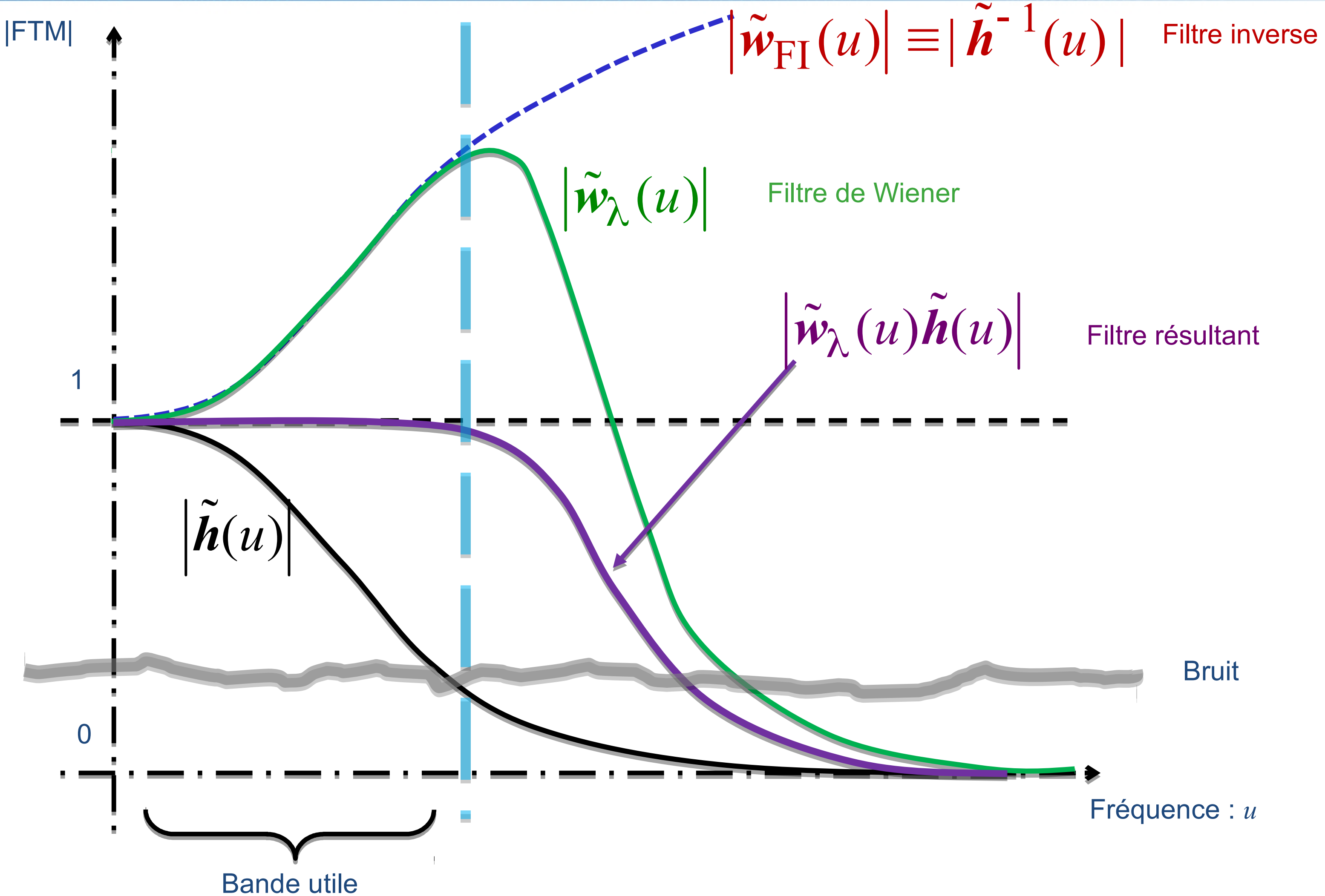


$\lambda \to \infty$

Filtre passe-bas
Lissage du bruit
Perte de données (HF)

- Réglage automatique : il y a des méthodes… (hors scope de ce cours)

Wiener blanc : interprétation



- Le filtre de Wiener fait de l'égalisation dans la « bande utile »

Filtre de Wiener : cas général

$$z = h * x + b$$

$$\widetilde{C}_X(u,v) \qquad \widetilde{C}_B(u,v)$$

- Description du signal et du bruit par leur Densité Spectrale de Puissance
  - Bruit blanc : $\widetilde{C}_B(u,v) = \sigma_B^2, \quad \forall (u,v)$

- Filtre de Wiener : un réglage fréquence par fréquence

$$\hat{x} = w * z$$

$$\widetilde{w}(u,v) = \frac{\widetilde{h}^*(u,v)}{\left|\widetilde{h}(u,v)\right|^2 + \lambda \frac{\widetilde{C}_B(u,v)}{\widetilde{C}_X(u,v)}}$$

En pratique il faut souvent régler la variance

Rapport bruit à signal pour chaque fréquence

Filtrage de Wiener : modèle de DSP

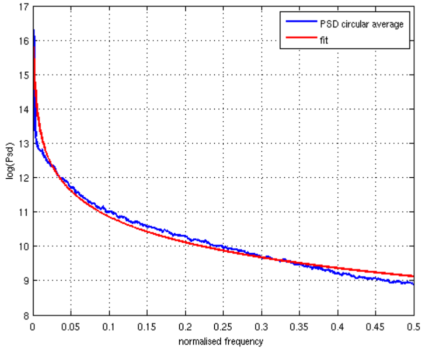
- Forme générale FW :
  - DSP scène ?

$$\tilde{w}(u,v) = \frac{\tilde{C}_X(u,v)\tilde{h}^*(u,v)}{\tilde{C}_X(u,v)\left|\tilde{h}(u,v)\right|^2 + \lambda \tilde{C}_B(u,v)}$$

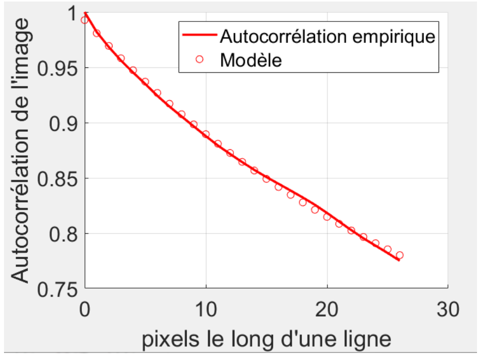
- Modèles de DSP scène
  - paramètres ajustés…

$$\tilde{C}_X(u,v) = \frac{\tilde{C}_X(0,0)}{\left(\alpha^2 + 4\pi^2(u^2+v^2)\right)^{\beta/2}}$$

…sur la DSP empirique



…ou sur la TF de l'autocorrélation



Exemples comparés

Image initiale

Image restaurée par filtre de Wiener blanc λ = 0,03

Norme de l'erreur : 16,6

Image initiale + flou gaussien σ=2 + bruit gaussien σ_b =0.004

Image restaurée par filtre de Wiener, approche « modèles »

Norme de l'erreur : 9,6

Formulation matricielle de la déconvolution

$$y = Hx$$

- Cas 1D $\quad y(n) = (h \ast x)(n) = \sum_{i=0}^{p-1} h(i)x(n-i), \quad n = 0, \ldots, N-1$
- Hypothèses de bord :
  - pour calculer y(0) on a besoin des x(*n*), *n*<0
  - Fenêtrage : *x*(*n*)=0 si *n*<0 ⇒ ***H*** *N*x*N* Toeplitz
  - Périodique ⇒ ***H*** *N*x*N* circulante

$$y(n,m) = (h \ast x)(n,m) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} h(i,j)x(n-i, m-j)$$

- Cas 2-D : ***H*** est *NM* x *NM*
  - En général : doublement Toeplitz
  - Périodique : doublement circulante

Moindres carrés

- Forme générale $$z = Hx + b$$
  - Déconvolution : problème inverse avec ***H*** Toeplitz

$$\hat{x}^{MC} = \arg\min_x \|z - Hx\|^2 \quad \Rightarrow \quad H^t H \hat{x}^{MC} = H^t z$$

- Solution des moindres carrés
  - Lorsque le nb de données (dim ***z***) est supérieur au nombre d'inconnue (dim ***x***), la matrice $H^t H$ est souvent de rang plein
  - Si ce n'est pas le cas on fait une inverse généralisée :

$$H^t H = PDP^t \quad \text{avec} \quad \text{diag}\, D = [\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_R, 0, \cdots, 0]$$

$$\left(H^t H\right)^+ = PD^+P^t \quad \text{avec} \quad \text{diag}\, D^+ = [1/\delta_1, 1/\delta_2, \cdots, 1/\delta_R, 0, \cdots, 0]$$

$$\Rightarrow \hat{x}^{MC} = \left(H^t H\right)^+ H^t z$$

Moindres carrés en déconvolution (cas 1D)

$$\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{MC}} = \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H}\right)^{+} \boldsymbol{H}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{z} \qquad \left(\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{H}\right)^{+} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{D}^{+} \boldsymbol{P}$$

$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{D}^{+}) = \left[\frac{1}{\mu_1}, \frac{1}{\mu_2}, \ldots, \frac{1}{\mu_R}, 0, \ldots, 0\right]$$

$$\tilde{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{FI}}(u) = \begin{cases} \dfrac{\tilde{z}(u)}{\tilde{\boldsymbol{h}}(u)} & \mathrm{si} \left|\tilde{\boldsymbol{h}}(u)\right| \neq 0 \\ 0 & \mathrm{si} \left|\tilde{\boldsymbol{h}}(u)\right| = 0 \end{cases}$$

Deux formes proches...

$$\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{MC}} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{t}} \begin{pmatrix} 1/\mu_1 & \cdots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & 1/\mu_R & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{P}\boldsymbol{H}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{z}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{FI}} = \boldsymbol{F}^{*} \begin{pmatrix} 1/\tilde{\boldsymbol{h}}(0) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 1/\tilde{\boldsymbol{h}}(u) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{F}\boldsymbol{z}$$

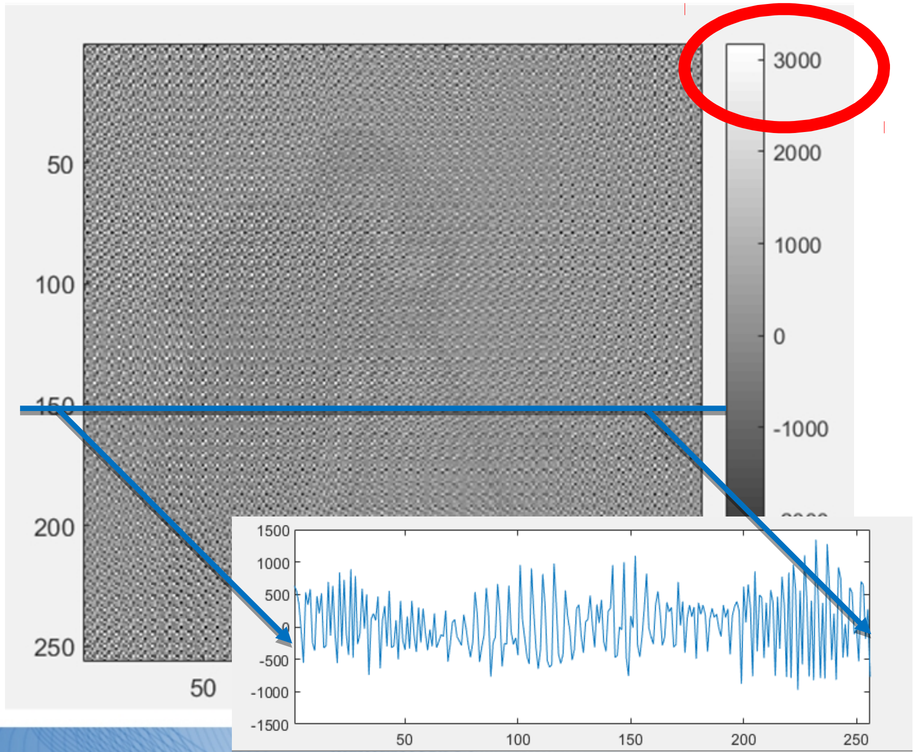
- En déconvolution la solution aux moindres carrés est la même que celle obtenue par filtrage inverse
  - Démonstration rigoureuse en hypothèse périodique par la diagonalisation des matrices circulantes dans la base de Fourier
    - Si ***H*** est circulante : $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F}\mathrm{diag}(\tilde{h}(0), \cdots, \tilde{h}(u), \cdots)\boldsymbol{F}^{*}$

ONERA THE FRENCH AEROSPACE LAB

Moindres carrés en déconvolution (2D)

- De même en déconvolution 2D les solutions par filtrage inverse et aux moindre carrés sont les mêmes
- …et sont donc toutes les deux très sensibles au bruit…

$$\boldsymbol{x} \qquad\qquad \hat{\boldsymbol{x}}^{FI} = \hat{\boldsymbol{x}}^{MC}$$



Plan

- Déconvolution par filtre de Wiener
- Débruitage

Débruitage

- Une idée simple : moyenner
  - Spatialement : oui mais il faut moyenner les pixels correspondant aux mêmes intensités
    - Donc on moyenne les voisins…

Filtre moyenneur gaussien

Filtre médian

Filtres locaux

- Proximité spatiale

$$y(\underline{s}) = \sum_{\underline{s}'} g(\underline{s}' - \underline{s})\, x(\underline{s}')$$

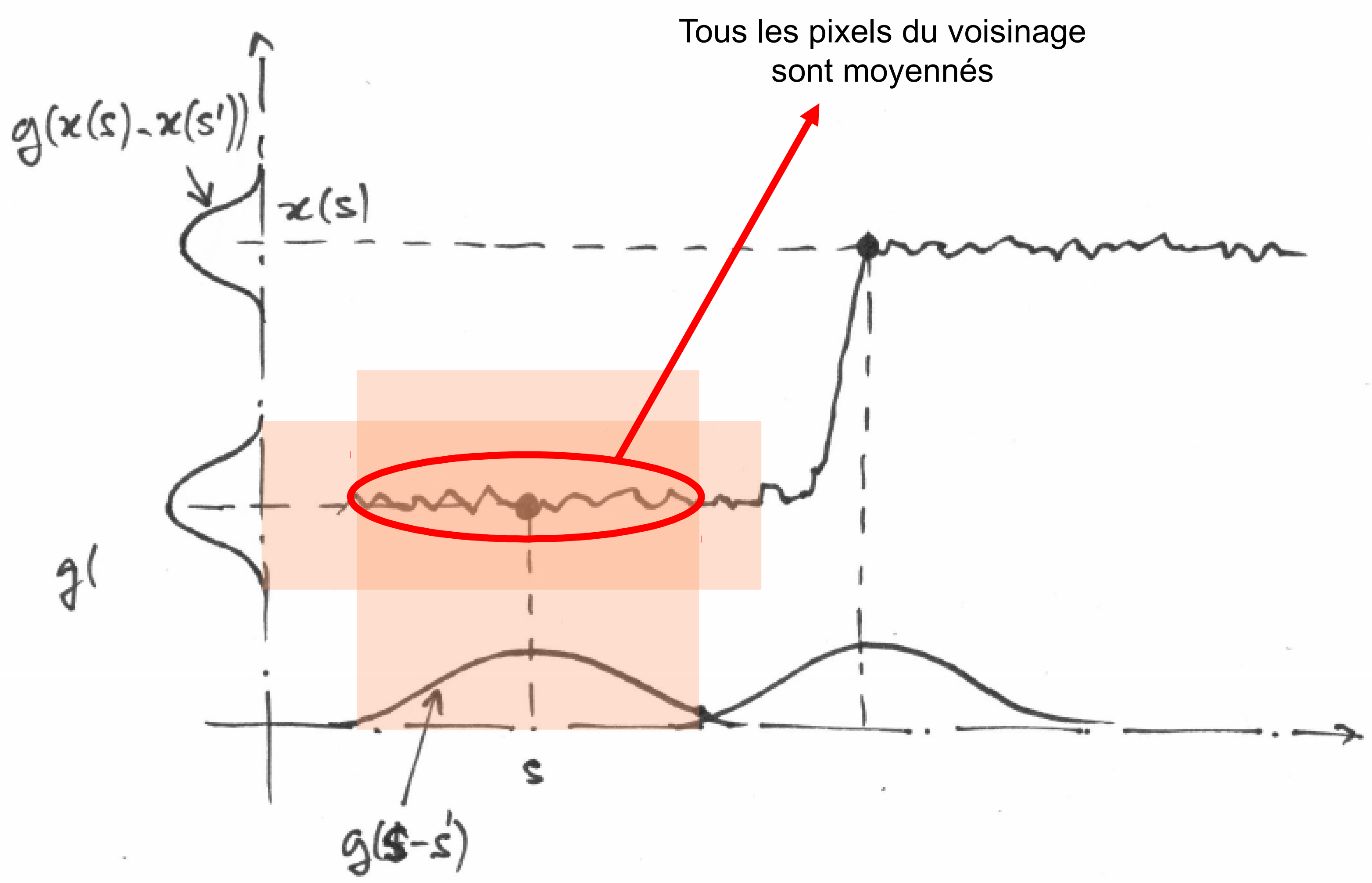
Filtre moyenneur gaussien

- Proximité spatiale et en intensité

$$y(s) = \frac{1}{k(s)} \sum_{s'} g(s' - s)\, g\big(x(s') - x(s)\big)\, x(s')$$

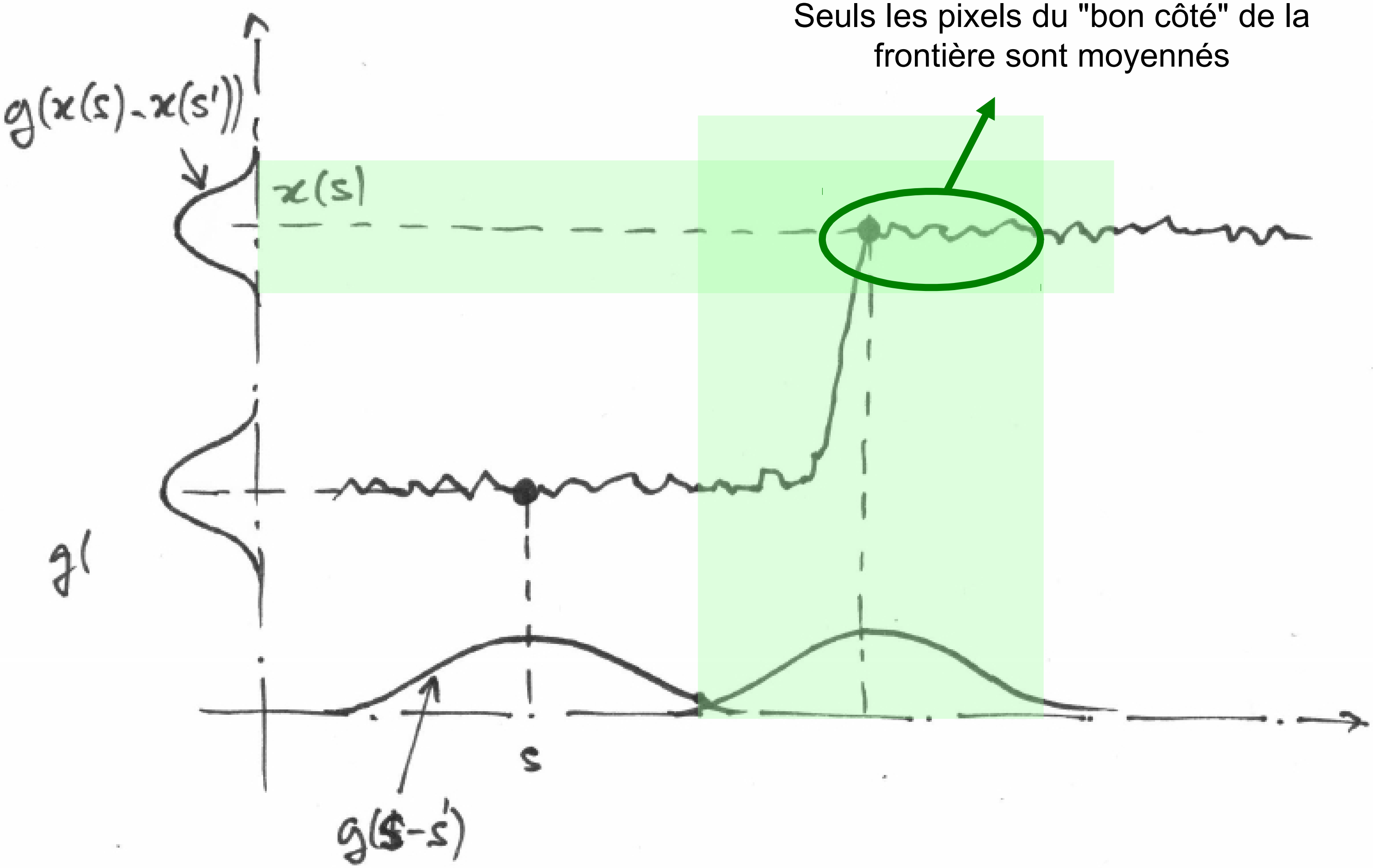
Filtre bilatéral

Filtre bilatéral : schéma 1D



Filtre bilatéral : schéma 1D

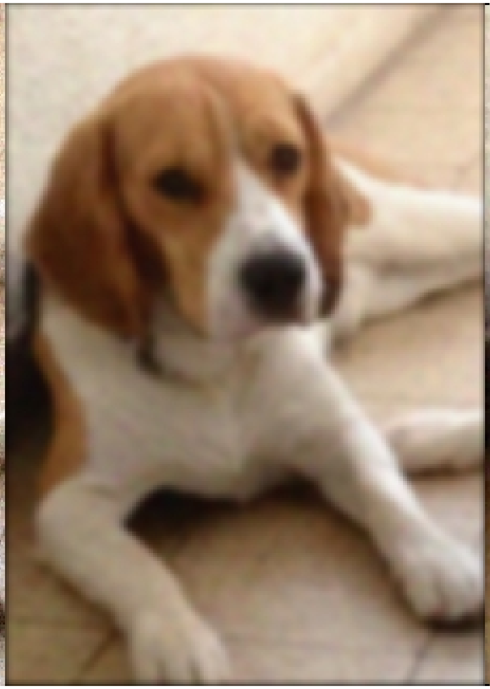
Seuls les pixels du "bon côté" de la frontière sont moyennés



ONERA THE FRENCH AEROSPACE LAB

Résultats

original



Filtre moyenneur
gaussien

Filtre médian

Filtre bilatéral