Examen du 5 mars 2024

Durée 3h - aucun document autorisé - calculatrice fournie - les exercices sont indépendants
Ne faire les applications numériques que lorsqu'elles sont demandées

Notations : Dans ce sujet, on notera T_e la période d'échantillonnage. On utilisera l'abréviation BOZ pour désigner un *bloqueur d'ordre zéro*, CNA pour un *convertisseur numérique-analogique* et CAN pour un *convertisseur analogique-numérique*. On notera $\mathcal{L}\{\ \}$ et $\mathcal{L}^{-1}\{\ \}$ les opérateurs *transformée de Laplace* et *transformée de Laplace inverse*. De même, on notera $\mathcal{Z}\{\ \}$ et $\mathcal{Z}^{-1}\{\ \}$ les opérateurs *transformée en z* et *transformée en z inverse*. Un signal continu $x(t)$, une fois échantillonné sera noté $x^*(t)$ et les transformées de Laplace de ces signaux seront notées $X(p)$ et $X^*(p)$ respectivement. Lorsque cela sera nécessaire, $\mathcal{L}^{-1}\{X(p)\}^*$ désignera $x^*(t)$. Le signal numérique associé à $x^*(t)$ sera noté x_n et $X(z)$ désignera sa transformée en z.

Exercice I Questions de cours

Partie commande numérique

Soit $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ la fonction de transfert d'un système discret, $B(z)$ désignant le polynôme du numérateur et $A(z)$ celui du dénominateur. On suppose que le polynôme $A(z)$ est de degré n.

1 – Énoncer la condition générale de stabilité *Entrée Bornée Sortie Bornée* pour de tels systèmes.

2 – Transformation en w : rappeler l'expression de la variable z en fonction de la variable w. En déduire l'expression de la variable w en fonction de la variable z.

3 – Rappeler la relation liant une variable p du plan complexe en temps continu et son équivalent z dans le plan complexe en temps discret.

4 – Rappeler (ou retrouver) dans chacun des cas suivants, l'expression de p en fonction de z permettant d'approcher la variable p du plan complexe des systèmes analogiques par une expression en z, variable du plan complexe des systèmes discrets.

4-a – Approximations d'Euler avant et arrière,

4-b – Approximation de Tustin.

5 – Rappeler le théorème de la valeur initiale et le théorème de la valeur finale pour les systèmes discrets.

Partie identification

On considère un processus numérique à identifier, d'entrée $u(k) \in \mathbb{R}$, de sortie $y(k) \in \mathbb{R}$ et perturbé par le signal $w(k) \in \mathbb{R}$. Étant donné le modèle mathématique bruité (de type L.T.I.) du processus à identifier, on note θ le vecteur des paramètres à estimer, $u(k)$ est le signal numérique en entrée, $\tilde{y}(k,\theta)$ désigne le signal numérique de sortie du modèle mathématique et $e(k) \in \mathbb{R}$ le bruit numérique affectant le modèle mathématique à l'instant k. Les échantillons $u(k)$ et $y(k)$ sont supposés connus pour $k = 1$ à $N \in \mathbb{N}$.

6 – Représenter en détail et commenter le schéma de principe d'identification d'un modèle mathématique à partir de données expérimentales.

7 – Rappeler les propriétés de l'opérateur retard noté q^{-1}.

8 – En considérant l'expression du modèle mathématique bruité suivante :

$$\tilde{y}(k,\theta) = G(q^{-1},\theta)\,u(k) + H(q^{-1},\theta)\,e(k), \tag{1}$$

où $G(q^{-1},\theta) := \frac{q^{-d}B(q^{-1},\theta)}{A(q^{-1},\theta)}$ avec $A(q^{-1},\theta)$ et $B(q^{-1},\theta)$ deux polynômes en puissance de q^{-1}, de degré n_A et n_B respectivement, $H(q^{-1},\theta) := \frac{C(q^{-1},\theta)}{D(q^{-1},\theta)}$ avec $C(q^{-1},\theta)$ et $D(q^{-1},\theta)$ deux polynômes en puissance de q^{-1}, de degré n_C et n_D respectivement.

8-a – Donner l'expression du prédicteur à un coup d'avance, noté $\hat{y}(k|k-1,\theta)$, en fonction des polynômes $A(q^{-1},\theta)$, $B(q^{-1},\theta)$, $C(q^{-1},\theta)$ et $D(q^{-1},\theta)$.

8-b – Rappeler toutes les hypothèses que doivent vérifier les fonctions de transfert du modèle dans (1) pour permettre d'obtenir un tel prédicteur.

9 – Dans chacun des cas suivants, donner la signification de l'acronyme, dessiner le schéma-bloc correspondant et rappeler l'expression détaillée de la série temporelle associée.

9-a – ARX, **9-b** – ARMAX, **9-c** – OE.

10 – Déterminer l'expression détaillée du vecteur des paramètres $\hat{\theta}^*(N)$ d'un modèle ARX estimés *hors-ligne* par la méthode des moindres carrés. On formulera convenablement le problème d'identification avant de souligner le résultat final.

11 – A quelles conditions l'estimation précédente est-elle sans biais ?

12 – Rappeler l'algorithme détaillé permettant l'estimation récursive (*en-ligne*) du vecteur des paramètres $\hat{\theta}^*(k)$ pour un modèle ARX.

Exercice II Transformée en z et Transformée en z inverse

1 – Calculer la transformée en z du signal numérique noté y_k, défini par ses échantillons :

1-a – $y_0 = 0$, $y_1 = -1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 1$, $y_4 = 1$ puis $y_k = 0 \; \forall k > 4$.

1-b – $y_k = 1$ pour k pair et $y_k = -1$ pour k impair.

2 – Calculer l'expression du signal numérique y_k dont la transformée en z inverse $Y(z)$ est donnée par :

2-a – $Y(z) = \dfrac{z-1}{z+a^2}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

2-b – $Y(z) = \dfrac{2z+1}{(z-a)^2}$, $a \in \mathbb{R}_+$.

Etudier les différents cas de figure qui se présentent en fonction du paramètre a.

Exercice III Critère de Jury

Soit $G(p) = \dfrac{K}{(p+1)^2}$ la fonction de transfert d'un processus d'entrée $U(p)$ et de sortie $Y(p)$, où K est un paramètre réel, non nul.

1 – Le système analogique est inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire. Déterminer les conditions de stabilité du système en boucle fermée portant sur le paramètre K. Faire ensuite l'application numérique.

2 – Calculer la fonction de transfert, notée $H(z)$, du système discrétisé (c'est-à-dire entouré d'un CNA-BOZ en entrée et d'un CAN en sortie), le tout cadencé à la période $T_e = 0,1s$.

3 – En déduire la relation de récurrence liant y_n à u_n.

4 – Calculer les pôles et zéros du système discrétisé. Le système est-il stable au sens EBSB ?

5 – Le système discrétisé est inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire. Déterminer les conditions de stabilité du système en boucle fermée, portant sur le paramètre K, en utilisant le critère de stabilité de *Jury* donné en *Annexe*. Faire ensuite l'application numérique.

6 – Comparer avec le résultat obtenu la question 1, puis commenter.

Exercice IV Calcul d'un correcteur par placement de pôles

Étant donné le modèle analogique d'un servo-mécanisme donné par la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{\frac{K}{\tau}}{p(p+\frac{1}{\tau})}$ où $K = 10 \; \left[\frac{V}{rad.s^{-1}}\right]$, $\tau = 5 \; [s.rad^{-1}]$ et où la période d'échantillonnage vaut $T_e = 0,1 \; [s]$. Le CNA utilise un BOZ. On souhaite déterminer les 3 polynômes d'un correcteur RST ($R(z)$ de degré ρ, $S(z)$ de degré σ et $T(z)$ de degré τ) de manière à satisfaire le cahier des charges suivant :

i) Le système en boucle fermée est d'ordre deux, avec un pôle double dont l'équivalent en temps continu est $p_{c_0} = -1$.

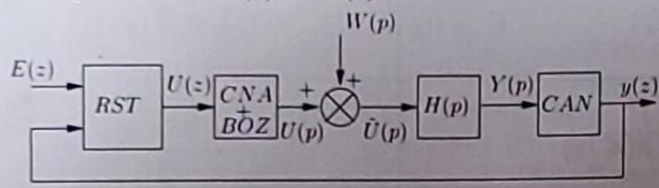
ii) Le système en boucle fermée permet le rejet asymptotique d'une perturbation analogique de type rampe, $w(t) = W_0 t \, \mathbb{1}_0^+(t)$, additive sur le signal de commande analogique, dont seule la pulsation ω_0 est connue et vaut $2\pi 50 \; \left[rad.s^{-1}\right]$.

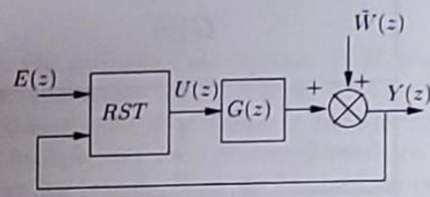
iii) La réponse du système en boucle fermée à une consigne numérique de type échelon $e(z) = E_0 \frac{z}{z-1}$ est un signal constant de même amplitude : $y_\infty = \lim\limits_{n \to \infty} y_n = E_0$.

Dans toute la suite, on imposera au correcteur RST de vérifier les conditions structurelles $\sigma \leq \rho$ et $\tau \leq \rho$.

1 – Faire le schéma-bloc du correcteur RST détaillé.

2 – Montrer que l'asservissement peut indifféremment se mettre sous l'une des deux formes suivantes et préciser les expressions de $G(z)$ et $\tilde{W}(z)$:





3 – Formulation du problème de placement de pôles.

3-a – Proposer un modèle désiré, $H_d(z) = \dfrac{B_d(z)}{\Pi_d(z)}$, qui soit admissible et d'ordre aussi faible que nécessaire. Justifier et argumenter votre choix.

3-b – Après avoir formulé l'ensemble des contraintes portant sur les degrés des polynômes R, S et T, indiquer une valeur minimum pour ρ, puis préciser les valeurs de σ et τ permettant de répondre au cahier des charges.

3-c – Déterminer les polynômes R, S et T de façon à respecter l'ensemble du cahier des charges.

ANNEXE : Système linéaire associé à une équation diophantine

Soient

✓ $A(z)$ un polynôme monique de degré n et de terme général a_j, $j = 0, 1, \ldots, n-1$,

✓ $B(z)$ un polynôme de degré $m < n$ et de terme général b_i, $i = 0, 1, \ldots, m$,

✓ $\Pi_d(z)$ un polynôme monique de degré q et de terme général c_l, $l = 0, 1, \ldots, q-1$.

Le polynôme monique $R(z)$ et le polynôme $S(z)$, de degré ρ et σ respectivement, et de terme général r_j ($j = 0, 1, \ldots, \rho - 1$) et s_k ($k = 0, 1, \ldots, \sigma$), vérifient l'équation polynômiale

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = \Pi_d(z)$$

si, et seulement si leurs coefficients respectifs vérifient le système linéaire

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
a_{n-1} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & 0 & b_m & 0 & \ddots & 0 \\
\vdots & a_{n-2} & \ddots & 1 & b_{m-1} & b_m & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & b_{m-2} & b_{m-1} & \ddots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & a_{n-2} & \vdots & b_{m-2} & \ddots & b_m \\
a_0 & \vdots & \ddots & \vdots & b_0 & \vdots & \ddots & b_{m-1} \\
0 & a_0 & \ddots & \vdots & 0 & b_0 & \ddots & b_{m-2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & b_0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
r_{\rho-1} \\ r_{\rho-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ r_0 \\ s_\sigma \\ s_{\sigma-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ s_0
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
c_{q-1} - a_{n-1} \\ c_{q-2} - a_{n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{q-n} - a_0 \\ c_{q-n-1} \\ c_{q-n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_0
\end{bmatrix}.$$

ANNEXE : Transformées en z usuelles

$G(p)$	$g_n := g(n\,T_e) \qquad (T_e > 0)$	$G(z) = \mathcal{Z}\{g_n\}$
$\dfrac{1}{p}$	$u(n\,T_e)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\dfrac{1}{p^2}$	$n\,T_e$	$\dfrac{T_e\,z}{(z-1)^2}$
$\dfrac{1}{p^3}$	$\dfrac{1}{2!}(n\,T_e)^2$	$\dfrac{{T_e}^2}{2}\dfrac{(z+1)\,z}{(z-1)^3}$
$\dfrac{1}{p+a}$	$e^{-a\,n\,T_e}$	$\dfrac{z}{z-e^{-a\,T_e}}$
$\dfrac{1}{(p+a)^{m+1}}$	$\dfrac{(n\,T_e)^m}{m!}e^{-a\,n\,T_e}$	$\dfrac{(-1)^m}{m!}\dfrac{\partial^m}{\partial a^m}\left(\dfrac{z}{z-e^{-a\,T_e}}\right)$
$\dfrac{a}{p\,(p+a)}$	$1-e^{-a\,n\,T_e}$	$\dfrac{(1-e^{-a\,T_e})\,z}{(z-e^{-a\,T_e})(z-1)}$

TABLE 1 – Tableau des transformées en z usuelles.

ANNEXE : Critère de Jury

Rappel du critère pour des systèmes d'ordre $n = 2$ ou 3

a) Pour un système du second ordre ($n = 2$) dont le polynôme caractéristique est donné par

$$\Pi(z) = c_2\,z^2 + c_1\,z + c_0$$

avec $c_2 > 0$ par hypothèse, les racines de cette équation caractéristique sont de module inférieur à 1 si, et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :
i) $c_2 + c_1 + c_0 > 0$,
ii) $c_2 - c_1 + c_0 > 0$,
iii) $|c_0| < c_2$.

b) Pour un système du troisième ordre ($n = 3$) dont le polynôme caractéristique est donné par

$$\Pi(z) = c_3\,z^3 + c_2\,z^2 + c_1\,z + c_0$$

avec $c_3 > 0$ par hypothèse, les racines de cette équation caractéristique sont de module inférieur à 1 si, et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :
i) $c_3 + c_2 + c_1 + c_0 > 0$,
ii) $c_3 - c_2 + c_1 - c_0 > 0$,
iii) $|c_0| < c_3$,
iv) $(c_0)^2 - (c_3)^2 < c_0\,c_2 - c_1\,c_3$.