

Persistenz in der diskreten Morse-Theorie

Ulrich Bauer

Georg-August-Universität Göttingen

30. September 2023

Persistenz in der diskreten Morse-Theorie

Ulrich Bauer

Georg-August-Universität Göttingen

30. September 2023

Persistenz in der diskreten Morse-Theorie

Ulrich Bauer

Georg-August-Universität Göttingen

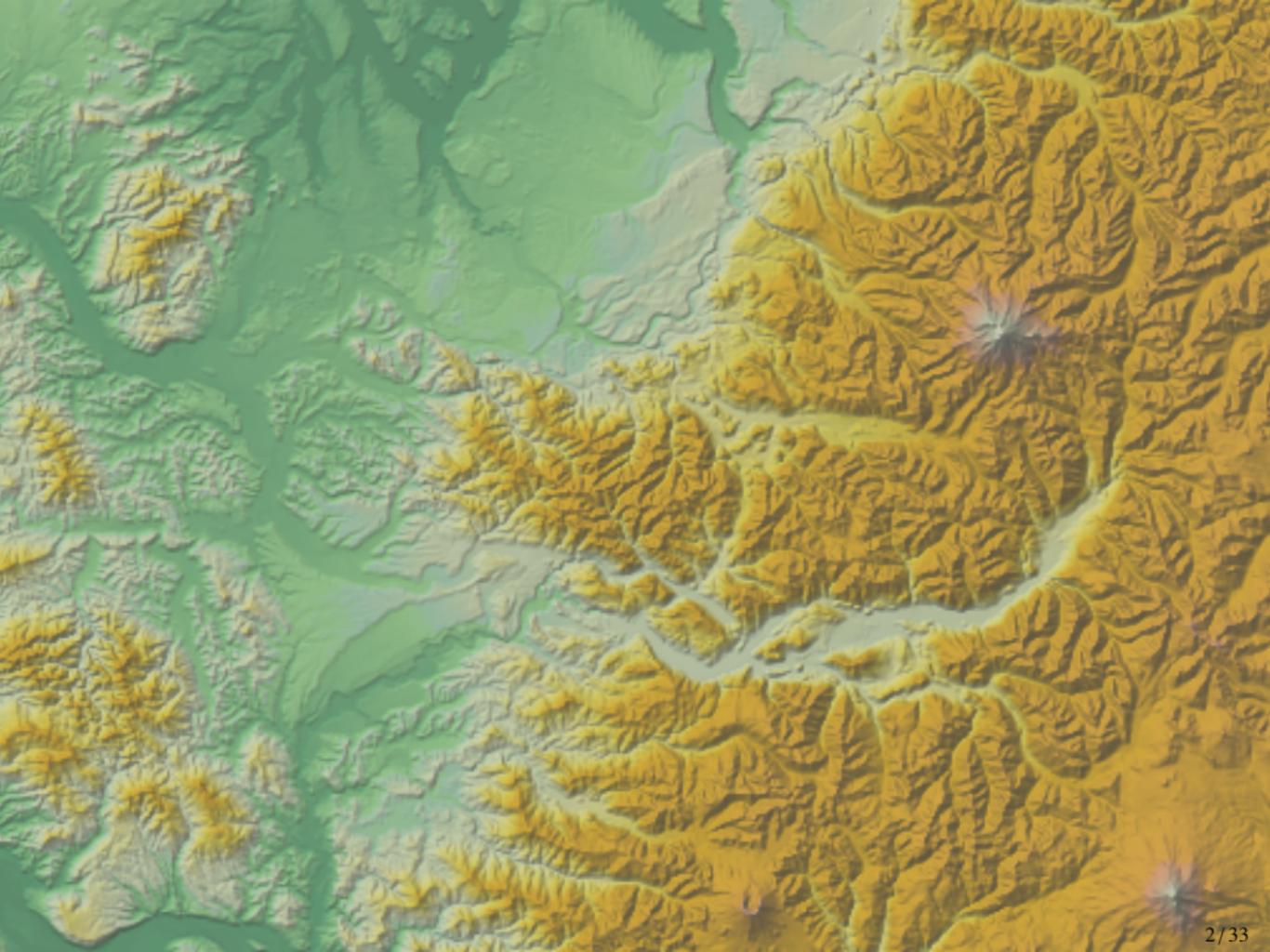
30. September 2023

Persistenz in der diskreten Morse-Theorie

Ulrich Bauer

Georg-August-Universität Göttingen

30. September 2023





2733



Topologische δ -Vereinfachung

Gegeben eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\delta > 0$,
finde eine Funktion f_δ mit:

- ▶ minimaler Anzahl an kritischen Punkten
- ▶ nahe an der Eingabefunktion: $\|f_\delta - f\|_\infty \leq \delta$

Topologische δ -Vereinfachung

Gegeben eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\delta > 0$,
finde eine Funktion f_δ mit:

- ▶ minimaler Anzahl an kritischen Punkten
- ▶ nahe an der Eingabefunktion: $\|f_\delta - f\|_\infty \leq \delta$

Wir verwenden zur Lösung:

- ▶ Diskrete Morse-Theory [Forman 1998]
 - ▶ liefert diskreten Begriff von kritischen Punkten

Topologische δ -Vereinfachung

Gegeben eine Funktion $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $\delta > 0$,
finde eine Funktion f_δ mit:

- ▶ minimaler Anzahl an kritischen Punkten
- ▶ nahe an der Eingabefunktion: $\|f_\delta - f\|_\infty \leq \delta$

Wir verwenden zur Lösung:

- ▶ Diskrete Morse-Theory [Forman 1998]
 - ▶ liefert diskreten Begriff von kritischen Punkten
- ▶ Persistente Homologie [Edelsbrunner et al. 2002]
 - ▶ quantifiziert die Stabilität kritischer Punkte

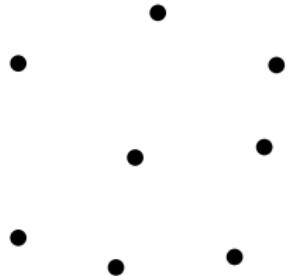
Reguläre Zellkomplexe

Ein endlicher Zellkomplex ist induktiv
aufgebaut:

Reguläre Zellkomplexe

Ein endlicher Zellkomplex ist induktiv aufgebaut:

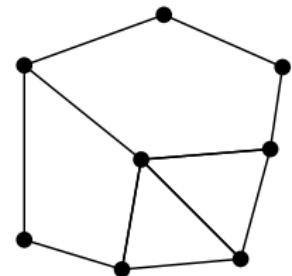
- ▶ Anfang: eine Menge von Punkten (0-Skelett)



Reguläre Zellkomplexe

Ein endlicher Zellkomplex ist induktiv aufgebaut:

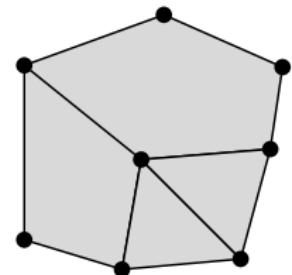
- ▶ Anfang: eine Menge von Punkten (0-Skelett)
- ▶ Das n -Skelett entsteht durch Ankleben von n -Bällen an das $(n - 1)$ -Skelett



Reguläre Zellkomplexe

Ein endlicher Zellkomplex ist induktiv aufgebaut:

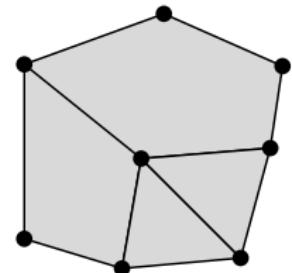
- ▶ Anfang: eine Menge von Punkten (0-Skelett)
- ▶ Das n -Skelett entsteht durch Ankleben von n -Bällen an das $(n - 1)$ -Skelett



Reguläre Zellkomplexe

Ein endlicher Zellkomplex ist induktiv aufgebaut:

- ▶ Anfang: eine Menge von Punkten (0-Skelett)
- ▶ Das n -Skelett entsteht durch Ankleben von n -Bällen an das $(n - 1)$ -Skelett
- ▶ *regulärer* Zellkomplex: alle Verklebeabbildungen sind Homöomorphismen

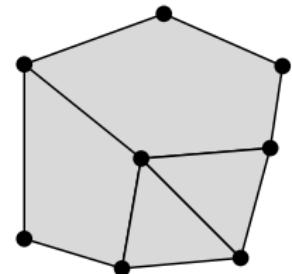


Reguläre Zellkomplexe

Ein endlicher Zellkomplex ist induktiv aufgebaut:

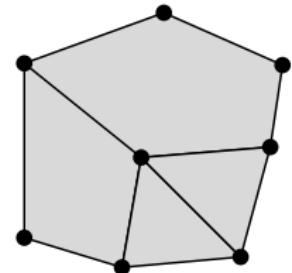
- ▶ Anfang: eine Menge von Punkten (0-Skelett)
- ▶ Das n -Skelett entsteht durch Ankleben von n -Bällen an das $(n - 1)$ -Skelett
- ▶ *regulärer* Zellkomplex: alle Verklebeabbildungen sind Homöomorphismen

Verallgemeinerung von Simplizialkomplexen



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

Endlicher regulärer Zellkomplex \mathcal{K}

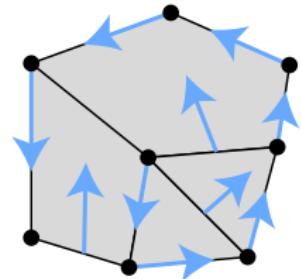


Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

Endlicher regulärer Zellkomplex \mathcal{K}

- *Diskretes Vektorfeld:*

- $V \subset \{(\sigma, \tau) : \sigma \text{ ist Facette von } \tau\}$ und
keine Zelle in mehr als einem Paar

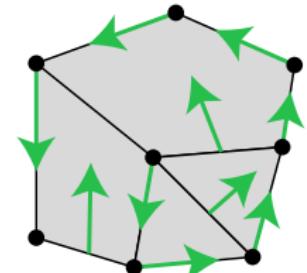


Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

Endlicher regulärer Zellkomplex \mathcal{K}

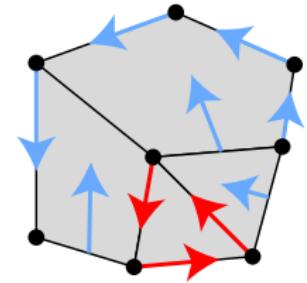
- ▶ *Diskretes Vektorfeld:*

- ▶ $V \subset \{(\sigma, \tau) : \sigma \text{ ist Facette von } \tau\}$ und
keine Zelle in mehr als einem Paar



- ▶ *Diskretes Gradientenfeld:*

- ▶ keine geschlossenen Pfade

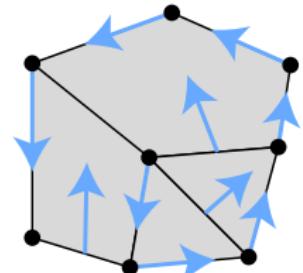


Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

Endlicher regulärer Zellkomplex \mathcal{K}

- ▶ *Diskretes Vektorfeld:*

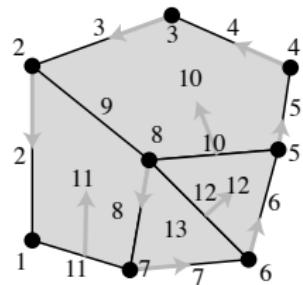
- ▶ $V \subset \{(\sigma, \tau) : \sigma \text{ ist Facette von } \tau\}$ und
keine Zelle in mehr als einem Paar



- ▶ *Diskretes Gradientenfeld:*

- ▶ keine geschlossenen Pfade

- ▶ *Diskrete Morse-Funktion:*

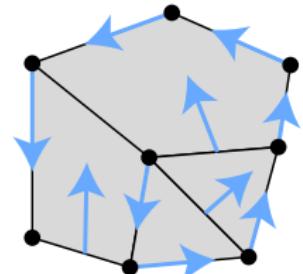


Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

Endlicher regulärer Zellkomplex \mathcal{K}

- ▶ *Diskretes Vektorfeld:*

- ▶ $V \subset \{(\sigma, \tau) : \sigma \text{ ist Facette von } \tau\}$ und
keine Zelle in mehr als einem Paar

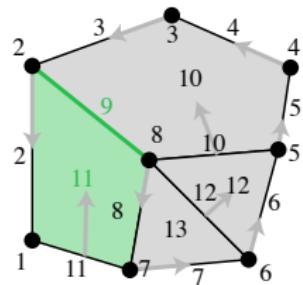


- ▶ *Diskretes Gradientenfeld:*

- ▶ keine geschlossenen Pfade

- ▶ *Diskrete Morse-Funktion:*

- ▶ *konsistent* mit Gradientenfeld V , d.h.:



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

Endlicher regulärer Zellkomplex \mathcal{K}

- ▶ *Diskretes Vektorfeld:*

- ▶ $V \subset \{(\sigma, \tau) : \sigma \text{ ist Facette von } \tau\}$ und
keine Zelle in mehr als einem Paar

- ▶ *Diskretes Gradientenfeld:*

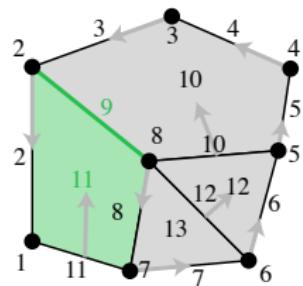
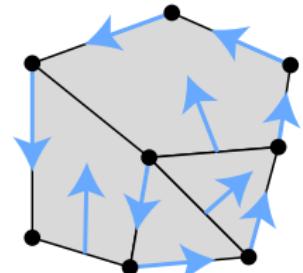
- ▶ keine geschlossenen Pfade

- ▶ *Diskrete Morse-Funktion:*

- ▶ *konsistent* mit Gradientenfeld V , d.h.:

Für alle (σ, τ) mit σ Facette von τ :

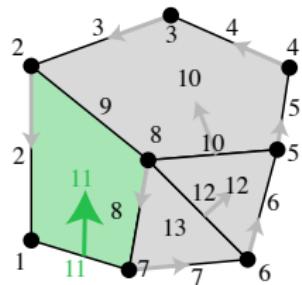
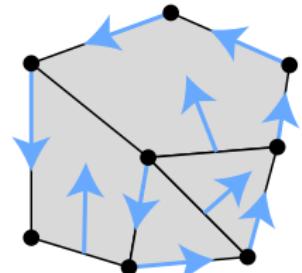
$$f(\sigma) < f(\tau)$$



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

Endlicher regulärer Zellkomplex \mathcal{K}

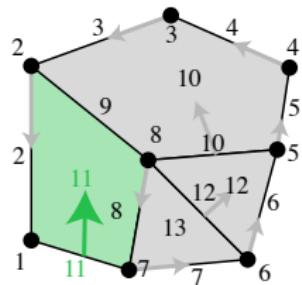
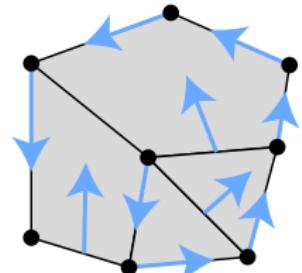
- ▶ *Diskretes Vektorfeld:*
 - ▶ $V \subset \{(\sigma, \tau) : \sigma \text{ ist Facette von } \tau\}$ und keine Zelle in mehr als einem Paar
- ▶ *Diskretes Gradientenfeld:*
 - ▶ keine geschlossenen Pfade
- ▶ *Diskrete Morse-Funktion:*
 - ▶ *konsistent* mit Gradientenfeld V , d.h.:
 - Für alle (σ, τ) mit σ Facette von τ :
 $f(\sigma) < f(\tau)$, falls $(\sigma, \tau) \notin V$
 $f(\sigma) \geq f(\tau)$, falls $(\sigma, \tau) \in V$



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

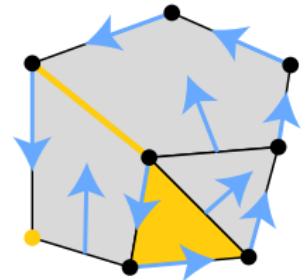
Endlicher regulärer Zellkomplex \mathcal{K}

- ▶ *Diskretes Vektorfeld:*
 - ▶ $V \subset \{(\sigma, \tau) : \sigma \text{ ist Facette von } \tau\}$ und keine Zelle in mehr als einem Paar
- ▶ *Diskretes Gradientenfeld:*
 - ▶ keine geschlossenen Pfade
- ▶ *Diskrete Morse-Funktion:*
 - ▶ *konsistent* mit Gradientenfeld V , d.h.:
 - Für alle (σ, τ) mit σ Facette von τ :
 $f(\sigma) < f(\tau)$, falls $(\sigma, \tau) \notin V$
 - $f(\sigma) \geq f(\tau)$, falls $(\sigma, \tau) \in V$



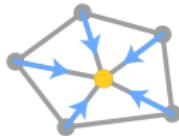
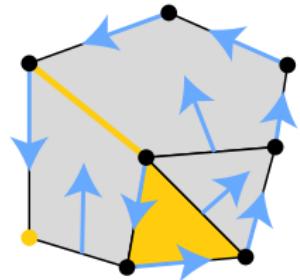
Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ *Kritische Zelle:*
 - ▶ nicht im Vektorfeld enthalten



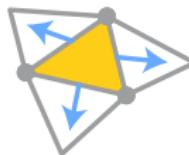
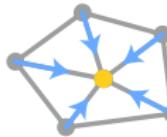
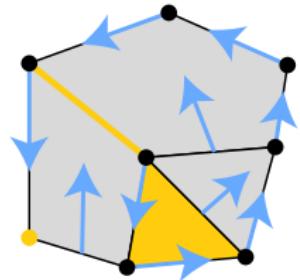
Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ *Kritische Zelle:*
 - ▶ nicht im Vektorfeld enthalten
 - ▶ Beispiele in 2D: Minimum (0-Zelle)



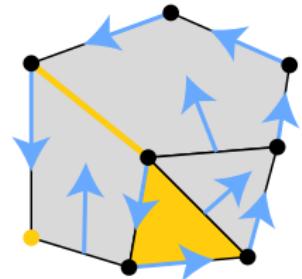
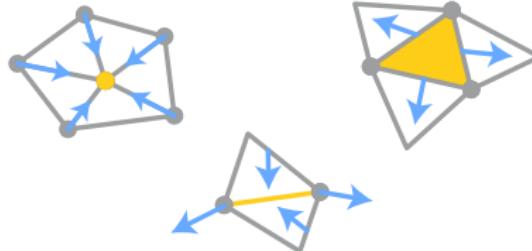
Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ *Kritische Zelle:*
 - ▶ nicht im Vektorfeld enthalten
 - ▶ Beispiele in 2D: Minimum (0-Zelle), Maximum (2-Zelle)



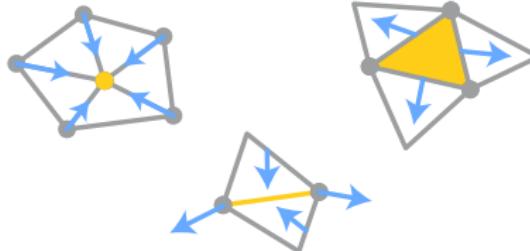
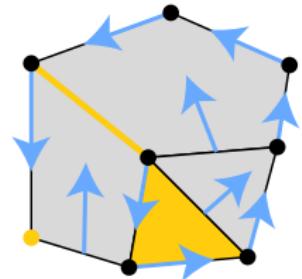
Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ *Kritische Zelle:*
 - ▶ nicht im Vektorfeld enthalten
 - ▶ Beispiele in 2D: Minimum (0-Zelle), Maximum (2-Zelle), Sattel (1-Zelle)



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ *Kritische Zelle:*
 - ▶ nicht im Vektorfeld enthalten
 - ▶ Beispiele in 2D: Minimum (0-Zelle), Maximum (2-Zelle), Sattel (1-Zelle)

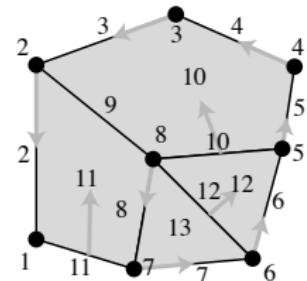
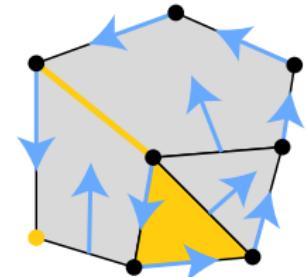


- ▶ Keine ausgearteten kritischen Punkte
(per Definition)!

Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

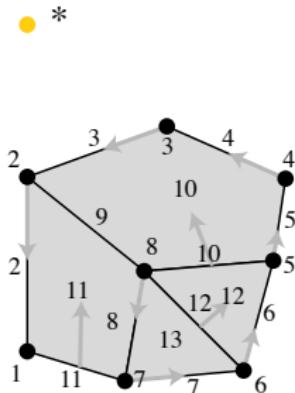
- ▶ *Niveau-Subkomplex:*

- ▶ Vereinigung aller geschlossenen Zellen unterhalb eines Funktionswerts



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

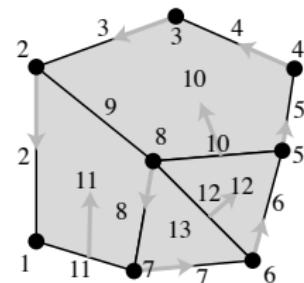
- ▶ Niveau-Subkomplex:
 - ▶ Vereinigung aller geschlossenen Zellen unterhalb eines Funktionswerts



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ *Niveau-Subkomplex:*

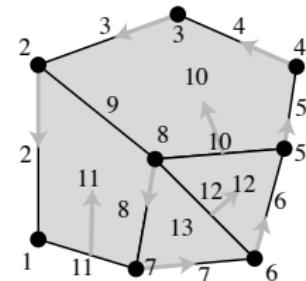
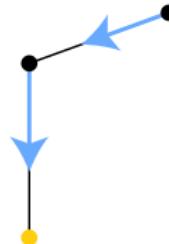
- ▶ Vereinigung aller geschlossenen Zellen
unterhalb eines Funktionswerts



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

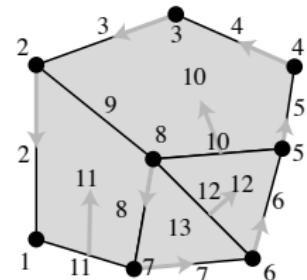
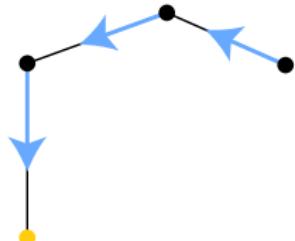
- ▶ *Niveau-Subkomplex:*

- ▶ Vereinigung aller geschlossenen Zellen
unterhalb eines Funktionswerts



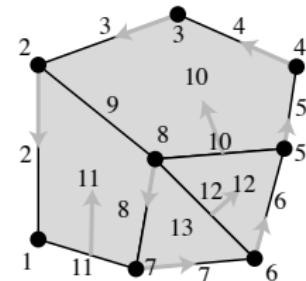
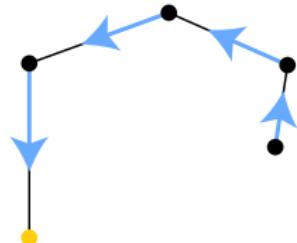
Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ Niveau-Subkomplex:
 - ▶ Vereinigung aller geschlossenen Zellen unterhalb eines Funktionswerts



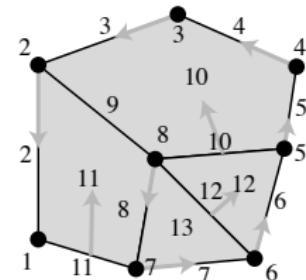
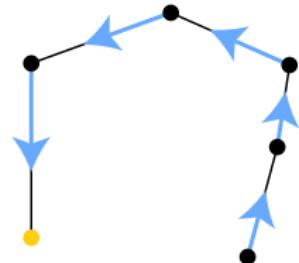
Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ Niveau-Subkomplex:
 - ▶ Vereinigung aller geschlossenen Zellen unterhalb eines Funktionswerts



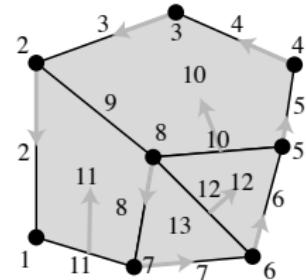
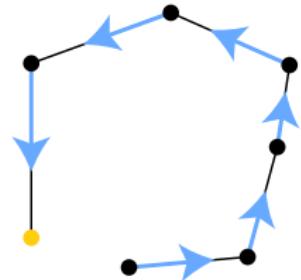
Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ Niveau-Subkomplex:
 - ▶ Vereinigung aller geschlossenen Zellen unterhalb eines Funktionswerts



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

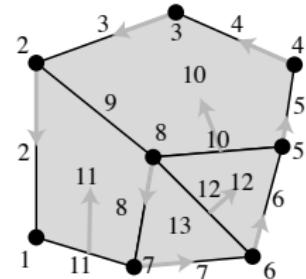
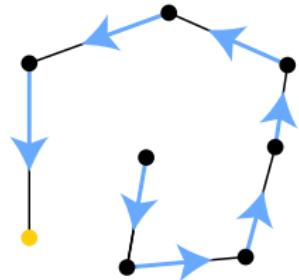
- ▶ Niveau-Subkomplex:
 - ▶ Vereinigung aller geschlossenen Zellen unterhalb eines Funktionswerts



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ *Niveau-Subkomplex:*

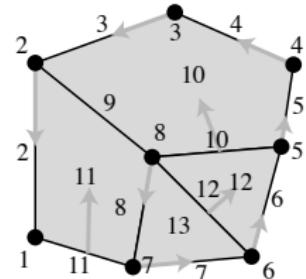
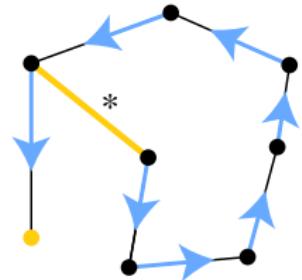
- ▶ Vereinigung aller geschlossenen Zellen unterhalb eines Funktionswerts



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ *Niveau-Subkomplex:*

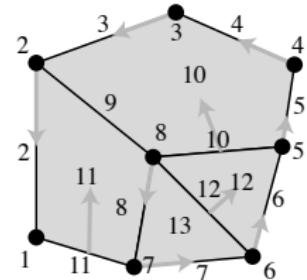
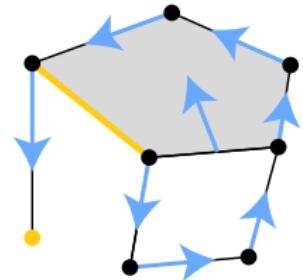
- ▶ Vereinigung aller geschlossenen Zellen unterhalb eines Funktionswerts
- ▶ Homotopie-Typ (und damit Homologie) ändert sich nur an kritischen Zellen



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ *Niveau-Subkomplex:*

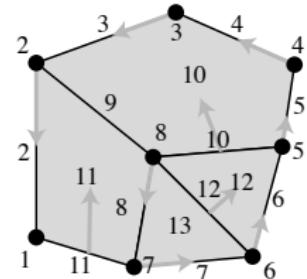
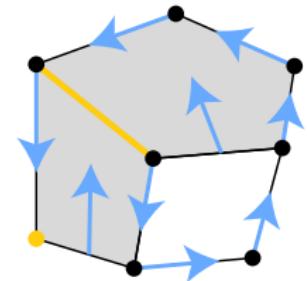
- ▶ Vereinigung aller geschlossenen Zellen unterhalb eines Funktionswerts
- ▶ Homotopie-Typ (und damit Homologie) ändert sich nur an kritischen Zellen



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ *Niveau-Subkomplex:*

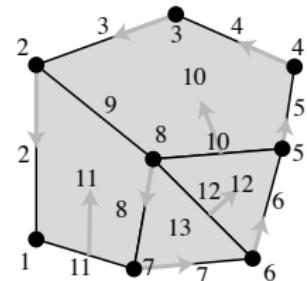
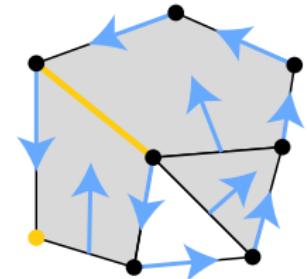
- ▶ Vereinigung aller geschlossenen Zellen unterhalb eines Funktionswerts
- ▶ Homotopie-Typ (und damit Homologie) ändert sich nur an kritischen Zellen



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ *Niveau-Subkomplex:*

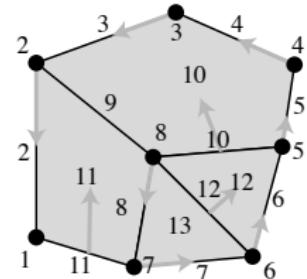
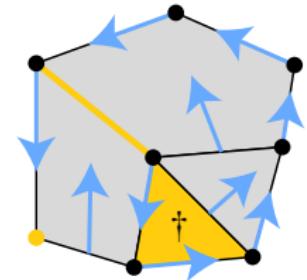
- ▶ Vereinigung aller geschlossenen Zellen unterhalb eines Funktionswerts
- ▶ Homotopie-Typ (und damit Homologie) ändert sich nur an kritischen Zellen



Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

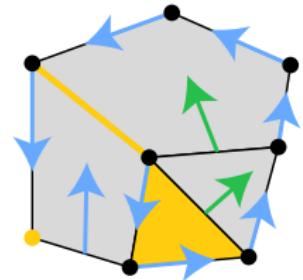
- ▶ *Niveau-Subkomplex:*

- ▶ Vereinigung aller geschlossenen Zellen unterhalb eines Funktionswerts
- ▶ Homotopie-Typ (und damit Homologie) ändert sich nur an kritischen Zellen



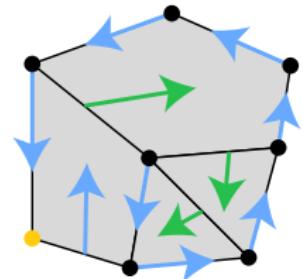
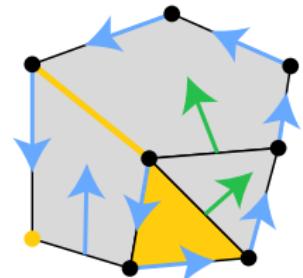
Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ Auslöschung kritischer Zellen:
 - ▶ Voraussetzung: eindeutiger Pfad zwischen zwei kritischen Zellen



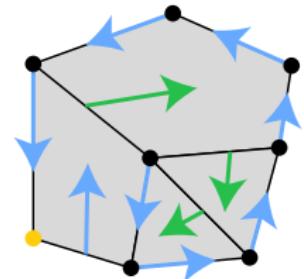
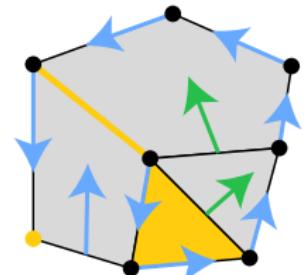
Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

- ▶ Auslöschung kritischer Zellen:
 - ▶ Voraussetzung: eindeutiger Pfad zwischen zwei kritischen Zellen
 - ▶ Umdrehen des Pfades löscht kritische Zellen aus

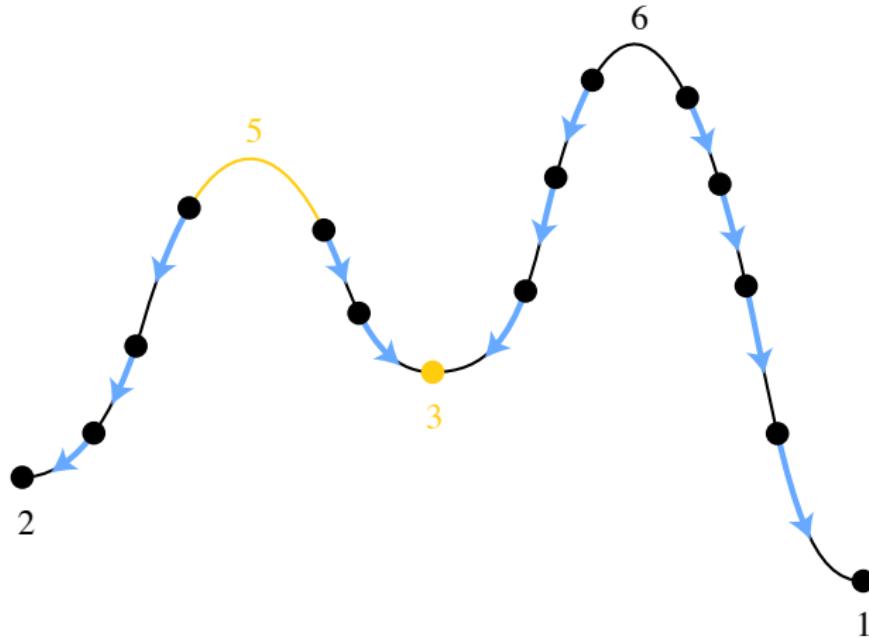


Diskrete Morse-Theorie [Forman, 1998]

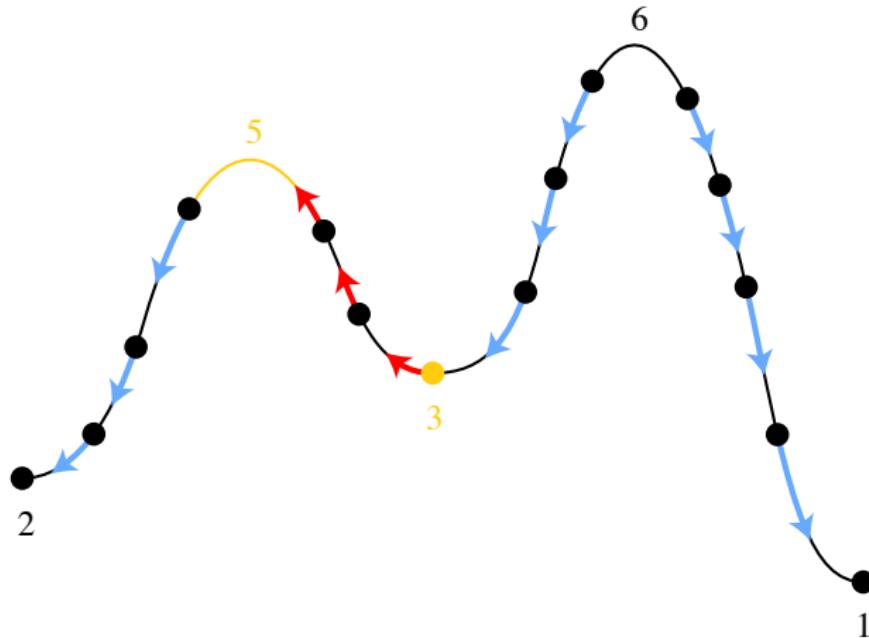
- ▶ Auslöschung kritischer Zellen:
 - ▶ Voraussetzung: eindeutiger Pfad zwischen zwei kritischen Zellen
 - ▶ Umdrehen des Pfades löscht kritische Zellen aus
 - ▶ für Vektorfeld, *nicht für Funktion*



Kritische Punkte auslöschen: Vektorfeld



Kritische Punkte auslöschen: Vektorfeld



Aufsteigende und absteigende Mengen

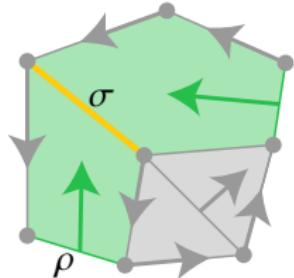
Gradientenfeld V erzwingt Ungleichungen auf den Werten einer konsistenten Morse-Funktion

Aufsteigende und absteigende Mengen

Gradientenfeld V erzwingt Ungleichungen auf den Werten einer konsistenten Morse-Funktion

- ▶ Aufsteigende Menge einer Zelle σ :

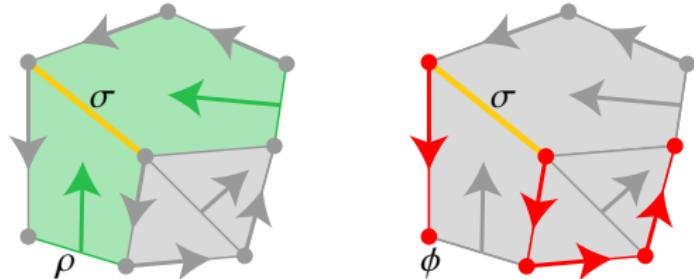
$\{\rho : g(\rho) \geq g(\sigma) \text{ für alle Funktionen } g \text{ konsistent mit } V\}$



Aufsteigende und absteigende Mengen

Gradientenfeld V erzwingt Ungleichungen auf den Werten einer konsistenten Morse-Funktion

- ▶ *Aufsteigende Menge* einer Zelle σ :
 $\{\rho : g(\rho) \geq g(\sigma) \text{ für alle Funktionen } g \text{ konsistent mit } V\}$
- ▶ *Absteigende Menge*:
 $\{\phi : g(\phi) \leq g(\sigma) \text{ für alle Funktionen } g \text{ konsistent mit } V\}$

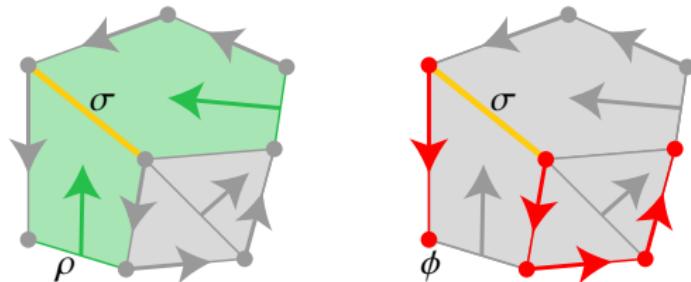


Aufsteigende und absteigende Mengen

Gradientenfeld V erzwingt Ungleichungen auf den Werten einer konsistenten Morse-Funktion

- ▶ *Aufsteigende Menge* einer Zelle σ :
 $\{\rho : g(\rho) \geq g(\sigma) \text{ für alle Funktionen } g \text{ konsistent mit } V\}$
- ▶ *Absteigende Menge*:
 $\{\phi : g(\phi) \leq g(\sigma) \text{ für alle Funktionen } g \text{ konsistent mit } V\}$

V induziert Halబordnung \leq_V auf Zellen: $\rho \succeq_V \sigma$ und $\phi \leq_V \sigma$

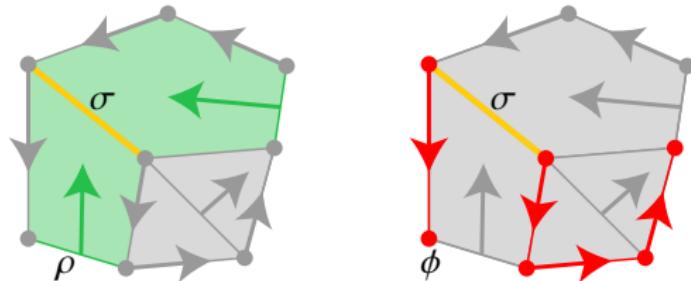


Aufsteigende und absteigende Mengen

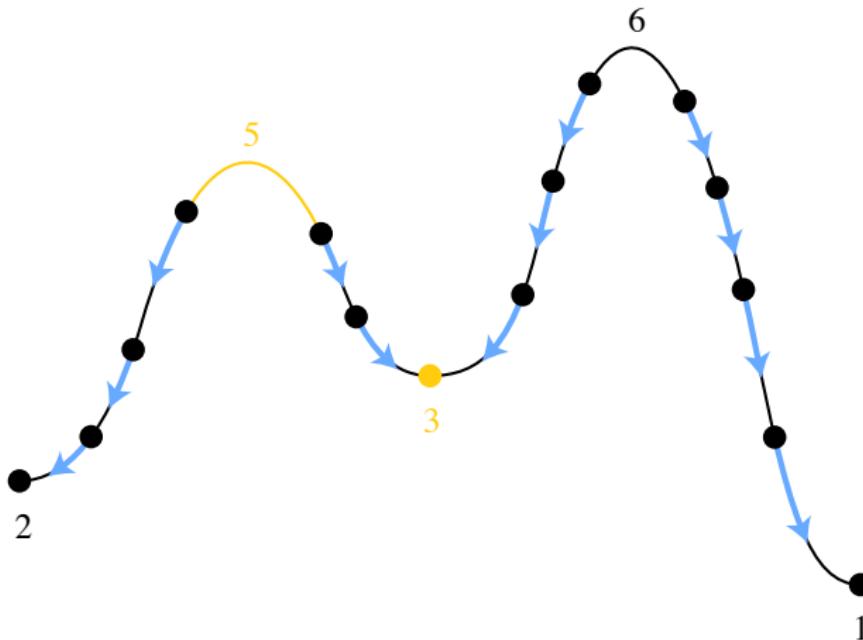
Gradientenfeld V erzwingt Ungleichungen auf den Werten einer konsistenten Morse-Funktion

- ▶ *Aufsteigende Menge* einer Zelle σ :
 $\{\rho : g(\rho) \geq g(\sigma) \text{ für alle Funktionen } g \text{ konsistent mit } V\}$
- ▶ *Absteigende Menge*:
 $\{\phi : g(\phi) \leq g(\sigma) \text{ für alle Funktionen } g \text{ konsistent mit } V\}$

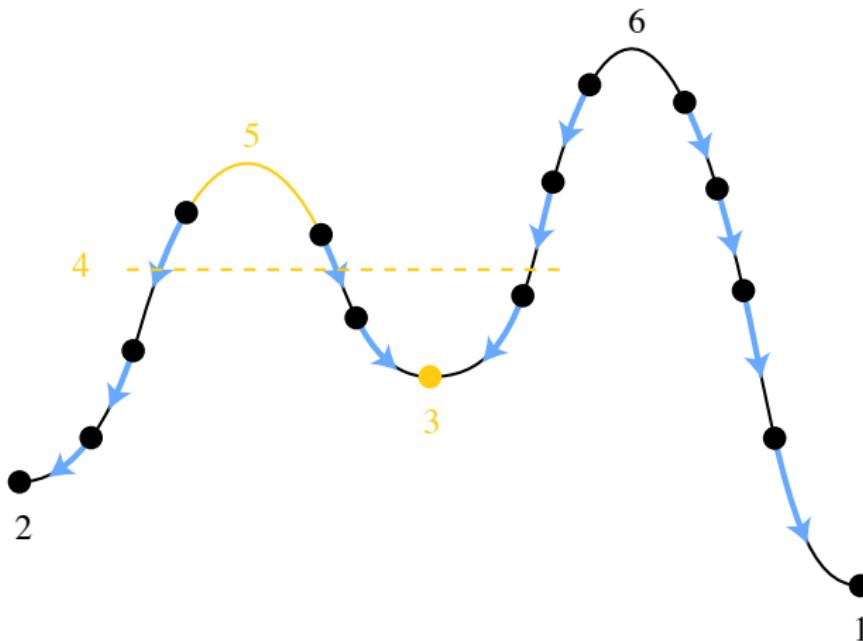
V induziert Halబordnung \leq_V auf Zellen: $\rho \succeq_V \sigma$ und $\phi \leq_V \sigma$



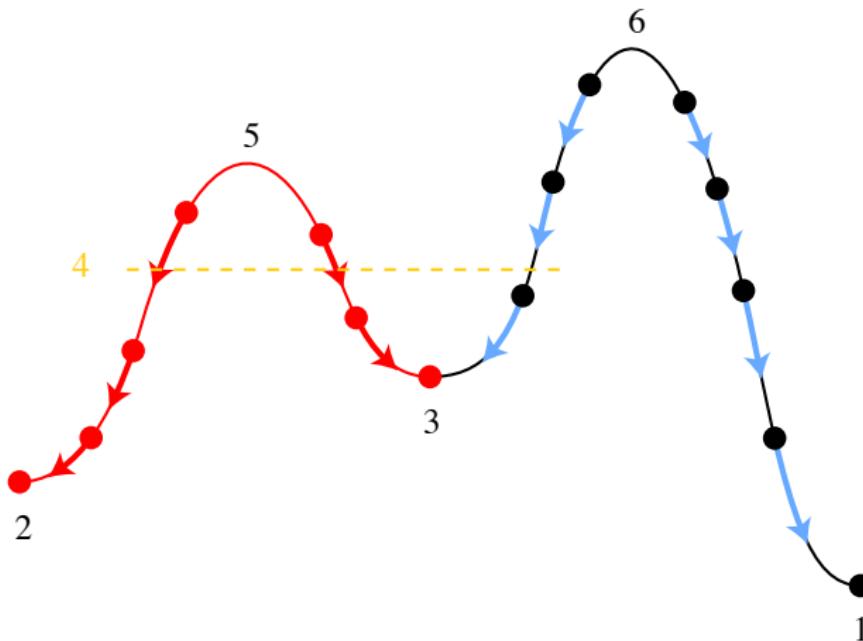
Kritische Punkte auslöschen: Funktion



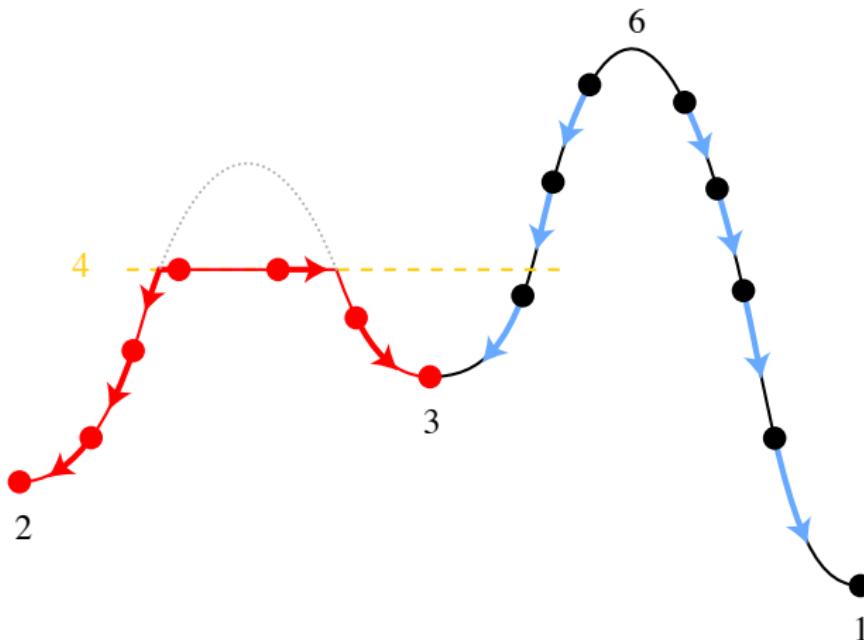
Kritische Punkte auslöschen: Funktion



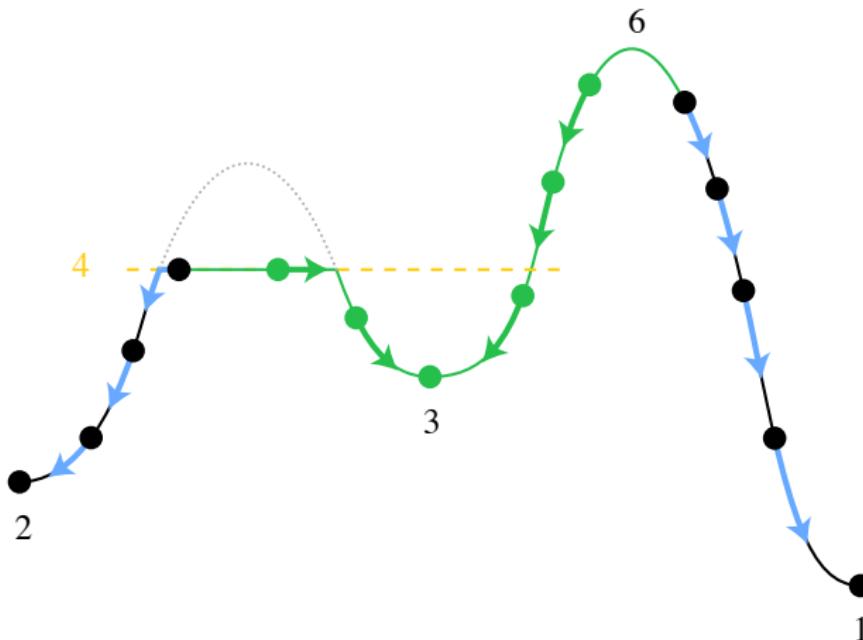
Kritische Punkte auslöschen: Funktion



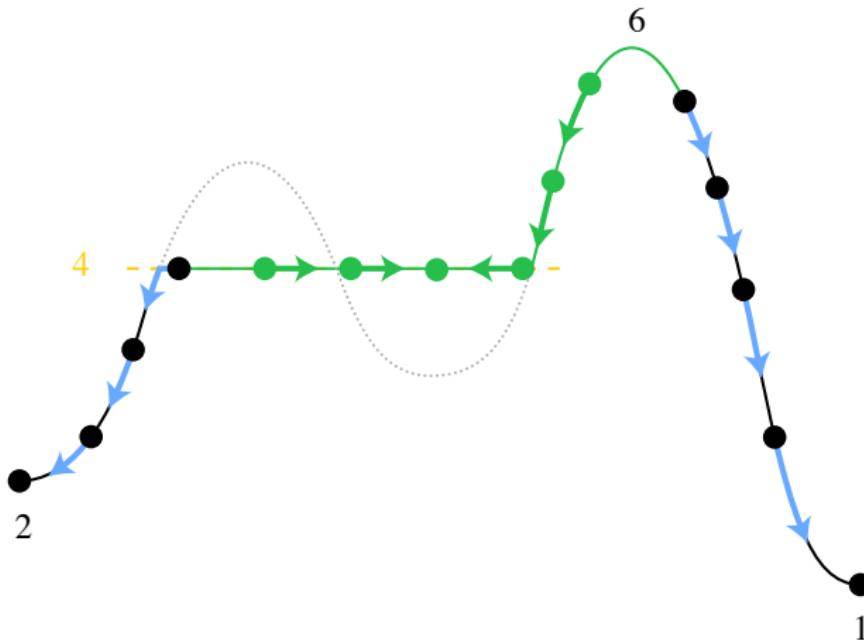
Kritische Punkte auslöschen: Funktion



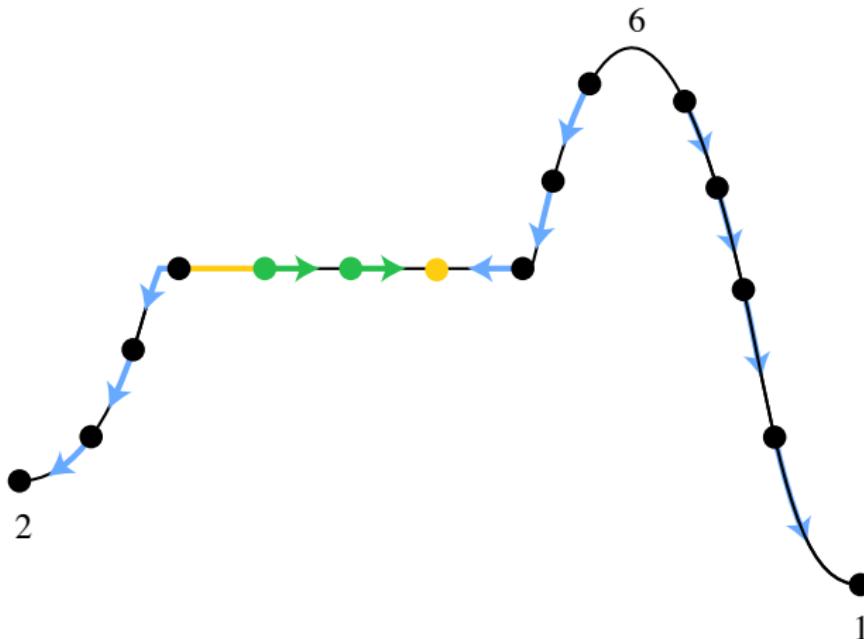
Kritische Punkte auslöschen: Funktion



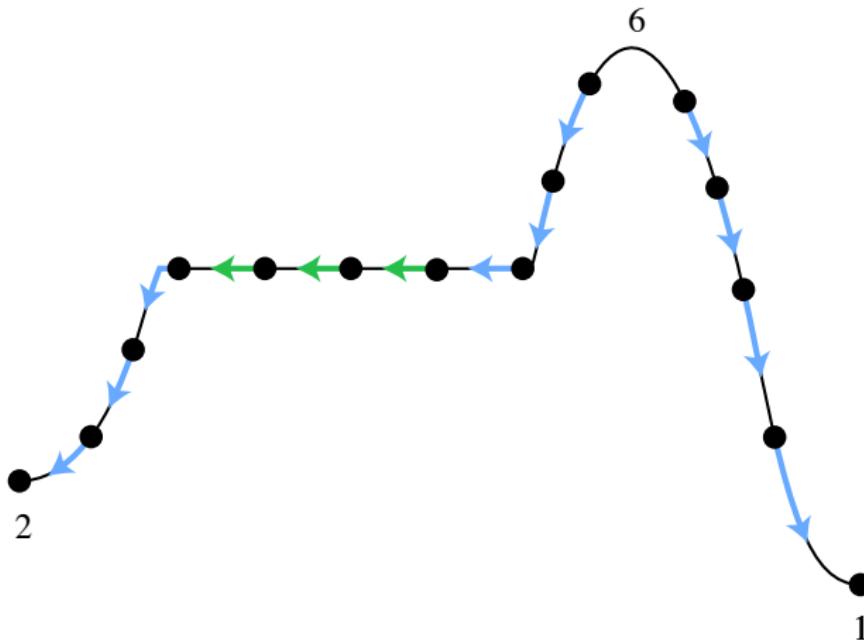
Kritische Punkte auslöschen: Funktion



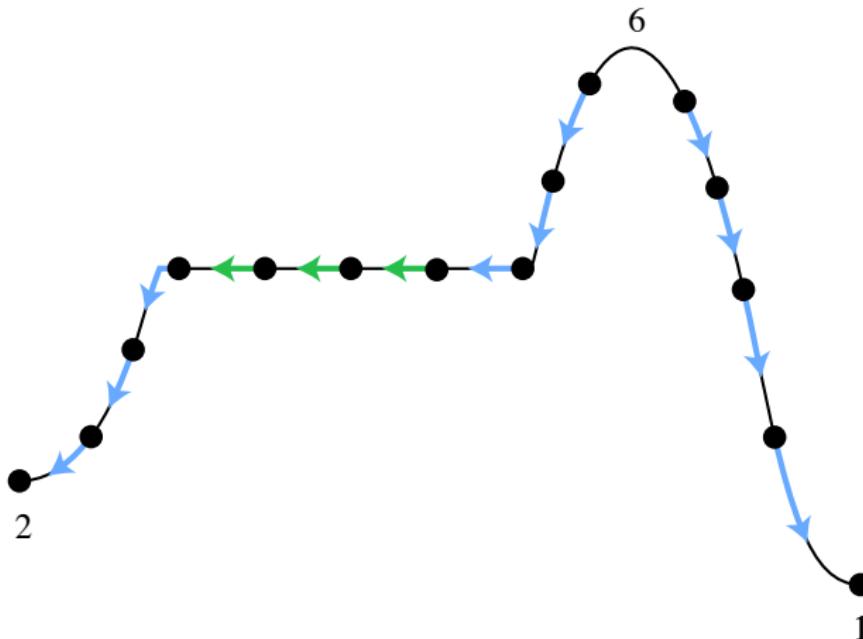
Kritische Punkte auslöschen: Funktion



Kritische Punkte auslöschen: Funktion

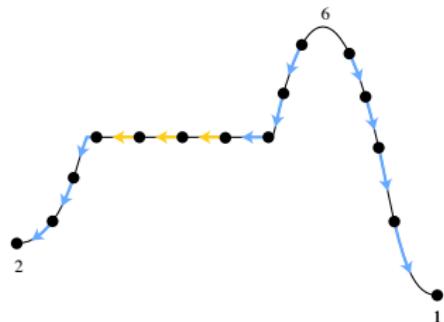


Kritische Punkte auslöschen: Funktion



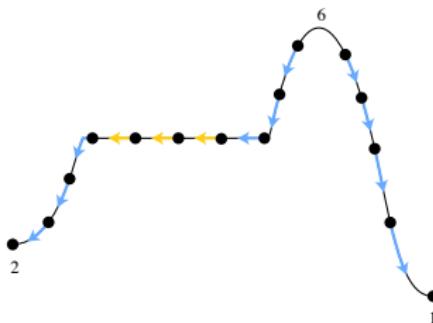
Funktioniert für Zellkomplexe beliebiger Dimension!

Pseudo-Morse-Funktionen



Nach Auslöschung ist die Funktion keine Morse-Funktion mehr

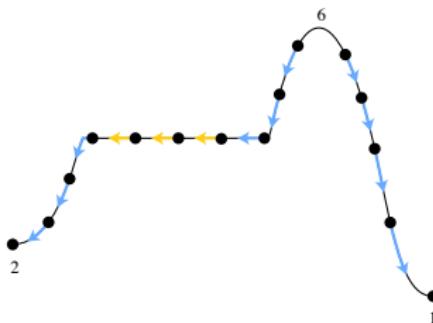
Pseudo-Morse-Funktionen



Nach Auslöschung ist die Funktion keine Morse-Funktion mehr

- ▶ *Pseudo-Morse*: schwache statt strikte Ungleichungen
 - $f(\sigma) \leq f(\tau)$, falls $(\sigma, \tau) \notin V$
 - $f(\sigma) \geq f(\tau)$, falls $(\sigma, \tau) \in V$

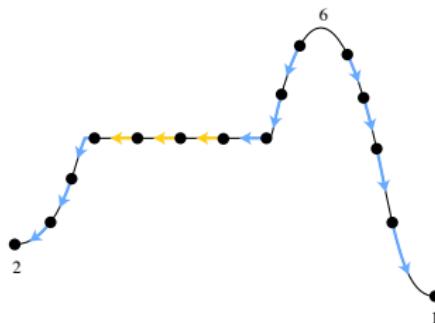
Pseudo-Morse-Funktionen



Nach Auslöschung ist die Funktion keine Morse-Funktion mehr

- ▶ *Pseudo-Morse*: schwache statt strikte Ungleichungen
 - $f(\sigma) \leq f(\tau)$, falls $(\sigma, \tau) \notin V$
 - $f(\sigma) \geq f(\tau)$, falls $(\sigma, \tau) \in V$
- ▶ es gibt Morse-Funktion konsistent mit V beliebig nahe an f

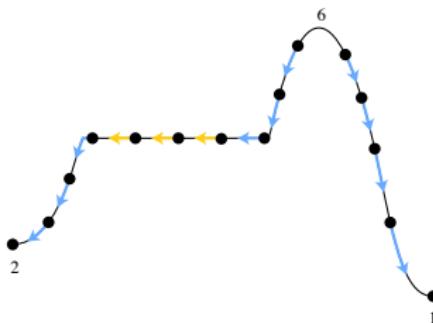
Pseudo-Morse-Funktionen



Nach Auslöschung ist die Funktion keine Morse-Funktion mehr

- ▶ *Pseudo-Morse*: schwache statt strikte Ungleichungen
 - $f(\sigma) \leq f(\tau)$, falls $(\sigma, \tau) \notin V$
 - $f(\sigma) \geq f(\tau)$, falls $(\sigma, \tau) \in V$
- ▶ es gibt Morse-Funktion konsistent mit V beliebig nahe an f
- ▶ Gradientenfeld im Allgemeinen nicht mehr eindeutig

Pseudo-Morse-Funktionen



Nach Auslöschung ist die Funktion keine Morse-Funktion mehr

- ▶ *Pseudo-Morse*: schwache statt strikte Ungleichungen
 - $f(\sigma) \leq f(\tau)$, falls $(\sigma, \tau) \notin V$
 - $f(\sigma) \geq f(\tau)$, falls $(\sigma, \tau) \in V$
- ▶ es gibt Morse-Funktion konsistent mit V beliebig nahe an f
- ▶ Gradientenfeld im Allgemeinen nicht mehr eindeutig
- ▶ verwende das Paar (f, V) wie eine Morse-Funktion

Diskrete vs. PL Morse-Theorie

Warum nicht einfach stückweise lineare Funktionen?

Diskrete vs. PL Morse-Theorie

Warum nicht einfach stückweise lineare Funktionen?

Diskrete Morse-Theorie ist oft die einfachere und effizientere Sprache

Diskrete vs. PL Morse-Theorie

Warum nicht einfach stückweise lineare Funktionen?

Diskrete Morse-Theorie ist oft die einfachere und effizientere Sprache

- ▶ kritische Punkte sind nie ausgeartet (keine Mehrfachsattel)

Diskrete vs. PL Morse-Theorie

Warum nicht einfach stückweise lineare Funktionen?

Diskrete Morse-Theorie ist oft die einfachere und effizientere Sprache

- ▶ kritische Punkte sind nie ausgeartet (keine Mehrfachsattel)
- ▶ klarere und prägnantere Begriffe

Diskrete vs. PL Morse-Theorie

Warum nicht einfach stückweise lineare Funktionen?

Diskrete Morse-Theorie ist oft die einfachere und effizientere Sprache

- ▶ kritische Punkte sind nie ausgeartet (keine Mehrfachsattel)
- ▶ klarere und prägnantere Begriffe
- ▶ erfasst den kombinatorischen Kern der Morse-Theorie

Diskrete vs. PL Morse-Theorie

Warum nicht einfach stückweise lineare Funktionen?

Diskrete Morse-Theorie ist oft die einfachere und effizientere Sprache

- ▶ kritische Punkte sind nie ausgeartet (keine Mehrfachsattel)
- ▶ klarere und prägnantere Begriffe
- ▶ erfasst den kombinatorischen Kern der Morse-Theorie

Wir können die Funktionenklassen ineinander transformieren

Diskrete vs. PL Morse-Theorie

Warum nicht einfach stückweise lineare Funktionen?

Diskrete Morse-Theorie ist oft die einfachere und effizientere Sprache

- ▶ kritische Punkte sind nie ausgeartet (keine Mehrfachsattel)
- ▶ klarere und prägnantere Begriffe
- ▶ erfasst den kombinatorischen Kern der Morse-Theorie

Wir können die Funktionenklassen ineinander transformieren
(PL → Pseudo-Morse → PL: baryzentrische Unterteilung)

Schwierigkeiten in der PL Morse-Theorie

Satz (Gray et al., 2010; B., 2011)

Topologische δ -Vereinfachung ist NP-vollständig für simplexweise lineare Funktionen.

Schwierigkeiten in der PL Morse-Theorie

Satz (Gray et al., 2010; B., 2011)

Topologische δ -Vereinfachung ist NP-vollständig für simplexweise lineare Funktionen.

- ▶ simplexweise linear: linear auf jedem Simplex der *gegebenen* Triangulierung

Schwierigkeiten in der PL Morse-Theorie

Satz (Gray et al., 2010; B., 2011)

Topologische δ -Vereinfachung ist NP-vollständig für simplexweise lineare Funktionen.

- ▶ simplexweise linear: linear auf jedem Simplex der *gegebenen* Triangulierung
- ▶ stückweise linear: linear auf jedem Simplex einer *beliebigen* Triangulierung

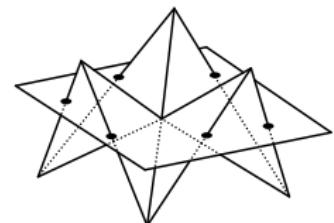
Schwierigkeiten in der PL Morse-Theorie

Satz (Gray et al., 2010; B., 2011)

Topologische δ -Vereinfachung ist NP-vollständig für simplexweise lineare Funktionen.

- ▶ simplexweise linear: linear auf jedem Simplex der *gegebenen* Triangulierung
- ▶ stückweise linear: linear auf jedem Simplex einer *beliebigen* Triangulierung

Schwierigkeit verursacht durch ausgeartete kritische Punkte (Mehrfachsattel)



Zurück zu unserem Problem...

Wir können ein einzelnes Paar kritischer Punkte auslöschen

Zurück zu unserem Problem...

Wir können ein einzelnes Paar kritischer Punkte auslöschen
Strategie: mehrere Paare hintereinander auslöschen

Zurück zu unserem Problem...

Wir können ein einzelnes Paar kritischer Punkte auslöschen
Strategie: mehrere Paare hintereinander auslöschen

Schwierigkeiten:

- Welches Paar soll als nächstes ausgelöscht werden?

Zurück zu unserem Problem...

Wir können ein einzelnes Paar kritischer Punkte auslöschen
Strategie: mehrere Paare hintereinander auslöschen

Schwierigkeiten:

- ▶ Welches Paar soll als nächstes ausgelöscht werden?
- ▶ Toleranz muss eingehalten werden

Zurück zu unserem Problem...

Wir können ein einzelnes Paar kritischer Punkte auslöschen
Strategie: mehrere Paare hintereinander auslöschen

Schwierigkeiten:

- ▶ Welches Paar soll als nächstes ausgelöscht werden?
- ▶ Toleranz muss eingehalten werden
- ▶ Wie viele kritischen Punkte können ausgelöscht werden?

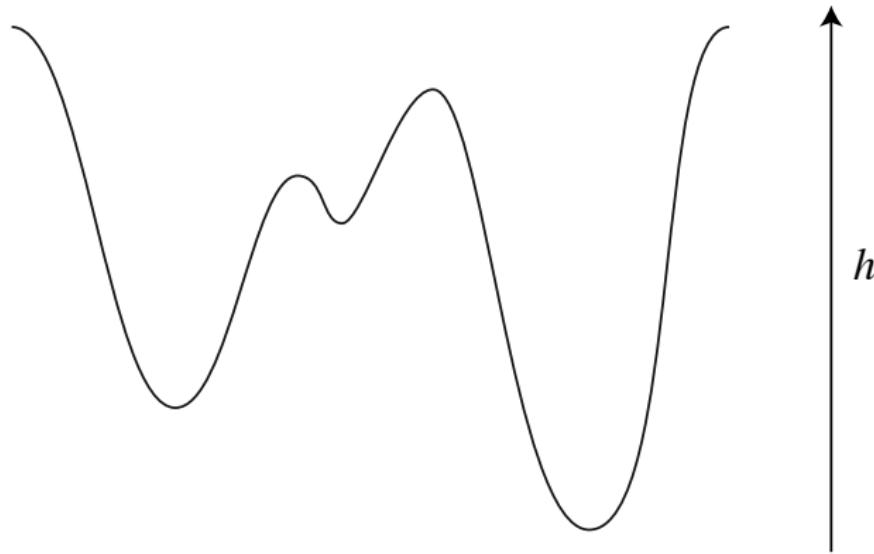
Persistente Homologie [Edelsbrunner et al., 2002]

Beschreibt Änderung der Homologie von Subniveaumengen

Persistente Homologie [Edelsbrunner et al., 2002]

Beschreibt Änderung der Homologie von Subniveaumengen

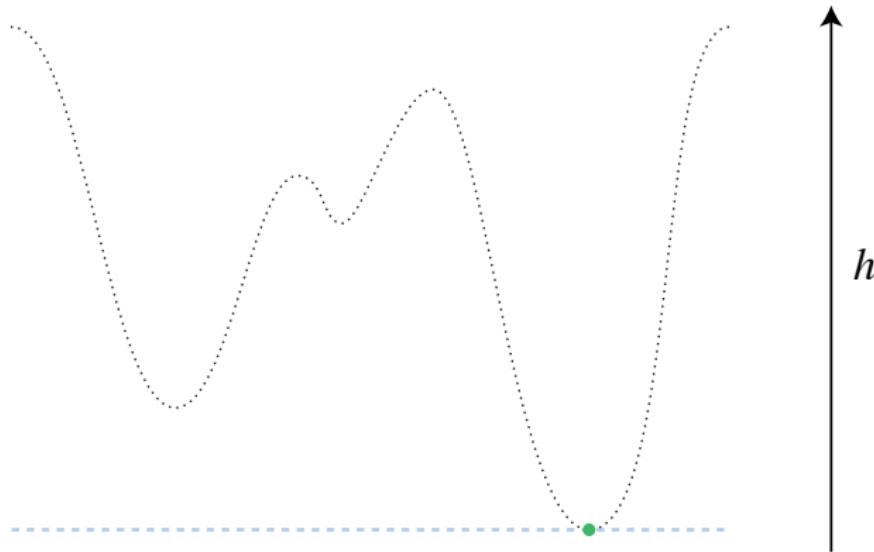
Einfaches Beispiel: Zusammenhangskomponenten in 1D



Persistente Homologie [Edelsbrunner et al., 2002]

Beschreibt Änderung der Homologie von Subniveaumengen

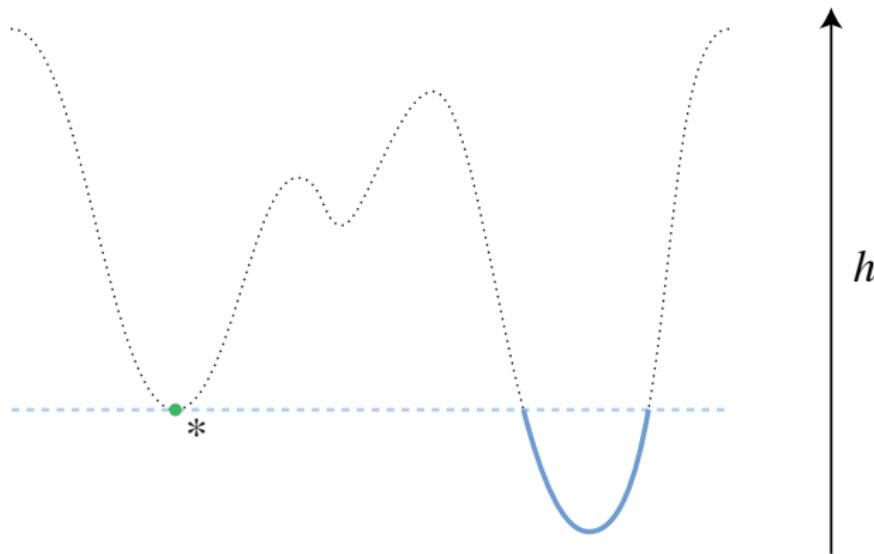
Einfaches Beispiel: Zusammenhangskomponenten in 1D



Persistente Homologie [Edelsbrunner et al., 2002]

Beschreibt Änderung der Homologie von Subniveaumengen

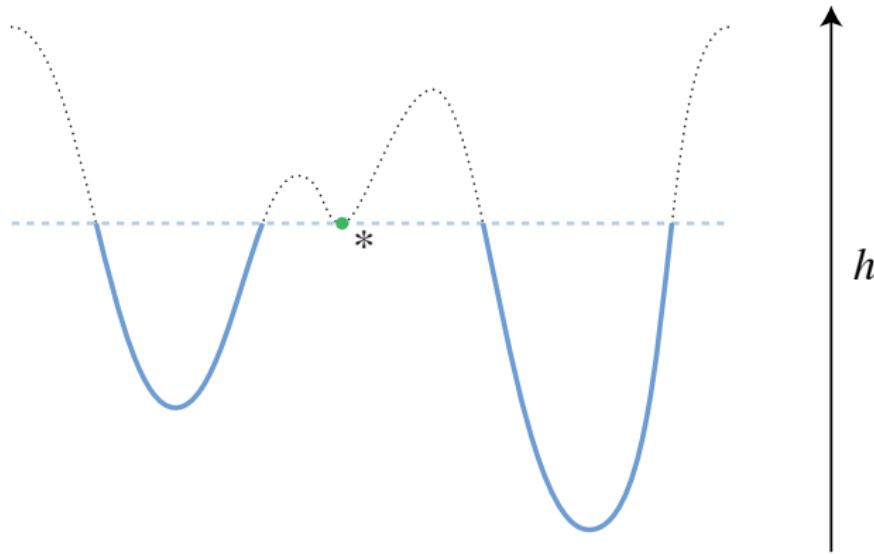
Einfaches Beispiel: Zusammenhangskomponenten in 1D



Persistente Homologie [Edelsbrunner et al., 2002]

Beschreibt Änderung der Homologie von Subniveaumengen

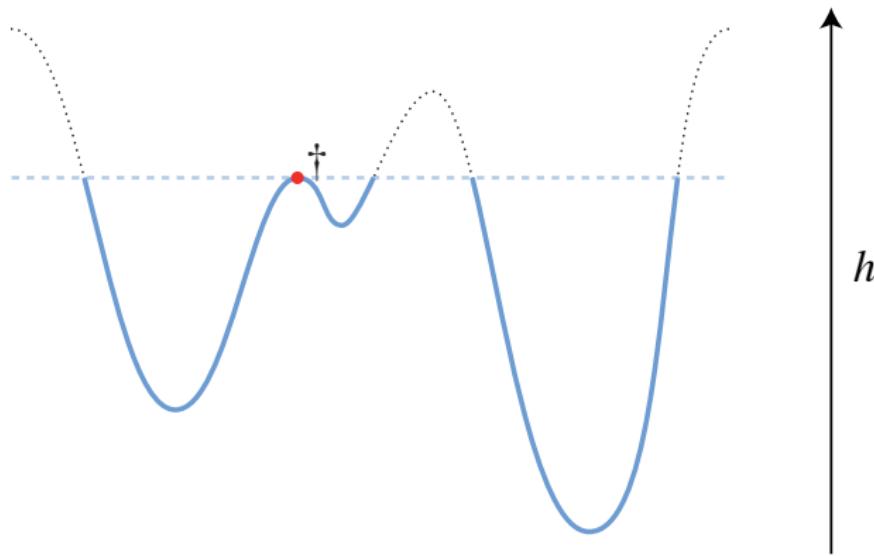
Einfaches Beispiel: Zusammenhangskomponenten in 1D



Persistente Homologie [Edelsbrunner et al., 2002]

Beschreibt Änderung der Homologie von Subniveaumengen

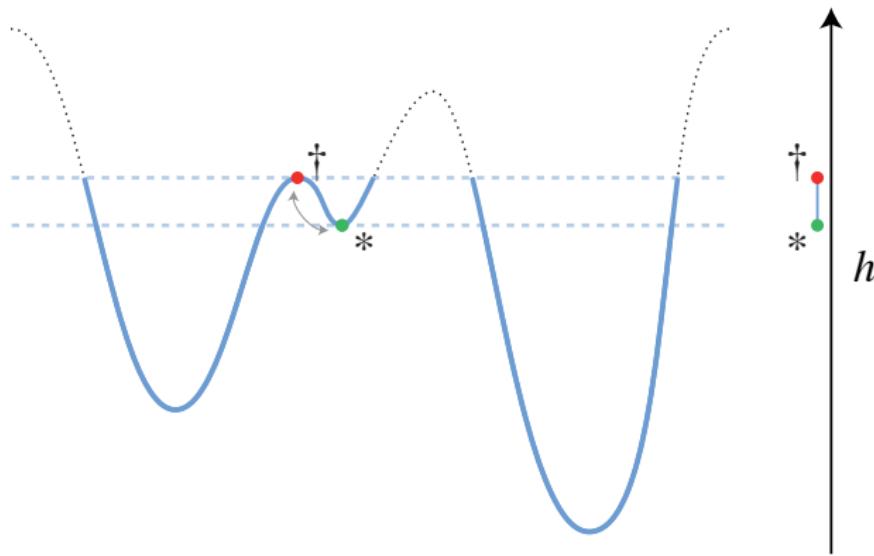
Einfaches Beispiel: Zusammenhangskomponenten in 1D



Persistente Homologie [Edelsbrunner et al., 2002]

Beschreibt Änderung der Homologie von Subniveaumengen

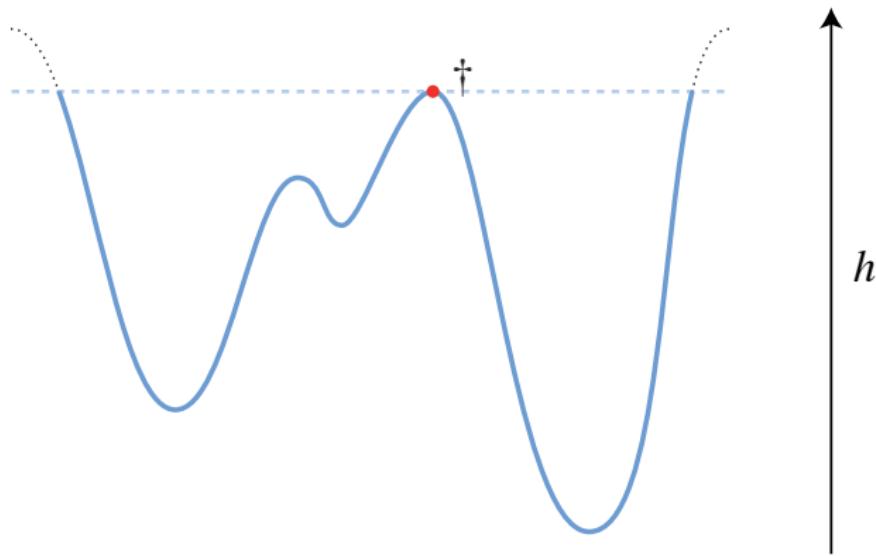
Einfaches Beispiel: Zusammenhangskomponenten in 1D



Persistente Homologie [Edelsbrunner et al., 2002]

Beschreibt Änderung der Homologie von Subniveaumengen

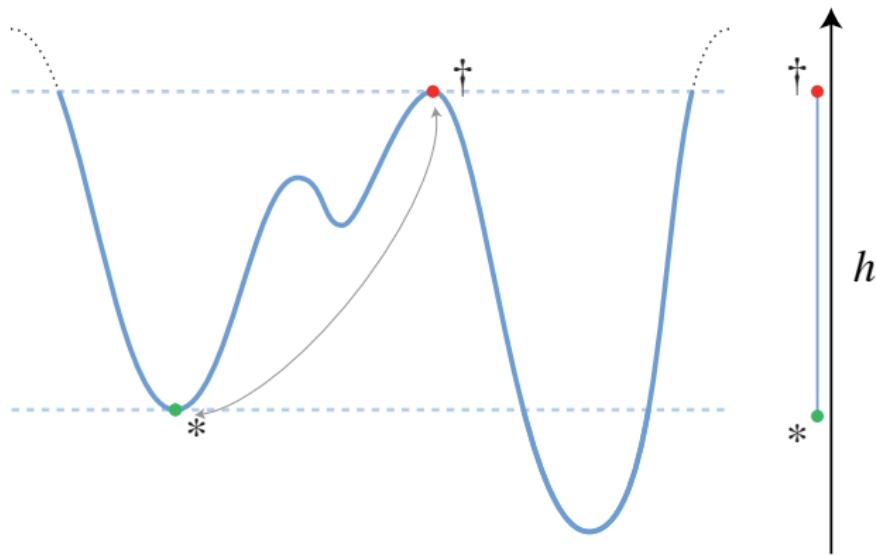
Einfaches Beispiel: Zusammenhangskomponenten in 1D



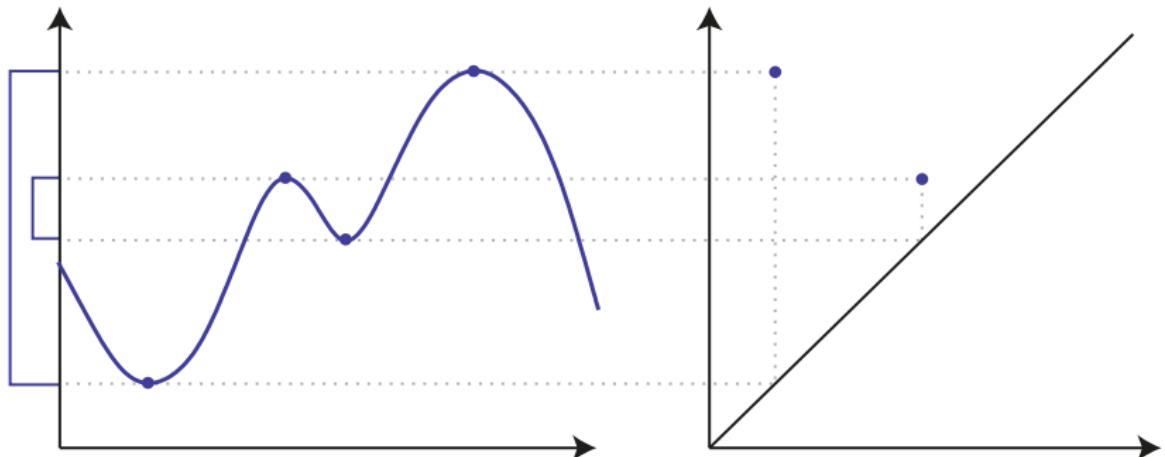
Persistente Homologie [Edelsbrunner et al., 2002]

Beschreibt Änderung der Homologie von Subniveaumengen

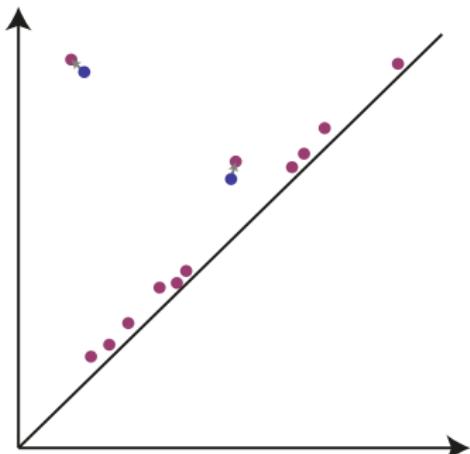
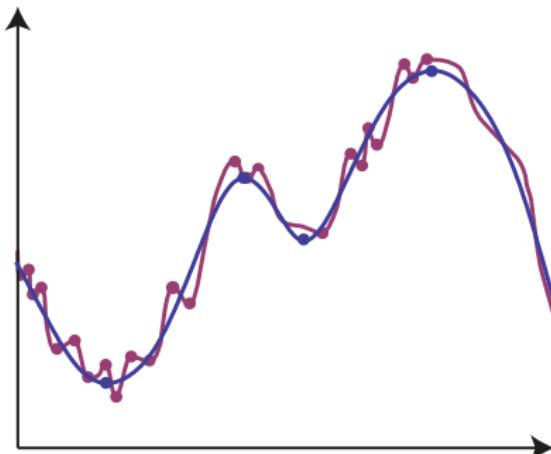
Einfaches Beispiel: Zusammenhangskomponenten in 1D



Persistenz-Diagramme [Cohen-Steiner et al., 2005]



Persistenz-Diagramme [Cohen-Steiner et al., 2005]

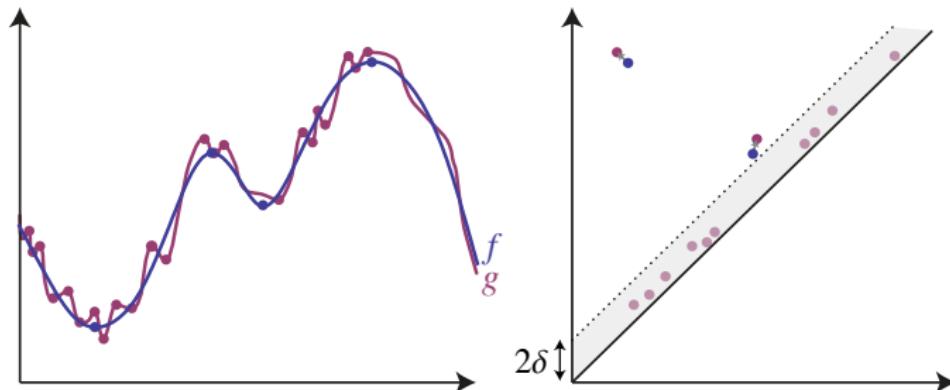


Stabilität der Persistenz-Diagramme

Satz (Cohen-Steiner et al., 2005)

Sei $\|f - g\|_\infty \leq \delta$.

Die Persistenz-Paare von f mit Persistenz $> 2\delta$ können injektiv auf die Persistenz-Paare von g abgebildet werden.



Stabilität der Persistenz-Diagramme

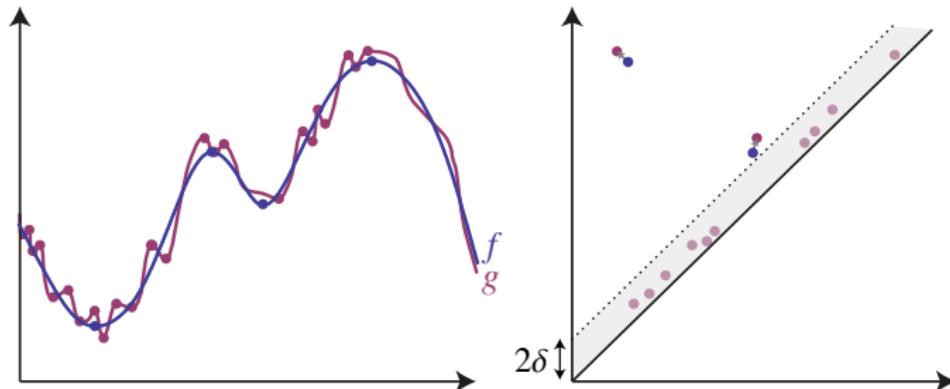
Satz (Cohen-Steiner et al., 2005)

Sei $\|f - g\|_\infty \leq \delta$.

Die Persistenz-Paare von f mit Persistenz $> 2\delta$ können injektiv auf die Persistenz-Paare von g abgebildet werden.

Entsprechende Punkte p_f, p_g in den Diagrammen haben

Abstand $\|p_f - p_g\|_\infty \leq \delta$.



Eine Schranke für die Anzahl kritischer Punkte

Korollar

Sei f eine diskrete Pseudo-Morse-Funktion und $\delta > 0$.

Dann gilt für jede Funktion f_δ mit $\|f_\delta - f\|_\infty \leq \delta$:

$$\# \{ \text{kritische Punkte von } f_\delta \}$$

$$\geq \# \{ \text{kritische Punkte von } f \text{ mit Persistenz} > 2\delta \}$$

Eine Schranke für die Anzahl kritischer Punkte

Korollar

Sei f eine diskrete Pseudo-Morse-Funktion und $\delta > 0$.

Dann gilt für jede Funktion f_δ mit $\|f_\delta - f\|_\infty \leq \delta$:

$$\# \{ \text{kritische Punkte von } f_\delta \}$$

$$\geq \# \{ \text{kritische Punkte von } f \text{ mit Persistenz} > 2\delta \}$$

Ist diese Schranke auch scharf?

Optimale topologische δ -Vereinfachungen

Satz (B., Lange, Wardetzky, 2011)

Sei f eine Pseudo-Morse-Funktion auf einer Fläche.

Für jedes $\delta > 0$ existiert eine Funktion f_δ mit den Eigenschaften:

Optimale topologische δ -Vereinfachungen

Satz (B., Lange, Wardetzky, 2011)

Sei f eine Pseudo-Morse-Funktion auf einer Fläche.

Für jedes $\delta > 0$ existiert eine Funktion f_δ mit den Eigenschaften:

- ▶ $\|f_\delta - f\|_\infty \leq \delta$.

Optimale topologische δ -Vereinfachungen

Satz (B., Lange, Wardetzky, 2011)

Sei f eine Pseudo-Morse-Funktion auf einer Fläche.

Für jedes $\delta > 0$ existiert eine Funktion f_δ mit den Eigenschaften:

- ▶ $\|f_\delta - f\|_\infty \leq \delta$.
- ▶ Alle kritischen Punkte von f mit Persistenz $\leq 2\delta$ sind ausgelöscht.

Optimale topologische δ -Vereinfachungen

Satz (B., Lange, Wardetzky, 2011)

Sei f eine Pseudo-Morse-Funktion auf einer Fläche.

Für jedes $\delta > 0$ existiert eine Funktion f_δ mit den Eigenschaften:

- ▶ $\|f_\delta - f\|_\infty \leq \delta$.
- ▶ Alle kritischen Punkte von f mit Persistenz $\leq 2\delta$ sind ausgelöscht.

Die Anzahl kritischer Punkte von f_δ ist also optimal.

Auslöschen von Persistenz-Paaren

Satz (B., Lange, Wardetzky, 2011)

Ein Persistenz-Paar (σ, τ) einer diskreten Morse-Funktion auf einer Fläche kann ausgelöscht werden, nachdem alle Persistenz-Paare $(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ mit

$$f(\sigma) < f(\tilde{\sigma}) < f(\tilde{\tau}) < f(\tau)$$

ausgelöscht worden sind.

Auslöschen von Persistenz-Paaren

Satz (B., Lange, Wardetzky, 2011)

Ein Persistenz-Paar (σ, τ) einer diskreten Morse-Funktion auf einer Fläche kann ausgelöscht werden, nachdem alle Persistenz-Paare $(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ mit

$$f(\sigma) < f(\tilde{\sigma}) < f(\tilde{\tau}) < f(\tau)$$

ausgelöscht worden sind.

Insbesondere ist es möglich, genau die Persistenz-Paare mit Persistenz $\leq 2\delta$ auszulöschen.

Auslöschen von Persistenz-Paaren

Satz (B., Lange, Wardetzky, 2011)

Ein Persistenz-Paar (σ, τ) einer diskreten Morse-Funktion auf einer Fläche kann ausgelöscht werden, nachdem alle Persistenz-Paare $(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ mit

$$f(\sigma) < f(\tilde{\sigma}) < f(\tilde{\tau}) < f(\tau)$$

ausgelöscht worden sind.

Insbesondere ist es möglich, genau die Persistenz-Paare mit Persistenz $\leq 2\delta$ auszulöschen.

Beweis benutzt Dualitätssätze für persistente Homologie

Auslöschen von Persistenz-Paaren

Satz (B., Lange, Wardetzky, 2011)

Ein Persistenz-Paar (σ, τ) einer diskreten Morse-Funktion auf einer Fläche kann ausgelöscht werden, nachdem alle Persistenz-Paare $(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ mit

$$f(\sigma) < f(\tilde{\sigma}) < f(\tilde{\tau}) < f(\tau)$$

ausgelöscht worden sind.

Insbesondere ist es möglich, genau die Persistenz-Paare mit Persistenz $\leq 2\delta$ auszulöschen.

Beweis benutzt Dualitätssätze für persistente Homologie

Gilt nicht in höheren Dimensionen!

Auslöschen von Persistenz-Paaren

Satz (B., Lange, Wardetzky, 2011)

Ein Persistenz-Paar (σ, τ) einer diskreten Morse-Funktion auf einer Fläche kann ausgelöscht werden, nachdem alle Persistenz-Paare $(\tilde{\sigma}, \tilde{\tau})$ mit

$$f(\sigma) < f(\tilde{\sigma}) < f(\tilde{\tau}) < f(\tau)$$

ausgelöscht worden sind.

Insbesondere ist es möglich, genau die Persistenz-Paare mit Persistenz $\leq 2\delta$ auszulöschen.

Beweis benutzt Dualitätssätze für persistente Homologie

Gilt nicht in höheren Dimensionen!

Zum Beweis der Toleranzbedingung

Lemma

Sei V_i ein Gradientenfeld auf einer Fläche, das durch verschachtelte Auslöschung von Persistenz-Paaren entstanden ist. Sei (σ, τ) ein verbleibendes Persistenz-Paar. Dann gilt:

Zum Beweis der Toleranzbedingung

Lemma

Sei V_i ein Gradientenfeld auf einer Fläche, das durch verschachtelte Auslöschung von Persistenz-Paaren entstanden ist. Sei (σ, τ) ein verbleibendes Persistenz-Paar. Dann gilt:

- ▶ Wenn $\rho \succeq_{V_i} \sigma$, dann $f(\rho) \geq f(\sigma)$, und
- ▶ wenn $\rho \preceq_{V_i} \tau$, dann $f(\rho) \leq f(\tau)$.

Die aufsteigende Menge von σ (absteigende Menge von τ) im veränderten Gradientenfeld V_i ist also konsistent mit der ursprünglichen Funktion f !

Zum Beweis der Toleranzbedingung

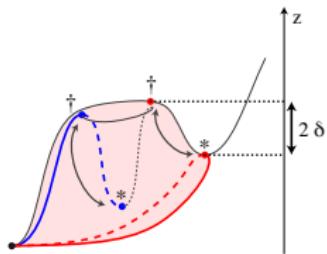
Lemma

Sei V_i ein Gradientenfeld auf einer Fläche, das durch verschachtelte Auslöschung von Persistenz-Paaren entstanden ist. Sei (σ, τ) ein verbleibendes Persistenz-Paar. Dann gilt:

- ▶ Wenn $\rho \succeq_{V_i} \sigma$, dann $f(\rho) \geq f(\sigma)$, und
- ▶ wenn $\rho \preceq_{V_i} \tau$, dann $f(\rho) \leq f(\tau)$.

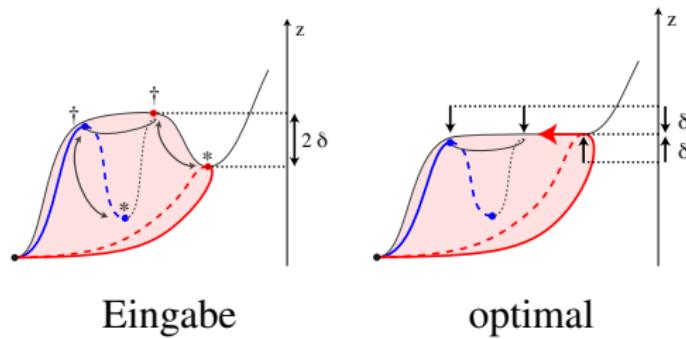
Die aufsteigende Menge von σ (absteigende Menge von τ) im veränderten Gradientenfeld V_i ist also konsistent mit der ursprünglichen Funktion f !

Nebenwirkungen einer Auslöschung



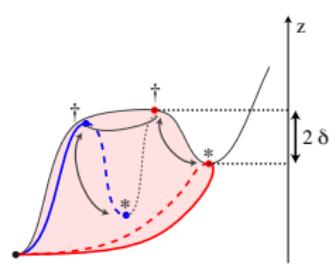
Eingabe

Nebenwirkungen einer Auslöschung

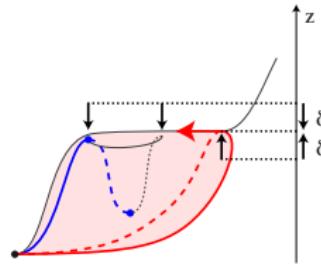


Auslöschen kann andere kritische Werte beeinflussen!

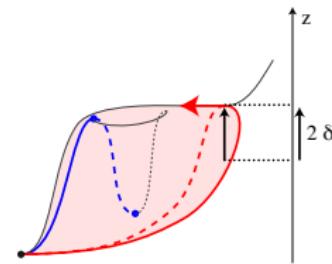
Nebenwirkungen einer Auslöschung



Eingabe



optimal



[Edelsbrunner et al. 2006,
Attali et al. 2009]

Auslöschen kann andere kritische Werte beeinflussen!

Ein effizienter Algorithmus

Eine vereinfachte Funktion f_δ kann effizient berechnet werden:

Ein effizienter Algorithmus

Eine vereinfachte Funktion f_δ kann effizient berechnet werden:

- ▶ Persistenzpaare berechnen: $O(n \log(n))$
(Variante von Kruskals Spannbaum-Algorithmus)

Ein effizienter Algorithmus

Eine vereinfachte Funktion f_δ kann effizient berechnet werden:

- ▶ Persistenzpaare berechnen: $O(n \log(n))$
(Variante von Kruskals Spannbaum-Algorithmus)
- ▶ Vereinfachtes Vektorfeld V_δ berechnen: $O(n)$
(Tiefensuche)

Ein effizienter Algorithmus

Eine vereinfachte Funktion f_δ kann effizient berechnet werden:

- ▶ Persistenzpaare berechnen: $O(n \log(n))$
(Variante von Kruskals Spannbaum-Algorithmus)
- ▶ Vereinfachtes Vektorfeld V_δ berechnen: $O(n)$
(Tiefensuche)
- ▶ Vereinfachte Funktion berechnen: $O(n)$
(lineare Erweiterung der Halbordnung \prec_{V_δ} mittels
Tiefensuche)

Kombination mit Energie-Methoden

Erinnerung: vereinfachtes Vektorfeld V_δ erzwingt
Ungleichungen auf der vereinfachten Funktion f_δ

Kombination mit Energie-Methoden

Erinnerung: vereinfachtes Vektorfeld V_δ erzwingt
Ungleichungen auf der vereinfachten Funktion f_δ
 $\|f_\delta - f\|_\infty \leq \delta$: ebenfalls lineare Ungleichungen

Kombination mit Energie-Methoden

Erinnerung: vereinfachtes Vektorfeld V_δ erzwingt
Ungleichungen auf der vereinfachten Funktion f_δ
 $\|f_\delta - f\|_\infty \leq \delta$: ebenfalls lineare Ungleichungen

- ▶ V_δ und δ definieren ein konvexes Polytop möglicher Lösungen

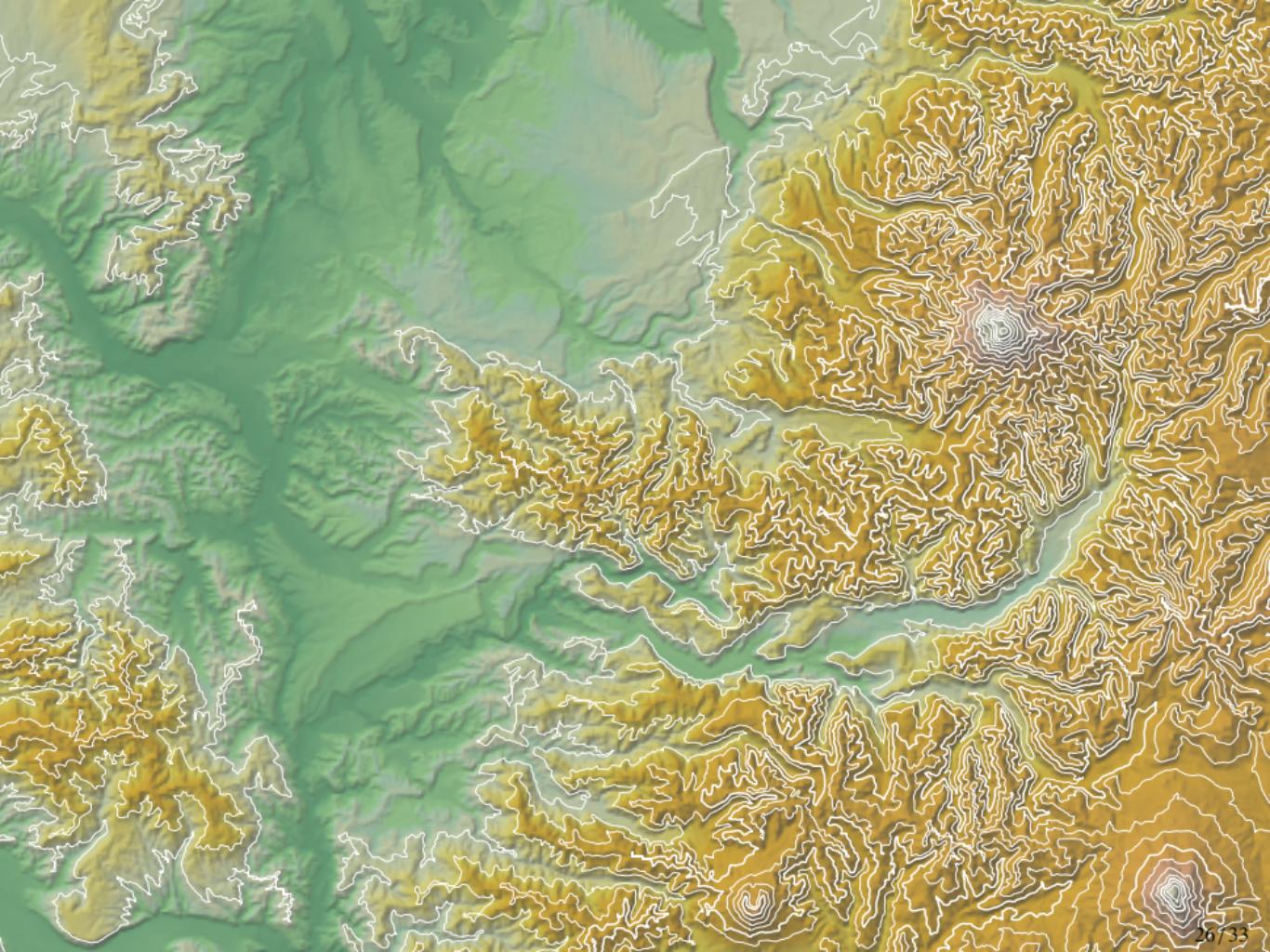
Kombination mit Energie-Methoden

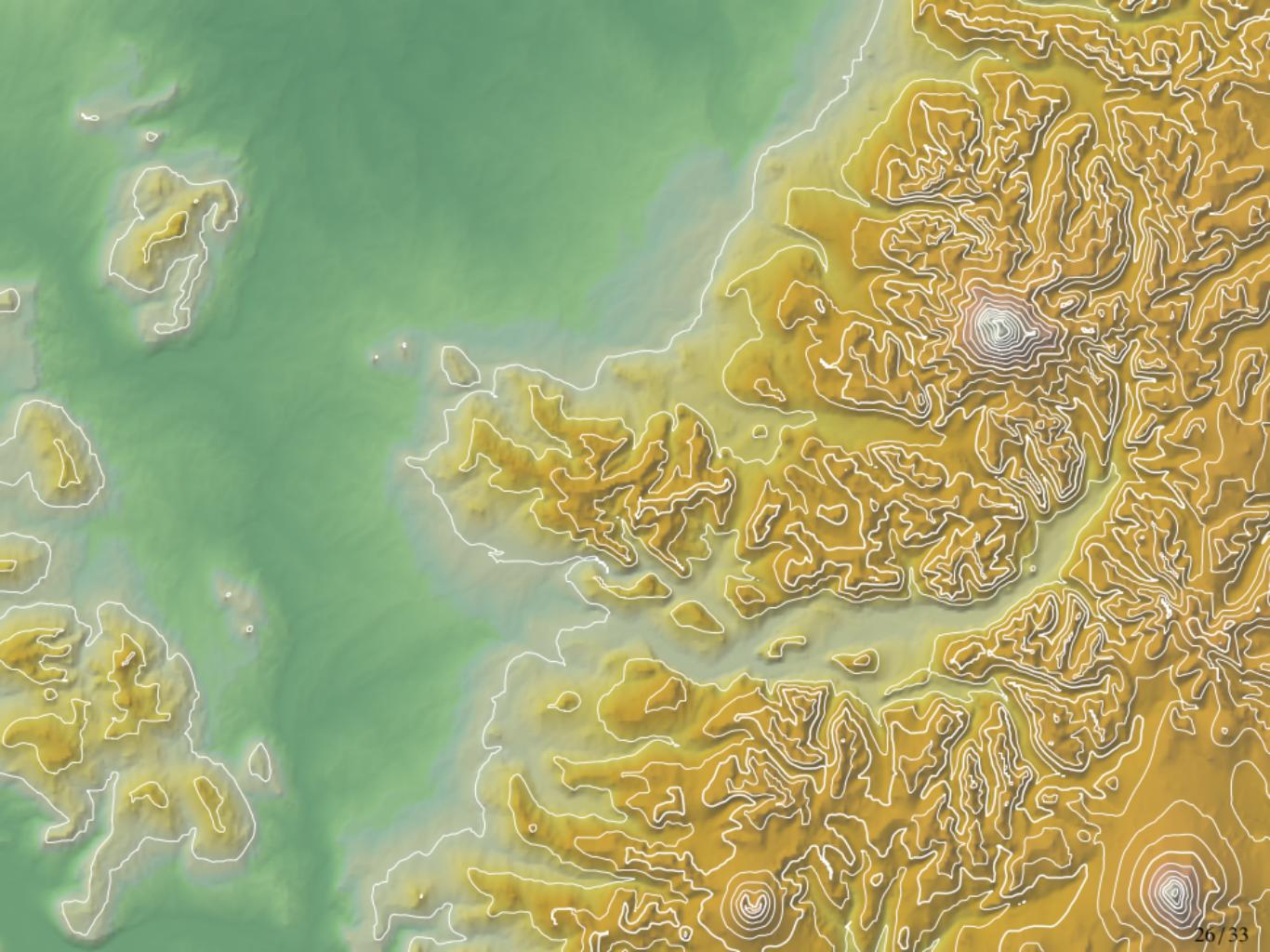
Erinnerung: vereinfachtes Vektorfeld V_δ erzwingt
Ungleichungen auf der vereinfachten Funktion f_δ
 $\|f_\delta - f\|_\infty \leq \delta$: ebenfalls lineare Ungleichungen

- ▶ V_δ und δ definieren ein konvexes Polytop möglicher Lösungen
- ▶ wähle die „beste“ Lösung mit Hilfe eines geeigneten Energie-Funktional (konvexe Optimierung)

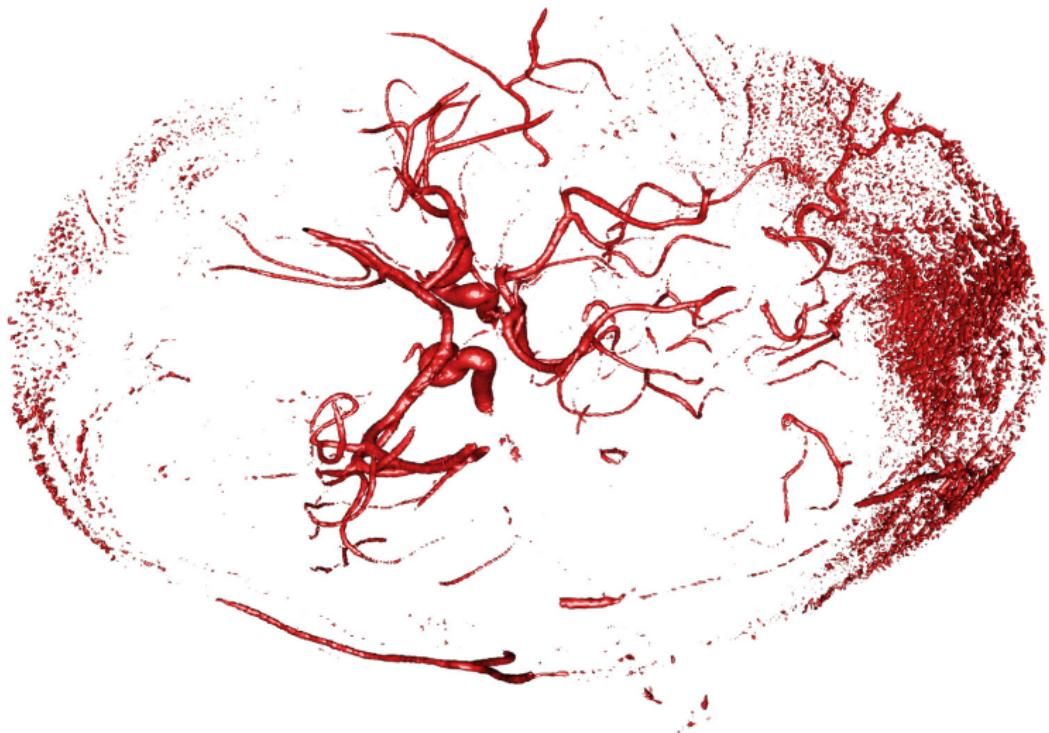


26733

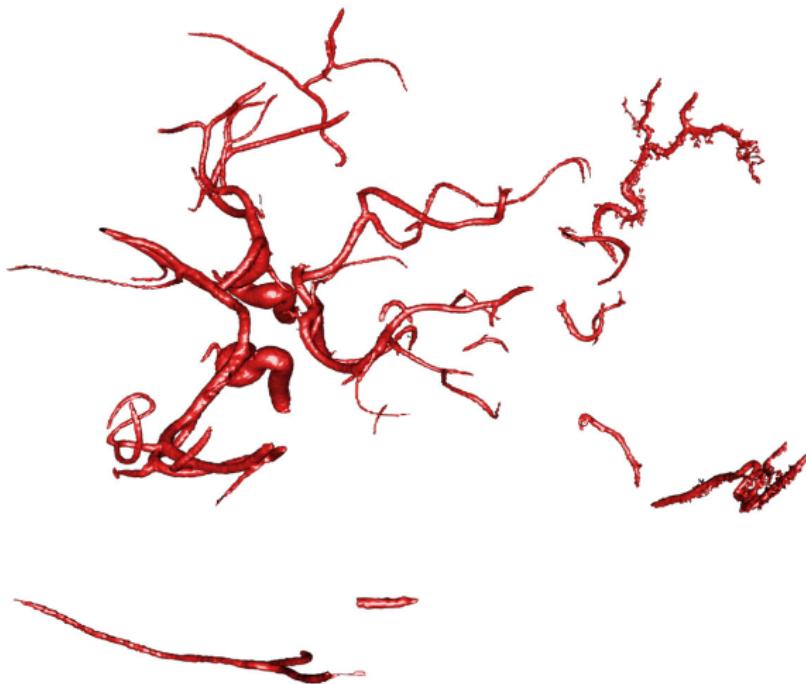




Auslöschen lokaler Extrema in 3D-Daten



Auslöschen lokaler Extrema in 3D-Daten



Erweiterung auf nicht-reguläre Zellkomplexe

Diskrete Morse-Theorie kann auf nicht-reguläre endliche Zellkomplexe ausgedehnt werden

Erweiterung auf nicht-reguläre Zellkomplexe

Diskrete Morse-Theorie kann auf nicht-reguläre endliche Zellkomplexe ausgedehnt werden

- ▶ Bedingung an Gradientenfeld V :

$$V \subset \{(\sigma, \tau) : \sigma \text{ ist } semi\text{-reguläre Facette von } \tau\}$$

Erweiterung auf nicht-reguläre Zellkomplexe

Diskrete Morse-Theorie kann auf nicht-reguläre endliche Zellkomplexe ausgedehnt werden

- ▶ Bedingung an Gradientenfeld V :

$V \subset \{(\sigma, \tau) : \sigma \text{ ist } semi\text{-reguläre Facette von } \tau\}$

(die Verklebeabbildung φ_τ von τ liefert eine Einbettung

$\varphi_\tau^{-1}(\sigma) \rightarrow \sigma$ der *offenen* Zelle σ)

Erweiterung auf nicht-reguläre Zellkomplexe

Diskrete Morse-Theorie kann auf nicht-reguläre endliche Zellkomplexe ausgedehnt werden

- ▶ Bedingung an Gradientenfeld V :

$$V \subset \{(\sigma, \tau) : \sigma \text{ ist } semi\text{-reguläre Facette von } \tau\}$$

(die Verklebeabbildung φ_τ von τ liefert eine Einbettung

$$\varphi_\tau^{-1}(\sigma) \rightarrow \sigma \text{ der } offenen \text{ Zelle } \sigma)$$

Satz (B., 2011)

Sei σ eine semi-reguläre Facette von τ in einem Zellkomplex \mathcal{K} . Wenn keine anderen Zellen an den offenen Zellen σ und τ kleben, dann ist $\mathcal{K} \setminus (\sigma \cup \tau)$ ein Deformationsretrakt von \mathcal{K} .

Erweiterung auf nicht-reguläre Zellkomplexe

Diskrete Morse-Theorie kann auf nicht-reguläre endliche Zellkomplexe ausgedehnt werden

- ▶ Bedingung an Gradientenfeld V :

$V \subset \{(\sigma, \tau) : \sigma \text{ ist } semi\text{-reguläre Facette von } \tau\}$

(die Verklebeabbildung φ_τ von τ liefert eine Einbettung

$\varphi_\tau^{-1}(\sigma) \rightarrow \sigma$ der *offenen* Zelle σ)

Satz (B., 2011)

Sei σ eine semi-reguläre Facette von τ in einem Zellkomplex \mathcal{K} .

Wenn keine anderen Zellen an den offenen Zellen σ und τ

kleben, dann ist $\mathcal{K} \setminus (\sigma \cup \tau)$ ein Deformationsretrakt von \mathcal{K} .

- ▶ Verallgemeinerung eines *elementaren Kollapses*

Erweiterung auf nicht-reguläre Zellkomplexe

Diskrete Morse-Theorie kann auf nicht-reguläre endliche Zellkomplexe ausgedehnt werden

- ▶ Bedingung an Gradientenfeld V :

$$V \subset \{(\sigma, \tau) : \sigma \text{ ist } semi\text{-reguläre Facette von } \tau\}$$

(die Verklebeabbildung φ_τ von τ liefert eine Einbettung

$$\varphi_\tau^{-1}(\sigma) \rightarrow \sigma \text{ der } offenen \text{ Zelle } \sigma)$$

Satz (B., 2011)

Sei σ eine semi-reguläre Facette von τ in einem Zellkomplex \mathcal{K} .

Wenn keine anderen Zellen an den offenen Zellen σ und τ

kleben, dann ist $\mathcal{K} \setminus (\sigma \cup \tau)$ ein Deformationsretrakt von \mathcal{K} .

- ▶ Verallgemeinerung eines elementaren Kollapses
- ▶ Beweis benutzt höher-dimensionalen Satz von Schönflies

Homotopien von Morse-Funktionen

Betrachte *flache* Morse-Funktionen:

- ▶ $(\sigma, \tau) \in V \Rightarrow f(\sigma) = f(\tau)$

Homotopien von Morse-Funktionen

Betrachte *flache* Morse-Funktionen:

- ▶ $(\sigma, \tau) \in V \Rightarrow f(\sigma) = f(\tau)$
- ▶ Abgeschlossen unter Konvexitätskombinationen

Homotopien von Morse-Funktionen

Betrachte *flache* Morse-Funktionen:

- ▶ $(\sigma, \tau) \in V \Rightarrow f(\sigma) = f(\tau)$
- ▶ Abgeschlossen unter Konvexitätsoperationen
- ▶ Jede Morse-Funktion f kann in äquivalente flache Funktion \bar{f} transformiert werden (gleiche Level-Subkomplexe)

Homotopien von Morse-Funktionen

Betrachte *flache* Morse-Funktionen:

- ▶ $(\sigma, \tau) \in V \Rightarrow f(\sigma) = f(\tau)$
- ▶ Abgeschlossen unter Konvexitätsoperationen
- ▶ Jede Morse-Funktion f kann in äquivalente flache Funktion \bar{f} transformiert werden (gleiche Level-Subkomplexe)
- ▶ Es gilt $\|\bar{f} - \bar{g}\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty$

Homotopien von Morse-Funktionen

Betrachte *flache* Morse-Funktionen:

- ▶ $(\sigma, \tau) \in V \Rightarrow f(\sigma) = f(\tau)$
- ▶ Abgeschlossen unter Konvexitätsoperationen
- ▶ Jede Morse-Funktion f kann in äquivalente flache Funktion \bar{f} transformiert werden (gleiche Level-Subkomplexe)
- ▶ Es gilt $\|\bar{f} - \bar{g}\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty$

Konvexitätsoperationen von flachen Morse-Funktionen:

- ▶ Die Morse-Funktion $(1 - t)\bar{f} + t\bar{g}$ ist konsistent zum Gradientenfeld $V_f \cap V_g$ für alle $0 < t < 1$

Homotopien von Morse-Funktionen

Betrachte *flache* Morse-Funktionen:

- ▶ $(\sigma, \tau) \in V \Rightarrow f(\sigma) = f(\tau)$
- ▶ Abgeschlossen unter Konvexitätsoperationen
- ▶ Jede Morse-Funktion f kann in äquivalente flache Funktion \bar{f} transformiert werden (gleiche Level-Subkomplexe)
- ▶ Es gilt $\|\bar{f} - \bar{g}\|_\infty \leq \|f - g\|_\infty$

Konvexitätsoperationen von flachen Morse-Funktionen:

- ▶ Die Morse-Funktion $(1 - t)\bar{f} + t\bar{g}$ ist konsistent zum Gradientenfeld $V_f \cap V_g$ für alle $0 < t < 1$
- ▶ Kann zum Beweis des Stabilitätssatz benutzt werden

Ausblick

- ▶ Zusammenhang zu Entrauschen durch TV-Minimierung

Ausblick

- ▶ Zusammenhang zu Entrauschen durch TV-Minimierung
- ▶ Erweiterung auf höhere Dimensionen

Ausblick

- ▶ Zusammenhang zu Entrauschen durch TV-Minimierung
- ▶ Erweiterung auf höhere Dimensionen
- ▶ Verbindung zu Singularitätentheorie?

Einblick

 U. Bauer.

Persistence in Discrete Morse Theory.

PhD thesis, University of Göttingen, 2011.

 U. Bauer, C. Lange, and M. Wardetzky.

Optimal topological simplification of discrete functions on surfaces.

Discrete and Computational Geometry (online), 2011.

[doi:10.1007/s00454-011-9350-z](https://doi.org/10.1007/s00454-011-9350-z)

 U. Bauer, C.-B. Schönlieb, and M. Wardetzky.

Total variation meets topological persistence: A first encounter.

Proceedings of ICNAAM 2010, 1022–1026.

[doi:10.1063/1.3497795](https://doi.org/10.1063/1.3497795)

Rückblick



R. Forman.

A user's guide to discrete Morse theory.

Sém. Loth. de Combinatoire, B48c:1–35, 2002.



H. Edelsbrunner and J. Harer.

Persistent Homology — a Survey.

Contemporary Mathematics, 453, AMS, 2008.

Danke für die Aufmerksamkeit!

