31

S T Q Q S S D ___/___/___

ma201 statistique lundi 08/10/2022

PC2 exercice 1 part 2

$\frac{\partial}{\partial \hat\theta} \int_z^{+\infty} (\theta-\hat\theta)^2 \cdot \exp(z-\theta) d\theta = -2 \int_z^{+\infty} (\theta-\hat\theta) \exp(z-\theta) d\theta = 0$ chaîne

$\hat\theta \int_z^{+\infty} \exp(z-\theta) d\theta = \int_z^{+\infty} \theta \exp(z-\theta) d\theta$ donc

$\hat\theta = \int_z^{+\infty} \theta \exp(z-\theta) d\theta$ résultat classique sur l'estimateur bayésien du risque

$(a.b)' = a'b + ab' \rightarrow \int ab' = ab - \int a'b$ chaîne

quadratique qui vaut ici $\hat\theta = z+1$ (II)

fonction de densité

$\mathbb{E}[e^{-\lambda\theta}] = \lambda$; dans ce cas $\lambda = 1$, et après décalage de z, (III) on retrouve bien l'estimateur $\hat\theta = z+1$ du risque quadratique

maximum vraisemblance à posteriori : maximiser $f(\theta|z)$ donc

$\frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta|z) = \frac{\partial}{\partial \theta} \exp(z-\theta) = -(z-\theta)\exp(z-\theta) = 0 \rightarrow z\exp(z-\theta) = \theta\exp(z-\theta)$ chaîne

donc $z = \theta$ donc $\hat\theta = z$

Remarques

✓ (I) : comment on arrive à $\hat\theta = z + \ln(2)$

✓ (II) comment on faire le calcul pour $\hat\theta = z+1$

(III) pourquoi on décalage z ?

(IV) est ce qu'on peut dire que le 1er estimateur, et le 2ème, sont biaisé et le 3e non ?

$\hat\theta = \int_z^{+\infty} \theta \exp(z-\theta) d\theta = \theta \cdot (-\exp(z-\theta))\Big|_z^{\infty} - \int_z^{\infty} -\exp(z-\theta) d\theta$

$\hat\theta = +z - \exp(z-\theta)\Big|_z^{\infty} = -\underbrace{\exp(z)\cdot\exp(-\infty)}_{0} + \exp(z-z) + z = z+1$

$\hat\theta = z+1$ /

spiral

__/__/__ S T Q Q S S D

MA201 statistique — lundi 03/10/2022

PC2 exercice 2

loi a priori de Jeffreys dans le cas gaussien avec θ et τ^2 (→ variable aléatoire)

definition

loi a priori de Jeffreys: $J(\theta) = \sqrt{I(\theta)}$ où $I(\theta) = \mathbb{E}\left[-\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log f(x|\theta)\right]$ (→ information de Fisher)

type de loi non informative, loi qui porte une information sur le paramètre à estimer dont le poids dans l'inference est réduit

PC2 exercice 2 part 1

calculer $f(z|\theta)$, est la densité de la loi gaussienne $\mathcal{N}(\theta, \tau^2)$ donc (I)

$$f(z|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} \exp(-(z-\theta)^2/(2\tau^2))$$

PC2 exercice 2 part 2

calculer vraisemblance

$$L(\theta; z_1, \dots, z_n) = f(z_1 = z_1; \dots; z_N = z_N; \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} \exp(-(z_i-\theta)^2/(2\tau^2)) =$$

$$\mathcal{L}(\theta; z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}^{\,n}} \cdot \exp(-1/2\tau^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (z_i - \theta)^2)$$

↳ producteur d'exposant devient sommateur

PC2 exercice 2 part 3

calculer matrice d'information de Fischer $I(\theta)$

$$I(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln \mathcal{L}(\theta; z)\right] = \frac{n}{\tau^2}, \quad \mathbb{E}[a] = a \text{ si } a \text{ constant}$$

$$\ln \mathcal{L}(\theta; z) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\tau^2) - \frac{1}{2\tau^2} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \theta)^2$$

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}(\theta; z)}{\partial\theta} = \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \theta) = \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{n} z_i - \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{n} \theta = \frac{1}{\tau^2} \sum_{i=1}^{n} z_i - \frac{1 \cdot n\theta}{\tau^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln \mathcal{L}(\theta; z) = \frac{-n}{\tau^2}$$

S T Q Q S S D

__ / __ / __

MA 201 statistique lundi 03/10/2022

PC4 exercice 1 part 1

pour $i = 1, \dots, N$ on a : $Z_i = H_i \theta + B_i$ avec $z_i = z(iTe)$ donc, pour être d'accord avec les équations du diaporama

$H_i = [\cos(w_1 iTe) \ \cos(w_2 iTe) \ \cos(w_3 iTe)]$

$\theta = [a \ b \ c]^T$ et $B_i = b(iTe) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b)$

ici le bruit B_i est considéré comme normale

PC4 exercice 1 part 2

$\hat{\theta}_n = \text{argmax}_{\theta \in \mathbb{R}^3} \{ f(z_1, \dots, z_n; \theta) \}$

PC4 exercice 1 part 3

$\sum_{k=1}^{n} \partial / \partial\theta \left[(z_k - H_k \theta)^T \cdot R_k^{-1} (z_k - H_k \theta) \right] =$

$\sum_{k=1}^{n} \partial / \partial\theta \left[z_k^T R_k^{-1} z_k + \theta^T H_k^T R_k^{-1} H_k \theta - \theta^T H_k^T R_k^{-1} z_k - z_k^T R_k^{-1} H_k \theta \right.$

$\sum_{k=1}^{n} \left[(H_k^T R_k^{-1} H_k + (H_k^T R_k^{-1} H_k)^T) \theta - H_k^T R_k^{-1} z_k - H_k^T R_k^{-1} z_k \right]$

$(2 \sum_{k=1}^{n} H_k^T R_k^{-1} H_k) \theta - 2 (\sum_{k=1}^{n} H_k^T R_k^{-1} z_k)$

PC4 exercice 1 part 4

algorithme matlab

34

__/__/__ S T Q Q S S D

ma201 statistique lundi 03/10/2022

PC2 exercice 2 part 4

loi de Jeffrey sur θ

$\pi(\theta) \propto \sqrt{\det(I(\theta))}$ comme $I(\theta) = \frac{n}{\sigma^2}$ constant on a $\pi(\theta) \propto \frac{1}{\sigma}\sqrt{n}$ (II)

Remarques

(I) pourquoi ? c'est une définition ? oui définition loi gaussienne

(II) je peux laisser le "proportion à" ? oui, c'est comme une égalité

PC2 exercice 3

variable aléatoire représentant la réussite ou l'échec d'une réalisation ensuivant un loi de Bernoulli de paramètre θ. loi a priori défine par $P(\theta=\theta_1)=p$ et $P(\theta=\theta_2)=1-p$

PC2 exercice 3 part 1

loi $\pi(\theta|Z=z)$: $P(Z=0)=1-\theta$; $P(Z=1)=\theta$ (I) est-ce que c'est loi de Z et la loi a priori est discrete ? page 6 slide

$$\pi(\theta=\theta_1 \mid Z=0) = \frac{(1-\theta_1)p}{(1-\theta_1)p+(1-\theta_2)(1-p)} = \frac{P(Z=0)\cdot P(\theta=\theta_1)}{P(Z=0)\cdot P(\theta=\theta_1)+P(Z=0)\cdot P(\theta=\theta_2)}$$

(loi de Bayes)[1]

$$\pi(\theta=\theta_1 \mid Z=1) = \frac{\theta_1 \cdot p}{\theta_1 \cdot p + \theta_2(1-p)}$$

$$\pi(\theta=\theta_2 \mid Z=0) = \frac{(1-\theta_2)(1-p)}{(1-\theta_1)p+(1-\theta_2)(1-p)}$$

$$\pi(\theta=\theta_2 \mid Z=1) = \frac{\theta_2(1-p)}{\theta_1 p + \theta_2(1-p)}$$

PC2 exercice 3 part 2 :

on considère l'estimateur défini par $T(0)=\mu_1$, $T(1)=\mu_2$ pour $C(\theta,T)=(\theta-T)^2$ pour $z=1$ et $z=0$,

spiral®

S T Q Q S S D __/__/__

MA201 statistique → moyenne pondérée (π) mardi 04/10/2022

PC2 exercice 3 part 2

$\mathbb{E}_\pi[C(\theta,T)|z=0] = (\theta_1-\mu_1)^2 \underbrace{\pi(\theta=\theta_1|z=0)}_{\lambda_1} + (\theta_2-\mu_1)^2 \underbrace{\pi(\theta=\theta_2|z=0)}_{(1-\lambda_1)}$

$\mathbb{E}_\pi[C(\theta,T)|z=1] = (\theta_1-\mu_2)^2 \underbrace{\pi(\theta=\theta_1|z=1)}_{\lambda_2} + (\theta_2-\mu_2)^2 \underbrace{\pi(\theta=\theta_2|z=1)}_{(1-\lambda_2)}$

PC2 exercice 3 part 3

l'estimateur de Bayes associé à ce coût minimise $\mathbb{E}[C(\theta,T)|z=0]$ et $\mathbb{E}[C(\theta,T)|z=1]$

pour $\mathbb{E}_\pi[C(\theta,T)|z=0] = (\theta_1-\mu_1)^2\lambda_1 + (\theta_2-\mu_1)^2(1-\lambda_1)$

Remarques

(I) est-ce que cette loi de z et la loi a priori est discrète ? page 6 du slide

(II) quelle est la définition de $\mathbb{E}_\pi[C(\theta,T)|z=0]$?

✓ (III) qu'est que ce $C(\theta,T)$? quelle définition ? $C(\theta,T) = (\theta-T)^2$ donné par l'exercice

(IV) je n'ai pas suivi la part 3

PC2 exercice 4

soit Z une variable aléatoire telle que $Z \sim \mathcal{N}(\theta,1)$ où θ est un paramètre qui suit une loi de probabilité $\mathcal{N}(0,\tau^2)$ où τ^2 est inconnu et fixé. pour estimer θ, on considère la fonction de perte quadratique $R(\theta,a) = (\theta-a)^2$

Résolution

la loi de $\theta|Z=z$ est définie par $\pi(\theta|Z=z) = \dfrac{f(z|\theta)\cdot\pi(\theta)}{\int f(z|t)\cdot\pi(t)\,dt}$ → la loi de z et la loi a priori sont continues

___/___/___ S T Q Q S S D

(I)

ma201 statistique mardi 04/10/2022

PC2 exercice 4 part 1

(IV) (II) (III)

qui est proportionnelle au produit $\mathcal{N}(\theta,1)\ \mathcal{N}(0,\tau^2)$. le terme de l'exponentielle s'écrit $-(z-\theta)^2 - \theta^2/\tau^2$ et par transformation, on peut montrer que la loi est proportionnelle à $\mathcal{N}(\tau^2 z/(1+\tau^2), \tau^2/(1+\tau^2))$; les autres thermes ne dépendent pas de θ

(VI) (V)

l'estimateur de Bayes est a qui minimise $\int_\theta R(\theta,a)\, d\mathbb{P}(\theta|Z=z)$ ça doit vérifier $\frac{\partial}{\partial a}\int_\theta R(\theta,a)\, d\mathbb{P}(\theta|Z=z)=0$ soit $\frac{\partial}{\partial a}\int_\theta R(\theta,a)\, f(\theta|Z=z)\, d\theta=0$

ce qui s'écrit $\int_\theta (\theta-a)\, f(\theta|Z=z)\, d\theta=0$, on déduit que

(VII)

$a=\frac{\int_\theta \theta\, f(\theta|Z=z)}{\int_\theta f(\theta|Z=z)}$ c'est donc la moyenne de $f(\theta|Z=z)$ soit $\tau^2 z/(1+\tau^2)$

Il faut vérifier que cela correspond bien à minumum

Remarqués

(I) pourquoi? qu'est la définition?

(II) quel transformation?

(III) comment on montre?

(IV) pourquoi? j'ai de mal a voir

(V) c'est une integrale par rapport une probabilité? comment ça?

(VI) pourquoi? j'ai du mal a voir

(VII) comment?

(I) $\mathcal{N}(0,\tau^2)=\frac{1}{\sqrt{2\tau^2\pi}}\exp(-(x-\mu)^2/2\tau^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}}\exp(-x^2/2\tau^2)$

S T Q Q S S D ___/___/___

ma201 statistique mardi 04/10/2022

PC2 exercice 5 part 1

soit $\hat{\theta} = \underset{\theta}{\arg\max}\ \pi(\theta|x) \overset{(I)}{=} \underset{\theta}{\arg\min} \left(\frac{\|x - M\theta\|^2}{2\sigma^2} + \frac{\|\theta\|^2}{2\mu^2} \right)$

(II) (III)

on calculant le gradient de $\|x - M\theta\|^2 / 2\sigma^2 + \|\theta\|^2 / 2\mu^2$ et en cherchant la valeur de θ qui l'annule on obtient $\hat{\theta} = (M^T M + \lambda^2 I)^{-1} M^T x$ avec $\lambda = \sigma / \mu$

(IV)

✓ Remarques

✓ (I) comment ? resolution dans une photo page 39 aussi

✓ (II) pourquoi, comment calculer le gradient ?

✓ (III) comment ?

✓ (IV) pourquoi ?

le professeur a donnee une résolution, c'est écrit dans la page 39

PC2 exercice 6 mercredi 05/10/2022

θ nombre moyen de passage par unité de temps en un point donné. On sait que la durée T séparant deux passages successifs suit une loi exponentielle de θ soit

fonction de repartition

$f_\theta(\tau) = \theta e^{-\theta\tau}\ 1\!\!1_{\mathbb{R}^+}(\tau)$

estimer θ à l'aide d'observations successives $\tau_1, \dots, \tau_n$

PC2 exercice 6 part 1

on suppose a priori aucune information sur $\theta \to 0$. déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^{MV}$

$L(\theta; \tau_1, \dots, \tau_n) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(\tau) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta\tau_i}\ 1\!\!1_{\mathbb{R}^+}(\tau_i)$ (I) comme les donnes sont consideres comment positifs

$L = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta\tau_i} = \theta^n \cdot \exp(-1\theta \sum_{i=1}^{n} \tau_i)$ la repartition est redundant

__/__/__

S T Q Q S S D

MA201 statistique — mercredi 05/10/2022

PC2 exercice 6 part 1

$\ln \mathcal{L} = \ln(\theta^n \cdot \exp(-1\theta \sum_{i=1}^n \tau_i)) = n \ln\theta - 1\theta \sum_{i=1}^n \tau_i$

$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - 1 \cdot \sum_{i=1}^n \tau_i = 0 \rightarrow \hat{\theta}_n^{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \tau_i}$

$\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} < 0$ donc c'est maximum

PC2 exercice 6 part 2

on suppose une loi exponentielle de paramètre λ connu : $g(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(\theta)$

Déterminer à partir des observations τ_i l'estimateur $\hat{\theta}_n^{MAP}$ du maximum a posteori

$\mathcal{L}(\theta | \tau_1, \dots, \tau_n) = \frac{f_\theta(\tau_1, \dots, \tau_n) \cdot g(\theta)}{f_{T_1,\dots,T_n}(\tau_1, \dots, \tau_n)} = \frac{g(\theta)}{f_{T_1,\dots,T_n}(\tau_1, \dots, \tau_n)} \cdot \prod_{i=1}^n f_\theta(\tau_i)$ (II)

$\mathcal{L} = \frac{\lambda\theta^n}{f_{T_1,\dots,T_n}(\tau_1, \dots, \tau_n)} \cdot \exp(-\lambda\theta - \theta \sum_{i=1}^n \tau_i)$

$\ln \mathcal{L} = \ln(\lambda) + n\ln(\theta) - \ln(f_{T_1,\dots,T_n}(\tau_1, \dots, \tau_n)) - \lambda\theta - \theta \sum_{i=1}^n \tau_i$

$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \lambda - \sum_{i=1}^n \tau_i = 0 \rightarrow \hat{\theta}_n^{MAP} = \frac{n}{\lambda + \sum_{i=1}^n \tau_i}$

$\frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} < 0$ donc maximum

PC2 exercice 6 par 3

on note $\frac{\hat{\theta}^{MV}}{\hat{\theta}^{MAP}} = 1 + \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^n \tau_i} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ (III)

plus grand que un dès autres

S T Q Q S S D __/__/__

MA201 statistique mercredi 05/10/2022

PC2 exercice 6

Remarques

✓(I) pourquoi la fonction de répartition disparaître ?

✓(II) pourquoi $g(\theta)$ ne passe pour le producteur ? est-elle constante ?

✓(III) pourquoi $\to 1$?

Réponses: lundi 10/10/2022

(I) mesures sont toujours non négatifs donc ce n'est pas nécessaire d'ajouter la fonction de répartition, ça sera redondant

(II) définition de l'expression, le producteur ne fait pas partie

(III) chaque échantillon est plus grand que l'antérieur donc la somme va à l'infinit

argmin θ: cherche le valeur minimale de la fonction sur θ, dérivé égale à zéro

PC2 exercice 5 part 1

Résolution

$$\theta = \underset{\theta}{\text{argmin}} \left(\frac{\|X - M\theta\|^2}{2\sigma^2} + \frac{\|\theta\|^2}{2\mu^2} \right) \Rightarrow f(\theta) = \frac{1}{2\sigma^2} (\|z - M\theta\|^2) + \frac{1}{2\mu^2} \|\theta\|^2 \Rightarrow (I)$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2\sigma^2} (z - M\theta)^T (z - M\theta) + \frac{1}{2\mu^2} \theta^T \theta \Rightarrow (II)$$

$$f(\theta) = \frac{1}{2\sigma^2} (\theta^T M^T M \theta - \theta^T M z - z M \theta + z^T z) + \frac{1}{2\mu^2} \theta^T \theta$$

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} = \frac{1}{2\sigma^2} (2 M^T M \theta - 2 M z) + \frac{1}{2\mu^2} 2\theta = \left(\frac{1}{\sigma^2} M^T M + \frac{1}{\mu^2} I \right) \theta - \frac{1}{\sigma^2} M z = 0$$

$$\theta = \left(\frac{1}{\sigma^2} M^T M + \frac{1}{\mu^2} I \right)^{-1} \cdot \frac{1}{\sigma^2} M z \underset{(III)}{\Rightarrow} \theta = (M^T M + (\sigma/\mu)^2 I)^{-1} M z$$

chercher

(I) módulo à multiplication

✓(II) multiplication with transpose

✓(III) inverse constant

(IV) matrix dérivé

__/__/__ S T Q Q S S D

MGU201 statistique lundi 10/10/2022

PC6 exercice 1:

Remarques

(I) comment on peut déterminer le tailles des matrices V, xK, PK? comment raisonner avec les états?

(II) qu'est-ce que le trace nous dit de la fonction? numeriquement

Controle 2020-2021 mardi 11/10/2022

exercice 1 part 1

$\mathbb{E}[Z_m] = 1/n \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Z_i] = 1/n \sum_{i=1}^{n} a\theta/(a-1) = a\theta/(a-1)$

$\mathbb{E}[KZ_m] = K\,\mathbb{E}[Z_m] = K\,a\theta/(a-1)$

on prends $K = (a-1)/a$ donc $\mathbb{E}[KZ_m] = \theta$ car $B(\theta, Z_m) = 0$ non biasé

$V(KZ_m) = V((a-1)/a\ Z_m) = (a-1)^2/a^2\ V(Z_m) = (a-1)^2/a^2\ V(1/n \sum_{i=1}^{n} Z_i)$

$= (a-1)^2/a^2 \cdot 1/n^2 \sum_{i=1}^{n} V(Z_i)$

$= \dfrac{\cancel{(a-1)^2}}{a^{\cancel{2}}\, n^{\cancel{2}}} \cdot \dfrac{\cancel{n}\ \cancel{a}\theta^2}{\cancel{(a-1)^2}(a-2)} = \dfrac{\theta^2}{a\,n\,(a-2)}$

on note $\lim_{n\to\infty} V(KZ_n) = 0$ donc, avec $B(\theta, Z_m) = 0$, estimateur convergent

exercice 1 part 2

$\tilde{Z} = \min(Z_1, \dots, Z_n)$; $G(x) = p(\tilde{Z} < x)$ donc $p(\tilde{Z} < x) = 1 - p(\tilde{Z} \perp x) \Rightarrow$

$p(\tilde{Z} \perp x) = p(Z_1 \perp x, Z_2 \perp x, \dots, Z_n \perp x)$

$= p(Z_1 \perp x) \cdots p(Z_n \perp x)$

$= p(Z_i \perp x)^n = (1 - p(Z_i < x))^n$

S T Q Q S S D ___/___/___

ma201 statistique mardi 11/10/2022

controle 2020-2021 → définition fonction de repartition

exercice 1 part 2

$p(\tilde{Z} < x) = 1-(1-p(Z<x))^n \Rightarrow p(\tilde{Z}<x) = 1-(1-(1-(\theta/x)^a))^n = 1-(\theta/x)^{an}$

on note que c'est la même structure qu'une distribution de la loi de pareto donc l'esperance et la variance sera equivalent

$E[p(\tilde{Z}<x)] = \frac{na}{na-1}\theta$ et $V(\tilde{Z}) = \frac{na\theta^2}{(na-1)^2(na-2)}$

$E[K_1\tilde{Z}] = K_1 \frac{na}{na-1}\theta \Rightarrow K_1 = \frac{na-1}{na}$ pour estimateur sans biais

ça posse des problèmes parce que K_1 depend de n

$V(K_1\tilde{Z}) = K_1^2 V(\tilde{Z}) = \frac{(na-1)^2}{(na)^2} \cdot \frac{na\theta^2}{(na-1)^2(na-2)} = \frac{\theta^2}{na(na-2)}$ donc

$\lim_{n\to\infty} V(K_1\tilde{Z}) = 0$; l'estimateur convergent

exercice 1 part 3

comparaison avec soustraction

$A = \frac{\theta^2}{n a(a-2)} - \frac{\theta^2}{na(na-2)}$

→ c'est le plus efficace

exercice 1 part 4

maximum vraisemblance

$L(z_1,\dots,z_n;a) = f(z_1,\dots,z_n) = f(z_1)\cdots f(z_n)$

$= \prod_{i=1}^n a\theta^a/(z^{a+1})$

$= (a\theta^a)^n/(z^{a+1})$

spiral®

__ / __ / __

S T Q Q S S D

MA201 statistique — mardi 11/10/2022

controle 2020 2021 exercice 1 part 1

$\ln L = n(\ln a + a\ln\theta -)(a+1)\ln z$

$\quad = n\ln a + na\ln\theta - (a+1)\ln(z_1, \dots, z_n)$

$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{n}{a} + n\ln\theta - 1\ln(z_1, \dots, z_n) = 0$ maximum

$a = \frac{n}{\ln(z_1, \dots, z_n) - n\ln\theta} \Rightarrow a = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} z_i/\theta}$

travail 1 FKE exercice 1 part 1 — jeudi 13/10/2022

(I) comment comencer ?

(II) comment est l'interpretation du problème

E[ ] esperance

r correlation

S T Q Q S S D   __/__/__

ma201 statistique   jeudi 13/10/2022

Travail FKE exercice 1 part 2

$x_K(T) = D_K \cdot \cos(\alpha_K T)$ $x(K+1) = D_K \cdot \cos(\alpha_K) + x(K)$

$\dot{x}_K(T) = -D_K \cdot \alpha_K \cdot \mathrm{sen}(\alpha_K T)$

$\ddot{x}_K(T) = -D_K \cdot \alpha_K^2 \cdot \cos(\alpha_K T)$

$y_K(T) = D_K \, \mathrm{sen}(\alpha_K T)$

$\dot{y}_K(T) = D_K \cdot \alpha_K \cos(\alpha_K T)$

$\ddot{y}_K(T) = -D_K \cdot \alpha_K^2 \cdot \mathrm{sen}(\alpha_K T)$

$X(K) = [x(KT) \; y(KT) \; \dot{x}(KT) \; \dot{y}(KT) \; \ddot{x}(KT) \; \ddot{y}(KT)]^T$

$$\begin{bmatrix} x(K+1) \\ y(K+1) \\ \dot{x}(K+1) \\ \dot{y}(K+1) \\ \ddot{x}(K+1) \\ \ddot{y}(K+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

Remarques

(T) comment traiter l'équation discrete ?

Travail FKF exercice 1 part 3

$$\alpha_K = \mathrm{tg}^{-1} \frac{ry_K}{rx_K} = \mathrm{tg}^{-1} \left[\frac{(y(T) - y_0)}{(x(T) - x_0)} \right]$$

Remarques

(T) quel utilité ? on n'a pas $x(T)$ ni $y(T)$ sans D_K et α_K

__/__/__

S T Q Q S S D

marci statistique jeudi 13/10/2022

travail 1 EKE exercice 1 part 4

Remarques

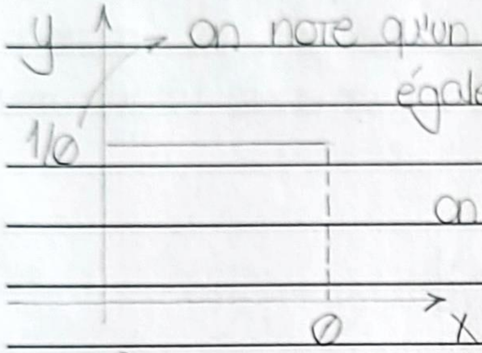
(1) pourquoi pas ?

45

S T Q Q S S D ___/___/___

ma201 statistique → amostragem jeudi
PC1 exercice 5
Soit $X_1, \dots, X_n$ un n-échantillon suivant la loi uniforme $U_{[0,\theta]}$

ça veut dire qu'on a n valeurs qui suivent une loi uniforme donc par le graphique:



on note qu'un distribution de probabilité doit avoir integrale égale à 1 donc $y_{max} = 1/\theta$

on considere que l'échantillon est indépendent (I) et identitement distribué (II)

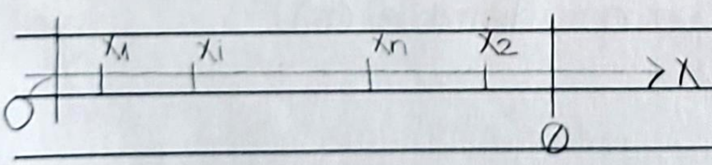
→ fonction d'identité
$f_{X_i}(x) = \frac{1}{\theta - 0} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$ → fonction indicatrice $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall i \in \{1, \dots, n\}$
$\theta - 0$ → soustraction des extremites

$f_{X_i}(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{x \geq 0} \mathbb{1}_{x \leq \theta}$ on note que, pour suposition, $(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}_+^n$ donc la première fonction indicatrice est redudante

$f_{X_i}(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{1}_{x \leq \theta}$ on désir éstimer θ donc on ne peut rien affirmer de la deuxième fonction indicatrise

$L_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \cdot \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{x \leq \theta}$ maintenant il faut decrouvrir le résultat

on considere le déssine de l'échantillionage



pour que tous soient plus petite que theta le plus grand x_i devrait être mineur qui theta donc
$\max(x_1, \dots, x_n) \leq \theta \Rightarrow \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{x \leq \theta} = \mathbb{1}_{\max(x_i) \leq \theta}$

__/__/__ S T Q Q S S D

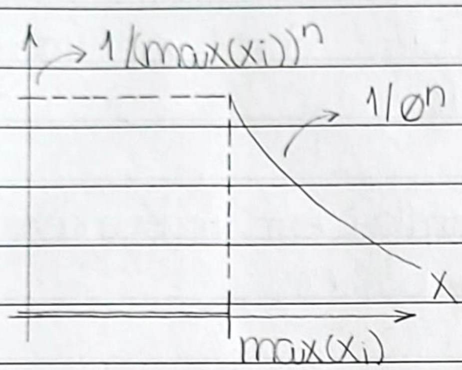
MAP01 statistique — jeudi 13/10/2022

PC 1 exercice 5

$$L_\theta(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{\theta^n} 1\!\!1_{\max(x_i)\le\theta}$$

maintenant on ne peut prendre le logarithme parce que le log n'est pas défini sur zéro et la fonction indicatrice peut être zéro

graphiquement



on note le degrée causé par la fonction indicatrice et pour maximiser l'estimateur c'est clair que

$$\boxed{\hat\theta_n = \max(x_1,\dots,x_n)}$$

on a la fonction de repartition → comment les valeurs d'un fonction sont distribuées sur x

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \dfrac{x-0}{\theta-0} & \text{si } x\in[0,\theta] \\ 1 & \text{si } x\geq\theta \end{cases} = \frac{x}{\theta} 1\!\!1_{[0,\theta]}(x) + 1\!\!1_{]\theta,\infty[}(x) \overset{\text{définition}}{:=} P(X_i \le x)$$

maintenant on doit montrer la fonction de repartition du estimateur $\hat\theta$, ainsi on considere $x \in \mathbb{R}$ (quelqu'un)

$$\begin{aligned}
F_{\hat\theta}(x) &= P(\hat\theta \le x) \quad \Rightarrow \text{c'est la définition} \\
&= P(\max(x_i) \le x) \\
&= P(x_1 \le x, \dots, x_n \le x) \\
(\mathrm{I})\quad &= P(x_1 \le x) \cdot \ldots \cdot P(x_n \le x) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(x_i \le x) \\
(\mathrm{II})\quad &= \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) \\
&= (F_X(x))^n \\
&= \left(\frac{x}{\theta} 1\!\!1_{[0,\theta]}(x) + 1\!\!1_{]\theta,\infty[}\right)^n
\end{aligned}$$

chaque "," represente un "et" logique pour être ≤ il doit être ≤ que tous et comme ils sont indépendants (I) et identiquement distribué (II)

on note que quelque therme qui multiplique les fonctions indicatrices

spiral

S T Q Q S S D __/__/__

maroi statistique jeudi 13/10/2022

PC1 exercice 5

sera zero parce que c'est impossible que x soit à la fois $x \in [0,\theta]$ et $x \in]\theta,\infty[$ au même temps donc

→ fonction densité

$F_{\hat{\theta}}(x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x) + \mathbb{1}_{]\theta,\infty[}(x)$; $f_{\hat{\theta}}(x) := \frac{\partial}{\partial x} F_{\hat{\theta}}(x)$

$f_{\hat{\theta}}(x) = \frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\theta]} + 0$; dérivé de constant est zéro

après il faut calculer $\mathbb{E}[f_{\hat{\theta}}(x)]$ et $V(f_{\hat{\theta}}(x))$ avec leur dérivé

PC3 exercice 2 → la barre veut dire H sachant E ; limit part de E

Bayes Theorem

l'équation c'est $P(H|E) = \frac{P(E|H) \cdot P(H)}{P(E)}$

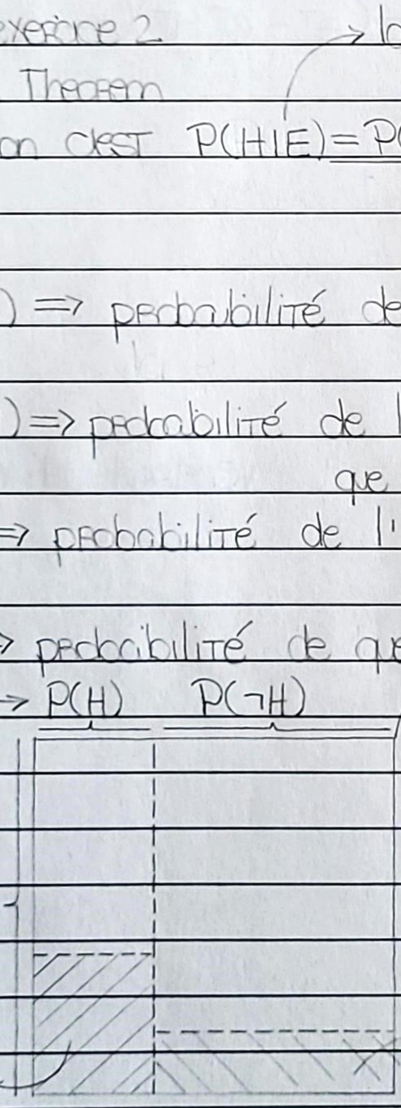
$P(H|E) \Rightarrow$ probabilité de l'hypotese se concretizer sachant l'evidence

$P(E|H) \Rightarrow$ probabilité de l'evidence se concretizer sachant l'hypotese

$P(H) \Rightarrow$ probabilité de que l'hypotese c'est vrai

$P(E) \Rightarrow$ probabilité de que l'evidence c'est vrai

PRIOR info → $P(H)$ $P(\neg H)$ → square of all possibilites



$P(H|E) = \frac{P(H) \cdot P(E|H)}{P(H) \cdot P(E|H) + P(\neg H) \cdot P(E|\neg H)}$

posterior

split the space into the evidence

→ $P(E|\neg H)$

↳ not symbol

$P(E|H)$

split the space into the hypoteses

$P(E) = P(H) \cdot P(E|H) + P(\neg H) \cdot P(E|\neg H)$

spiral

__/__/__ S T Q Q S S D

ma201 statistique vendredi 14/10/2022

PC2 exercice 5 part 1

chercher

modulo à multiplication

multiplication transpose

$(A^T + B^T) = (A+B)^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

$(z - M\emptyset)^T (z - M\emptyset) = (z^T - (M\emptyset)^T)(z - M\emptyset) = (z^T - \emptyset^T M^T)(z - M\emptyset) \Rightarrow$

$z^T z - z^T M\emptyset - \emptyset^T M^T z + \emptyset^T M^T M\emptyset$

inverse constant

$(kM)^{-1} = k^{-1} M^{-1}$

examen 1 2021 vendredi 14/10/2022

S T Q Q S S D ___/___/___

MAP01 statistique mardi 18/10/2022

Intégrat contrôle année 2021-2022

exercice 1 bayésienne parce qu'il avait d'information a priori

$f_{\theta|z}(\theta|z) = \frac{f(z|\theta) \cdot \pi(\theta)}{f(z)}$ la de Bayes

a) $z = \theta^2 + b$; b est une bru de densité $b \sim \mathcal{U}([0,2])$

$z|\theta \sim \mathcal{U}([\theta^2, 2+\theta^2$

$\theta \sim \mathcal{U}([0;1])$ si $X \sim \mathcal{U}([a,b])$ alors $f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$

ainsi

$f_{\theta|z} = \frac{1/2 \; \mathbb{1}_{[\theta^2, 2+\theta^2]}(z) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(\theta)}{f(z)}$

comment ? ✓

$\begin{cases} \theta^2 \leq z \leq 2+\theta^2 \\ 0 \leq \theta \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z-2 \leq \theta^2 \leq z \\ 0 \leq \theta \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \max(0, \sqrt{z-2}) \leq \theta \leq \min(1, \sqrt{z}$

finalement comment

$f_{\theta|z}(\theta|z) = \frac{\mathbb{1}_{[\max(0,\sqrt{z-2}); \min(1,\sqrt{z})]}\theta}{2 f_z(z)}$

pour $z = 0{,}5$: $f_{\theta|z}(\theta|z) = \frac{\mathbb{1}_{[0,\sqrt{0{,}5}]}(\theta)}{2 f_z(z)}$

pour $z = 2{,}5$ $f_{\theta|z}(\theta, z) = \frac{\mathbb{1}_{[\sqrt{0{,}5}, 1]}(\theta)}{2 f_z(z)}$

spiral

__/__/__ S T Q Q S S D

MAP201 statistique — mardi 18/10/2022

Tutorat contrôle année 2021-2022

exercice 3

$z(\tau)=\theta_1 \exp(-\theta_2 \tau)+b(\tau) \Rightarrow \begin{cases} z(\tau_1)=\theta_1 \exp(-\theta_2 \tau_1)+b(\tau_1) & \text{avec } \tau_1 \neq \tau_2 \\ z(\tau_2)=\theta_1 \exp(-\theta_2 \tau_2)+b(\tau_2) \end{cases}$

$\forall \tau \quad b(\tau) \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

ainsi: $z(\tau) \sim \mathcal{N}(\theta_1 \exp(-\theta_2 \tau), \sigma^2)$

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta_1 \exp(-\theta_2 \tau)-z)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$L([\theta_1,\theta_2],[z(\tau_1)\ z(\tau_2)]) \overset{\text{comment?}}{\Rightarrow} f([z(\tau_1),z(\tau_2)]^T;[\theta_1\ \theta_2]^T) \overset{\text{comment ?}}{\Rightarrow}$

$f(z(\tau_1);[\theta_1\ \theta_2]^T)\cdot f(z(\tau_2);[\theta_1\ \theta_2]^T)$

$$\log L=-2\log(\sigma\sqrt{2\pi})-\frac{(\theta_1 \exp(-\theta_2 \tau_1)-z(\tau_1))^2}{2\sigma^2}-\frac{(\theta_1 \cdot \exp(-\theta_2 \tau_2)-z(\tau_2))^2}{2\sigma^2}$$

spirol