

## Examen du 21 février 2023

Durée 3h - aucun document autorisé - calculatrice fournie - les exercices sont indépendants  
Ne faire les applications numériques que lorsqu'elles sont demandées

**Notations :** Dans ce sujet, on notera  $T_e$  la période d'échantillonnage. On utilisera l'abréviation BOZ pour désigner un *bloqueur d'ordre zéro*, CNA pour un *convertisseur numérique-analogique* et CAN pour un *convertisseur analogique-numérique*. On notera  $\mathcal{L}\{\}$  et  $\mathcal{L}^{-1}\{\}$  les opérateurs *transformée de Laplace* et *transformée de Laplace inverse*. De même, on notera  $\mathcal{Z}\{\}$  et  $\mathcal{Z}^{-1}\{\}$  les opérateurs *transformée en z* et *transformée en z inverse*. Un signal continu  $x(t)$ , une fois échantillonné sera noté  $x^*(t)$  et les transformées de Laplace de ces signaux seront notées  $X(p)$  et  $X^*(p)$  respectivement. Lorsque cela sera nécessaire,  $\mathcal{L}^{-1}\{X(p)\}^*$  désignera  $x^*(t)$ . Le signal numérique associé à  $x^*(t)$  sera noté  $x_n$  et  $X(z)$  désignera sa transformée en z.

### Exercice I Questions de cours

#### Partie commande numérique

Soit  $G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$  la fonction de transfert d'un système discret,  $B(z)$  désignant le polynôme du numérateur et  $A(z)$  celui du dénominateur. On suppose que le polynôme  $A(z)$  est de degré  $n$ .

- 1 - Énoncer la condition générale de stabilité Entrée Bornée Sortie Bornée pour de tels systèmes.
- 2 - Transformation en  $w$  : rappeler l'expression de la variable  $z$  en fonction de la variable  $w$ . En déduire l'expression de la variable  $w$  en fonction de la variable  $z$ .
- 3 - Rappeler la relation liant une variable  $p$  du plan complexe en temps continu et son équivalent  $z$  dans le plan complexe en temps discret.
- 4 - Rappeler (ou retrouver) dans chacun des cas suivants, l'expression de  $p$  en fonction de  $z$  permettant d'approcher la variable  $p$  du plan complexe des systèmes analogiques par une expression en  $z$ , variable du plan complexe des systèmes discrets.
  - 4-a - Approximations d'Euler avant et arrière,
  - 4-b - Approximation de Tustin.
- 5 - Rappeler le théorème de la valeur initiale et le théorème de la valeur finale pour les systèmes discrets.

#### Partie identification

On considère un processus numérique à identifier, d'entrée  $u(k) \in \mathbb{R}$ , de sortie  $y(k) \in \mathbb{R}$  et perturbé par le signal  $w(k) \in \mathbb{R}$ . Étant donné le modèle mathématique bruité (de type L.T.I.) du processus à identifier, on note  $\theta$  le vecteur des paramètres à estimer,  $u(k)$  est le signal numérique en entrée,  $\tilde{y}(k, \theta)$  désigne le signal numérique de sortie du modèle mathématique et  $e(k) \in \mathbb{R}$  le bruit numérique affectant le modèle mathématique à l'instant  $k$ . Les échantillons  $u(k)$  et  $y(k)$  sont supposés connus pour  $k = 1$  à  $N \in \mathbb{N}$ .

- 6 - Représenter en détail et commenter le schéma de principe d'identification d'un modèle mathématique à partir de données expérimentales.
- 7 - Rappeler les propriétés de l'opérateur retard noté  $q^{-1}$ .
- 8 - En considérant l'expression du modèle mathématique bruité suivante :

$$\tilde{y}(k, \theta) = G(q^{-1}, \theta) u(k) + H(q^{-1}, \theta) e(k), \quad (1)$$

où  $G(q^{-1}, \theta) := \frac{q^{-d} B(q^{-1}, \theta)}{A(q^{-1}, \theta)}$  avec  $A(q^{-1}, \theta)$  et  $B(q^{-1}, \theta)$  deux polynômes en puissance de  $q^{-1}$ , de degré  $n_A$  et  $n_B$  respectivement,  $H(q^{-1}, \theta) := \frac{C(q^{-1}, \theta)}{D(q^{-1}, \theta)}$  avec  $C(q^{-1}, \theta)$  et  $D(q^{-1}, \theta)$  deux polynômes en puissance de  $q^{-1}$ , de degré  $n_C$  et  $n_D$  respectivement.

- 8-a - Donner l'expression du prédictor à un coup d'avance, noté  $\hat{y}(k|k-1, \theta)$ , en fonction des polynômes  $A(q^{-1}, \theta)$ ,  $B(q^{-1}, \theta)$ ,  $C(q^{-1}, \theta)$  et  $D(q^{-1}, \theta)$ .
- 8-b - Rappeler toutes les hypothèses que doivent vérifier les fonctions de transfert du modèle dans (1) pour permettre d'obtenir un tel prédictor.
- 9 - Dans chacun des cas suivants, donner la signification de l'acronyme, dessiner le schéma-bloc correspondant et rappeler l'expression détaillée de la série temporelle associée.
 

9-a - ARX,

9-b - ARMAX,

9-c - OE.



10 - Déterminer l'expression détaillée du vecteur des paramètres  $\hat{\theta}^*(N)$  d'un modèle ARX estimé hors-ligne par la méthode des moindres carrés. On formulera convenablement le problème d'identification avant de souligner le résultat final.

11 - A quelles conditions l'estimation précédente est-elle sans biais ?

12 - Rappelez l'algorithme détaillé permettant l'estimation récursive (en-ligne) du vecteur des paramètres  $\hat{\theta}^*(k)$  pour un modèle ARX.

### Exercice II Transformée en $z$ et Transformée en $z$ inverse

1 - Calculer la transformée en  $z$  du signal numérique  $y_k$  donné par ses échantillons :

1-a -  $y_0 = -1, y_1 = 0, y_2 = 1, y_k = 0 \forall k > 2$ . 1-b -  $y_k = -a$  pour  $k$  pair et  $y_k = a$  pour  $k$  impair, où  $a \in \mathbb{R}^*$ .

2 - Calculer l'expression du signal numérique  $y_k$  dont la transformée en  $z$  inverse  $Y(z)$  est donnée par :

2-a -  $Y(z) = \frac{z+1}{(z-a)(z-b)}, a, b \in \mathbb{R}_+$ . 2-b -  $Y(z) = \frac{z-1}{(z-a)^2}, a \in \mathbb{R}_+$ .

### Exercice III Critère de Jury

Soit  $G(p) = \frac{K(p-1)}{p^2}$  la fonction de transfert d'un processus d'entrée  $U(p)$  et de sortie  $Y(p)$ , où  $K$  est un paramètre réel, non nul.

1 - Le système analogique est inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire. Déterminer les conditions de stabilité du système en boucle fermée portant sur le paramètre  $K$ . Faire ensuite l'application numérique.

2 - Calculer la fonction de transfert, notée  $H(z)$ , du système discrétisé (c'est-à-dire entouré d'un CNA-BOZ en entrée et d'un CAN en sortie), le tout cadencé à la période  $T_e = 0,1s$ .

3 - En déduire la relation de récurrence liant  $y_n$  à  $u_n$ .

4 - Calculer les pôles et zéros du système discrétisé. Faire l'application numérique. Le système est-il stable au sens EBSB ?

5 - Le système discrétisé est inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire. Déterminer les conditions de stabilité du système en boucle fermée, portant sur le paramètre  $K$ , en utilisant le critère de stabilité de Jury donné en Annexe. Faire ensuite l'application numérique.

6 - Comparer avec le résultat obtenu la question 1, puis commenter.

### Exercice IV Régulation de température via un correcteur par placement de pôles

On s'intéresse au problème de régulation de la température  $y(t)$  d'une pièce fermée par un climatiseur électrique chaud/froid, alimenté par un courant  $u(t)$ . Le modèle analogique du processus est donné par la relation linéaire  $Y(p) = H(p)U(p)$  où  $Y(p) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ ,  $U(p) = \mathcal{L}\{u(t)\}$  et  $H(p) = \frac{K(1-Tp)}{(1+\tau p)^2}$ , avec  $K = 0.5 [^{\circ}C.A^{-1}]$ ,

$\tau = 20 [s.rad^{-1}]$ ,  $T = 10 [s.rad^{-1}]$ . On envisage cette régulation par le biais d'un correcteur numérique de type RST, cadencé à la période d'échantillonnage  $T_e = 0,1 [s]$ . Le CNA utilise un BOZ. On souhaite déterminer les trois polynômes du correcteur RST ( $R(z)$  de degré  $\rho$ ,  $S(z)$  de degré  $\sigma$  et  $T(z)$  de degré  $\tau$ ) de manière à satisfaire le cahier des charges suivant :

i) Le système en boucle fermée est d'ordre deux, avec les deux pôles donnés par leur équivalent en temps continu  $p_{c1} = -1$  et  $p_{c2} = -2$ .

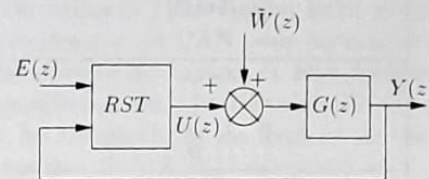
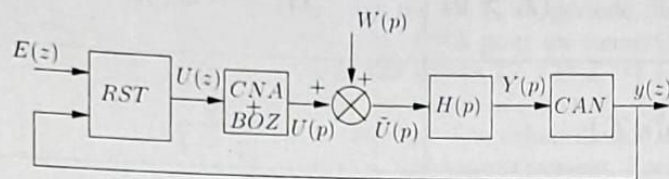
ii) Le système en boucle fermée permet le rejet asymptotique d'une perturbation analogique en échelon  $w(t) = W_0 \mathbb{1}_0^+(t)$  additive sur l'entrée commande du système.

iii) La réponse asymptotique du système en boucle fermée à une consigne numérique de type échelon d'amplitude  $E_0$  ( $e_k = E_0 \forall k \in \mathbb{N}$ ) est un signal constant de même amplitude :  $y_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = E_0$ .

Dans toute la suite, on imposera au correcteur RST de vérifier les conditions structurelles  $\sigma \leq \rho$  et  $\tau \leq \rho$ .

1 - Faire le schéma du correcteur RST détaillé.

2 - Montrer que l'asservissement peut indifféremment se mettre sous l'une des deux formes représentées sur les figures suivantes, en précisant les expressions détaillées de  $G(z)$  et  $W(z)$ .



Pour la suite, nous prendrons  $G(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0}$  avec  $b_1 \approx -1,2375 \cdot 10^{-3}$ ,  $b_0 \approx 1,25 \cdot 10^{-3}$ ,  $a_1 = -1.99002$  et  $a_0 = 0.99005$ .

3 - Formulation du problème de placement de pôles.

3-a - Proposer un modèle désiré,  $H_d(z) = \frac{B_d(z)}{\Pi_d(z)}$ , qui soit admissible et d'ordre aussi faible que nécessaire.

Justifier et argumenter votre choix.

3-b - Après avoir formulé l'ensemble des contraintes portant sur les degrés des polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$ , indiquer une valeur minimum pour  $\rho$ , puis préciser les valeurs de  $\sigma$  et  $\tau$  permettant de répondre au cahier des charges.

3-c - Déterminer les polynômes  $R$ ,  $S$  et  $T$  de façon à respecter l'ensemble du cahier des charges.

## ANNEXE : Système linéaire associé à une équation diophantine

Soient

✓  $A(z)$  un polynôme monique de degré  $n$  et de terme général  $a_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ ,

✓  $B(z)$  un polynôme de degré  $m < n$  et de terme général  $b_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ ,

✓  $\Pi_d(z)$  un polynôme monique de degré  $q$  et de terme général  $c_l$ ,  $l = 0, 1, \dots, q-1$ .

Le polynôme monique  $R(z)$  et le polynôme  $S(z)$ , de degré  $\rho$  et  $\sigma$  respectivement, et de terme général  $r_j$  ( $j = 0, 1, \dots, \rho-1$ ) et  $s_k$  ( $k = 0, 1, \dots, \sigma$ ), vérifient l'équation polynomiale

$$A(z)R(z) + B(z)S(z) = \Pi_d(z)$$

si, et seulement si leurs coefficients respectifs vérifient le système linéaire

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} & \ddots & 0 & b_m & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & a_{n-2} & \ddots & 1 & b_{m-1} & b_m & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1} & b_{m-2} & b_{m-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-2} & \vdots & b_{m-2} & \ddots & b_m \\ a_0 & \vdots & \ddots & \vdots & b_0 & \vdots & \ddots & b_{m-1} \\ 0 & a_0 & \ddots & \vdots & 0 & b_0 & \ddots & b_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{\rho-1} \\ r_{\rho-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ r_0 \\ s_\sigma \\ s_{\sigma-1} \\ \vdots \\ s_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{q-1} - a_{n-1} \\ c_{q-2} - a_{n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{q-n} - a_0 \\ c_{q-n-1} \\ c_{q-n-2} \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix}$$



## ANNEXE : Transformées en $z$ usuelles

$G(p)$	$g_n := g(n T_e) \quad (T_e > 0)$	$G(z) = \mathcal{Z}\{g_n\}$
$\frac{1}{p}$	$u(n T_e)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	$n T_e$	$\frac{T_e z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{1}{2!}(n T_e)^2$	$\frac{T_e^2 (z+1) z}{2 (z-1)^3}$
$\frac{1}{p+a}$	$e^{-a n T_e}$	$\frac{z}{z - e^{-a T_e}}$
$\frac{1}{(p+a)^{m+1}}$	$\frac{(n T_e)^m}{m!} e^{-a n T_e}$	$\frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial a^m} \left( \frac{z}{z - e^{-a T_e}} \right)$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-a n T_e}$	$\frac{(1 - e^{-a T_e}) z}{(z - e^{-a T_e})(z-1)}$

TABLE 1 – Tableau des transformées en  $z$  usuelles.

## ANNEXE : Critère de Jury

**Rappel du critère pour des systèmes d'ordre  $n = 2$  ou  $3$**

a) Pour un système du second ordre ( $n = 2$ ) dont le polynôme caractéristique est donné par

$$\Pi(z) = c_2 z^2 + c_1 z + c_0$$

avec  $c_2 > 0$  par hypothèse, les racines de cette équation caractéristique sont de module inférieur à 1 si, et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- i)  $c_2 + c_1 + c_0 > 0$ ,
- ii)  $c_2 - c_1 + c_0 > 0$ ,
- iii)  $|c_0| < c_2$ .

b) Pour un système du troisième ordre ( $n = 3$ ) dont le polynôme caractéristique est donné par

$$\Pi(z) = c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$$

avec  $c_3 > 0$  par hypothèse, les racines de cette équation caractéristique sont de module inférieur à 1 si, et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- i)  $c_3 + c_2 + c_1 + c_0 > 0$ ,
- ii)  $c_3 - c_2 + c_1 - c_0 > 0$ ,
- iii)  $|c_0| < c_3$ ,
- iv)  $(c_0)^2 - (c_3)^2 < c_0 c_2 - c_1 c_3$ .