# Estimation et Identification statistiques
# Contrôle Année 2021-2022

*Les exercices sont indépendants.*

**Exercice 1**

1. La loi de $Z|\Theta = \theta$ est une loi uniforme sur $[\theta^2; 2+\theta^2]$. Ainsi, $f(z|\theta) = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[\theta^2;2+\theta^2]}(z)$. D'autre part, la loi de $\theta$ est : $\pi(\theta) = \mathbf{1}_{[0;1]}(\theta)$ En utilisant la loi de Bayes, on trouve finalement : $f(\theta|z) = \frac{\pi(\theta)f(z|\theta)}{f(z)} = \frac{\mathbf{1}_{[0;1]}(\theta)\mathbf{1}_{[\theta^2;2+\theta^2]}(z)}{2f(z)}$
2. Pour $z = 2.5$, $f(\theta|Z = 2.5) = \frac{\mathbf{1}_{[0;1]}(\theta)\mathbf{1}_{[\theta^2;2+\theta^2]}(2.5)}{2f_Z(2.5)}$. Un calcul montre que : $\mathbf{1}_{[0;1]}(\theta)\mathbf{1}_{[\theta^2;2+\theta^2]}(2.5) = \mathbf{1}_{[\sqrt{0.5};1]}(\theta)$. Ainsi, la loi a posteriori de $\theta$ est une loi uniforme sur $[\sqrt{0.5}; 1]$.

   Pour $z = 0.5$, $f(\theta|Z = 0.5) = \frac{\mathbf{1}_{[0;1]}(\theta)\mathbf{1}_{[\theta^2;2+\theta^2]}(0.5)}{2f_Z(0.5)}$. De même, un calcul montre que : $\mathbf{1}_{[0;1]}(\theta)\mathbf{1}_{[\theta^2;0.5+\theta^2]}(0.5) = \mathbf{1}_{[0;\sqrt{0.5}]}(\theta)$. Ainsi, la loi a posteriori de $\theta$ est une loi uniforme sur $[0; \sqrt{0.5}]$.

**Exercice 2**

1. Par hypothèse, on a $\theta > 0$. Ainsi, l'espérance donne : $E[X_i] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_{X_i}(x)dx = \theta \int\limits_{0}^{+\infty} x\exp(-\theta x)dx = -\left[x\exp(-\theta x)\right]_0^{+\infty} + \int\limits_{0}^{+\infty}\exp(-\theta x)dx = 0 - \frac{1}{\theta}\left[\exp(-\theta x)\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\theta}$

   De plus, on a : $E[X_i^2] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X_i}(x)dx = \theta\int\limits_{0}^{+\infty} x^2\exp(-\theta x)dx = -\left[x^2\exp(-\theta x)\right]_0^{+\infty} + 2\int\limits_{0}^{+\infty} x\exp(-\theta x)dx = 0 + \frac{2}{\theta}E[X_i] = \frac{2}{\theta^2}$.

   Ainsi, $Var(X_i) = E[X_i^2] - E[X_i]^2 = \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$.
2. D'après l'indication de l'énoncé, $Z = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi gamma de paramètres $n$ et $\theta$. Ainsi : $E[\hat{\theta}_{ME}] = nE[\frac{1}{Z}] = n\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z}f_Z(z)dz = n\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}\int\limits_{0}^{+\infty} z^{n-2}\exp(-\theta z)dz$. En posant $y = \theta z$, on obtient : $E[\hat{\theta}_{ME}] = n\frac{\theta}{\Gamma(n)}\int\limits_{0}^{+\infty} y^{n-2}\exp(-y)dy = n\frac{\theta}{\Gamma(n)}\Gamma(n-1) = \frac{n}{n-1}\theta$.

   Finalement, $E[\hat{\theta}_{ME2}] = \frac{n-1}{n}E[\hat{\theta}_{ME}] = \theta$, ce qui fait de $\hat{\theta}_{ME2}$ un estimateur sans biais de $\theta$.
3. Application numérique : $\hat{\theta}_{ME} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} = 1.08$.
4. La vraisemblance s'écrit : $L_n(\theta; x_1, ..., x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_{X_i}(x) = \theta^n\exp(-\theta\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)$. La log-vraisemblance s'écrit : $l_n(\theta; x_1, ..., x_n) = n\log(\theta) - \theta\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

   Ainsi, on trouve :

$$\begin{cases} \frac{\partial l_n(\theta;x_1,\ldots,x_n)}{\partial\theta} &= \frac{n}{\theta} - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \frac{\partial^2 l_n(\theta;x_1,\ldots,x_n)}{\partial\theta^2} &= -\frac{n}{\theta} \end{cases} \tag{1}$$

   La dérivée première s'annule en un unique point : $\hat{\theta} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}$, qui est donc l'unique extremum de la fonction. De plus, la dérivée seconde est strictement négative en ce point, il s'agit donc d'un maximum.

L'estimateur du Maximum de Vraisemblance s'écrit donc : $\hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$. Il s'agit de l'estimateur $\hat{\theta}_{ME}$ calculé à la question 2. Ainsi, cet estimateur est biaisé : $E[\hat{\theta}_{MV} - \theta] = \frac{1}{n-1}\theta$.

5. Application numérique : $\hat{\theta}_{MV} = \hat{\theta}_{ME} = 1.14$.

**Exercice 3**

1. On a : $z(t_1) = \theta_1 \exp(-\theta_2 t_1) + b(t_1)$ et $z(t_2) = \theta_1 \exp(-\theta_2 t_2) + b(t_2)$, et, par hypothèse, il y a indépendance entre $b(t_1)$ et $b(t_2)$, et donc indépendance entre $z(t_1)$ et $z(t_2)$.
   De plus, pour tout $t > 0$, on a : $f(z(t)|\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{(z(t)-\theta_1 \exp(-\theta_2 t))^2}{2\sigma^2})$.
   Ainsi, la vraisemblance s'écrit : $L(\theta; z(t_1), z(t_2)) = f(z(t_1|\theta) \times f(z(t_2|\theta)$
   Et la log-vraisemblance de $[z_1(t), z_2(t)]^T$ s'écrit : $I(\theta; z(t_1), z(t_2)) = \log L(\theta; z(t_1), z(t_2)) = \log f(z(t_1)|\theta) + \log f(z(t_2)|\theta) = -2\log(\sigma\sqrt{2\pi}) - \frac{(z(t_1)-\theta_1 \exp(-\theta_2 t_1))^2}{2\sigma^2} - \frac{(z(t_2)-\theta_1 \exp(-\theta_2 t_2))^2}{2\sigma^2}$

2. La matrice d'information de Fisher s'écrit alors : $F(\theta_1, \theta_2) = -E\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 I(\theta;z(t_1),z(t_2))}{\partial\theta_1^2} & \frac{\partial^2 I(\theta;z(t_1),z(t_2))}{\partial\theta_1\theta_2} \\ \frac{\partial^2 I(\theta;z(t_1),z(t_2))}{\partial\theta_1\theta_2} & \frac{\partial^2 I(\theta;z(t_1),z(t_2))}{\partial\theta_2^2} \end{bmatrix}$.

   Or on a :
$$\begin{cases} \frac{\partial I(\theta;z(t_1),z(t_2))}{\partial\theta_1} = \frac{z(t_1)}{\sigma^2}\exp(-\theta_2 t_1) - \frac{\theta_1}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_1) + \frac{z(t_2)}{\sigma^2}\exp(-\theta_2 t_2) - \frac{\theta_1}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_2) \\ \frac{\partial I(\theta;z(t_1),z(t_2))}{\partial\theta_2} = -\frac{t_1 z(t_1)\theta_1}{\sigma^2}\exp(-\theta_2 t_1) + \frac{t_1\theta_1^2}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_1) - \frac{t_2 z(t_2)\theta_1}{\sigma^2}\exp(-\theta_2 t_2) + \frac{t_2\theta_1^2}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_2) \end{cases} \tag{2}$$

   D'où :
$$\begin{cases} \frac{\partial^2 I(\theta;z(t_1),z(t_2))}{\partial\theta_1^2} = -\frac{1}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_1) - \frac{1}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_2) \\ \frac{\partial^2 I(\theta;z(t_1),z(t_2))}{\partial\theta_2^2} = \frac{t_1^2 z(t_1)\theta_1}{\sigma^2}\exp(-\theta_2 t_1) - \frac{2t_1^2\theta_1^2}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_1) + \frac{t_2^2 z(t_2)\theta_1}{\sigma^2}\exp(-\theta_2 t_2) - \frac{2t_2^2\theta_1^2}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_2) \\ \frac{\partial^2 I(\theta;z(t_1),z(t_2))}{\partial\theta_1\theta_2} = -\frac{t_1 z(t_1)}{\sigma^2}\exp(-\theta_2 t_1) + \frac{2t_1\theta_1}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_1) - \frac{t_2 z(t_2)}{\sigma^2}\exp(-\theta_2 t_2) + \frac{2t_2\theta_1}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_2) \end{cases}, \tag{3}$$

   et donc, comme $E[z(t_1)] = \theta_1 \exp(-\theta_2 t_1)$ et $E[z(t_2)] = \theta_1 \exp(-\theta_2 t_2)$, on a :
$$\begin{cases} E[\frac{\partial^2 I(\theta;z(t_1),z(t_2))}{\partial\theta_1^2}] = -\frac{1}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_1) - \frac{1}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_2) \\ E[\frac{\partial^2 I(\theta;z(t_1),z(t_2))}{\partial\theta_2^2}] = -\frac{t_1^2\theta_1^2}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_1) - \frac{t_2^2\theta_1^2}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_2) \\ E[\frac{\partial^2 I(\theta;z(t_1),z(t_2))}{\partial\theta_1\theta_2}] = \frac{t_1\theta_1}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_1) + \frac{t_2\theta_1}{\sigma^2}\exp(-2\theta_2 t_2) \end{cases}, \tag{4}$$

   Finalement, la matrice d'information de Fisher devient :
$$F(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{\sigma^2}\begin{bmatrix} \exp(-2\theta_2 t_1) + \exp(-2\theta_2 t_2) & -t_1\theta_1\exp(-2\theta_2 t_1) - t_2\theta_1\exp(-2\theta_2 t_2) \\ -t_1\theta_1\exp(-2\theta_2 t_1) - t_2\theta_1\exp(-2\theta_2 t_2) & +t_1^2\theta_1^2\exp(-2\theta_2 t_1) + t_2^2\theta_1^2\exp(-2\theta_2 t_2) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

3. Le calcul du déterminant donne :
$$D = \det(F(\theta_1, \theta_2)) = \frac{\theta_1^2}{\sigma^4}(t_1 - t_2)^2 \exp(-2\theta_2(t_1 + t_2)) \tag{6}$$

   Le calcul des dérivées partielles par rapport à $t_1$ et $t_2$ donnes :
$$\begin{cases} \frac{\partial D}{\partial t_1} = \frac{2\theta_1^2}{\sigma^4}(1 - \theta_2(t_1 - t_2))(t_1 - t_2)\exp(-2\theta_2(t_1 + t_2)) \\ \frac{\partial D}{\partial t_2} = \frac{2\theta_1^2}{\sigma^4}(-1 - \theta_2(t_1 - t_2))(t_1 - t_2)\exp(-2\theta_2(t_1 + t_2)) \end{cases} \tag{7}$$

   Ainsi, sous la contrainte $0 \leq t_1 < t_2$ (et en supposant $\theta_2 > 0$, hypothèse non donnée dans l'énoncé), la dérivée partielle par rapport à $t_1$ est toujours négative, ce qui signifie que le déterminant croit dans la direction de $t_1$. Ainsi, on choisit $t_1$ minimal, soit $t_1 = 0$.
   L'annulation de la dérivée partielle par rapport à $t_2$ donne alors $t_2 = \frac{1}{\theta_2}$. On peut montrer qu'il s'agit d'un maximum en calculant la dérivée seconde par rapport $t_2$.
   Finalement, le couple recherché est $(t_1, t_2) = (0, \frac{1}{\theta_2}$.

4. Dans la pratique, il est impossible de choisir ces temps de mesure, car $\theta_2$ est inconnu à l'expérimentateur (c'est le paramètre à estimer). Dans le cas où ce dernier à une idée *a priori* des valeurs de $\theta_2$ attendues, il pourra cependant ce servir de cet *a priori*.

**Exercice 4** Précision d'énoncé : On considère un $n$-échantillon $X_1, .., X_n$ qui suit la même loi que $X$.

Moment d'ordre 1 :

$$E_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \tag{8}$$

Moment d'ordre 2 :

$$E_{\hat{\alpha},\hat{\beta}}[X^2] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \tag{9}$$

Or d'après l'énoncé, $E_{\alpha,\beta}[X] = \frac{\alpha}{\beta}$ et $E_{\alpha,\beta}[X^2] = Var_{\alpha,\beta}(X) + E_{\alpha,\beta}[X]^2 = \frac{\alpha+\alpha^2}{\beta^2}$.

On en déduit le système de deux équations à deux inconnus :

$$\begin{cases} \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} & = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \frac{\hat{\alpha}+\hat{\alpha}^2}{\hat{\beta}^2} & = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \end{cases}, \tag{10}$$

équivalent à :

$$\begin{cases} \hat{\alpha} & = \frac{\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2} \\ \hat{\beta} & = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} X_i)^2} \end{cases}, \tag{11}$$

**Exercice 5**

1. L'espérance de $X_i$ s'écrit : $E_\theta[X_i] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\theta(x)dx = \frac{k+1}{\theta^{k+1}} \int\limits_{0}^{\theta} x^{k+1}dx = \frac{k+1}{k+2}\frac{\theta^{k+2}}{\theta^{k+1}} = \frac{k+1}{k+2}\theta$.

   L'estimateur des moments d'ordre 1 s'écrit :

   $$E_{\hat{\theta}}[X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{12}$$

   ce qui se réécrit (compte tenu du calcul de l'espérance effectué plus haut) : $\frac{k+1}{k+2}\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, soit la proposition d'estimateur suivante : $\hat{\theta} = \frac{k+2}{k+1}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

   Calcul de l'espérance de cet estimateur : $E[\hat{\theta}] = \frac{k+2}{k+1}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} E[X_i] = \frac{k+2}{k+1}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{k+1}{k+2}\theta = \theta$. Il s'agit donc d'un estimateur sans biais.
2. La vraisemblance s'écrit : $L_n(\theta) = f_\theta(x_1, ..., x_n)) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = (\frac{k+1}{\theta^{k+1}})^n \prod_{i=1}^{n} x_i^k \mathbf{1}_{[0;\theta]}(x_i)$.

   La vraisemblance est nulle si $\theta < max(x_1, ..., x_n)$. Pour $\theta \geq max(x_1, ..., x_n)$, la vraisemblance s'écrit : $L_n(\theta) = \frac{1}{\theta^{n(k+1)}}(k+1)^n \prod_{i=1}^{n} x_i^k$ qui est donc maximale pour $\theta$ minimale. Ainsi : $\hat{\theta}^{MV} = max(X_1, ..., X_n)$.
3. Fonction de répartition : $F_{\overline{X}_n}(x) = P(\overline{X}_n \leq x) = P(max(X_1, ..., X_n) \leq x) = P(X_1 \leq x, ..., X_n \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x) = F_X(x)^n$ (la quatrième égalité étant justifiée par l'indépendance des $X_i$.

   Or : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{x^{k+1}}{\theta^{k+1}} & si \quad 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & si \quad x \geq \theta \end{cases}$.

Ainsi, $F_{\overline{X}_n}(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{x^{n(k+1)}}{\theta^{n(k+1)}} & si \quad 0 \leq x \leq \theta \\ 1 & si \quad x \geq \theta \end{cases}$.

Finalement, la fonction densité de probabilité s'écrit : $f_{\overline{X}_n}(x) = F'_{\overline{X}_n}(x) = \begin{cases} \frac{n(k+1)}{\theta^{n(k+1)}} x^{n(k+1)-1} & si \quad 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & sinon \end{cases}$.

Son espérance vaut : $E[\overline{X}_n] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\overline{X}_n}(x)dx = \frac{n(k+1)}{\theta^{n(k+1)}} \int_0^\theta x^{n(k+1)}dx = \frac{n(k+1)}{\theta^{n(k+1)}} \frac{\theta^{n(k+1)+1}}{n(k+1)+1} = \frac{n(k+1)}{n(k+1)+1}\theta$.

Ainsi, un estimateur sans biais de $\theta$ est : $\hat{\theta} = \frac{n(k+1)+1}{n(k+1)}\overline{X}_n$.