# Examen MA201 - Année 2022/2023

### Exercice 1

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n$-échantillon suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, avec $\theta > 0$, paramètre inconnu. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}$, $n$ observations issues du $n$-échantillon.

1. Déterminer la fonction de vraisemblance et la log-vraisemblance de $x_1, \ldots, x_n$.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^{MV}$ de $\theta$.
3. Calculer le biais, la variance et le risque quadratique moyen de $\hat{\theta}_n^{MV}$.
4. En déduire que $\hat{\theta}_n^{MV}$ est consistant pour $\theta$.
5. Déterminer la matrice d'information de Fisher du $n$-échantillon sur $\theta$.
6. En déduire que $\hat{\theta}^{MV}$ est efficace.

Rappel. Si $X$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, alors $X$ ne peut prendre que des valeurs entières positives, et pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_\theta(x) = \mathbb{P}_\theta(X = x) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}. \tag{1}$$

De plus, $E[X] = \theta$, et $Var(X) = \theta$.

### Exercice 2

Dans cet exercice, nous allons montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance n'est pas unique en général.

Soit un $n$-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([\theta, \theta + 1])$, avec $\theta > 0$, paramètre inconnu à estimer. Soient $x_1, \ldots, x_n$, $n$ observations issues du $n$-échantillon.

1. Déterminer la fonction de vraisemblance de $x_1, \ldots, x_n$.
2. Pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$, donner un encadrement de $x_i$ en fonction de $\theta$.
   *Indication. On pourra noter que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a $f_{X_i}(x_i) > 0$.*
3. En déduire que tout élément de l'intervalle $[\max(x_1, \ldots, x_n) - 1, \min(x_1, \ldots, x_n)]$ maximise la vraisemblance (on donnera la valeur du maximum), et donc que l'estimateur du maximum de vraisemblance n'est pas unique dans ce cas-là.

Rappel. Si $X$ suit une loi uniforme $\mathcal{U}([a, b])$, alors :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & si \quad x \in [a, b] \\ 0 & sinon \end{cases}. \tag{2}$$

De plus, $E[X] = \frac{a+b}{2}$, et $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

### Exercice 3

Soit $X$ une v.a. suivant une loi Bernouilli de paramètre $\theta$, $P(X = 1|\theta) = \theta$ et $P(X = 0|\theta) = 1 - \theta$, où $\theta$ est une v.a dont la loi a priori est définie par $P(\theta = \theta_1) = p$ et $P(\theta = \theta_2) = 1 - p$.

1. Exprimer la loi a posteriori de $\theta$, $\pi(\theta|X = x)$.
2. Considérons la fonction de coût $C(x,\ y) = |x - y|^2$, et l'estimateur défini par $\Delta(\theta|X = 0) = \mu_1$ et $\Delta(\theta|X = 1) = \mu_2$.
   Pour l'estimateur $\Delta$, donner l'expression de la fonction de risque moyen a posteriori $\rho_C(\pi, \Delta|X = x)$, c'est à dire les deux expressions $\rho_C(\pi, \Delta|X = 0)$ et $\rho_C(\pi, \Delta|X = 1)$. Ce risque moyen quadratique s'exprime par $\sum_{\theta\in\Theta} C(\theta,\ \Delta(\theta))\pi(\theta|X = x)$. On pourra poser $\lambda = \pi(\theta = \theta_1|X = 1)$
3. En déduire l'estimateur bayésien $\Delta_\pi$ qui correspond au minimum de cette fonction.

dérivé

4. On considère la fonction de coût définie par $C_1(x, y) = 0$ si $x = y$ et $C_1(x, y) = 1$ sinon, et l'estimateur défini par $\Delta(\theta|X = 0) = \mu_1$ et $\Delta(\theta|X = 1) = \mu_2$. Que vaut la fonction $\rho_{C_1}$ si $\pi(\theta = \theta_1|X = 1) > \frac{1}{2}$ ? même avec autres valeurs
5. Que vaut $\Delta_\pi$ associé à ce nouveau coût ?
6. Que deviennent ces valeurs si $\pi(\theta = \theta_1|X = 1) < \frac{1}{2}$ et si $\pi(\theta = \theta_1|X = 1) = \frac{1}{2}$ ?

**Exercice 4**

→ correction pendant l'examen

On considère $\theta \in \Theta = \mathbb{R}$ le paramètre d'un modèle, sur lequel on dispose d'une loi a priori $\pi(\theta)$ et un ensemble de mesures $z_1, \ldots, z_n$. On suppose que la loi a posteriori est $\pi(\theta|z_1, \ldots, z_n)$ , que son intégrale converge sur $\mathbb{R}$ (propre) et que $E_\pi[\exp(k\theta)|z_1, \ldots, z_n] < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{R}$; On définit un estimateur $\hat{\theta}$ à l'aide d'une fonction coût définie par $C(\hat{\theta}, \theta) = 1 - a(\theta - \hat{\theta}) + \exp(a(\theta - \hat{\theta})$ où $a$ est un réel.

1. Montrer que le coût $C$ est toujours positif pour tout $\theta \in \Theta$ et pour tout $a$. (déterminer le minimum de la fonction).
2. Représenter l'allure de $C$ en fonction de $\theta - \hat{\theta}$ pour $a \in \{0.1, 0.5, 2\}$
3. On suppose $a \neq 0$. Donner l'expression de l'estimateur de Bayes $\hat{\theta}_B$ pour cette fonction coût.
4. On suppose à présent que la densité $f(Z|\theta)$ est la densité d'une loi normale de moyenne $\theta$ et de variance 1. La loi a priori de $\theta$, $\pi(\theta) \propto 1$. En déduire que $\pi(\theta|z_1, \ldots, z_n)$ est la densité d'une loi normale de moyenne $\sum_{i=1}^n z_i$ et de variance $1/n$.
5. En utilisant l'expression de l'estimateur de Bayes obtenue précédemment, montrer que ce dernier est égal à $\sum_{i=0}^n z_i + \frac{a}{2n}$. *Indication. On rappelle que* $\int_{-\infty}^{+\infty}(\frac{n}{2\pi}\exp(-\frac{n}{2}(\theta - (\sum_i z_i + \frac{a}{n}))^2)) = 1$ *en tant qu'intégrale de la densité d'une loi normale de moyenne* $\sum_i z_i + a/n$ *et de variance* $1/n$.

Rappel. *L'estimateur de Bayes* de $\theta$ associé à la loi a priori $\pi$ est défini par :

$$\widehat{\theta} = T^\pi(z) = arg\min_T E^\pi[C(\theta, T)|z], \tag{3}$$

où $C$ est une fonction de coût.

guilherme nunes trofino 14/10/2022 examen 1 2021

# Estimation et Identification statistiques
# Contrôle Année 2020-2021

Les exercices sont indépendants.

**Exercice 1** Soit $(z_1, \dots, z_n)$ un n-échantillon d'une v.a.r. de densité $f(Z;\theta)$, où $\theta$ est un paramètre inconnu, avec $f(Z;\theta) = \exp -(z-\theta)1[\theta, +\infty](z)$.

1. Quelle est la loi de $Z - \theta$ ? Sa moyenne ? Sa variance ?
2. Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de $\theta$ ? Son biais ? Sa variance ?
3. Construire deux estimateurs sans biais de $\theta$, respectivement à partir de la moyenne empirique des $z_j$ et à partir de $\min(z_j)$.

**Exercice 2** Loi de Poisson On considère $Z$ un ensemble de $n$ variables aléatoires discrètes indépendantes $z_1, \dots, z_n$obéissant à une loi de Poisson de paramètres $\lambda$. L'objectif est de déterminer un estimateur de $\lambda$. Pour cela on introduit les variables $Y_i$, $i = 1, \dots, n$, avec $Y_i = 1$, si $z_i = 0$ et $Y_i = 0$, sinon.
Rappel : Une variable aléatoire discrète suit une loi de Poisson si : $p(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ où $\lambda$ est le paramètre de la loi.

1. Montrer que les variables $Y_i$ suivent une loi de Bernouilli de paramètre $p(Y_i = 1) = e^{-\lambda}$
2. Soit l'estimateur $T(Z)$ défini par $T(Z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Montrer que $T$ est un estimateur de $e^{-\lambda}$, non biaisé et convergent.
3. Montrer que $p(z_i = 0|z_1 + z_2 + \cdots + z_n = j) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^j$. (Utiliser le fait que la somme de $n$ variables aléatoires suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ et que $p(X|Y) = \frac{p(X \cap Y}{p(Y)}$
4. Soit la variable aléatoire $S_n$ définie par $S_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$. Soit l'estimateur $T_S$ défini par $T_S(Z) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{S_n}$. Montrer que $T_S$ est un estimateur non biaisé et convergent de $e^{-\lambda}$
5. Montrer que pour tout paramètre $\lambda$, l'estimateur $T_S$ est préférable à l'estimateur $T$.

guilherme nunes trofino 14/10/2022 exame 2 2021

# Estimation et Identification statistiques
## Contrôle Année 2020-2021

*Les exercices sont indépendants.*

**Exercice 1** *Estimation fréquentiste*
On considère une suite de variables aléatoires $z_1, \dots, z_n$, indépendantes suivant toutes une loi de Pareto. i.i.d
La loi de Pareto de paramètres $(\theta, a)$ est une loi de densité $f(z) = \frac{a\theta^a}{z^{a+1}}$ définie sur $[1, \infty[$. On suppose ici $a > 2$ et $\theta > 0$ et on admettra que $E(Z) = \frac{a\theta}{a-1}$ et $V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2) = \frac{a\theta^2}{(a-1)^2(a-2)}$. La fonction de répartition est $F(x) = p(Z < x)$ est $F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^a$ pour $x \geq \theta$

1. On cherche à estimer $\theta$ en supposant $a$ connu, tout d'abord à l'aide de l'estimateur de la moyenne empirique $Z_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$. Montrer qu'on peut déterminer une variable $K$ tel que l'estimateur $KZ_m$ soit un estimateur sans biais de $\theta$. Calculer sa variance. L'estimateur est il convergent ?
2. On considère à présent l'estimateur $\tilde{Z} = min(z_1, \dots, z_n)$. Déterminer la fonction de répartition $G(x) = p(\tilde{Z} < x)$ à partir de la fonction de répartition de $Z$. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\tilde{Z}$. Déterminer la valeur du coefficient $K'$ pour que $K'\tilde{Z}$ soit un estimateur sans biais de $\theta$. Est il convergent ?
3. Comparer les variances des deux estimateurs non biaisés. Quel est le plus efficace ?
4. Il s'agit à présent d'estimer au sens du maximum de vraisemblance le paramètre $a$ de la loi de Pareto. On suppose le paramètre $\theta$ de al loi connu dans la suite. Pour estimer $a$, une première étape consiste à calculer la vraisemblance $L(a, z_1, \dots, z_n)$. A partir de l'expression de la vraisemblance, calculer la Log-vraisemblance et montrer que $T(Z) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{z_i}{\theta}}$ est l'estimé de $a$ au sens du maximum de vraisemblance.
5. Déterminer l'espérance $E(T(Z))$ pour $n \geq 2$ et en déduire un estimateur $T'(Z) = KT(Z)$ qui soit un estimateur sans biais de $a$.
REMARQUE : On utilisera les deux résultats suivants : Lorsque $X$ est une variable aléatoire suivant une loi de Pareto de paramètre $\theta$ et $a$, la variable aléatoire $Y = \ln \frac{X}{\theta}$ suit une loi exponentielle de paramètre $a$ (ce qui signifie que la densité de $Y$ est $f_Y(t) = ae^{-at}$) De plus, une somme de n variables aléatoires suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ suit une loi gamma de paramètres $n$ et $\lambda$ (ce qui signifie que la densité est $f_X(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}\exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{\mathbb{R}+*}(x)$, son espérance est $\frac{n}{\lambda}$ et sa variance $\frac{n}{\lambda^2}$.

**Exercice 2** *Estimation bayésienne*
On collecte une mesure $z$ relié à un paramètre $\theta$ par $z = \theta + b$. Le bruit $b$ a une densité de probabilité $f(b) = \frac{b}{2}$ sur $[0,\ 2]$ et est indépendant de $\theta$. La densité de probabilité a priori de $\theta$ est $f(\theta) = 2\theta$ sur $[0,\ 1]$.

1. Calculer la densité a posteriori $f_{\theta|z}$ du paramètre $\theta$ étant donnée l'observation $z$. On ne calculera pas l'expression de $p(z)$ de la loi de Bayes.
2. Après mesure, on obtient $z = 2.5$. Donner les estimés de $\theta$ au sens du risque quadratique minimal, du maximum de vraisemblance a posteriori, du risque en valeur absolue a posteriori et de la moyenne a posteriori.
3. Comparer ces résultats. Quel est selon vous le meilleur estimateur ?

**Exercice 3** Un système est modélisé sous la forme $z_n = \theta u_n + b_n$, pour $1 \leq n \leq N$. $\theta$ doit être estimé à partir de $N$ mesures, réalisations de v.a.rélles indépendantes $z_1, \dots, z_N$. Les $b_n, 1 \leq n \leq N$ forment une séquence de v.a. i.i.d. suivant une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance $\sigma^2$. La séquence $u_n, 1 \leq n \leq N$ est supposée connue (de façon exacte).

1. Calculer $f(Z|\theta)$ avec $Z = [z_1, \dots, z_N]^t$.

guilherme nunes trofino 14/10/2022 examen 3 2021

# Estimation et Identification statistiques
## PC révision

*Les exercices sont indépendants.*

**Exercice 1** *Loi de Poisson*
On considère $Z$ un ensemble de $n$ variables aléatoires discrètes indépendantes $z_1, \dots, z_n$obéissant à une loi de Poisson de paramètres $\lambda$. L'objectif est de déterminer un estimateur de $\lambda$. Pour cela on introduit les variables $Y_i$, $i = 1, \dots, n$, avec $Y_i = 1$, si $z_i = 0$ et $Y_i = 0$, sinon.
Rappel : Une variable aléatoire discrète suit une loi de Poisson si : $p(k) = \mathbb{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ où $\lambda$ est le paramètre de la loi.

1. Montrer que les variables $Y_i$ suivent une loi de Bernouilli de paramètre $p(Y_i = 1) = e^{-\lambda}$
   La probabilité $p(z_i = 0)$ est égale à $\exp -\lambda$. Les variables $Y_i$ prennent soit la valeur 1 soit la valeur 0. La probabilité $p(Y_i = 1)$ est égale à $p(z_i = 0) = \exp -\lambda$. Les variables $Y$ suivent une loi de Bernouilli de paramètre $p = \exp -\lambda$.
2. Soit l'estimateur $T(Z)$ défini par $T(Z) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Montrer que $T$ est un estimateur de $e^{-\lambda}$, non biaisé et convergent.
   L'espérance de $T(Z)$ est égale à $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \frac{1}{n}nE(Y) = \exp -\lambda$. Donc $T(Z)$ est non biaisé. La variance de $Y$ étant $V(Y_i) = (\exp -\lambda)(1 - \exp -\lambda)$, la variance de $T(Z)$ est $\frac{1}{n^2}nV(Y_i)$ soit $\frac{1}{n}(\exp -\lambda)(1 - \exp -\lambda)$. La variance tend vers 0 qd $n$ tend vers $\infty$. L'estimateur est convergent.
3. Montrer que $p(z_i = 0|z_1 + z_2 + \cdots + z_n = j) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^j$. (Utiliser le fait que la somme de $n$ variables aléatoires suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ et que $p(X|Y) = \frac{p(X \cap Y}{p(Y)}$
   La probabilité $p(z_i = 0|z_1 + \cdots + z_n = j) = \frac{p(z_i=0et(z_1+\cdots+z_n=j)}{p(z_1+\cdots+z_n=j)} = \frac{p(z_i=0)p(z_1+\cdots+z_n=j), j\neq i}{p(z_1+\cdots+z_n=j)} = \frac{(\exp -\lambda)\exp(-(n-1)\lambda\frac{(n-1)^j\lambda^j}{j!})}{\exp(-n\lambda\frac{(n)^j\lambda^j}{j!})} = (\frac{n-1}{n})^j$
4. Soit la variable aléatoire $S_n$ définie par $S_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$. Soit l'estimateur $T_S$ défini par $T_S(Z) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{S_n}$. Montrer que $T_S$ est un estimateur non biaisé et convergent de $e^{-\lambda}$
   $E\left(\frac{n-1}{n}\right)^{S_n} = \sum_{j=0}^{+\infty}(\frac{n-1}{n})^j p(S_n = j) = \sum_{j=0}^{+\infty}(\frac{n-1}{n})^j \exp(-n\lambda)\frac{(n)^j\lambda^j}{j!} = \exp(-n\lambda)\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(n-1)^j\lambda^j}{j!} = \exp(-n\lambda)\exp((n-1)\lambda) = \exp(-\lambda)$
   $E(\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{S_n}\right)^2) = \exp(-2\lambda + \lambda/n)$.
   $V(TS) = \exp(-2\lambda + \lambda/n) - \exp(-2\lambda) = \exp(-2\lambda)(\exp(\lambda/n) - 1)$ qui tend vers 0 qd $n$ tend vers $\infty$. L'estimateur est convergent
5. Montrer que pour tout paramètre $\lambda$, l'estimateur $T_S$ est préférable à l'estimateur $T$.
   La différence des variances $V(TS) - V(TZ)$ donne $\frac{\exp(-2\lambda)}{n}(n\exp(\lambda/n) - \exp(\lambda) - n + 1)$. La dérivée de $(n\exp(\lambda/n) - \exp(\lambda) - n + 1)$ est négative, donc l'expression décroît et est négative en 0. La variance de TS est plus petite que celle de TZ.

**Exercice 2** Soit $(z_1, \dots, z_n)$ un n-échantillon représentant la réalisation d'une loi uniforme sur $[0\ \theta]$. La densité d'une loi uniforme est $\frac{1}{\theta}$ et sa fonction de répartition est $F(x) = p(Z < x) = \frac{x}{\theta}$ sur $[0\ \theta]$ , 0 pour $x < 0$ et 1 pour $x > \theta$

1. On considère tout d'abord l'estimateur $T(z) = max(z_i)$ Calculer son espérance et sa variance
   La fonction de répartition est $F_1(x) = p(z_1 < x), \dots etp(z_n < x)$ soit $F(x) = p(z_1 < x)\dots p(z_n < x) = (F(x)^n$. Sa densité est $f(z) = F_1' = \frac{1}{\theta^n}nt^{n-1}$. Son espérance est donc $E(T(z)) = \int_0^\theta \frac{1}{\theta^n}nt^n dt = \frac{n}{n+1}\theta$ L'estimateur est biaisé. Sa variance est $V(T(z)) = \int_0^\theta \frac{1}{\theta^n}nt^{n+1}dt - (\frac{n}{n+1}\theta)^2 = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$. La variance tend vers 0.
2. Corriger l'estimateur précédent pour qu'il soit sans biais.
   $T'(z) = \frac{n+1}{n}T(z)$ est un estimateur sans biais. Sa variance $V(T'(z)) = \frac{(n+1)^2}{n^2}V(T(z)) = \frac{(n+1)^2}{n^2}\frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$ tend vers 0 qd $n$ tend vers $\infty$. L'estimateur est convergent.

3. On considère l'estimateur $T(z) = min(z_i)$ Calculer son espérance et sa variance
   La fonction de répartition est $F_2(x) = 1 - (p(z_1 > x), \ldots ct p(z_n > x))$ soit $F(x) = 1 - (p(z_1 > x) \ldots p(z_n > x)) = (1 - (p(Z > x)^n = 1 - (1 - F(x))^n$. Sa densité est $f(z) = \frac{n}{\theta}(1 - \frac{t}{\theta}^{n-1}$ sur $[0\theta]$ . Par intégration par partie , on trouve $E(T'(z)) = \frac{\theta}{n+1}$. L'estimateur est biaisé. Sa variance est identique à celle de $T(z)$ et vaut $V(T(z)) = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$.
4. On considère à présent l'estimateur $\tilde{T}(z) = max(z_i) + min(z_i)$. Calculer son espérance.
   L'espérance est la somme des espérances des deux estimateurs précédents. $E\tilde{T}(z)) = \frac{\theta}{n+1} + \frac{n}{n+1}\theta = \theta$. L'estimateur est non biaisé.

**Exercice 3** *Estimation bayésienne*

On collecte une mesure $z$ relié à un paramètre $\theta$ par $z = \theta + b$. Le bruit $b$ a une densité de probabilité $f(b) = \frac{b}{2}$ sur $[0, 2]$ et est indépendant de $\theta$. La densité de probabilité *a priori* de $\theta$ est $f(\theta) = 2\theta$ sur $[0, 1]$.

1. Calculer la densité a posteriori $f_{\theta|z}$ du paramètre $\theta$ étant donnée l'observation $z$. *On ne calculera pas l'expression de $f(z)$ de la loi de Bayes.*
   À partir de $z = \theta + b$, on en déduit $z - \theta = b$ dont $z - \theta$ a la loi de $b$ soit une densité de probabilité égale à $f(z - \theta) = \frac{z-\theta}{2}$ différente de 0 si $z - \theta \in [0, 2]$, Donc $f_{z|\theta} = \frac{z-\theta}{2}$ avec $\theta \in [z - 2, z]$. $f_\theta = 2\theta$ par hypothèse . Par la formule de Bayes, $f_{\theta|z} = \frac{f_{z|\theta} f_\theta}{f_z}$ soit $f_{\theta|z} = \frac{\frac{z-\theta}{2} 2\theta}{f_z} = \frac{(z-\theta)\theta}{f_z}$ avec $\theta \in [\max(z-2, 0), \min(z, 1)]$
2. Après mesure, on obtient $z = 2.5$. Donner les estimés de $\theta$ au sens du risque moyen quadratique minimal, du maximum de vraisemblance a posteriori, du risque moyen en valeur absolue et de la moyenne a posteriori. Le risque moyen en valeur absolue s'écrit : $r_{MVA} = \underset{\theta}{\mathrm{E}}|\theta - \hat{\theta}|$ ce qui s'écrit $r_{MVA} = \underset{\theta|Z}{\mathrm{E}}|\theta - \hat{\theta}|$ soit $\int_z^{+\infty} |\theta - \hat{\theta}| f(\theta|Z) d\theta$.

   Pour minimiser ce risque, on cherche $\hat{\theta}$ tel que $\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \int_{\max(z-2,0)}^{\min(z,1)} |\theta - \hat{\theta}|(z-\theta)\theta d\theta = 0$, soit $\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \int_{0.5}^{\hat{\theta}} |\theta - \hat{\theta}|(z-\theta)\theta d\theta + \frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \int_{\hat{\theta}}^{1} |\theta - \hat{\theta}|(z-\theta)\theta d\theta = 0$ qui se réduit à $-\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \int_{0.5}^{\hat{\theta}} (\theta - \hat{\theta})(z-\theta)\theta d\theta + \frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \int_{\hat{\theta}}^{1} (\theta - \hat{\theta})(z-\theta)\theta d\theta = 0$ soit $\hat{\theta}$ doit satisfaire $(\frac{2.5\theta^2}{2} - \frac{\theta^3}{3})2 - (\frac{2.5\times0.5^2}{2} - \frac{0.5^3}{3}) = (\frac{2.5^2}{2} - \frac{2.5^3}{3})$, soit $\hat{\theta} \approx 0.76$.
   Le risque quadratique s'écrit : $r_{MVA} = \underset{\theta}{\mathrm{E}}(\theta - \hat{\theta})^2$. Par le même raisonnement que précédemment, $\hat{\theta}$ minimisant ce risque doit satisfaire $\frac{\partial}{\partial\hat{\theta}} \int_{0.5}^{1} (\theta - \hat{\theta})^2 (z-\theta)\theta d\theta = 0$ soit $2\int_{0.5}^{1} (\theta - \hat{\theta})(z-\theta)\theta d\theta = 0$ soit $\hat{\theta} \int_{0.5}^{+1} (z-\theta)\theta d\theta = \int_{0.5}^{1} \theta(z-\theta)\theta d\theta$ ou encore $\hat{\theta} = \frac{1}{0.6458} \int_{0.5}^{1} \theta(2.5-\theta)\theta d\theta$. On retrouve le résultat classique sur l'estimateur bayésien du risque quadratique, à savoir que $\hat{\theta}$ est l'espérance a posteriori, qui vaut ici 0.79.
   On retrouve également le résultat classique de correspondance entre l'estimateur du risque moyen quadratique et l'estimateur de la moyenne a posteriori.
   Pour le maximum de vraisemblance a posteriori, l'estimateur doit maximiser $f(\theta|z)$ donc maximiser $(2.5 - \theta)\theta$ avec $\theta \in [0.5\ 1]$ donc $\hat{\theta} = 1$
3. Comparer ces résultats. Quel est selon vous le meilleur estimateur ?
   Les deux premiers estimateurs correspondent à une valeur intérieure à l'intervalle donc on peut considérer qu'on a acquis de l'information avec le risque. Le maximum de vraisemblance a posteriori est à une des bornes de l'intervalle, donc moins informatif